



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελέτη του Τελεστή Gluino-Gluon
στην Υπερσυμμετρική Θεωρία
Yang-Mills,
με Διαστατική και Πλεγματική
Ομαλοποίηση

Ηρόδοτος Ηροδότου

ΜΑΪΟΣ 2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μελέτη του Τελεστή Gluino-Gluon
στην Υπερσυμμετρική Θεωρία
Yang-Mills,
με Διαστατική και Πλεγματική
Ομαλοποίηση

Ηρόδοτος Ηροδότου

Επιβλέπων Καθηγητής: Χαράλαμπος Παναγόπουλος

Συνεπιβλέπων Καθηγητής: Μάριος Κώστα

Η Ατομική Διπλωματική Εργασία υποβλήθηκε προς μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων απόκτησης του πτυχίου Φυσικής του Τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Κύπρου

ΜΑΪΟΣ 2020

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η Υπερσυμμετρία (SUSY) είναι μια δυνατή επέκταση του Καθιερωμένου Μοντέλου η οποία παρέχει απαντήσεις σε πολλές ανοικτές ερωτήσεις που αφορούν το πρόβλημα της ιεραρχίας, τη σκοτεινή ύλη και τη θεωρία χορδών. Παρ' όλα τα πειράματα υψηλής ενέργειας που γίνονται για δεκαετίες, η Υπερσυμμετρία δεν επαληθεύτηκε. Σίγουρα, η Υπερσυμμετρία πρέπει να παραβιάζεται αυθόρμητα στη φύση για να συμβαδίζει με τη φαινομενολογία. Τέτοιες παραβιάσεις μπορούν να διερευνηθούν αν βασιστούμε σε μη διαταρακτικές μεθόδους, όπως για παράδειγμα η μελέτη θεωριών πεδίων στο πλέγμα. Μέχρι στιγμής, η μελέτη αυτή είναι περιορισμένη λόγω της πολυπλοκότητάς της. Το γεγονός ότι η Υπερσυμμετρία υφίσταται μια επιπρόσθετη, άμεση παραβίαση στο πλέγμα, δημιουργεί προβλήματα σε προσομοιώσεις και σε αριθμητικές μελέτες της αυθόρμητης παραβίασης. Μια σχολαστική διαδικασία επανακανονικοποίησης είναι απαραίτητη για μια ιδανική μελέτη μη διαταρακτικών υπερσυμμετρικών προτύπων. Για τη μελέτη αυτή πρέπει να καθορίσουμε όλους τους συντελεστές μίξης και επανακανονικοποίησης έτσι ώστε να καταλήγουμε στη σωστή θεωρία στο όριο του συνεχούς.

Στην εργασία αυτή, υπολογίζουμε τέτοιους συντελεστές στην υπερσυμμετρική θεωρία Yang-Mills (SYM), μια θεωρία που περιέχει μόνο πεδία βαθμίδος στην οποία υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις φτιαγμένες από πεδία γλουονίων (u_μ) και gluino (λ). Συγκεκριμένα, υπολογίσαμε τον παράγοντα επανακανονικοποίησης του τελεστή Gluino-Gluon και βρήκαμε με ποιους τελεστές κάνει μίξη καθορίζοντας τους συντελεστές μίξης τους. Η διαδικασία αυτή έγινε τόσο στο συνεχές στο σχήμα \overline{MS} όσο και στο πλέγμα υπολογίζοντας τις συναρτήσεις Green δύο σημείων του τελεστή Gluino-Gluon.

Η εργασία αυτή αποτελείται συνολικά από έξι κεφάλαια. Στα πρώτα πέντε κεφάλαια παρουσιάζεται ένα θεωρητικό υπόβαθρο το οποίο χρειάζεται να γνωρίζουμε για να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς για το τελευταίο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εκτενής παρουσίαση εισαγωγικών στοιχείων για τη Θεωρία Κβαντικών Πεδίων και στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η θεωρία αυτή στο συνεχές. Στο τρίτο κεφάλαιο, εισάγεται η έννοια του χωροχρονικού πλέγματος ως ομαλοποιητής στα πλαίσια της Θεωρίας Κβαντικών Πεδίων. Στο τέταρτο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε ένα άλλο γνωστό είδος ομαλοποίησης, τη διαστατική ομαλοποίηση. Το πέμπτο κεφάλαιο αναφέρεται στη Θεωρία της Υπερσυμμετρίας και στην άλγεβρά της. Επίσης, στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται Υπερσυμμετρικές Θεωρίες βαθμωτών πεδίων αλλά και πεδίων βαθμίδος όπως η Supersymmetric Quantum Electrodynamics (SQED) και η Supersymmetric Quantum Chromodynamics (SQCD). Στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι υπολογισμοί που αναφέραμε, καθώς και η διαδικασία που ακολουθήθηκε. Στον επίλογο δίνονται κάποιες δυνατές μελλοντικές προεκτάσεις της

εργασίας. Τέλος, η εργασία κλείνει με τρία παραρτήματα, στα οποία παραπέμπει το κυρίως κείμενο της εργασίας.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, Δρ. Χάρη Παναγόπουλο, για τη συνεχή καθοδήγηση και υποστήριξη που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της μελέτης αυτής.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον μεταδιδακτορικό συνεργάτη του τμήματος Φυσικής, Δρ. Μάριο Κώστα, για την πολύτιμη βοήθειά του σε διάφορα στάδια της εργασίας.

Τέλος, εκφράζω της θερμές μου ευχαριστίες στους γονείς μου, στην οικογένεια μου και στους φίλους μου για τη διαρκή υποστήριξη και συμπαράσταση καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Ευχαριστίες	iii
Κατάλογος Σχημάτων	v
Κατάλογος Πινάκων	vi
1 Εισαγωγικά στοιχεία	1
1.1 Η Έννοια του Πεδίου και η Αναγκαιότητά του	1
1.2 Λαγκρανζιανός Φορμαλισμός	2
1.3 Θεώρημα Noether	3
1.4 Κβάντωση Πεδίων και Ολοκληρώματα Διαδρομής	4
2 Θεωρία Κβαντικών Πεδίων στο Συνεχές	9
2.1 Δράση Klein - Gordon για το Ελεύθερο Βαθμωτό Πεδίο	9
2.2 Δράση Dirac για τα Ελεύθερα Φερμιόνια	10
2.3 Δράση της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (QED) και οι Συναρτήσεις Green του Φωτονικού Πεδίου	12
2.4 Δράση της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής (QCD) και οι Συναρτήσεις Green του Γκλουονικού Πεδίου	18
3 Θεωρία Κβαντικών Πεδίων στο Πλέγμα	24
3.1 Το Πλέγμα στη Θεωρία Κβαντικών Πεδίων και η Αναγκαιότητά του	24
3.2 Ελεύθερο Βαθμωτό Πεδίο Klein - Gordon	26
3.3 Φερμιονικό Πεδίο και Φερμιόνια Wilson	29
3.4 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική στο Πλέγμα	32
3.5 Κβαντική Χρωμοδυναμική στο Πλέγμα	37
4 Διαστατική Ομαλοποίηση	42
4.1 Εισαγωγή	42
4.2 Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD) στις $4 - 2\epsilon$ διαστάσεις	45
5 Υπερσυμμετρία	48
5.1 Εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία και στην Άλγεβρά της	48
5.2 Θεωρία Υπερσυμμετρίας για Βαθμωτά Πεδία	55
5.3 Υπερσυμμετρικές Θεωρίες Βαθμίδας	61

6	Επανακανονικοποίηση και Μίξη του Τελεστή Gluino-Glue στην Υπερσυμμετρική Θεωρία Yang-Mills	67
6.1	Εισαγωγή	67
6.2	Δράση Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills στο Συνεχές	68
6.3	Υποψήφιοι Τελεστές για Μίξη με Τελεστή Gluino-Glue	70
6.4	Αποτελέσματα Διαστατικής Ομαλοποίησης	74
6.5	Τελεστής Gluino-Glue και Δράση Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills στο Πλέγμα	77
6.6	Αποτελέσματα στο Πλέγμα	78
	Επίλογος	83
	Παραρτήματα	84
	A Άλγεβρα SU(N)	84
	B Μεταβλητές Grassmann	86
B.1	Ορισμός	86
B.2	Ομοτιμία Grassmann	87
B.3	Παραγωγή ως προς μεταβλητές Grassmann	87
B.4	Ολοκλήρωση ως προς μεταβλητές Grassmann	88
	Γ Το Γκαουσιανό Ολοκλήρωμα	90
Γ.1	Γκαουσιανό Ολοκλήρωμα Πραγματικών Μεταβλητών	90
Γ.2	Γκαουσιανό Ολοκλήρωμα Μεταβλητών Grassmann	92
	Βιβλιογραφία	95

Κατάλογος Σχημάτων

3.1	Απεικόνιση των συνδέσμων (links) στο πλέγμα	33
3.2	Απεικόνιση της στοιχειώδους πλακέτας (plaquette) στο $\mu\nu$ - επίπεδο	35
6.1	Διαγράμματα Feynman ενός βρόχου (1PI) που συνεισφέρουν στη συνάρτηση Green δύο σημείων του τελεστή Gluino-Glue	73

Κατάλογος Πινάκων

5.1	Υπερσυμμετρικές αναπαραστάσεις για $\mathcal{N}=1$	55
-----	--	----

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά στοιχεία

1.1 Η Έννοια του Πεδίου και η Αναγκαιότητά του

Πεδίο είναι μια φυσική ποσότητα η οποία ορίζεται σε κάθε σημείο του χωροχρόνου. Σε αντίθεση με τα σωματίδια, τα οποία έχουν πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας, τα πεδία $\phi(x)$ έχουν άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας, τουλάχιστον ένα για κάθε σημείο του χώρου.

Ένα κλασικό πεδίο μπορεί να είναι είτε βαθμωτό και κάθε σημείο του χωροχρόνου να συνδέεται με ένα αριθμό όπως για παράδειγμα η θερμοκρασία, είτε διανυσματικό όπως για παράδειγμα το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η έννοια του πεδίου εισάχθηκε πρώτη φορά για να εξηγηθούν οι ηλεκτρομαγνητικές και οι βαρυτικές δυνάμεις μεταξύ των σωματιδίων, σε κλασικό επίπεδο, αφού οι δυνάμεις αυτές δρούσαν εξ αποστάσεως και τα σωματίδια δεν ήταν σε επαφή.

Στην κλασική θεωρία, πεδίο και σωματίδιο είναι δύο εντελώς διαφορετικές έννοιες αλλά στην κβαντική θεωρία μπορεί ένα σωματίδιο να έχει ιδιότητες κύματος και ένα κύμα να έχει ιδιότητες σωματιδίου. Για παράδειγμα, το φωτόνιο μπορεί να περιγραφεί ως κύμα, το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Γενικά κάθε σωματίδιο αποκτά κυματικές ιδιότητες με την εισαγωγή της έννοιας της κυματοσυνάρτησης, η οποία σχετίζεται με την πιθανότητα μέτρησης παρατηρήσιμων μεγεθών, ενώ η ίδια δεν αποτελεί φυσικό μέγεθος.

Η κυματοσυνάρτηση έχει την ικανότητα να περιγράφει μόνο μη σχετικιστικά σωματίδια. Επομένως, για την περιγραφή σχετικιστικών σωματιδίων επανεμφανίζεται το πεδίο με πρόσθετες ιδιότητες από αυτές της κλασικής περιγραφής. Επίσης απαιτείται και κβάντωση αυτών των πεδίων και έτσι οδηγούμαστε στη Θεωρία Κβαντικών Πεδίων, μια θεωρία που συνδυάζει τις αρχές της Κβαντομηχανικής και της Ειδικής Θεωρίας της

Σχετικότητας και μπορεί να περιγράψει τρεις από τις τέσσερις θεμελιώδεις δυνάμεις της Φύσης, την ηλεκτρομαγνητική, την ισχυρή και την ασθενή.

Γιατί όμως χρειάζεται να εισάγουμε την έννοια του πεδίου και να μην μπορούμε να χβαντώσουμε τα σχετικιστικά σωματίδια όπως τα μη σχετικιστικά σωματίδια; Αρχικά, δε μπορούμε να μιλήσουμε για μονοσωματιδιακές καταστάσεις στη σχετικότητα αφού πέρα από καταστάσεις με θετική ενέργεια $E > 0$ εμφανίζονται και καταστάσεις με αρνητική ενέργεια $E < 0$, συμβατές με τη σχέση $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ και έτσι η θεμελιώδης κατάσταση δεν έχει κατώτατο φράγμα. Επομένως, για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, οδηγούμαστε στη μελέτη ενός πολυσωματιδιακού συστήματος, όπου πολλές από τις μονοσωματιδιακές καταστάσεις είναι κατελημμένες σύμφωνα με την αρχή του Pauli. Με τον τρόπο αυτό, η κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας («κενό») είναι αυτή στην οποία όλες οι μονοσωματιδιακές καταστάσεις αρνητικής ενέργειας είναι κατελημμένες. Ταυτόχρονα, αν μια κατάσταση αρνητικής ενέργειας δεν είναι κατελημμένη ερμηνεύεται ως παρουσία αντισωματιδίου. Δημιουργούνται συνεπώς καταστάσεις με πολλά σωματίδια και αντισωματίδια. Με αυτή τη θεωρία όμως μέρος της ενέργειας του συστήματος μπορεί να δημιουργήσει ταυτόχρονα ζεύγος σωματιδίου – αντισωματιδίου από το «κενό». Ακόμη και όταν η ενέργεια του συστήματος δεν είναι αρκετή μπορεί να δημιουργηθεί το ζεύγος αυτών των «εικονικών» σωματιδίων για μικρό χρονικό διάστημα αρκεί να ικανοποιείται η αρχή της αβεβαιότητας $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$. Άρα ο αριθμός των σωματιδίων είναι μεταβλητός στη θεωρία αυτή και έτσι δε μπορούμε να τα περιγράψουμε με κυματοσυναρτήσεις οι οποίες περιγράφουν σταθερό αριθμό σωματιδίων. Επομένως, εισάγουμε τη θεωρία χβαντικών πεδίων που μπορεί να περιγράψει τις καταστάσεις αυτές.

Ένας δεύτερος λόγος αναγκαιότητας της έννοιας του πεδίου είναι η θεμελίωση της σύνδεσης ανάμεσα στο spin και στη στατιστική των σωματιδίων. Η σχέση αυτή μπορεί να αποδειχθεί από το φορμαλισμό της Θεωρίας Κβαντικών Πεδίων. Επίσης, η αναγκαιότητα της έννοιας του πεδίου απορρέει και από επιχειρήματα αιτιότητας. Η χβαντομηχανική περιγραφή σχετικιστικών σωματιδίων παραβιάζει την αρχή της αιτιότητας αλλά η περιγραφή μέσω πεδίων αίρει το πρόβλημα αυτό.

Η Θεωρία Κβαντικών Πεδίων έχει επαληθευθεί πειραματικά με διάφορους τρόπους και με μεγάλη ακρίβεια αφού παρέχει εργαλεία για τον υπολογισμό ενεργών διατομών σχεδιάσεων και χρόνων ζωής των σωματιδίων. Επομένως, η θεωρία απέκτησε φυσικό νόημα.

1.2 Λαγκρανζιανός Φορμαλισμός

Μια σημαντική ποσότητα στη Κβαντική Θεωρία Πεδίων, όπως και στην Κλασική Μηχανική, είναι η δράση S που εκφράζεται ως το χρονικό ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής

L :

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \quad (1.1)$$

όπου \mathcal{L} η Λαγκρανζιανή πυκνότητα, η οποία είναι συνάρτηση ενός ή περισσοτέρων πεδίων $\phi(x)$ και των παραγώγων τους $\partial_\mu \phi$.

Η αρχή της ελάχιστης δράσης επιβάλλει ότι το πεδίο που εξελίσσεται από μια αρχική διάταξη σε μια τελική, έχει τέτοια χωροχρονική εξάρτηση ώστε η δράση να παρουσιάζει ακρότατο. Έτσι,

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ο τελευταίος όρος του πιο πάνω ολοκλήρωματος είναι ολική παράγωγος και υποθέτοντας ότι το πεδίο δε μεταβάλλεται στα σύνορα του συστήματος, ο όρος αυτός γίνεται μηδέν αφού το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στη συνοριακή επιφάνεια της χωροχρονικής περιοχής που καταλαμβάνει το σύστημα. Αφού το ολοκλήρωμα που παρέμεινε πρέπει να είναι μηδέν για αυθαίρετες μεταβολές $\delta \phi$, καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange για τα πεδία:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (1.3)$$

Υπάρχει μια εξίσωση Euler-Lagrange για κάθε πεδίο που περιλαμβάνεται στη Λαγκρανζιανή.

1.3 Θεώρημα Noether

Γνωρίζουμε από την Κλασική Μηχανική ότι όταν οι εξισώσεις κίνησης παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από χωρικές μετατοπίσεις, έχουμε διατήρηση της ορμής. Παρομοίως, αν παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από χρονικές μετατοπίσεις, η ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Επίσης, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται κάτω από μετασχηματισμούς περιστροφής. Τα παραδείγματα αυτά αποτελούν περιπτώσεις ενός πιο γενικευμένου θεωρήματος που ονομάζεται Θεώρημα Noether.

Κάθε συνεχής μετασχηματισμός που αποτελεί συμμετρία μια θεωρίας αντιστοιχεί σε ένα διατηρούμενο ρεύμα.

Ένας μετασχηματισμός πεδίου μπορεί να γραφτεί:

$$\phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) \quad (1.4)$$

και καλείται συμμετρία του συστήματος όταν οι εξισώσεις Euler - Lagrange παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από αυτό το μετασχηματισμό. Οι εξισώσεις αυτές παραμένουν αναλλοίωτες αν ο μετασχηματισμός της Λαγκρανζιανής μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu J^\mu(x) \quad (1.5)$$

όπου J^μ αποτελεί οποιοδήποτε τετραδιάνυσμα.

Αφ' ετέρου, αν το πεδίο $\phi(x)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης τότε, για οποιαδήποτε μεταβολή $\delta\phi(x)$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \\ &= \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi - \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \\ &= \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Έτσι προκύπτει ότι αν ισχύει ταυτόχρονα ότι το $\delta\phi(x)$ αποτελεί συμμετρία και το $\phi(x)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης τότε το ρεύμα $j^\mu(x)$

$$j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \Delta\phi - J^\mu \quad (1.7)$$

ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (1.8)$$

Μια άμεση συνέπεια του πιο πάνω είναι ότι, όπως ισχύει για κάθε διατηρούμενο ρεύμα, το αντίστοιχο φορτίο Q :

$$Q \equiv \int_{all\ space} j^0(x) d^3x \quad (1.9)$$

διατηρείται, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση $dQ/dt = 0$.

1.4 Κβάντωση Πεδίων και Ολοκληρώματα Διαδρομής

Η κβάντωση των κλασικών πεδίων ακολουθεί πιστά την κβάντωση των κλασικών σωματιδίων, που συναντούμε στην Κβαντική Μηχανική. Το μόνο που χρειάζεται να

κάνουμε είναι να μετατρέψουμε τα παρατηρήσιμα μεγέθη και τα πεδία σε ερμιτιανούς τελεστές και να αντικαταστήσουμε τις αγκύλες Poisson με μεταθέτες. Στη θεωρία αυτή, το πεδίο $\phi(x, t)$ παίζει το ρόλο της συντεταγμένης $q(t)$ για κάθε σημείο x του χωροχρόνου, ενώ το ρόλο της συζυγούς ορμής έχει το συζυγές πεδίο $\pi(x)$ και ορίζεται ως

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)}$$

Επίσης εφαρμόζοντας τα πιο πάνω ικανοποιούνται οι εξής σχέσεις στη Θεωρία Κβαντικών Πεδίων

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Οι πιο πάνω μεταθέτες εμπλέκουν τελεστές που ορίζονται στην ίδια χρονική στιγμή (equal - time commutators).

Σημαντική διαφορά μεταξύ Κβαντικής Μηχανικής και Θεωρίας Κβαντικών Πεδίων είναι ότι το πεδίο αποτελεί μια χωροχρονική συνάρτηση, ενώ η συντεταγμένη ενός σωματιδίου είναι μόνο χρονική. Δηλαδή, το πεδίο είναι μια συνεχής συνάρτηση του χώρου, ενώ αντίθετα η συντεταγμένη ενός σωματιδίου ορίζεται σε ένα μόνο σημείο του χώρου. Γι' αυτό και στην περίπτωση του πεδίου, το διακριτό σύστημα αντικαθίσταται από ένα συνεχές σύστημα.

Η Χαμιλτονιανή του συστήματος γίνεται και αυτή τελεστής όντας συνάρτηση του $\phi(x)$ και του $\pi(x)$. Έτσι, το μόνο που απαιτείται για να λυθεί το πρόβλημα είναι να βρούμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής. Παρόλα αυτά, υπάρχουν υπολογισμοί που θα αναλύσουμε στα επόμενα κεφάλαια που η "κανονική" κβάντωση πεδίων μέσω τελεστών και μεταθετών, δεν είναι η ενδεδειγμένη. Συγκεκριμένα, η αναγκαιότητα μελέτης φαινομένων που δεν είναι διαταρακτικής φύσης επιβάλλει μια εναλλακτική (αλλά ισοδύναμη) διαδικασία κβάντωσης μέσω ολοκληρωμάτων διαδρομής ή συναρτησιακών ολοκληρωμάτων τα οποία εισάχθηκαν από τον Feynman το 1948. Αυτή η εναλλακτική κβάντωση χρησιμοποιείται και στη μελέτη κβαντικών πεδίων στο πλέγμα, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια.

Ολοκληρώματα Διαδρομής ή Συναρτησιακά Ολοκληρώματα και Συναρτήσεις Green

Συναρτησιακό ολοκλήρωμα είναι το πολλαπλό ολοκλήρωμα, στο οποίο η ολοκλήρωση δε γίνεται αθροίζοντας μια συνάρτηση $f(x)$ κάτω από ένα συνεχές φάσμα τιμών της μεταβλητής x , όπως γίνεται στο κανονικό ολοκλήρωμα, αλλά αθροίζοντας ένα συναρτησιακό $G[f(x)]$ κάτω από ένα συνεχές φάσμα συναρτήσεων $f(x)$.

$$\int Df G[f] = \int \prod_x df(x) G[f(x)] \quad (1.11)$$

Τέτοια ολοκληρώματα αποτελούν εργαλεία στη Θεωρία Κβαντικών Πεδίων επειδή το κάθε πεδίο εξαρτάται από άπειρους συνεχείς βαθμούς ελευθερίας. Συχνά η συναρτησιακή κβάντωση είναι προτιμότερη από την κανονική κβάντωση και ο κύριος λόγος είναι γιατί στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα δεν εμφανίζεται ο φορμαλισμός των τελεστών και τα πεδία αντιμετωπίζονται ως συναρτήσεις.

Στην κβαντική μηχανική, η χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης $\psi(q, t)$ που περιγράφει το σύστημα δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(q', t') = \int dq G(q', t'; q, t) \psi(q, t) \quad (1.12)$$

όπου

$$G(q', t'; q, t) = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle \quad (1.13)$$

η συνάρτηση Green που περιγράφει τη διάδοση της κυματοσυνάρτησης $\psi(q, t)$ από το σημείο (q, t) στο σημείο (q', t') .

Ο Feynman απέδειξε ότι μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση Green σαν ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα:

$$G(q', t'; q, t) = N \int Dq e^{iS[q]/\hbar} \quad (1.14)$$

Η ποσότητα $\int Dq$ υπονοεί ολοκλήρωμα ως προς όλες τις πιθανές διατάξεις (διαδρομές) που ξεκινούν από την αρχική θέση q μέχρι τη τελική θέση q' . Το N είναι ο κατάλληλος παράγοντας κανονικοποίησης.

$$Dq \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n dq(t_i) \quad (1.15)$$

t_i είναι μια διαδοχή χρονικών σημείων ανάμεσα στην αρχική και τελική χρονική στιγμή t και t' .

Στη Θεωρία Κβαντικών Πεδίων ορίζουμε τη συνάρτηση Green ως:

$$G(x, y, \dots) = \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) \dots | \Omega \rangle \quad (1.16)$$

όπου το $|\Omega\rangle$ είναι η θεμελιώδης κατάσταση ή η κατάσταση κενού του συστήματος και το σύμβολο T υποδηλώνει διάταξη των πεδίων με αντίστροφη χρονολογική σειρά.

Η απλούστερη συνάρτηση Green, που περιέχει γινόμενο δύο πεδίων, έχει τη φυσική σημασία του διαδότη που εξελίσσεται από μια αρχική διάταξη σε μια τελική. Αντίθετα, συναρτήσεις Green υψηλότερων όρων δεν έχουν κάποια άμεση φυσική σημασία. Παρ' όλα αυτά, οι συναρτήσεις αυτές περιέχουν όλες τις φυσικές πληροφορίες του συστήματος.

Όπως αναφέραμε, η κβάντωση μιας θεωρίας πεδίου μπορεί να γίνει μέσω συναρτησιακών ολοκληρωμάτων. Έτσι τα παρατηρήσιμα μεγέθη μιας θεωρίας, τα οποία αντιστοιχούν σε συναρτήσεις Green μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

$$G(x, y, \dots) = \frac{\int D\phi \phi(x)\phi(y) \dots e^{iS[\phi]/\hbar}}{\int D\phi e^{iS[\phi]/\hbar}} \quad (1.17)$$

όπου $\int D\phi$ είναι το άθροισμα όλων των πιθανών διατάξεων του $\phi(x)$.

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων Green γίνεται πιο εύκολα αν μεταφερθούμε από το χωρόχρονο Minkowski στον Ευκλείδειο χώρο. Αυτό πετυχαίνεται με την αναλυτική συνέχεια σε φανταστικούς χρόνους $x^0 \rightarrow -ix^4$, $y^0 \rightarrow -iy^4$. Τότε, η εξίσωση (1.17) μετατρέπεται στη μορφή:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \dots \rangle = \frac{\int D\phi \phi(x)\phi(y) \dots e^{-S_E[\phi]/\hbar}}{\int D\phi e^{-S_E[\phi]/\hbar}} \quad (1.18)$$

όπου $S_E[\phi]$ είναι η δράση στον Ευκλείδειο χώρο για το πεδίο. Το Ευκλείδειο συναρτησιακό ολοκλήρωμα επιδέχεται υπολογισμό και μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων σε αντίθεση με το ολοκλήρωμα στο χωρόχρονο Minkowski όπου η ταλαντωτική συμπεριφορά του εκθετικού οδηγεί σε αριθμητικό σφάλμα το οποίο τυπικά είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από το σήμα.

Η εξίσωση (1.18) αναφέρεται σε συναρτήσεις Green που αφορούν μποζονικά πεδία. Ακολουθώντας αντίστοιχη μεθοδολογία με αυτή των μποζονικών πεδίων βρίσκουμε ότι η έκφραση που αναφέρεται σε συναρτήσεις Green φερμιονικών πεδίων είναι:

$$\langle \psi_\alpha(x) \dots \bar{\psi}_\beta(y) \dots \rangle = \frac{\int D\bar{\psi}D\psi (\psi_\alpha(x) \dots \bar{\psi}_\beta(y) \dots) e^{-S_E[\psi, \bar{\psi}]}}{\int D\bar{\psi}D\psi e^{-S_E[\psi, \bar{\psi}]}} \quad (1.19)$$

όπου ψ και $\bar{\psi}$ είναι συζυγή φερμιονικά πεδία και $S_E[\psi, \bar{\psi}]$ η αντίστοιχη δράση στον Ευκλείδειο χώρο. Η σωστή απόδοση της αντιμεταθετικής φύσης των φερμιονίων έχει ως αποτέλεσμα ότι οι μεταβλητές ολοκλήρωσης στην πιο πάνω σχέση δεν παίρνουν συνήθεις αριθμητικές τιμές, αλλά είναι αντιμετατιθέμενες μεταβλητές Grassmann. Περιγραφή των μεταβλητών αυτών παρατίθεται στο Παράρτημα Β.

Σημειώνουμε ότι εάν μελετούμε ελεύθερα σωματίδια, τότε η δράση είναι ένα τετραγωνικό συναρτησιακό των πεδίων, και συνεπώς το συναρτησιακό ολοκλήρωμα είναι Γκαουσιανό και μπορεί να υπολογιστεί επακριβώς (βλέπε παραδείγματα στο βιβλίο του Feynman και

Hibbs). Για αλληλεπιδρώντα σωματίδια, η δράση περιέχει και όρους μεγαλύτερης τάξης από δεύτερη και ο υπολογισμός σε κλειστή μορφή είναι σχεδόν πάντα αδύνατος.

Η διαταραχτική διαδικασία υπολογισμού συναρτήσεων Green, όπως οι (1.18) και (1.19), ξεκινά με το ανάπτυγμα Taylor των μη-τετραγωνικών όρων στο εκθετικό της δράσης. Προκύπτει έτσι ένα άθροισμα απείρων όρων, καθένας από τους οποίους έχει Γκαουσιανή μορφή, πολλαπλασιασμένη με ένα πολυώνυμο των πεδίων. Μια πολύ χρήσιμη συνθετική αναπαράσταση των όρων αυτών γίνεται με χρήση των διαγραμμάτων Feynman.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία Κβαντικών Πεδίων στο Συνεχές

2.1 Δράση Klein - Gordon για το Ελεύθερο Βαθμωτό Πεδίο

Η εξίσωση Klein – Gordon (σε μονάδες όπου $\hbar = c = 1$) περιγράφει ένα πραγματικό ελεύθερο πεδίο και είναι η ακόλουθη:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0 \quad (2.1)$$

όπου $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ είναι ο τελεστής d'Alembert και m η μάζα του σωματιδίου με spin ίσο με μηδέν.

Η εξίσωση αυτή προέκυψε αντικαθιστώντας στη σχετικιστική σχέση $E^2 = p^2 + m^2$ τον τελεστή ενέργειας και ορμής. Κατ' ανάλογο τρόπο και η εξίσωση Schrödinger προέκυψε αντικαθιστώντας στην εξίσωση $E = p^2/2m$ τους τελεστές αυτούς.

Αρχικά, η εξίσωση Klein – Gordon αποτελούσε τη σχετικιστική διόρθωση της εξίσωσης Schrödinger με $\phi(x)$ να εκφράζει την κυματοσυνάρτηση ενός σχετικιστικού σωματιδίου. Η θεωρία αυτή απορρίφθηκε αφού είναι διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο και απαιτεί δεύτερη αρχική συνθήκη για την πλήρη περιγραφή του συστήματος. Επίσης, η εξίσωση αυτή έχει αρνητικές ενέργειες χωρίς κατώτατο φράγμα και αρνητικές πυκνότητες πιθανότητας. Παρ' όλα αυτά, η εξίσωση αυτή επανερμηνεύθηκε σε μια πολυσωματιδιακή θεωρία ενός κλασικού ελεύθερου πραγματικού βαθμωτού πεδίου.

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του βαθμωτού πεδίου έχει την εξής μορφή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.2)$$

αφού η εξίσωση Euler - Lagrange της Λαγκρανζιανής αυτής δίνει την επιθυμητή εξίσωση Klein - Gordon. Η αντίστοιχη δράση είναι:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (\square + m^2) \phi(x) \quad (2.3)$$

Η Ευκλείδεια δράση είναι η εξής:

$$S_E[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (-\square + m^2) \phi(x) \quad (2.4)$$

Ο υπολογισμός του διαδότη για το πεδίο Klein-Gordon, που εξάγεται από τη σχέση (1.18) χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια δράση (2.4), είναι:

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 + m^2} \quad (2.5)$$

2.2 Δράση Dirac για τα Ελεύθερα Φερμιόνια

Στη Θεωρία Κβαντικών Πεδίων το φερμιονικό πεδίο είναι το πεδίο το οποίο έχει σαν χβάντα φερμιόνια. Ένα παράδειγμα φερμιονικού πεδίου είναι το πεδίο Dirac που περιγράφει φερμιόνια με σπιν 1/2. Η ελεύθερη εξίσωση Dirac που περιγράφει το σπινωριακό πεδίο των ελεύθερων φερμιονίων είναι η ακόλουθη:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (2.6)$$

όπου γ^μ οι πίνακες Dirac 4 x 4 που ικανοποιούν την εξής αντιμεταθετική σχέση:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.7)$$

Όπως αναφέραμε η εξίσωση Klein - Gordon είχε διάφορα προβλήματα στα πλαίσια μιας θεωρίας κβαντικού σωματιδίου. Επομένως, η εξίσωση Dirac προήλθε από την προσπάθεια βελτίωσης της εξίσωσης Klein - Gordon. Διόρθωσε το πρόβλημα της απαίτησης των δύο αρχικών συνθηκών αφού είναι διαφορετική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς το χρόνο. Επίσης η εξίσωση Dirac έχει θετικές πυκνότητες πιθανότητας σε αντίθεση με την εξίσωση Klein - Gordon. Όμως, απορρίφθηκε και αυτή η εξίσωση αφού εμφανίζονταν και πάλι αρνητικές ενέργειες χωρίς κατώτατο φράγμα. Παρ' όλα αυτά επέζησε κι αυτή ως θεωρία κλασικού

πεδίου χρησιμοποιώντας την πολυσωματιδιακή ερμηνεία των καταστάσεων, με τη θεμελιώδη κατάσταση να έχει πλήρως συμπληρωμένες (με τρόπο συμβατό προς την αρχή του Pauli) τις αρνητικές ενεργειακές στάθμες (θάλασσα Dirac). Άμεση απόρροια αυτής της ερμηνείας ήταν και η εισαγωγή των αντισωματιδίων ως καταστάσεις όπου μια στάθμη αρνητικής ενέργειας παραμένει κενή.

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του φερμιονικού πεδίου έχει την εξής μορφή:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \quad (2.8)$$

όπου $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ είναι το συζυγές πεδίο του $\psi(x)$. Όντως, η εξίσωση Euler - Lagrange της Λαγκρανζιανής αυτής δίνει την επιθυμητή εξίσωση Dirac για το πεδίο $\psi(x)$.

Η αντίστοιχη δράση του πεδίου Dirac στο χωρόχρονο Minkowski είναι:

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) \quad (2.9)$$

Στην περίπτωση αυτή το πεδίο $\psi(x)$ δεν είναι βαθμωτό, αλλά ένα σπινωριακό πεδίο τεσσάρων συνιστωσών ψ_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι φερμιονικά πεδία όπως τα quarks χαρακτηρίζονται, πέρα από το σπινωριακό δείκτη i , και από επιπρόσθετους δείκτες χρώματος και γεύσεις. Σ' αυτή την περίπτωση ο ορισμός της δράσης ενέχει άθροισμα ως προς τους δείκτες αυτούς.

Αγνοώντας τους παράγοντες κανονικοποίησης, η εξίσωση Dirac έχει τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= e^{-imc^2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(2)} &= e^{-imc^2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi^{(3)} &= e^{+imc^2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(4)} &= e^{+imc^2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Η δράση στον Ευκλείδειο χώρο παίρνει τη μορφή:

$$S^E = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu^E\partial_\mu + m)\psi(x) \quad (2.11)$$

όπου οι Ευκλείδειοι πίνακες γ^E ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned}\gamma_4^E &= \gamma^0 \\ \gamma_i^E &= -i\gamma^i\end{aligned}\tag{2.12}$$

και:

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}\tag{2.13}$$

2.3 Δράση της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής (QED) και οι Συναρτήσεις Green του Φωτονικού Πεδίου

Κβαντική Ηλεκτροδυναμική (QED) είναι η θεωρία που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις των ηλεκτρονίων μέσω ανταλλαγής φωτονίων. Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν τη θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού είναι οι εξισώσεις του Maxwell. Χρησιμοποιώντας σχετικιστικό συμβολισμό, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφούν ως:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu\tag{2.14}$$

όπου $F^{\mu\nu}$ ο ταυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}\tag{2.15}$$

ο οποίος μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του δυναμικού A_μ ως

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\tag{2.16}$$

και J^ν το ρεύμα - πηγή του πεδίου.

Η δράση της QED αποτελείται από δύο μέρη: τη δράση των φωτονίων και τη δράση των ηλεκτρονίων, όπου η κάθε μια δράση πρέπει ξεχωριστά να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους εξής τοπικούς μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow e^{i\Lambda(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{-i\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)\end{aligned}\tag{2.17}$$

$\Lambda(x)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση στο χωρόχρονο και

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \quad (2.18)$$

όπου e το ηλεκτρικό φορτίο.

Ας ξεκινήσουμε από τη δράση των ελεύθερων ηλεκτρονίων. Αφού τα ηλεκτρόνια είναι φερμιόνια θα έχουν τη δράση της εξίσωσης (2.9):

$$S_{electrons} = \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \quad (2.19)$$

Η δράση αυτή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από ολικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας όταν δηλαδή η συνάρτηση Λ είναι ανεξάρτητη του x . Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, δηλαδή όταν η συνάρτηση Λ εξαρτάται από το x , αφού παρεμβάλλεται ένας επιπλέον όρος $\partial_\mu \Lambda(x)$. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό, αντικαθιστούμε την κανονική τετραδιάστατη παράγωγο ∂_μ με τη συναλλοίωτη παράγωγο D_μ , η οποία ορίζεται ως:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.20)$$

Η νέα αυτή παράγωγος περιλαμβάνει το φωτονικό πεδίο A_μ δίνοντας έτσι όρο σύζευξης του φωτονικού πεδίου με το πεδίο των ηλεκτρονίων. Έτσι η καινούργια δράση των ηλεκτρονίων που παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας (2.17) και (2.18) είναι:

$$S_{electrons} = \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi(x) \quad (2.21)$$

Τώρα πρέπει να κατασκευάσουμε τη δράση των φωτονίων. Η δράση για ελεύθερα φωτόνια είναι ήδη αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, συνεπώς σε μια απόπειρα "ελάχιστης" σύζευξης με τα ηλεκτρόνια δεν επιβάλλεται περαιτέρω όρος σύζευξης από αυτόν που έχει ήδη συμπεριληφθεί στη δράση των ηλεκτρονίων. Επομένως, η δράση των φωτονίων θα είναι η έκφραση:

$$S_{photons} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.22)$$

η οποία συμπίπτει με τη κλασική δράση Maxwell για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Όντως η πιο πάνω δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας των εξισώσεων (2.17) και (2.18).

Συμπερασματικά, η ολική δράση της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής είναι:

$$S_{QED} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) \quad (2.23)$$

Αντικαθιστώντας $x^0 \rightarrow -ix_4$ και $A^0 \rightarrow iA_4$, βρίσκουμε τη δράση αυτή στον Ευκλείδειο χώρο:

$$S_{QED}^E = S_{photons}^E + S_{electrons}^E \quad (2.24)$$

όπου

$$S_{photons}^E = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

και

$$S_{electrons}^E = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D_\mu + m)\psi(x) \quad (2.26)$$

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange που προκύπτουν είναι:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (2.27)$$

$$\bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m) = 0 \quad (2.28)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (2.29)$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι ισοδύναμες και αποτελούν την εξίσωση Dirac συζευγμένη με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η τρίτη εξίσωση συμπίπτει με τις εξισώσεις Maxwell, όπου η "πηγή" J^ν είναι το ρεύμα ηλεκτρονίων $e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi$.

Διαδικασία Faddeev - Popov

Η χβάντωση του φωτονικού και γκλουονικού πεδίου αποτελούν τις δυσκολότερες περιπτώσεις χβάντωσης πεδίων λόγω της ανάγκης επιλογής κάποιας συγκεκριμένης βαθμίδας. Έτσι, σκοπός του παρόντος υποκεφαλαίου είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης Green που περιέχει φωτονικά πεδία μέσω συναρτησιακών ολοκληρωμάτων όπου υπάρχει η ελευθερία επιλογής οποιασδήποτε βαθμίδας επιθυμούμε. Αρχικά μελετώντας τη συνάρτηση Green του φωτονικού διαδότη για δύο χωροχρονικά σημεία, θα αντιληφθούμε ότι στην πραγματικότητα αυτός δεν μπορεί να οριστεί. Το πρόβλημα γενικεύεται για τις συναρτήσεις Green φωτονικών πεδίων για N χωροχρονικά σημεία. Έπειτα, θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο που πρότειναν οι Faddeev και Popov, οι οποίοι κατάφεραν με επιτυχία να το αντιμετωπίσουν.

Ο διαδότης του φωτονικού πεδίου είναι:

$$G_{\mu\nu}(x_1 - x_2) \equiv \frac{\int DA[A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)]e^{iS_{ph}(A)}}{\int DAe^{iS_{ph}(A)}} \quad (2.30)$$

όπου $DA = DA^0 DA^1 DA^2 DA^3$. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες και χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier προκύπτει η καινούργια δράση:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Επομένως, από την εξίσωση (2.30) προκύπτει:

$$G_{\mu\nu}(x_1-x_2) = \frac{\int DA [A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)] \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 A_\mu(x_1) K^{\mu\nu}(x_1, x_2) A_\nu(x_2)\right)}{\int DA \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 A_\mu(x_1) K^{\mu\nu}(x_1, x_2) A_\nu(x_2)\right)} \quad (2.32)$$

όπου $K^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \delta(x_1 - x_2) (\partial_\rho \partial^\rho g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)$. Η πιο πάνω έκφραση είναι γραμμένη στον Ευκλείδειο χωρόχρονο.

Έτσι, ο διαδότης είναι ίσος με: $\mathcal{D}_{\mu\nu}^{ph}(x_1 - x_2) = K_{\mu\nu}^{-1}(x_1, x_2)$.

Ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} (g_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) \mathcal{D}_{ph}^{\nu\rho}(x_1 - x_2) &= i \delta_\mu^\rho \delta^{(4)}(x_1 - x_2) \\ (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) \hat{\mathcal{D}}_{ph}^{\nu\rho}(k) &= i \delta_\mu^\rho \end{aligned} \quad (2.33)$$

όπου η δεύτερη σχέση προκύπτει μέσω μετασχηματισμών Fourier.

Η πιο πάνω εξίσωση δεν έχει λύση αφού ο 4×4 πίνακας $-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu$ δεν είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, ο πίνακας αυτός έχει το ιδιοδιάνυσμα k^ν με ιδιοτιμή 0, πράγμα που σημαίνει ότι η ορίζουσα του είναι μηδενική και ο πίνακας μη αντιστρέψιμος. Κατά συνέπεια δεν μπορεί να ορισθεί ο φωτονικός διαδότης. Αυτό ήταν αναμενόμενο από το γεγονός ότι όταν το πεδίο είναι της μορφής $\hat{A}_\nu \propto k_\nu \hat{a}(k)$ στο χώρο των ορμών τότε $A_\nu(x) \propto \partial_\nu a(x)$ στο χώρο των θέσεων δηλαδή το $A_\nu(x)$ είναι απλώς ένας μετασχηματισμός βαθμίδας του μηδενικού πεδίου και συνεπώς έχει μηδενική δράση.

Μπορούμε, επίσης, μέσα από την εισαγωγή της έννοιας του χώρου διατάξεων να αποδείξουμε ότι ο φωτονικός διαδότης δε μπορεί να ορισθεί. Ο χώρος αυτός αντιστοιχεί σε ένα διανυσματικό χώρο συναρτήσεων, όπου το κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο σετ τιμών των τεσσάρων συνιστωσών του πεδίου $A_\mu(x)$ για κάθε σημείο του χωροχρόνου. Επειδή η δράση του φωτονικού πεδίου $A_\mu(x)$ υπακούει στη συμμετρία βαθμίδας, οι διατάξεις που συνδέονται μεταξύ τους με μετασχηματισμούς βαθμίδας, δημιουργούν τις λεγόμενες τροχιές (gauge orbits) οι οποίες είναι επιφάνειες

στον χώρο των διατάξεων που αντιστοιχούν στην ίδια τιμή της δράσης. Έτσι, το διαφορικό ολοκλήρωσης μπορεί να πάρει την εξής μορφή:

$$\mathcal{D}A = \mathcal{D}A_{orbit} \mathcal{D}A_{\substack{\text{configurations} \\ \text{in different} \\ \text{orbits}}} \quad (2.34)$$

Τώρα το ολοκλήρωμα $\int \mathcal{D}A_{orbit} e^{-S_{ph}(A)} = e^{-S_{ph}(A)} \int \mathcal{D}A_{orbit} \rightarrow \infty$ λόγω της άπειρης επιφάνειας, που καταλαμβάνει η κάθε τροχιά στον χώρο διατάξεων. Ακολουθώντας αυτή τη λογική, παρατηρούμε ότι τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής της συνάρτησης Green του φωτονικού διαδότη απειρίζονται. Με ένα βελτιωμένο ορισμό του συναρτησιακού φωτονικού διαδότη όπου περιλαμβάνει μόνο μια φυσική διάταξη από κάθε τροχιά και αποφεύγει την προσμέτρηση των άπειρων φυσικών διατάξεων θα αντιμετωπισθεί το πρόβλημα του αποκλίνοντος συναρτησιακού ολοκληρώματος.

Οι Faddeev και Popov έδωσαν λύση στο πρόβλημα αυτό εισάγοντας στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα συναρτήσεις δέλτα $\delta(G(A))$ μιας βαθμίδας $G(A)$. Επομένως, κατάφεραν να περιορίσουν το συναρτησιακό ολοκλήρωμα του φωτονικού διαδότη μόνο σε διατάξεις από κάθε τροχιά που ικανοποιούν το περιορισμό $G(A) = 0$. Επιλέγοντας τη γενικευμένη βαθμίδα Lorentz $G(A) \equiv \partial^\mu A_\mu - \omega(x)$, όπου $\omega(x)$ είναι μια τυχαία επιλεγμένη συνάρτηση, αποδεικνύεται ότι αν ξεκινήσουμε με κάποια διάταξη $A(x)$ η οποία ανήκει σε κάποια τροχιά στον χώρο των διατάξεων, θα βρεθεί μια ή και περισσότερες συναρτήσεις $\Lambda(x)$, πεπερασμένου αριθμού, για τις οποίες θα ισχύει ότι $G(\tilde{A}) = 0$, όπου το μετασχηματισμένο διάνυσμα $\tilde{A} : \tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x)$ θα ικανοποιεί τον περιορισμό.

Για να μπορούμε να εισαγάγουμε τη συνάρτηση δέλτα στο αρχικό ολοκλήρωμα πρέπει να εισαγάγουμε την εξής ταυτότητα:

$$1 = \int \mathcal{D}\Lambda(x) \delta(G(\tilde{A})) \det\left(\frac{\delta G(\tilde{A})}{\delta \Lambda}\right) \quad (2.35)$$

η οποία αποτελεί συνεχή γενίκευση της ταυτότητας:

$$1 = \int \left(\prod_i d\lambda_i\right) \delta^{(n)}(g(a)) \det\left(\frac{\partial g_i}{\partial \lambda_j}\right) \quad (2.36)$$

στον αριθμητή και παρονομαστή του φωτονικού διαδότη:

$$\frac{\int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\Lambda(x) \delta(G(\tilde{A})) \det(\delta G(\tilde{A})/\delta \Lambda) [A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2) \cdots A_{\mu_N}(x_N)] e^{iS_{ph}(A)}}{\int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\Lambda(x) \delta(G(\tilde{A})) \det(\delta G(\tilde{A})/\delta \Lambda) e^{iS_{ph}(A)}} \quad (2.37)$$

Παρατηρούμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε τη βαθμίδα $G(A) \equiv \partial^\mu A_\mu - \omega(x)$, η ορίζουσα παίρνει τη μορφή:

$$\det\left(\frac{\delta G(\tilde{A})}{\delta \Lambda}\right) = \det\left(\frac{1}{e} \partial^\mu \partial_\mu\right) \quad (2.38)$$

και είναι ανεξάρτητη από το A και από το Λ . Συνεπώς μπορεί να γραφτεί έξω από τα ολοκληρώματα αριθμητή και παρονομαστή και να διαγραφεί. Φυσικά, κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητών ολοκλήρωσης $A_\mu(x) \rightarrow \tilde{A}_\mu(x)$, τα πεδία $A_{\mu_i}(x_i)$ μπορούν να αντικατασταθούν με τα μετασχηματισμένα τους. Η Ιακωβιανή αυτής της αλλαγής μεταβλητών είναι μονάδα, συνεπώς ισχύει $DA = D\tilde{A}$. Τέλος, με αλλαγή της βουβής μεταβλητής $\tilde{A} \rightarrow A$ προκύπτει:

$$\frac{\int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\Lambda \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)) [A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2) \cdots A_{\mu_N}(x_N)] e^{iS_{ph}(A)}}{\int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\Lambda \delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x)) e^{iS_{ph}(A)}} \quad (2.39)$$

Επομένως, πετύχαμε με αυτό το τρόπο η ολοκληρωτέα συνάρτηση να είναι ανεξάρτητη του Λ και άρα μπορεί να γραφεί έξω από το ολοκλήρωμα ως προς Λ , τόσο στον αριθμητή όσο και στον παρονομαστή. Έτσι απαλείφεται και η ολοκλήρωση ως προς Λ . Τώρα, πρέπει να χειριστούμε τη συνάρτηση $\delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x))$ και για να το κάνουμε αυτό πρέπει να εισαγάγουμε την εξής ταυτότητα στο ολοκλήρωμά μας:

$$\Pi_x(\sqrt{i\pi/2\xi}) \int \mathcal{D}\omega(x) e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2(x)}{2\xi}} = 1 \quad (2.40)$$

όπου ξ πεπερασμένη σταθερά. Τώρα, η παρουσία της συνάρτησης $\delta(\partial^\mu A_\mu - \omega(x))$ οδηγεί στην αντικατάσταση $\omega(x) = \partial^\mu A_\mu$ με ταυτόχρονη απαλειφή του συναρτησιακού ολοκληρώματος ως προς ω . Έτσι, έχουμε τελικά για τη γενικότερη μορφή συνάρτησης Green $\langle \mathcal{O}(A) \rangle$ που περιέχει φωτονικά πεδία:

$$\langle \mathcal{O}(A) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) e^{i[S_{ph}(A) + S_{gf}(A)]}}{\int \mathcal{D}A e^{i[S_{ph}(A) + S_{gf}(A)]}} \quad (2.41)$$

όπου η σταθερά $\Pi_x(\sqrt{i\pi/2\xi})$ απαλείφθηκε από αριθμητή και παρονομαστή. Παρατηρούμε ότι προστίθεται στη δράση ακόμη ένας όρος $S_{gf}(A) = -(1/2\xi) \int d^4x (\partial^\mu A_\mu(x))^2$ και ο όρος αυτό ονομάζεται Gauge - Fixing αφού αντιμετωπίζεται το πρόβλημα του απειρισμού του συναρτησιακού ολοκληρώματος σε κάθε τροχιά του χώρου διατάξεων. Στη νέα δράση έχει παραμείνει εξάρτηση από τη σταθερά ξ . Με βάση όμως τη διαδικασία που ακολουθήσαμε γίνεται φανερό ότι οι συναρτήσεις Green για αναλλοίωτες ποσότητες θα καταλήγουν να είναι ανεξάρτητες του ξ . Συνεπώς μπορεί κανείς να επιλέξει αυθαίρετα όποια τιμή του ξ βολεύει περισσότερο για τον υπολογισμό των συναρτήσεων Green. Οι δύο πιο πρακτικές

επιλογές για τον όρο αυτό είναι:

$$\begin{aligned}\xi = 0 & \quad \text{Landau gauge} \\ \xi = 1 & \quad \text{Feynman gauge}\end{aligned}$$

Με αυτό το τρόπο η εξίσωση (Γ.14) μετατρέπεται σε:

$$\left[k^2 g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) k^\mu k^\nu \right] \tilde{D}_{\nu\sigma}^{ph}(p) = -i\delta^\mu_\sigma \quad (2.42)$$

Στον Ευκλείδειο χωρόχρονο το δεξί σκέλος της πιο πάνω εξίσωσης είναι δ_σ^μ και ο φωτονικός διαδότης αποκτά τη μορφή:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{ph}(p) = \frac{1}{k^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (2.43)$$

Στον χωρόχρονο Minkowski η λύση της (2.42) οδηγεί στην έκφραση:

$$\tilde{D}_{\mu\nu}^{ph}(k) = -\frac{i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (2.44)$$

όπου το $i\epsilon$ προστέθηκε στον παρονομαστή για την αποφυγή ύπαρξης πόλων όταν η συνιστώσα k^0 παίρνει τις πραγματικές τιμές $k^0 = \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$.

2.4 Δράση της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής (QCD) και οι Συναρτήσεις Green του Γκλουονικού Πεδίου

Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD) είναι η θεωρία η οποία περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις των quarks μέσω ανταλλαγής γκλουονίων. Τα quarks είναι στοιχειώδη δομικά στοιχεία των πυρήνων και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους πρωτίστως μέσω της ισχυρής πυρηνικής δύναμης. Υπάρχουν έξι διαφορετικές γεύσεις για τα quarks με διαφορετική μάζα: up, down, charm, strange, top και bottom και τρία διαφορετικά είδη χρωματικού φορτίου τα οποία συμβατικά ονομάζονται: κόκκινο, πράσινο και μπλε. Σίγουρα και σε αυτή την περίπτωση η δράση της QCD θα αποτελείται από δύο μέρη: τη δράση των γκλουονίων και τη δράση των quarks, και η κάθε μια δράση θα πρέπει να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας της μη αβελιανής ομάδας SU(3).

Για να ξεκινήσουμε τη μελέτη μας για τη δράση της QCD θα πάρουμε ως πρότυπο τη δράση της QED. Τώρα η θεωρία βαθμίδας μας είναι μη αβελιανή και έτσι το ένα ελεύθερο πεδίο Dirac που είχαμε στη δράση της QED αντικαθίσταται με 3 τέτοια πεδία με ίδια μάζα

αφού τα quarks και antiquarks απαντώνται σε τρία διαφορετικά χρώματα. Έτσι το πεδίο ψ αντικαθίσταται από το διάνυσμα-στήλη 3×1 $\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}$ και το πεδίο $\bar{\psi}$ από το διάνυσμα-γραμμή 1×3 $\bar{\underline{\psi}} = (\bar{\psi}^1 \quad \bar{\psi}^2 \quad \bar{\psi}^3)$. Αντίστοιχα και το γκλουονικό πεδίο μετατρέπεται σε πίνακα 3×3 \underline{A}_μ , ούτως ώστε να μπορέσει να συζευχθεί με δύο αλληλεπιδρώντα quarks. Η δράση των quarks θα πάρει τη μορφή:

$$S_Q = \int d^4x \bar{\underline{\psi}}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\underline{\psi}(x) \quad (2.45)$$

όπου $D_\mu = \partial_\mu + ig\underline{A}_\mu$ και g είναι η σταθερά σύζευξης της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Η δράση αυτή θα είναι αναλλοίωτη κάτω από τους εξής τοπικούς μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x) &\rightarrow \underline{G}(x)\underline{\psi}(x) \\ \bar{\underline{\psi}}(x) &\rightarrow \bar{\underline{\psi}}(x)G^{-1}(x) \\ \underline{A}_\mu(x) &\rightarrow \underline{G}(x)\underline{A}_\mu(x)G^{-1}(x) - \frac{i}{g}\underline{G}(x)\partial_\mu G^{-1}(x) \end{aligned} \quad (2.46)$$

όπου $\underline{G}(x)$ είναι ένα στοιχείο της μη αβελιανής ομάδας $SU(3)$, δηλαδή $\underline{G}(x) = e^{i\Lambda(x)}$ με $\underline{\Lambda}(x)$ ερμιτιανό πίνακα που ανήκει στην άλγεβρα Lie της $SU(3)$. Παρατηρούμε ότι αν η ποσότητα $\underline{G}(x) = e^{i\Lambda(x)}$ είναι πίνακας 1×1 , τότε οι σχέσεις (2.46) μετατρέπονται στις (2.17) και (2.18).

Τώρα πρέπει να κατασκευάσουμε τη δράση των γκλουονίων η οποία περιλαμβάνει σίγουρα ένα κινητικό όρο. Ο όρος σύζευξης γκλουονίων - quarks έχει προστεθεί στη δράση των quarks (2.45). Η δράση των γκλουονίων θα μοιάζει με τη δράση των φωτονίων αλλά θα έχει κάποιες διαφορές. Η πρώτη διαφορά είναι ότι ο τανυστής που συναντούσαμε στη δράση των φωτονίων θα αντικατασταθεί από πίνακα $\underline{F}_{\mu\nu}$ και θα είναι τουλάχιστον συναλλοίωτος κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς της $SU(3)$, δηλαδή $\underline{F}_{\mu\nu} \rightarrow \underline{G}(x)\underline{F}_{\mu\nu}G^{-1}(x)$. Η απλούστερη βαθμωτή ποσότητα, που είναι αναλλοίωτη κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, είναι το ίχνος της ποσότητας $\underline{F}_{\mu\nu}\underline{F}^{\mu\nu}$ και έτσι η γκλουονική δράση μπορεί να κατασκευαστεί από το ίχνος αυτό. Η δεύτερη διαφορά με το φωτονικό πεδίο είναι ο ορισμός του τανυστή $\underline{F}_{\mu\nu}$ που διαφοροποιήθηκε στην εξής μορφή για να αποτελεί ένα συναλλοίωτο τανυστή:

$$\underline{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig[\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu] \quad (2.47)$$

Η ύπαρξη του χρώματος δημιούργησε διαφορετικά είδη γκλουονίων, τα οποία μπορούν να αλληλεπιδράσουν και μεταξύ τους. Επομένως, η δράση των γκλουονίων δεν περιέχει μόνο ένα κινητικό όρο αλλά και όρο αλληλεπίδρασης. Λαμβάνοντας όλα τα πιο πάνω υπόψη, η

γκλουονική δράση παίρνει τη μορφή:

$$S_G = -\frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr}(\underline{F}_{\mu\nu} \underline{F}^{\mu\nu}) \quad (2.48)$$

Αφού ξέρουμε ότι η ποσότητα $-i/g G(x) \partial_\mu G^{-1}(x)$ είναι ερμιτιανός πίνακας με ίχνος μηδέν, τότε καταλαβαίνουμε ότι και το γκλουονικό πεδίο A_μ είναι ερμιτιανός πίνακας με ίχνος μηδέν. Άρα το πεδίο A_μ , ανήκει στην άλγεβρα Lie της SU(3). Επομένως, μπορεί να γραφτεί ως:

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \quad (2.49)$$

όπου $A_\mu^a(x)$ αποτελούν οκτώ διαφορετικά γκλουονικά πεδία που αντιστοιχούν στους οκτώ γεννήτορες λ^a της SU(3). Μια επιλογή για τους γεννήτορες αυτούς είναι οι 3 x 3 πίνακες Gell-Mann. Αντίστοιχα και ο τανυστής $\underline{F}_{\mu\nu}$ ανήκει στην άλγεβρα Lie της SU(3) και μπορεί να γραφτεί ως:

$$\underline{F}_{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^8 F_{\mu\nu}^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \quad (2.50a)$$

όπου

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.50b)$$

Η έκφραση (2.50b) προκύπτει από την αντικατάσταση της (2.49) μέσα στην (2.47) και τις σχέσεις μετάθεσης και ορθογωνιότητας των πινάκων Gell-Mann:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2i \sum_{c=1}^8 f_{abc} \lambda^c \quad (2.51a)$$

$$\operatorname{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta_{ab} \quad (2.51b)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.50a) στην γκλουονική δράση προκύπτει:

$$S_G = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \quad (2.52)$$

που μοιάζει με τη φωτονική δράση.

Συμπερασματικά, η δράση της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής είναι:

$$S_{QCD} = S_G + S_Q = -\frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr}(\underline{F}_{\mu\nu} \underline{F}^{\mu\nu}) + \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi(x) \quad (2.53)$$

Συναρτήσεις Green του Γκλουονικού Πεδίου

Στις γκλουονικές συναρτήσεις Green εμφανίζεται το ίδιο πρόβλημα που εμφανίζεται στον ηλεκτρομαγνητισμό, ο απειρισμός δηλαδή του συναρτησιακού ολοκληρώματος $\int \mathcal{D}A_{orbit} e^{-S_{gl}(A)} = e^{-S_{gl}(A)} \int \mathcal{D}A_{orbit}$, όπου $\mathcal{D}A = \prod_x \prod_{\mu=0}^3 \prod_{a=1}^8 dA_{\mu}^a(x)$ και S_{gl} η γκλουονική δράση. Λόγω του απειρισμού αυτού, λοιπόν, είναι αναγκαία η πρόσθεση ενός gauge fixing όρου, κατ' αντιστοιχία με τον ηλεκτρομαγνητισμό. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, εισάγουμε τη σχέση (2.35) στον αριθμητή και παρονομαστή της γκλουονικής συνάρτησης Green λαμβάνοντας υπόψη τώρα ότι ισχύουν τα εξής:

$$A_{\mu}^{a\Lambda}(x) = A_{\mu}^a(x) + \frac{1}{g} \partial_{\mu} \Lambda^a(x) + f^{abc} A_{\mu}^b(x) \Lambda^c(x) \quad \text{και}$$

$$G(A) = \partial^{\mu} A_{\mu}^a(x) - \omega^a(x)$$

όπου $\omega^a(x)$ να είναι οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση.

Τώρα, σε αυτή τη περίπτωση η ορίζουσα $\det(\delta G(A^{\Lambda})/\delta \Lambda)$ εξαρτάται από το γκλουονικό πεδίο $A_{\mu}^a(x)$, οπότεν δε μπορούμε να ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα με τη φωτονική συνάρτηση Green, καθώς η ορίζουσα δε μπορεί να γραφεί έξω από το ολοκλήρωμα παρονομαστή και αριθμητή και να διαγραφεί.

$$\det\left(\frac{\delta G(A^{\Lambda})}{\delta \Lambda}\right) = \det\left(\frac{\delta(\partial^{\mu} A_{\mu}^{a\Lambda}(x) - \omega^a(x))}{\delta \Lambda^a(x)}\right) \quad (2.54)$$

$$= \frac{1}{g} \det[\partial^{\mu} \partial_{\mu} + g f^{abc} (\partial^{\mu} A_{\mu}^b(x) + A_{\mu}^b(x) \partial^{\mu}) \delta^{ac}]$$

Επομένως, οι Faddeev και Popov για να χειριστούν την ορίζουσα αυτή, την έγραψαν ως συναρτησιακό ολοκλήρωμα ενός νέου σετ από πεδία Grassmann ξέροντας ότι το γκαουσιανό ολοκλήρωμα με μεταβλητές Grassmann δίνει ορίζουσα στη πρώτη δύναμη:

$$\int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \exp\left(-\sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m\right) = \det K \quad (2.55)$$

Άρα,

$$\det\left(\frac{\delta(G(A^{\Lambda}))}{\delta \Lambda}\right) = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp\left[-\int d^4x \bar{c}\left(\frac{\delta(G(A^{\Lambda}))}{\delta \Lambda}\right)c\right] \quad (2.56)$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp\left[i\int d^4x \bar{c}\left(-g\frac{\delta(G(A^{\Lambda}))}{\delta \Lambda}\right)c\right]$$

όπου $\mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c = \prod_{x,y} \prod_{a,b=1}^8 d\bar{c}^b(y) dc^a(x)$ και ο παράγοντας $(-i/g)$ έχει απορροφηθεί στον ορισμό των c και \bar{c} . Άρα, η ορίζουσα εν τέλει γράφεται:

$$\det\left(\frac{\delta(G(A^\Lambda))}{\delta\Lambda}\right) = \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c e^{iS_{FP}(A,\bar{c},c)} \quad (2.57)$$

όπου

$$\begin{aligned} S_{FP}(A,\bar{c},c) &= \int d^4x \bar{c} \left(-g \frac{\delta(G(A^\Lambda))}{\delta\Lambda} \right) c \\ &= \int d^4x \left[\bar{c}^a(x) \left[-\partial^\mu \partial_\mu \delta^{ac} - gf^{abc} (\partial^\mu A_\mu^b(x) + A_\mu^b(x) \partial^\mu) \right] c^c(x) \right] \end{aligned} \quad (2.58)$$

Η δράση αυτή ονομάζεται δράση «Faddeev - Popov» και τα νέα πεδία c και \bar{c} , που εισήχθησαν στη θεωρία μας, ονομάζονται πεδία - φαντάσματα. Ο λόγος του ονόματος αυτού είναι γιατί τα πεδία δεν ανταποκρίνονται σε φυσικά σωματίδια και χρησιμοποιούνται μόνο ως μαθηματικά εργαλεία. Τα πεδία - φαντάσματα έχουν λανθασμένη σχέση μεταξύ σπιν και στατιστικής: εξ ορισμού τα νέα αυτά πεδία θεωρήθηκαν ως μεταβλητές Grassmann, άρα ικανοποιούν αντιμεταθετικές σχέσεις, ωστόσο συμπεριφέρονται σαν βαθμωτά πεδία κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, πράγμα που υποδηλώνεται από το γεγονός ότι δεν έχουν δείκτη Dirac όπως το σπινωριακό φερμιονικό πεδίο. Με την εισαγωγή των πεδίων - φαντασμάτων, η γκλουονική συνάρτηση Green για N χωροχρονικά σημεία μετατρέπεται σε:

$$\begin{aligned} [D^G(x_1, \dots, x_N)]_{\mu_1 \dots \mu_N} &= \\ \frac{\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c [A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots A_{\mu_N}^{a_N}(x_N)] e^{i(S_G(A) + S_{FP}(A,\bar{c},c))} \delta(\partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x))}{\int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A \int \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c e^{i(S_G(A) + S_{FP}(A,\bar{c},c))} \delta(\partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x))} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Ακολουθώντας τους ίδιους χειρισμούς όπως για τα φωτόνια καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$[D^G(x_1, \dots, x_N)]_{\mu_1 \dots \mu_N} = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c [A_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots A_{\mu_N}^{a_N}(x_N)] e^{i(S_G(A) + S_{GF}(A) + S_{FP}(A,\bar{c},c))}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c}\mathcal{D}c e^{i(S_G(A) + S_{GF}(A) + S_{FP}(A,\bar{c},c))}}$$

όπου $S_{GF}(A) = -(1/2\xi) \int d^4x (\partial^\mu A_\mu^a(x))^2$ ο όρος που επιτυγχάνει την αντιμετώπιση του απειρισμού του συναρτησιακού, $S_G(A)$ η γκλουονική δράση και $S_{FP}(A)$ η δράση Faddeev - Popov.

Ας υπολογίσουμε τον γκλουονικό διαδότη δύο σημείων στη χαμηλότερη τάξη της θεωρίας διαταραχών. Στην τάξη αυτή, τα πεδία φαντάσματα δεν συνεισφέρουν.

$$D_{\mu\nu}^G(x_1 - x_2) = \langle A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A [A_\mu^a(x_1) A_\nu^b(x_2)] e^{i(S_G^{(0)}(A) + S_{GF}(A))}}{\int \mathcal{D}A e^{i(S_G^{(0)}(A) + S_{GF}(A))}} \quad (2.60)$$

Οι δράσεις $S_G^{(0)}(A)$ και $S_{GF}(A)$ μπορούν να γραφούν κατ' αντιστοιχία με τις δράσεις του φωτονικού διαδότη, στην παρακάτω μορφή:

$$S_G^{(0)}(A) = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a(x) (\partial_\rho \partial^\rho g^{\mu\nu} \delta^{ab} - \partial^\mu \partial^\nu \delta^{ab}) A_\nu^b(x)$$

και

$$S_{GF}(A) = \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu^a(x) \left(\frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu \delta^{ab} \right) A_\nu^b(x)$$

Ακολουθώντας παρόμοια βήματα, καταλήγουμε:

$$D_{\mu\nu}^G(x_1 - x_2) = \frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right) \quad (2.61)$$

όπου το $i\epsilon$ προστέθηκε στον παρονομαστή για την αποφυγή ύπαρξης πόλων πάνω στον πραγματικό άξονα του k^0 . Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά με το φωτονικό διαδότη είναι ένα επιπλέον Kronecker δέλτα με τους χρωματικούς δείκτες.

Σημειώνουμε ότι ολόκληρη η δράση της QCD στον Ευκλείδειο χώρο είναι:

$$S_{total}^E = \int d^4x \left[\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{c}^a(-\partial^2\delta^{ac} - g\partial^\mu f^{abc}A_\mu^b)c^c \right] \quad (2.62)$$

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Κβαντικών Πεδίων στο Πλέγμα

3.1 Το Πλέγμα στη Θεωρία Κβαντικών Πεδίων και η Αναγκαιότητά του

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το συναρτησιακό ολοκλήρωμα αποτελεί μια καλή και εύκολη μέθοδο να υπολογιστούν οι διαδότες και οι συναρτήσεις Green των πεδίων αλλά πολλές φορές παρουσιάζονται απειρισμοί. Ο λόγος που τα ολοκληρώματα αυτά ενδέχεται να αποκλίνουν είναι επειδή περιέχουν άπειρες μεταβλητές ολοκλήρωσης αφού οι θεωρίες μας περιέχουν άπειρους βαθμούς ελευθερίας. Για να αποκτήσουν, λοιπόν, τα συναρτησιακά ολοκληρώματα καλά ορισμένη έννοια κρίνεται επιτακτική η ανάγκη "ομαλοποίησης" της θεωρίας. Μια βοηθητική ποσότητα για τη διαδικασία αυτή είναι ο ομαλοποιητής και το συναρτησιακό ολοκλήρωμα αποκτά πεπερασμένες τιμές ενόσω ο ομαλοποιητής δεν παίρνει την οριακή του τιμή, δηλαδή την τιμή εκείνη που αντιστοιχεί σε φυσικά αποτελέσματα. Μια από τις μεθόδους ομαλοποίησης είναι η εισαγωγή χωροχρονικού υπερκυβικού πλέγματος, η διακριτοποίηση δηλαδή του χωροχρόνου. Ο ομαλοποιητής μας σε αυτή την περίπτωση είναι η σταθερά a του πλέγματος, δηλαδή η μικρότερη απόσταση ανάμεσα στα διακριτά σημεία του χωροχρόνου.

Η διαδικασία υπολογισμού συναρτήσεων Green στο χωροχρονικό πλέγμα χωρίζεται σε δύο στάδια. Αρχικά, εισάγουμε το χωροχρονικό πλέγμα σταθεράς a στη συνάρτηση Green. Επομένως, τα ολοκληρώματά μας αποκτούν διακριτό αριθμό μεταβλητών ολοκλήρωσης αλλά τα αποτελέσματά τους θα εξαρτώνται από τον ομαλοποιητή a . Το επόμενο βήμα αυτής της διαδικασίας είναι ο υπολογισμός αυτών των συναρτήσεων στο όριο όπου η σταθερά του πλέγματος μηδενίζεται και έτσι επιστρέφουμε στη γνωστή θεωρία του συνεχούς. Όμως

παρατηρούνται και πάλι ανεπιθύμητοι απειρισμοί. Έτσι, για να αποκτήσουν πεπερασμένη τιμή οι συναρτήσεις Green στο όριο του συνεχούς, είναι απαραίτητη η επανακανονικοποίηση της θεωρίας μέσω του επαναπροσδιορισμού των βαθμών ελευθερίας και των παραμέτρων της δράσης ώστε να οδηγούν σε πεπερασμένο όριο. Η απαίτηση αυτή έχει ως συνέπεια οι απογυμνωμένες παράμετροι της θεωρίας, όπως η σταθερά σύζευξης και οι μάζες των σωματιδίων, αλλά και τα ίδια τα πεδία να γίνονται εξαρτημένα από τον ομαλοποιητή a .

Αφού ο υπολογισμός συναρτήσεων Green στο πλέγμα γίνεται συνήθως στο χώρο των ορμών διότι εκεί ο υπολογισμός είναι λιγότερο πολύπλοκος, θα χρειαστούμε τον εξής μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ που είναι ορισμένη σε τετραδιάστατο πλέγμα, δηλαδή με $x = na$ όπου $n \in \mathbb{Z}^4$:

$$f(na) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{f}_a(p) e^{ipna} \quad (3.1)$$

όπου τα όρια του p_μ είναι $[-\pi/a, \pi/a]$ σε ένα συνεχή χώρο των ορμών (ζώνη Brillouin). Αντίστοιχα, μια συνάρτηση $\tilde{f}_a(p)$ ορισμένη στο χώρο Brillouin έχει τον εξής μετασχηματισμό Fourier:

$$\tilde{f}_a(p) = a^4 \sum_{n_\mu=-\infty}^{+\infty} f(na) e^{-ipna} \quad (3.2)$$

αφού έχουμε ένα διακριτό χώρο των θέσεων.

Κατά τον υπολογισμό συναρτήσεων Green στο πλέγμα συναντούμε συχνά τη συνάρτηση δέλτα του Kronecker. Η συνάρτηση αυτή, κατά τη μετάβαση στο χώρο των ορμών, μετατρέπεται σε:

$$\delta_{nm} = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} a^4 e^{ip(n-m)a} \quad (3.3)$$

όπου θέσαμε $f(na) = \delta_{nm}$ και $\tilde{f}_a(p) = a^4 e^{-ipna}$ στις (3.1) - (3.2). Επίσης, θέτοντας $\tilde{f}_a(p) = \delta_P^{(4)}(p)$ στις (3.1) - (3.2) προκύπτει ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δέλτα ορισμένης στο χώρο των ορμών και στην πρώτη ζώνη Brillouin:

$$\delta_P^{(4)}(p) = a^4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ipna} \quad (3.4)$$

Η συνάρτηση αυτή έχει μη μηδενική τιμή στις τιμές της ορμής $p_\mu = 2\pi\ell/a$, όπου $\ell \in \mathbb{Z}$ γι' αυτό και ονομάζεται περιοδική συνάρτηση δέλτα.

3.2 Ελεύθερο Βαθμωτό Πεδίο Klein - Gordon

Η συνάρτηση Green του πεδίου Klein - Gordon για N χωροχρονικά σημεία, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, παίρνει την εξής μορφή στον ευκλείδιο συνεχή χώρο ως:

$$D^{K-G^E}(x_1, \dots, x_N) = \langle \phi^E(x_1) \cdots \phi^E(x_N) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi^E [\phi^E(x_1) \cdots \phi^E(x_N)] e^{-S_{K-G}^E(\phi^E)}}{\int \mathcal{D}\phi^E e^{-S_{K-G}^E(\phi^E)}}$$

όπου $S_{K-G}^E(\phi^E)$ δίνεται από τη σχέση:

$$S_{K-G}^E(\phi^E) = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (-\square + M^2) \phi(x) \quad (3.5)$$

Για να διακριτοποιήσουμε τη δράση αυτή χρησιμοποιούμε τις πιο κάτω αντικαταστάσεις:

$$x_\mu^E \rightarrow n_\mu a, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \quad (3.6a)$$

$$\phi^E(x) \rightarrow \phi(na), \quad (x \equiv x_\mu^E, n \equiv n_\mu) \quad (3.6b)$$

$$\int d^4x^E \rightarrow a^4 \sum_n \quad (3.6c)$$

$$\square^E \phi^E(x) \rightarrow \hat{\partial}_\mu \hat{\partial}_\mu \phi(na) = \frac{1}{a^2} \sum_{\mu=1}^4 [\phi(na + \hat{\mu}a) + \phi(na - \hat{\mu}a) - 2\phi(na)] \quad (3.6d)$$

όπου $\hat{\mu}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα στην μ -διεύθυνση. Το διαφορικό ολοκλήρωσης μετατρέπεται σε:

$$\mathcal{D}\phi^E \rightarrow \prod_n d\phi(na) \quad (3.6e)$$

Τότε η συνάρτηση Green μετατρέπεται σε:

$$\langle \phi(n_1a) \cdots \phi(n_Na) \rangle = \frac{\int \prod_\ell d\phi(\ell a) [\phi(n_1a) \cdots \phi(n_Na)] e^{-S_{K-G}^L(\phi)}}{\int \prod_\ell d\phi(\ell a) e^{-S_{K-G}^L(\phi)}} \quad (3.7a)$$

όπου

$$S_{K-G}^L(\phi) = -\frac{1}{2} a^2 \sum_{n,\mu} [\phi(na) (\phi(na + \hat{\mu}a) + \phi(na - \hat{\mu}a))] + \frac{1}{2} a^2 (8 + M^2 a^2) \sum_n [\phi(na) \phi(na)] \quad (3.7b)$$

Σημειώνουμε ότι θα μπορούσαμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε διακριτοποίηση θέλαμε. Εδώ επιλέξαμε την πιο απλή διακριτοποίηση με τη μόνη απαίτηση να μετατρέπεται στη

σωστή συνεχή δράση, στο όριο του συνεχούς $a \rightarrow 0$. Η πλεγματική αυτή σταθερά έχει φυσικά διαστάσεις μήκους. Παρατηρούμε, επίσης, ότι σε σύστημα φυσικών μονάδων με $[\hbar] = [c] = 1$, η μάζα έχει μονάδες αντιστρόφου μήκους. Έτσι, για να είναι αδιάστατη η δράση, είναι αναγκαίο το πεδίο ϕ να έχει τις ίδιες μονάδες όπως η μάζα. Επομένως, ορίζουμε τις νέες αδιάστατες ποσότητες $\tilde{\phi}_n$ και \tilde{m} ως:

$$\tilde{\phi}_n \equiv a \phi(na) \quad (3.8a)$$

$$\tilde{m} \equiv a M \quad (3.8b)$$

Χρησιμοποιώντας τις ποσότητες αυτές η συνάρτηση Green παίρνει την εξής μορφή:

$$D(n_1, \dots, n_N; \tilde{m}) = \langle \tilde{\phi}_{n_1} \dots \tilde{\phi}_{n_N} \rangle = \frac{\int \prod_\ell d\tilde{\phi}_\ell [\tilde{\phi}_{n_1} \dots \tilde{\phi}_{n_N}] e^{-S_{K-G}^L(\tilde{\phi})}}{\int \prod_\ell d\tilde{\phi}_\ell e^{-S_{K-G}^L(\tilde{\phi})}} \quad (3.9a)$$

όπου

$$S_{K-G}^L(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \tilde{\phi}_n K_{nm} \tilde{\phi}_m \quad (3.9b)$$

με

$$K_{nm} = - \sum_{\mu>0} [\delta_{m,n+\mu} + \delta_{m,n-\mu} - 2\delta_{mn}] + \tilde{m}^2 \delta_{mn} \quad (3.9c)$$

Τώρα, ας επικεντρωθούμε στο διαδότη $D^{K-G^E}(x_1 - x_2) = \langle \phi^E(x_1) \phi^E(x_2) \rangle$. Στο πλέγμα, εξαιτίας του θεωρήματος του Wick, ο διαδότης παίρνει τη μορφή:

$$D(n, m; \tilde{m}) \equiv \langle \tilde{\phi}_n \tilde{\phi}_m \rangle = K_{nm}^{-1} \quad (3.10)$$

όπου ο αντίστροφος πίνακας K^{-1} μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση:

$$\sum_\ell K_{n\ell} K_{\ell m}^{-1} = \delta_{nm} \quad (3.11)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί ευκολότερα στο χώρο των ορμών. Για να μεταβούμε στο χώρο αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνάρτησης δέλτα του Kronecker (3.3) και για να έχουμε αδιάστατες μεταβλητές, ορίζουμε $\tilde{p} \equiv a p$ αφού η ορμή έχει διαστάσεις αντιστρόφου μήκους. Επομένως, η σχέση (3.9c) μετατρέπεται σε αυτή τη

μορφή όταν $p \rightarrow \tilde{p}$ και $a \rightarrow 1$:

$$K_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \tilde{K}(\tilde{p}) e^{i\tilde{p}(n-m)} \quad (3.12a)$$

όπου

$$\tilde{K}(\tilde{p}) = 4 \sum_{\mu=1}^4 \sin^2 \frac{\tilde{p}_\mu}{2} + \tilde{m}^2 \quad (3.12b)$$

όπου \tilde{p}_μ η προβολή του διανύσματος \tilde{p} στην κατεύθυνση $\hat{\mu}$.

Τώρα κάνουμε την εξής υπόθεση (Ansatz) για το πινακοστοιχείο του πίνακα K^{-1} :

$$K_{nm}^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \tilde{D}(\tilde{p}) e^{i\tilde{p}(n-m)}$$

και βρίσκουμε τον εξής διαδότη στο πλέγμα:

$$D(n, m; \tilde{m}) = K_{nm}^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\tilde{p}(n-m)}}{4 \sum_{\mu=1}^4 \sin^2 \frac{\tilde{p}_\mu}{2} + \tilde{m}^2} \quad (3.13)$$

το οποίο επαληθεύει την εξίσωση (3.11).

Τώρα, είναι χρήσιμο να διατυπωθεί η έκφραση του διαδότη δύο σημείων στο συνεχές:

$$D^{K-G^E}(x_1 - x_2) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} D\left(\frac{x_1^E}{a}, \frac{x_2^E}{a}; aM\right) \quad (3.14a)$$

όπου

$$D\left(\frac{x_1^E}{a}, \frac{x_2^E}{a}; aM\right) = a^2 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p^E}{(2\pi)^4} \tilde{D}(p^E) e^{ip^E(x_1^E - x_2^E)} \quad (3.14b)$$

με

$$\tilde{D}(p^E) = \frac{1}{\hat{p}^2 + M^2} \quad (3.14c)$$

και

$$\hat{p}^2 = \sum_{\mu=1}^4 \hat{p}_\mu^2, \quad \hat{p}_\mu = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{p_\mu^E a}{2}\right) \quad (3.14d)$$

Παρατηρούμε ότι στο όριο $a \rightarrow 0$, τα όρια του ολοκληρώματος $[-\pi/a, \pi/a]$ μετατρέπονται σε $(-\infty, +\infty)$, ενώ $\hat{p}^2 \rightarrow p^{E^2}$ εξαιτίας της $\sin\left(\frac{p_\mu^E a}{2}\right) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{p_\mu^E a}{2}$. Εν τέλει στο όριο του

συνεχούς, ο διαδότης μετατρέπεται στη γνωστή ευκλείδεια συνάρτηση:

$$\langle \phi(x_1^E) \phi(x_2^E) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x_1^E - x_2^E)}}{\sum_{\mu} p_{\mu}^2 + M^2} \quad (3.15)$$

που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η περίπτωση του πεδίου Klein - Gordon στο πλέγμα είναι η πιο απλή αφού η μετάβαση στο χωροχρονικό πλέγμα είναι αρκετά απλή. Η διακριτοποίηση είναι η πιο "αφελής" γιατί η δράση στο χωροχρονικό πλέγμα είναι η αναμενόμενη δράση, δηλαδή δεν προστίθενται επιπλέον όροι στη δράση του πλέγματος που να μηδενίζονται στο όριο του συνεχούς. Επίσης, αφού αναφερόμαστε σε ελεύθερη θεωρία δεν θα υπάρχουν όροι αλληλεπίδρασης και έτσι η μάζα M που εμφανίζεται στη δράση αποτελεί τη φυσική μάζα του συστήματος. Παρ' όλα αυτά η αδιάστατη παράμετρος της μάζας \tilde{m} παίρνει μεταβλητές τιμές αλλά στο όριο του συνεχούς ρυθμίζεται έτσι ώστε να δίνει τη σωστή τιμή της M .

3.3 Φερμιονικό Πεδίο και Φερμιόνια Wilson

Η συνάρτηση Green του πεδίου Dirac για N χωροχρονικά σημεία, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, γράφεται σε συναρτησιακή μορφή στον ευκλείδειο συνεχή χώρο ως:

$$\begin{aligned} [D^F(x_1, \dots, x_{\ell}; y_1, \dots, y_{\ell})]_{\alpha_1 \dots \alpha_{\ell}; \beta_1 \dots \beta_{\ell}}^E &\equiv \langle \psi_{\alpha_1}^E(x_1) \dots \psi_{\alpha_{\ell}}^E(x_{\ell}) \bar{\psi}_{\beta_1}^E(y_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_{\ell}}^E(y_{\ell}) \rangle \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}^E \mathcal{D}\psi^E [\psi_{\alpha_1}^E(x_1) \dots \psi_{\alpha_{\ell}}^E(x_{\ell}) \bar{\psi}_{\beta_1}^E(y_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_{\ell}}^E(y_{\ell})] e^{-S_F^E(\psi^E, \bar{\psi}^E)}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}^E \mathcal{D}\psi^E e^{-S_F^E(\psi^E, \bar{\psi}^E)}} \end{aligned}$$

όπου $S_F^E(\psi^E, \bar{\psi}^E)$ δίνεται από τη σχέση (2.11).

Χρησιμοποιώντας τις διακριτοποιημένες σχέσεις και αδιάστατες ποσότητες κατ' αναλογία με τις σχέσεις (3.6) και (3.8) του προηγούμενου υποκεφαλαίου, διακριτοποιώντας δηλαδή "αφελώς" την πιο πάνω δράση στο πλέγμα, η διακριτοποιημένη δράση είναι η εξής:

$$S_F^L(\tilde{\psi}, \tilde{\bar{\psi}}) = \sum_{\substack{n, m \\ \alpha, \beta}} \tilde{\bar{\psi}}_{\alpha}(n) K_{\alpha\beta}(n, m) \tilde{\psi}_{\beta}(m) \quad (3.16)$$

όπου

$$K_{\alpha\beta}(n, m) = \sum_{\mu} \left[\frac{1}{2} (\gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} (\delta_{m, n+\hat{\mu}} - \delta_{m, n-\hat{\mu}}) \right] + \tilde{m} \delta_{mn} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.17)$$

Επίσης, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία εύρεσης του διαδότη του πεδίου Klein-Gordon προκύπτει ο εξής διαδότης στον ευκλείδειο χώρο:

$$D_{\alpha\beta}(n, m; \tilde{m}) = \langle \tilde{\psi}_\alpha(n) \tilde{\psi}_\beta(m) \rangle = K_{\alpha\beta}^{-1}(n, m) \quad (3.18)$$

Το πιο πάνω στοιχείο του αντιστρόφου πίνακα K^{-1} μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση:

$$\sum_{\lambda, \ell} K_{\alpha\lambda}^{-1}(n, \ell) K_{\lambda\beta}(\ell, m) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{nm} \quad (3.19)$$

η οποία μπορεί να επιλυθεί ευκολότερα στο χώρο των ορμών. Χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο υποκεφάλαιο, η λύση της εξίσωσης που προκύπτει είναι:

$$D_{\alpha\beta}(n, m; \tilde{m}) = K_{\alpha\beta}^{-1}(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \tilde{p}}{(2\pi)^4} \frac{(-i) \sum_{\mu=1}^4 [(\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \sin(\tilde{p}_\mu)] + \tilde{m} \delta_{\alpha\beta}}{\sum_{\mu=1}^4 \sin^2 \tilde{p}_\mu + \tilde{m}^2} e^{i\tilde{p}(n-m)} \quad (3.20)$$

Έτσι, ο διαδότης στο συνεχές θα είναι:

$$D_{\alpha\beta}^{F E}(x_1 - x_2) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} D_{\alpha\beta}\left(\frac{x_1^E}{a}, \frac{x_2^E}{a}; aM\right) \quad (3.21a)$$

όπου

$$D_{\alpha\beta}\left(\frac{x_1^E}{a}, \frac{x_2^E}{a}; aM\right) = a^3 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p^E}{(2\pi)^4} \tilde{D}_{\alpha\beta}(p^E) e^{ip^E(x_1^E - x_2^E)} \quad (3.21b)$$

με

$$\tilde{D}_{\alpha\beta}(p^E) = \frac{(-i) \sum_{\mu=1}^4 [(\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \dot{p}_\mu] + M \delta_{\alpha\beta}}{\dot{p}^2 + M^2} \quad (3.21c)$$

και

$$\dot{p}^2 = \sum_{\mu=1}^4 \dot{p}_\mu^2, \quad \dot{p}_\mu = \frac{1}{a} \sin(p_\mu^E a) \quad (3.21d)$$

Παρατηρούμε ότι το όρισμα του ημίτονου, σε αυτήν την περίπτωση, είναι διπλάσιο από το όρισμα στην έκφραση του διαδότη Klein-Gordon. Εξαιτίας αυτού στα όρια της ζώνης Brillouin $[-\pi/a, \pi/a]$ το ημίτονο μηδενίζεται. Όταν $a \rightarrow 0$, η συνάρτηση \dot{p}_μ μπορεί να προσεγγίζει την p_μ^E μόνο για τιμές της ap_μ^E κοντά στο 0. Όμως, η συνάρτηση \dot{p}_μ , στο όριο αυτό, παίρνει πεπερασμένη τιμή, όχι μόνο για $ap_\mu^E \rightarrow 0$, αλλά και στα σημεία που ορίζουν τα όρια της πρώτης ζώνης Brillouin (δηλαδή $p_\mu^E \rightarrow \pm\pi/a$). Συνεπώς, ο διαδότης Dirac στο πλέγμα, στο όριο του συνεχούς, δέχεται συνεισφορές από συνολικά δεκαέξι

σημεία του αντιστρόφου πλέγματος, εκ των οποίων μόνο ένα σημείο, αυτό που βρίσκεται στο κέντρο της ζώνης Brillouin, ανταποκρίνεται στον σωστό συνεχή διαδότη και άρα είναι το μόνο που έχει συνεχές ανάλογο. Επομένως, ο φερμιονικός διαδότης δέχεται συνολικά 2^d τέτοιες συνεισφορές, όπου d είναι οι διαστάσεις του χωρόχρονου. Για κάθε επιπλέον διάσταση οι συνεισφορές διπλασιάζονται και γι' αυτό λέγεται ότι υπάρχει το πρόβλημα του διπλασιασμού. Κάθε μια από αυτές τις συνεισφορές αντιστοιχεί σε ένα διαδότη ενός φερμιονίου. Έτσι, παρουσιάζονται στο πλέγμα τεχνητά φερμιόνια που δεν εμφανίζονται στο όριο του συνεχούς. Για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό μπορεί να εισαχθεί ο πιο κάτω όρος στη δράση του πεδίου Dirac στο πλέγμα:

$$\begin{aligned}
S_F^{L(W)}(\bar{\psi}, \psi) &= S_F^L(\bar{\psi}, \psi) - a^3 \frac{r}{2} \sum_{n, \alpha, \mu} [\bar{\psi}_\alpha(na) (\psi_\alpha(na + \hat{\mu}a) + \psi_\alpha(na - \hat{\mu}a) - 2\psi_\alpha(na))] \\
&= -a^3 \frac{1}{2} \sum_{\substack{n, m \\ \alpha, \beta}} \left[\bar{\psi}_\alpha(na) \left(r\delta_{\alpha\beta} - (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(na + \hat{\mu}a) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\psi}_\alpha(na) \left(r\delta_{\alpha\beta} + (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(na - \hat{\mu}a) \right] \\
&\quad + a^3 (ma + 4r) \sum_{n, \alpha} \bar{\psi}_\alpha(na) \psi_\alpha(na)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

όπου r : σταθερά Wilson ($r \neq 0$). Τα φερμιόνια της νέας αυτής δράσης ονομάζονται φερμιόνια Wilson. Ο νέος όρος στη δράση, γραμμένος συναρτήσει των συνεχών μεταβλητών, είναι ανάλογος του a κι επομένως μηδενίζεται στο όριο $a \rightarrow 0$, όπως και θα έπρεπε. Η δράση Wilson συναρτήσει αδιάστατων μεταβλητών μπορεί να γραφεί ως:

$$S_F^{L(W)}(\bar{\psi}, \psi) = \sum_{\substack{n, m \\ \alpha, \beta}} \tilde{\bar{\psi}}_\alpha(n) K_{\alpha\beta}^{(W)}(n, m) \tilde{\psi}_\beta(m) \tag{3.23a}$$

όπου

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}^{(W)}(n, m) &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left[\left(r\delta_{\alpha\beta} - (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \right) \delta_{m, n+\hat{\mu}} + \left(r\delta_{\alpha\beta} + (\gamma_\mu^E)_{\alpha\beta} \right) \delta_{m, n-\hat{\mu}} \right] \\
&\quad + (\tilde{m} + 4r) \delta_{mn} \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{3.23b}$$

Η πιο πάνω δράση οδηγεί στην εξής μορφή του διαδότη στο συνεχές (ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως προηγουμένως):

$$D_{\alpha\beta}^{F E}(x_1 - x_2) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p^E}{(2\pi)^4} \tilde{D}_{\alpha\beta}(p^E) e^{ip^E(x_1^E - x_2^E)} \tag{3.24a}$$

όπου

$$\tilde{D}_{\alpha\beta}(p^E) = \frac{(-i) \sum_{\mu=1}^4 [(\gamma_{\mu}^E)_{\alpha\beta} \hat{p}_{\mu}] + m^{(W)}(p^E) \delta_{\alpha\beta}}{\hat{p}^2 + m^{(W)}(p^E)^2} \quad (3.24b)$$

με \hat{p}_{μ} να δίνεται από την (3.21d) και

$$m^{(W)}(p^E) = M + \frac{2r}{a} \hat{p}^2 \quad (3.24c)$$

όπου \hat{p}^2 δίνεται από την (3.14d).

Όπως φαίνεται από την εξίσωση αυτή, για δεδομένη τιμή της ορμής, η ποσότητα $m^{(W)}(p^E)$ τείνει στην M καθώς $a \rightarrow 0$. Στα άκρα της ζώνης Brillouin όμως, η ποσότητα αυτή αποκλίνει. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι πόλοι της ολοκληρωτέας συνάρτησης (για $M = 0$), εκτός από αυτόν για ορμή ίση με μηδέν, να παύουν να υπάρχουν. Με αυτόν τον τρόπο απαλείφονται οι επιπλέον συνεισφορές στο διαδότη του πλέγματος ώστε αυτός να συμπίπτει με την αντίστοιχη ποσότητα του συνεχούς. Ένα αναπόφευκτο τίμημα που πληρώνει κανείς για την επίλυση του προβλήματος του διπλασιασμού, είναι το γεγονός ότι ο επιπλέον όρος που προστέθηκε παραβιάζει τη χειραλική συμμετρία που έχει η δράση για άμαζα φερμιόνια.

3.4 Κβαντική Ηλεκτροδυναμική στο Πλέγμα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τη θεωρία QED στο χωροχρονικό πλέγμα και θα απαιτήσουμε να ισχύει η συμμετρία βαθμίδος και στην πλεγματική της μορφή. Η απαίτηση αυτή πηγάζει από το γεγονός ότι μέσω της συμμετρίας βαθμίδος μπορεί να αποδειχθεί ότι η κβάντωση της διακριτοποιημένης θεωρίας δεν οδηγεί σε ανεξέλεγκτους απειρισμούς. Αρχικά, θα πάρουμε τη δράση των ελεύθερων φερμιονίων Wilson στο πλέγμα και θα εισαγάγουμε τον κατάλληλο όρο αλληλεπίδρασης έτσι ώστε να επιτευχθεί το αναλλοίωτο της συμμετρίας βαθμίδος. Στη συνέχεια, θα διακριτοποιήσουμε τον όρο της φωτονικής δράσης και τέλος θα έχουμε μια δράση στο πλέγμα που οδηγεί στη γνωστή έκφραση της δράσης της QED, στο όριο του συνεχούς.

Ξεκινούμε εισάγοντας την φερμιονική δράση Wilson στο πλέγμα:

$$S_F^W = (\tilde{m} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_{\mu})\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_{\mu})\psi(n)] \quad (3.25)$$

όπου r η αδιάστατη παράμετρος Wilson. Όλα τα μεγέθη που παρουσιάζονται είναι αδιάστατα και οι πίνακες γ_{μ} ορίζονται στον Ευκλείδειο χώρο.

Οι μετασχηματισμοί βαθμίδος στο πλέγμα έχουν την πιο κάτω μορφή:

$$\begin{aligned}\psi(n) &\rightarrow G\psi(n) \\ \bar{\psi}(n) &\rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}\end{aligned}\quad (3.26)$$

όπου G ένα στοιχείο της ομάδας $U(1)$. Εισάγοντας τώρα τον τοπικό μετασχηματισμό $U(1)$, $G(n) = e^{i\Lambda(n)}$, παρατηρούμε ότι το αναλλοίωτο καταρρίπτεται όπως και στην περίπτωση της συνεχούς δράσης των ελεύθερων ηλεκτρονίων. Αυτό οφείλεται στους δύο τελευταίους όρους της εξίσωσης (3.25), οι οποίοι περιέχουν πεδία σε διαφορετικά σημεία του πλέγματος.

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό εισάγουμε τις ποσότητες $U_{n,n+\hat{\mu}}$ και $U_{n+\hat{\mu},n} = U_{n,n+\hat{\mu}}^\dagger$ ανάμεσα στα δύο πεδία των δύο τελευταίων όρων της δράσης αυτής κάνοντας τη μετατροπή:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)\psi(n)] \\ \rightarrow -\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n,n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu},n}\psi(n)]\end{aligned}\quad (3.27)$$

Επίσης, απαιτούμε οι ποσότητες αυτές να είναι συναλλοίωτες κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδος, δηλαδή:

$$\begin{aligned}U_{n,n+\hat{\mu}} &\rightarrow G(n)U_{n,n+\hat{\mu}}G^{-1}(n + \hat{\mu}) \\ U_{n+\hat{\mu},n} &\rightarrow G(n + \hat{\mu})U_{n+\hat{\mu},n}G^{-1}(n)\end{aligned}\quad (3.28)$$

Οι ποσότητες αυτές ορίζονται μόνο στους συνδέσμους που ενώνουν δύο γειτονικά σημεία του πλέγματος, γι' αυτό και πήραν την ονομασία σύνδεσμοι (links). Σχηματικά απεικονίζονται στο σχήμα 3.1.



ΣΧΗΜΑ 3.1: Απεικόνιση των συνδέσμων (links) στο πλέγμα

Επομένως, η διακριτοποιημένη, αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδος, δράση Wilson γράφεται:

$$S_F^W = (\tilde{m} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n,n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu},n}\psi(n)] \quad (3.29)$$

Επίσης, αφού $G(n)$ και $G^{-1}((n + \hat{\mu}))$ είναι στοιχεία της ομάδας $U(1)$, τότε η υπόθεση ότι και ο σύνδεσμος $U_{n,n+\hat{\mu}}$ είναι στοιχείο της $U(1)$ είναι αυτοσυνεπής και συνεπώς θα μπορούσε να γραφεί:

$$U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{i\phi_\mu(n\alpha)} \quad (3.30)$$

όπου $\phi_\mu(n\alpha) \in [0, 2\pi]$.

Ξέροντας ότι το φωτονικό πεδίο $A_\mu(x)$ έχει διαστάσεις αντίστροφου μήκους μπορούμε να ορίσουμε:

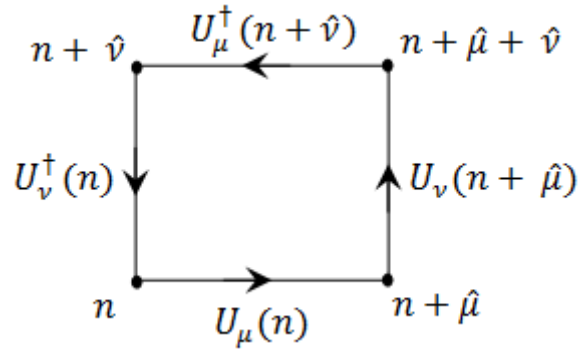
$$U_\mu(n\alpha) \equiv U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{ie\alpha A_\mu(n\alpha)} \quad (3.31)$$

Μόνο με αυτόν τον ορισμό θα παίρναμε τη γνωστή δράση της QED στο όριο $\alpha \rightarrow 0$, όταν δηλαδή ισχύει $U_{n,n+\hat{\mu}} \approx 1 + ie\alpha A_\mu(n\alpha)$. Ο μετασχηματισμός του A_μ , όπως συνάγεται από τη σχέση (3.28), έχει την επιθυμητή μορφή στο όριο του συνεχούς.

Παρατηρούμε ότι οι σύνδεσμοι περιέχουν τη συνιστώσα μ του φωτονικού πεδίου που βρίσκεται στο σημείο $n\alpha$. Σημειώνουμε εδώ ότι θα μπορούσαμε, στη σχέση (3.31), να εισαγάγουμε τη συνιστώσα μ του φωτονικού πεδίου στο σημείο $(n + \hat{\mu}/2)\alpha$ που βρίσκεται ανάμεσα στα δύο άκρα του συνδέσμου $n\alpha$ και $(n + \hat{\mu})\alpha$ ή τη συνιστώσα μ του φωτονικού πεδίου που βρίσκεται στο άκρο $(n + \hat{\mu})\alpha$. Οποιοσδήποτε από τους τρεις ορισμούς οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα, στο όριο του συνεχούς.

Τώρα, για να βρεθεί η ολοκληρωμένη μορφή της δράσης της QED στο πλέγμα πρέπει να βρεθεί ο όρος της φωτονικής δράσης στο πλέγμα. Η δράση αυτή πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς της $U(1)$ κι επίσης να είναι συνάρτηση μόνο των συνδέσμων. Για να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις αυτές πρέπει να κατασκευαστούν συναρτήσεις οι οποίες αποτελούνται από γινόμενα των συνδέσμων γύρω από ένα κλειστό βρόχο στο πλέγμα. Ένας τέτοιος βρόχος ονομάζεται Wilson Loop. Επιβάλλοντας τοπικότητα της θεωρίας, είναι προτιμητέο οι βρόχοι αυτοί να είναι όσο το

δυνατόν πιο μικροί, σχηματίζοντας τη λεγόμενη στοιχειώδη πλακέτα. Η πλακέτα αυτή απεικονίζεται στο σχήμα 3.2.



ΣΧΗΜΑ 3.2: Απεικόνιση της στοιχειώδους πλακέτας (plaquette) στο μ - επίπεδο

Η πλακέτα ορίζεται ως:

$$U_{\mu\nu}(na) = U_{\mu}(na)U_{\nu}((n + \hat{\mu})a)U_{\mu}^{\dagger}((n + \hat{\nu})a)U_{\nu}^{\dagger}(na) \quad (3.32)$$

όπου οι σύνδεσμοι στο βρόχο πολλαπλασιάζονται με αριστερόστροφη κατεύθυνση. Μπορούμε να έχουμε δεξιόστροφη κατεύθυνση, αν πάρουμε το ερμιτιανό συζυγές του $U_P^{\dagger} = U_{\mu\nu}^{\dagger}(n)$.

Εισάγοντας την (3.31) μέσα στην (3.32) βρίσκουμε:

$$U_{\mu\nu}(na) = e^{ie_0 a^2 F_{\mu\nu}(na)} \quad (3.33)$$

όπου $F_{\mu\nu}(na) = (1/a) \left[\left(A_{\nu}((n + \hat{\mu})a) - A_{\nu}(na) \right) - \left(A_{\mu}((n + \hat{\nu})a) - A_{\mu}(na) \right) \right]$ είναι η διακριτή μορφή του συνεχούς ηλεκτρομαγνητικού τανυστή.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η έκφραση:

$$\frac{1}{e_0^2} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[1 - \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(na) + U_{\mu\nu}^{\dagger}(na)) \right]$$

μετατρέπεται, στο όριο $a \rightarrow 0$, στην πιο κάτω διακριτή μορφή της φωτονικής δράσης:

$$\frac{1}{4} a^4 \sum_{n,\mu,\nu} F_{\mu\nu}(na) F_{\mu\nu}(na)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} S_{photons}^L(U) &= \frac{1}{e_0^2} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[1 - \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(na) + U_{\mu\nu}^\dagger(na)) \right] \\ &= \frac{1}{e_0^2} \sum_{\text{plaquette}} \text{Re}(1 - U_{\text{plaquette}}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

όπου $U_{\text{plaquette}} = U_{\mu\nu}(na)$ και $\sum_{\text{plaquette}} = \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}}$

Η συνολική δράση της QED στο πλέγμα, χρησιμοποιώντας φερμιόνια Wilson, προκύπτει αν αθροίσουμε τις σχέσεις (3.29) και (3.34):

$$\begin{aligned} S_{QED}^L[U, \psi, \bar{\psi}] &= \frac{1}{e^2} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[1 - \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)) \right] + (\tilde{m} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \left[\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n,n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu},n}\psi(n) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ας σημειωθεί ότι \tilde{m} και e δεν αντιστοιχούν στις φυσικές ποσότητες της μάζας και του ηλεκτρικού φορτίου αλλά αποτελούν αντίστοιχες απογυμνωμένες παραμέτρους. Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σχέση και αντικαθιστώντας τα αδιάστατα μεγέθη με τα αντίστοιχα μεγέθη με διαστάσεις, μπορεί να αποδειχθεί ότι στο όριο $a \rightarrow 0$ παίρνουμε την αναμενόμενη δράση της QED στο συνεχές.

Αφού το πεδίο τιμών των συνδέσμων είναι συμπαγές το συναρτησιακό ολοκλήρωμα ως προς τους συνδέσμους σε ένα πεπερασμένο πλέγμα είναι πεπερασμένο. Η δράση αυτή ονομάζεται δράση συμπαγούς QED. Όμως, για διαταρακτικές μεθόδους της QED στο πλέγμα όπου το συναρτησιακό ολοκλήρωμα αποκτά ως μεταβλητή ολοκλήρωσης το μη-συμπαγές πεδίο $A_\mu(x)$ χρειάζεται να προσθέσουμε το Gauge Fixing όρο που μελετήσαμε στο υποκεφάλαιο 2.3. Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις μετάβασης από το συνεχές στο πλέγμα θα πάρουμε την εξής Ευκλείδεια Gauge Fixing δράση:

$$S_{gf}^L(A) = \frac{1}{2\xi} \frac{a^2}{4} \sum_{n,\mu,\nu} [A_\mu(n + \hat{\mu})a - A_\mu(n - \hat{\mu})a] [A_\nu(n + \hat{\nu})a - A_\nu(n - \hat{\nu})a] \quad (3.36)$$

Τώρα, ας ορίσουμε τις συναρτήσεις Green για τη θεωρία αυτή. Η δράση εκτός από τα φερμιονικά πεδία περιέχει και τις μεταβλητές των συνδέσμων (που εξαρτώνται από το φωτονικό πεδίο) κι επομένως το μέτρο ολοκλήρωσης των συναρτήσεων Green στο πλέγμα θα έχει τη γενική μορφή $\mathcal{D}U\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$. Τα δύο διαφορικά ολοκλήρωσης $\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi$ έχουν οριστεί σε προηγούμενα υποκεφάλαια και είναι αναλλοίωτα κάτω από τους μετασχηματισμούς της

U(1). Το μέτρο ολοκλήρωσης $\mathcal{D}U$ θα οριστεί ως:

$$\mathcal{D}U \equiv \prod_{n,\mu} d\phi_\mu(na) \quad (3.37)$$

όπου $\phi_\mu(na)$ μια πραγματική φάση που παραμετροποιεί τους συνδέσμους και παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $[0, 2\pi]$ ενός επίπεδου χώρου. Επομένως, το μέτρο ολοκλήρωσης $\mathcal{D}U$ παραμένει και αυτό αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Έτσι, οι συναρτήσεις Green της QED, με τη χρήση φερμιονίων Wilson, ορίζονται ως:

$$\langle \mathcal{O}(U, \psi, \bar{\psi}) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{O}(U, \psi, \bar{\psi}) e^{-S_{\text{QED}}^L(U, \psi, \bar{\psi})}}{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_{\text{QED}}^L(U, \psi, \bar{\psi})}} \quad (3.38)$$

ή συναρτήσει του φωτονικού πεδίου $A_\mu(na)$ (καθώς $\phi_\mu(na) \sim A_\mu(na)$):

$$\langle \mathcal{O}(A, \psi, \bar{\psi}) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{O}(A, \psi, \bar{\psi}) e^{-S_{\text{QED}}^L(A, \psi, \bar{\psi})}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_{\text{QED}}^L(A, \psi, \bar{\psi})}} \quad (3.39)$$

όπου $\mathcal{D}A = \prod_{n,\mu} dA_\mu(na)$.

3.5 Κβαντική Χρωμοδυναμική στο Πλέγμα

Έχοντας ως πρότυπο τη θεωρία της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής στο πλέγμα μπορούμε να βρούμε την αντίστοιχη έκφραση της δράσης για τη θεωρία της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής. Στη θεωρία αυτή ικανοποιείται η συμμετρία βαθμίδας της SU(3) ομάδας. Επομένως, πρέπει να γίνουν κατάλληλες προσθήκες ή αλλαγές, όπως ο δείκτης του χρώματος στο φερμιονικό και γλουονικό πεδίο και ο δείκτης της γεύσης στο φερμιονικό πεδίο των quark. Έτσι τα πεδία αντικαθίστανται από μοναδιαίους πίνακες 3×3 , γενικεύοντας την QED.

Η διακριτοποιημένη δράση των φερμιονίων Wilson, στον Ευκλείδειο χώρο, μετατρέπεται στη QCD:

$$\begin{aligned} S_F^W = & \sum_{f,n,\alpha,a} ((M_0)_f + 4r) (\bar{\psi}_f^a)_\alpha(n) (\psi_f^a)_\alpha(n) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\substack{f,n,\mu \\ \alpha,\beta \\ a,b}} \left[(\bar{\psi}_f^a)_\alpha(n) \left(r\delta_{\alpha\beta} - (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \right) \underline{U}_\mu^{ab}(n) (\psi_f^b)_\beta(n + \hat{\mu}) \right. \\ & \left. + (\bar{\psi}_f^a)_\alpha(n + \hat{\mu}) \left(r\delta_{\alpha\beta} + (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \right) \underline{U}_\mu^{\dagger ab}(n) (\psi_f^b)_\beta(n) \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιήσαμε αδιάστατες μεταβλητές και θέσαμε $a = 1$. Επίσης οι περισπωμένες κάτω από τα διάφορα μεγέθη, τοποθετήθηκαν για να μας θυμίζουν ότι αυτά είναι πίνακες. Η μάζα M_0 δεν αντιστοιχεί στη φυσική μάζα των σωματιδίων αλλά είναι μια απογυμνωμένη παράμετρος μάζας και είναι διαφορετική για σωματίδια με διαφορετικό δείκτη γεύσης.

Τώρα, στη θεωρία αυτή ο σύνδεσμος ορίζεται ως εξής:

$$U_\mu(n) = e^{i\phi_\mu(n)} \quad (3.41)$$

όπου $\phi_\mu(n)$ ένας ερμιτιανός πίνακας, με μηδενικό ίχνος, που ανήκει στην άλγεβρα της $SU(3)$:

$$\phi_\mu(n) = g_0 A_\mu(n) = g_0 \sum_{a=1}^8 A_\mu^a(n) T^a \quad (3.42)$$

Στη πιο πάνω σχέση T^a είναι οι γεννήτορες της $SU(3)$ που ικανοποιούν τη σχέση $T^a = \lambda^a/2$, όπου λ^a : πίνακες Gell-Mann. Η σταθερά σύζευξης της ισχυρής αλληλεπίδρασης g_0 είναι μια απογυμνωμένη παράμετρος. Τα 8 πεδία $A_\mu^a(n)$ είναι πραγματικά, διανυσματικά πεδία, που αντιστοιχούν στους 8 γεννήτορες της $SU(3)$.

Η δράση (3.40) είναι αναλλοίωτη κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς της $SU(3)$, γραμμένους σε διακριτή μορφή::

$$\begin{aligned} \psi(n) &\rightarrow G(n)\psi(n) \\ \bar{\psi}(n) &\rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n) \\ U_\mu(n) &\rightarrow G(n)U_\mu(n)G^{-1}(n+\hat{\mu}) \\ U_\mu^\dagger(n) &\rightarrow G(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n)G^{-1}(n) \end{aligned} \quad (3.43)$$

με $G(n)$ στοιχείο της θεμελιώδους αναπαράστασης της ομάδας $SU(3)$ που μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$G(n) = e^{i\Lambda(n)} \quad (3.44)$$

όπου ο πίνακας $\Lambda(n)$ ανήκει στην άλγεβρα της $SU(3)$.

Τώρα, για να γραφεί η δράση της QCD στο πλέγμα πρέπει να γραφεί και η γκλουονική δράση στο πλέγμα. Για να γίνει αυτό πρέπει να οριστεί η στοιχειώδης πλακέτα όπως έγινε και στη φωτονική περίπτωση. Οι σύνδεσμοι στο βρόχο αυτό θα πολλαπλασιάζονται κατά

την αντίστροφη φορά των δεικτών του ρολογιού:

$$U_{\mu\nu}(n) = U_{\mu}(n)U_{\nu}(n + \hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(n + \hat{\nu})U_{\nu}^{\dagger}(n) \quad (3.45)$$

Σε αντίθεση με τη στοιχειώδη πλακέτα στη φωτονική περίπτωση, οι πίνακες τώρα δεν μετατίθενται. Επίσης, αφού ασχολούμαστε με πίνακες, επιβάλλεται να βρίσκονται σε ίχνος μέσα στη γκλουονική δράση. Έτσι, η γκλουονική δράση στο πλέγμα παίρνει τη μορφή:

$$S_G = c \operatorname{tr} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[1 - \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^{\dagger}(n)) \right] \quad (3.46)$$

όπου c μια σταθερά.

Τοποθετώντας τη σχέση $U_{\mu}(n) = e^{ig_0 A_{\mu}(n)}$ στη σχέση (3.45) προκύπτει:

$$U_{\mu\nu}(n) = e^{ig_0 \mathcal{F}_{\mu\nu}(n)} \quad (3.47)$$

όπου

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(n) \approx \left[\left(A_{\nu}(n + \hat{\mu}) - A_{\nu}(n) \right) - \left(A_{\mu}(n + \hat{\nu}) - A_{\mu}(n) \right) \right] + ig_0 [A_{\mu}(n), A_{\nu}(n)] \quad (3.48)$$

Για να βρεθεί η σχέση αυτή χρησιμοποιήθηκε η φόρμουλα Baker - Campbell - Hausdorff:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (3.49)$$

η οποία περιέχει άπειρους όρους.

Όμως, η φάση $\phi_{\mu}(n)$ στη σχέση (3.42), είναι ανάλογη της πλεγματικής σταθεράς a . Έτσι, κάναμε διαταρακτικό ανάπτυγμα του εκθετικού ως προς a και από αυτό το ανάπτυγμα συμπεράναμε ότι στη φόρμουλα Baker - Campbell - Hausdorff μπορούμε να κρατήσουμε μόνο τους όρους που περιέχουν τους πίνακες A, B ή όρους που περιέχουν μόνο ένα μεταθέτη των πινάκων αυτών. Οι υπόλοιποι όροι μηδενίζονται καθώς $a \rightarrow 0$ και μπορούν να παραλειφθούν.

Τώρα, επιλέγουμε $c = \frac{2}{g_0^2}$ επειδή είναι ο μόνος όρος ο οποίος στο όριο $a \rightarrow 0$ δίνει την Ευκλείδεια δράση:

$$S_G^{\text{cont}}(A) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \int d^4x \underline{F}_{\mu\nu} \underline{F}_{\mu\nu} \quad (3.50)$$

Από τις σχέσεις (3.40) και (3.46) καταλήγουμε στην τελική δράση της QCD στον Ευκλείδειο χώρο με αδιάστατες ποσότητες στο πλέγμα:

$$\begin{aligned}
S_{QCD} = & \frac{2}{g_0^2} \text{tr} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[1 - \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)) \right] \\
& + \sum_{f,n,\alpha,a} ((M_0)_f + 4r) (\bar{\psi}_f^a)_\alpha(n) (\psi_f^a)_\alpha(n) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\substack{f,n,\mu \\ \alpha,\beta \\ a,b}} \left[(\bar{\psi}_f^a)_\alpha(n) \left(r\delta_{\alpha\beta} - (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \right) U_\mu^{ab}(n) (\psi_f^b)_\beta(n + \hat{\mu}) \right. \\
& \left. + (\bar{\psi}_f^a)_\alpha(n + \hat{\mu}) \left(r\delta_{\alpha\beta} + (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \right) U_\mu^{\dagger ab}(n) (\psi_f^b)_\beta(n) \right]
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Σημειώνουμε ότι η πιο πάνω δράση στο όριο του συνεχούς δίνει τη γνωστή δράση της κβαντικής χρωμοδυναμικής με τους όρους που περιέχουν την παράμετρο r να μηδενίζονται. Η δράση αυτή ονομάζεται δράση συμπαγούς QCD, διότι οι γκλουονικοί βαθμοί ελευθερίας ανήκουν στη συμπαγή ομάδα $SU(3)$.

Αν μελετήσουμε διαταρακτικά τη δράση της QCD στο πλέγμα τότε χρειάζεται να προσθέσουμε στη δράση τους όρους Gauge Fixing και Faddeev - Popov, τους οποίους αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (από εδώ και πέρα, για ευκολία στο συμβολισμό θα γράφουμε όλους τους πίνακες της QCD χωρίς περισπωμένη).

Η Ευκλείδεια Gauge Fixing δράση της QCD στο πλέγμα παίρνει τη μορφή:

$$S_{GF}^L(A) = \frac{1}{2\xi} \frac{1}{4} \sum_{n,\mu,\nu,a} [A_\mu^a(n + \hat{\mu}) - A_\mu^a(n - \hat{\mu})] [A_\nu^a(n + \hat{\nu}) - A_\nu^a(n - \hat{\nu})] \tag{3.52}$$

Η μόνη διαφορά αυτής της δράσης με τη δράση Gauge Fixing της QED είναι η προσθήκη του δείκτη χρώματος a σε όλα τα φωτονικά πεδία. Έτσι τα φωτονικά πεδία μετατρέπονται σε γκλουονικά.

Η Ευκλείδεια δράση Faddeev - Popov, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μετάβασης από το συνεχές στο πλέγμα, που ορίσαμε στα προηγούμενα υποκεφάλαια, μετατρέπεται σε:

$$\begin{aligned}
S_{FP}^L(A) &= \sum_{n,\mu} \bar{c}^a(n) \left\{ \left[[E^{-1}(g_0 A_\mu(n))]^{ab} c^b(n) - [E^{-1}(g_0 A_\mu(n))]^{ba} c^b(n + \hat{\mu}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[[E^{-1}(g_0 A_\mu((n - \hat{\mu})))^{ab} c^b(n - \hat{\mu}) - [E^{-1}(g_0 A_\mu(n - \hat{\mu}))]^{ba} c^b(n) \right] \right\} \\
&= - \sum_{n,\mu} (\bar{c}^a(n + \hat{\mu}) - \bar{c}^a(n)) \\
&\quad \left[[E^{-1}(g_0)]^{ab} c^b(n) - [E^{-1}(g_0 A_\mu(n))]^{ba} c^b(n + \hat{\mu}) \right]
\end{aligned} \tag{3.53}$$

όπου

$$E^{ab}(\phi) = \left(\frac{e^{i\phi_\mu(n)} - 1}{i\phi_\mu(n)} \right)^{ab} \tag{3.54}$$

και

$$(\phi_\mu(n))^{ab} = g_0 A_\mu^c(n) (\mathcal{T}^c)^{ab} \tag{3.55}$$

με

$$(\mathcal{T}^c)^{ab} = i f^{acb} \tag{3.56}$$

οι γεννήτορες στην προσαρτημένη αναπαράσταση.

Όπως και στο συνεχές, ο gauge fixing όρος, εκ κατασκευής, παραβιάζει τη συμμετρία βαθμίδος. Παραμένει όμως ανέπαφη, τόσο στο συνεχές όσο και στο πλέγμα, η συμμετρία κάτω από μετασχηματισμούς BRS, οι οποίοι ορίζονται ως εξής [8]:

$$\begin{aligned}
\delta c(x) &= -\frac{1}{2} i g \lambda [c(x), c(x)] \\
\delta \bar{c}(x) &= \frac{\lambda}{\xi} \sum_{\mu} [A_\mu(x) - A_\mu((x - \hat{\mu}))] \\
\delta \psi(x) &= -i g \lambda c(x) \psi(x) \\
\delta \bar{\psi}(x) &= i g \bar{\psi}(x) \lambda c(x) \\
\delta A_\mu^a(x) &= \frac{\lambda}{g_0} [E^{-1}(g_0 A_\mu(x))]^{ba} c^b(x + \hat{\mu}) - \frac{\lambda}{g_0} [E^{-1}(g_0 A_\mu(x))]^{ba} c^b(x)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Ένα ιδιαίζον χαρακτηριστικό των μετασχηματισμών αυτών είναι ότι εμπλέκουν μία παράμετρο (λ) η οποία είναι μεταβλητή Grassmann (Παράρτημα Β).

Κεφάλαιο 4

Διαστατική Ομαλοποίηση

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, συζητήσαμε μια από τις μεθόδους ομαλοποίησης, την εισαγωγή χωροχρονικού πλέγματος, τη διακριτοποίηση δηλαδή του χωροχρόνου για να αντιμετωπιστούν οι απειρισμοί στον υπολογισμό συναρτήσεων Green. Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε μια άλλη μέθοδο ομαλοποίησης η οποία ονομάζεται διαστατική ομαλοποίηση (αλλαγή των διαστάσεων). Τώρα, ομαλοποιητής είναι οι διαστάσεις d , δηλαδή θα καταστρώσουμε τη θεωρία σε $d < 4$ διαστάσεις, ώστε να μην υπάρχουν υπερπλάγιες απειρισμοί (απειρισμοί για μεγάλες τιμές των ορμών). Είναι βεβαίως αναγκαίο όταν φτάνω στο όριο του φυσικού κόσμου, δηλαδή όταν $d \rightarrow 4$, να καταλήγω στη γνωστή θεωρία του συνεχούς χωρίς απειρισμούς.

Συγκρίνοντας τις δύο αυτές ομαλοποιήσεις, μπορούμε να πούμε ότι στη διαστατική ομαλοποίηση, παρόλο που είναι πιο εύκολοι οι υπολογισμοί των συναρτήσεων Green, εντούτοις μόνο διαταραχτικούς υπολογισμούς μπορούμε να κάνουμε. Από την άλλη, στο πλέγμα μπορούμε να χειριστούμε μη-διαταραχτικά τις υπολογιζόμενες ποσότητες, κάνοντας αριθμητικές προσομοιώσεις.

Στη διαστατική ομαλοποίηση δουλεύουμε στις $4 - 2\epsilon$ χωροχρονικές διαστάσεις και κάνουμε αναπτύγματα ως προς το ϵ . Σε αυτή τη μέθοδο πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί για να αποφύγουμε ασυνέπειες αφού μπορεί να εργαζόμαστε σε έναν μη ακέραιο αριθμό διαστάσεων, πράγμα που απαιτεί περαιτέρω προσδιορισμό.

Ολοκληρώματα σε d διαστάσεις

Αρχικά, ας ορίσουμε τα ολοκληρώματα σε ένα χώρο d διαστάσεων. Ξέρουμε ότι οι διανυσματικοί χώροι έχουν, είτε πεπερασμένο είτε άπειρο, ακέραιο αριθμό διαστάσεων και

επομένως είναι αυθαίρετο να συζητάμε για ένα ολοκλήρωμα σε ένα χώρο με αριθμό διαστάσεων που δεν είναι ακέραιος. Παρ' όλα αυτά, αν αγνοήσουμε τη φυσική σημασία, μπορούμε να ορίσουμε τέτοιο ολοκλήρωμα.

Η μορφή ενός ολοκληρώματος σε d διαστάσεις (όπου για την ώρα θεωρούμε το d θετικό ακέραιο αριθμό) σε πολικές συντεταγμένες είναι η εξής:

$$\int d^d x f(x) = \int f(x) r^{d-1} dr \sin^{d-2} \theta_{d-1} d\theta_{d-1} \sin^{d-3} \theta_{d-2} d\theta_{d-2} \dots d\theta_1 \quad (4.1)$$

όπου $0 \leq \theta_i \leq \pi$, εκτός από $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$. Το ολοκλήρωμα γίνεται απλούστερο αν η συνάρτηση $f(x)$ εξαρτάται μόνο από το $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$.

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα

$$\int_0^\pi \sin^m \theta d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})} \quad (4.2)$$

και έτσι εκτελείται το ολοκλήρωμα ως προς τις γωνίες

$$\int d^d x f(x) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^\infty f(x) r^{d-1} dr \quad (4.3)$$

όπου η συνάρτηση $\Gamma(d)$ ορίζεται ως

$$\Gamma(d) = \int_0^\infty x^{d-1} e^{-x} dx \quad (4.4)$$

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση Γ εμφανίζει πόλους στα σημεία $0, -1, -2, -3, \dots$ και ούτως καθεξής. Εξ αιτίας αυτού, κάποιες συναρτήσεις Green αποκλίνουν καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$.

Έχοντας υπόψιν το αποτέλεσμα (4.3), επιβάλλουμε τις εξής ιδιότητες ή αξιώματα για τυχαίες μιγαδικές τιμές του d :

1. Γραμμικότητα:

$$\int d^d x [af(x) + bg(x)] = a \int d^d x f(x) + b \int d^d x g(x) \quad (4.5)$$

όπου a και b αυθαίρετοι μιγαδικοί αριθμοί.

2. Βάθμιση:

$$\int d^d x f(sx) = s^{-d} \int d^d x f(x) \quad (4.6)$$

όπου s αυθαίρετος αριθμός.

3. Συμμετρία ως προς μετατοπίσεις:

$$\int d^d x f(x+y) = \int d^d x f(x). \quad (4.7)$$

4. Περιστροφική Συμμετρία

Η γραμμικότητα ισχύει για κάθε ολοκλήρωμα και η μεταφορική και περιστροφική συμμετρία είναι ιδιότητες του Ευκλείδειου χώρου. Η βάρθρωση επίσης ενσωματώνει την ιδιότητα ενός ολοκληρώματος σε d διαστάσεις. Μπορεί να αποδειχθεί ότι επιβάλλοντας αυτά τα τέσσερα αξιώματα, το ολοκλήρωμα στις d διαστάσεις είναι μοναδικά ορισμένο.

Η εξίσωση (4.3) ικανοποιεί τα πιο πάνω αξιώματα και επομένως μπορούμε να την υιοθετήσουμε για την ολοκλήρωση στις d διαστάσεις. Προφανώς, αυτό ισχύει μόνο όταν η συνάρτηση $f(x)$ εξαρτάται από την ακτίνα r , δηλαδή εξαρτάται μόνο από το μέτρο της ορμής. Παρ' όλα αυτά, σε περιπτώσεις που εξαρτάται από συνιστώσες της ορμής, η ολοκλήρωση σε d διαστάσεις εξακολουθεί να υφίσταται.

Πίνακες Γάμμα στις d διαστάσεις

Αφού δεν είμαστε πλέον στις τέσσερις διαστάσεις, πρέπει να ορίσουμε νέους πίνακες γάμμα οι οποίοι να είναι συμβατοί στις d διαστάσεις. Η άλγεβρα αυτή θα αναπαρίσταται με πίνακες άπειρων διαστάσεων και το ίχνος του μοναδιαίου πίνακα ορίζεται ως:

$$tr \mathbf{1} = d \quad (4.8)$$

Επίσης, για να είμαστε συνεπείς, απαιτούμε οι πίνακες γάμμα στις d διαστάσεις να ικανοποιούν την πιο κάτω αντιμεταθετική σχέση

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1} \quad (4.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εξισώσεων (4.8) και (4.9), καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα (όπου οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες υπονοούν άθροιση):

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\mu &= \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_\mu\} = d \mathbf{1} \\ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu &= 2\delta_{\mu\nu} \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\mu \gamma_\nu = (2-d)\gamma_\nu \end{aligned} \quad (4.10)$$

και

$$\begin{aligned} tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= tr(-\gamma_\mu \gamma_\nu + 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}) \\ &= -tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) + 2\delta_{\mu\nu} tr \mathbf{1} \end{aligned}$$

καταλήγοντας στη σχέση

$$tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu} \quad (4.11)$$

Τώρα, μας απομένει να ορίσουμε τον πίνακα γ_5 στις d διαστάσεις (θυμίζουμε ότι στο τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$). Ένας συνεπής ορισμός (σύμφωνα με τους 't Hooft και Veltman, όρα [9]) είναι:

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!} \gamma_\kappa \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \quad (4.12)$$

όπου $\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu}$ ο αντισυμμετρικός τανυστής

$$\epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} 1 \text{ αν } (\kappa\lambda\mu\nu) \text{ άρτια μετάθεση των } (0123) \\ -1 \text{ αν } (\kappa\lambda\mu\nu) \text{ περιττή μετάθεση των } (0123) \\ 0 \text{ αν } (\kappa\lambda\mu\nu) \text{ δεν αποτελεί μετάθεση των } (0123) \end{cases} \quad (4.13)$$

Συνεπώς, ο πίνακας γ_5 στις d διαστάσεις ικανοποιεί τις πιο κάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \{\gamma_5, \gamma_\mu\} &= 0 \text{ αν } \mu = 0, 1, 2, 3 \\ [\gamma_5, \gamma_\mu] &= 0 \text{ στις υπόλοιπες περιπτώσεις} \\ (\gamma_5)^2 &= 1, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Είναι φανερό ότι αυτός ο ορισμός δεν είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz σε όλο το χώρο, αλλά μόνο στις τέσσερις πρώτες διαστάσεις. Ένας εναλλακτικός ορισμός του γ_5 (Naive Dimensional Regularization – NDR) επιβάλλει να αντιμετωπίζεται το γ_5 με καθένα από τους πίνακες γ . Μολονότι αυτός ο ορισμός είναι συμμετρικός ως προς όλες τις d διαστάσεις, δεν είναι συνεπής, και απαιτεί διορθώσεις στους υπολογισμούς διαγραμμάτων Feynman. Αυτό φαίνεται, π.χ., από το γεγονός ότι οδηγεί σε λάθος αποτέλεσμα για την "αξονική ανωμαλία" [9].

4.2 Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD) στις $4 - 2\epsilon$ διαστάσεις

Έχοντας δώσει τους απαραίτητους ορισμούς, πάμε τώρα να μελετήσουμε τη διαστατική ομαλοποίηση στην Κβαντική Χρωμοδυναμική. Θα χρησιμοποιήσουμε τη δράση στο συνεχές με τη μόνη διαφορά ότι πλέον δεν θα ολοκληρώνουμε στις τέσσερις διαστάσεις του χωροχρόνου, αλλά στις αυθαίρετες $4 - 2\epsilon$ διαστάσεις. Πριν συνεχίσουμε με τον υπολογισμό συναρτήσεων Green, ας παρουσιάσουμε μια απλή διαστατική ανάλυση. Κάθε όρος της Λαγκρανζιανής πρέπει να έχει διαστάσεις d αφού θέλουμε η δράση μας να είναι αδιάστατη. Επομένως, καταλήγουμε ότι τα πιο κάτω πεδία και σταθερές έχουν τις εξής διαστάσεις:

- $\bar{\psi}\partial_\mu\psi \rightarrow 2[\psi] + 1 = d \rightarrow [\psi] = \frac{d-1}{2}$
- $(\partial^\mu A_\mu)^2 \rightarrow 2[A] + 2 = d \rightarrow [A] = \frac{d-2}{2}$
- $g_0\bar{\psi}A\psi \rightarrow [g_0] + 2[\psi] + [A] = d \rightarrow [g_0] = \frac{4-d}{2}$

Έτσι, στις $d = 4 - 2\varepsilon$, η σταθερά σύζευξης g_0 έχει τις διαστάσεις του ε . Επειδή είναι προτιμητέο να ασχολούμαστε με αδιάστατα μεγέθη, ορίζουμε:

$$g_0 = g\mu^\varepsilon \quad (4.15)$$

όπου g μια αδιάστατη σταθερά και μ μια σταθερά με διαστάσεις μάζας. Επίσης, ορίζουμε τη σταθερά $\bar{\mu}$ για ευκολία στους υπολογισμούς:

$$\mu = \bar{\mu} \left(\frac{4\pi}{e\gamma_E} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

όπου $\gamma_E = 0.57721 \dots$ η σταθερά Euler-Mascheroni.

Η διαταραχτική μέθοδος για τον υπολογισμό των συναρτήσεων Green προσθέτοντας ολοκληρώματα στις d διαστάσεις έχει το ίδιο αποτέλεσμα με το πλεγματολόγο. Τα διαγράμματα Feynman που συνεισφέρουν στον φερμιονικό διαδότη σχηματίζουν μια γεωμετρική σειρά:

$$\begin{aligned} \langle \psi(q)\bar{\psi}(q') \rangle &= (2\pi)^4 \delta(q - q') \left[\frac{1}{i\not{q} + m} + \frac{1}{i\not{q} + m} \Sigma(\not{q}) \frac{1}{i\not{q} + m} + \dots \right] \\ &= (2\pi)^4 \delta(q - q') \frac{1}{i\not{q} + m - \Sigma(\not{q})} \end{aligned} \quad (4.17)$$

όπου $\Sigma(\not{q})$ το άθροισμα όλων των 1PI (1-Particle Irreducible) "ακρωτηριασμένων" διαγραμμάτων Feynman. Καταρχάς, να αναφέρουμε ότι, όταν μιλούμε για 1PI διαγράμματα, αναφερόμαστε στα διαγράμματα τα οποία δεν είναι δυνατό να τα χωρίσω στα δύο "κόβοντας" μόνο μια γραμμή τους. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για την εύρεση της έκφρασης μιας οποιασδήποτε συνάρτησης Green είναι ανάγκη να γνωρίζουμε μόνο τις εκφράσεις που αντιστοιχούν σε ακρωτηριασμένα διαγράμματα, τα οποία είναι μάλιστα 1PI.

Όπως θα ανέμενε κανείς, στη διαστατική ομαλοποίηση, εμφανίζονται αποκλίσεις από πόλους της μορφής $1/\varepsilon$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η εξάρτηση της συνάρτησης Green από το ε έχει πάντα τη μορφή σειράς Laurent, δηλαδή μιας σειράς όρων με ακέραιες μόνο δυνάμεις του ε , όπου η πιο αρνητική δύναμη ισούται με τον αριθμό των βρόχων στο διάγραμμα. Για παράδειγμα, η σειρά Laurent για συνάρτηση Green διαγράμματος ενός βρόχου έχει τη μορφή:

$$\langle \mathcal{O}(q) \rangle = \frac{1}{\varepsilon}(\dots) + \varepsilon^0(\dots) + \varepsilon^1(\dots) + \dots \quad (4.18)$$

Παρατηρούμε ότι όταν θα επιστρέψουμε στις τέσσερις διαστάσεις, δηλαδή όταν θα πάρουμε το όριο $\epsilon \rightarrow 0$ θα απομείνουν μόνο οι δύο πρώτοι όροι. Ο πρώτος όρος προκαλεί τα διαγράμματα Feynman να αποκλίνουν, ενώ ο δεύτερος όρος είναι πεπερασμένος. Έτσι, εισάγουμε το σχήμα επανακανονικοποίησης $\overline{\text{MS}}$ (modified Minimal Subtraction) το οποίο έχει σκοπό να απαλείψει τους πόλους (αρνητικές δυνάμεις του ϵ) αφήνοντας τους πεπερασμένους όρους άθικτους. Αυτό επιτυγχάνεται με τον κατάλληλο πολλαπλασιασμό των παραμέτρων και των πεδίων της θεωρίας με κάποια συνάρτηση του ϵ . Πιο λεπτομερής αναφορά στο σχήμα $\overline{\text{MS}}$ θα γίνει στο κεφάλαιο 6.

Κεφάλαιο 5

Υπερσυμμετρία

5.1 Εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία και στην Άλγεβρά της

Η συμμετρία είναι μια έννοια αρκετά γνωστή σε διάφορους τομείς, από την τέχνη μέχρι την επιστήμη. Στη φυσική, χωρίς να ξέρουμε τους φυσικούς νόμους που διέπουν ένα φυσικό σύστημα, μπορούμε να κατανοήσουμε και να πάρουμε αρκετές πληροφορίες για αυτό αρκεί να γνωρίζουμε τις συμμετρίες του. Όπως αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο, το θεώρημα Noether επισημαίνει ότι αν ένα σύστημα είναι αναλλοίωτο κάτω από κάποιους συνεχείς μετασχηματισμούς συμμετρίας τότε υπάρχει ένας αντίστοιχος νόμος διατήρησης. Τέτοια παραδείγματα είναι οι νόμοι διατήρησης ενέργειας, ορμής και στροφορμής όταν το φυσικό σύστημα είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς χρονικής και χωρικής μετατόπισης και περιστροφής χώρου αντίστοιχα. Επομένως, πρώτιστος σκοπός μας είναι να κατανοήσουμε της συμμετρίες, όπως αυτές αναδεικνύονται πειραματικά, και στη συνέχεια να δημιουργήσουμε νόμους που να είναι συμβατοί με αυτές.

Οι συμμετρίες του Καθιερωμένου Προτύπου βασίζονται στην ομάδα $SU(3)_C$ για τις ισχυρές δυνάμεις και στις ομάδες $SU(2)_W$ και $U(1)$ για τις ασθενείς και ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις αντίστοιχα. Οι συμμετρίες αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η συμμετρία $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)$ δρα σε ένα εσωτερικό χώρο και ονομάζεται συμμετρία εσωτερικού χώρου. Από την άλλη, η ομάδα Lorentz βασίζεται σε χωροχρονικές συμμετρίες.

Οι μόνες συμμετρίες που μπορούν να υπάρχουν επιπρόσθετα από τις χωροχρονικές (ομάδα Poincaré) και τις εσωτερικές, είναι "Υπερσυμμετρίες". Ξέρουμε ότι ο φορμαλισμός των συμμετριών εκφράζεται μέσω σχέσεων μετάθεσης άρα, στην περίπτωση συνεχών συμμετριών, μέσω ομάδων οι οποίες ονομάζονται Lie groups και εμπλέκουν γεννήτορες που υπακούουν αποκλειστικά σε μεταθετικές σχέσεις. Τώρα, για να κατασκευάσουμε την

Υπερσυμμετρία χρειάζεται να συμπεριλάβουμε στο φορμαλισμό της συμμετρίας όχι μόνο σχέσεις μετάθεσης αλλά και αντιμετάθεσης. Συνεπώς, οι γεννήτορες της Υπερσυμμετρίας αποτελούν μια άλγεβρα με μεταθέτες και αντιμεταθέτες η οποία είναι μια επέκταση της Poincaré άλγεβρας Lie των θεωριών πεδίου και ονομάζεται Graded Lie Algebra.

Στην υπερσυμμετρική θεωρία, ο χωρόχρονος Minkowski δεν περιέχει μόνο χωροχρονικές μεταβλητές αλλά και αντιμετατιθέμενες παραμέτρους θ και $\bar{\theta}$. Αυτός ο χώρος ονομάζεται υπερχώρος και μέσα σε αυτόν μπορούμε να ορίσουμε τα υπερπεδία, δηλαδή πεδία που είναι αναπτύγματα δυνάμεων του θ και $\bar{\theta}$ με συνιστώσες που αντιστοιχούν στα πεδία των σωματιδίων. Τα υπερπεδία χρησιμεύουν στην κατασκευή υπερσυμμετρικών θεωριών βαθμίδας.

Η Υπερσυμμετρία προβλέπει την ύπαρξη επιπρόσθετων υπερσυμμετρικών σωματιδίων τα οποία αντιστοιχούν στα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου: έχουν ίδια μάζα αλλά διαφέρουν στο spin κατά $1/2$. Σε μια υπερσυμμετρική θεωρία πρέπει να υπάρχει ίσος αριθμός μποζονικών και φερμιονικών βαθμών ελευθερίας, εκφυλισμένων ως προς τη μάζα. Για παράδειγμα, για κάθε φερμιόνιο πρέπει να υπάρχουν δύο μποζόνια αφού οι βαθμοί ελευθερίας του φερμιονίου είναι δύο λόγω της ιδιοστροφορμής του, και αντίστοιχα για κάθε αντιφερμιόνιο.

Η Υπερσυμμετρία παραβιάζεται αφού τα υπερσυμμετρικά σωματίδια δεν έχουν παρατηρηθεί μέχρι τώρα. Το αποτέλεσμα αυτού του αυθόρμητου σπάσμου της υπερσυμμετρίας είναι η διαφορά των μαζών ανάμεσα στους υπερσυμμετρικούς συντρόφους. Παρ' όλα αυτά, υπάρχουν σημαντικοί λόγοι που καθιστούν χρήσιμο να ασχολούμαστε με την Υπερσυμμετρία και να θεωρούμε ότι το Minimal Supersymmetric Standard Model είναι ένα από τα καλύτερα μοντέλα το οποίο μπορεί να αντικαταστήσει το Καθιερωμένο Πρότυπο. Ένας λόγος είναι η ικανότητα ενοποίησης των ισχυρών με τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις σε ενέργειες της τάξης μεγέθους της ενέργειας Planck. Ακόμη, η Υπερσυμμετρία βοηθά στο να λυθεί το πρόβλημα ιεραρχίας βαθμίδας, δηλαδή τις μεγάλες διαφορές κλίμακας που παρατηρούνται στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Επίσης, η Υπερσυμμετρία αποτελεί μέρος της θεωρίας των χορδών, μιας θεωρίας κβαντικής βαρύτητας. Ένας άλλος λόγος που θεωρείται η Υπερσυμμετρία σημαντική είναι ότι το υπερσυμμετρικό σωματίδιο με τη μικρότερη μάζα μπορεί να αποτελεί τη σκοτεινή ύλη. Όλα αυτά που αναφέρθηκαν πιο πάνω είναι αδύνατο να εξηγηθούν με το Καθιερωμένο Πρότυπο.

Εισαγωγή στην Άλγεβρα της Υπερσυμμετρίας

Αρχικά, για να ασχοληθούμε με την άλγεβρα της Υπερσυμμετρίας, πρέπει να εισάγουμε τον πίνακα σκέδασης S (Scattering matrix), ένα πίνακα που δρα στην αρχική κατάσταση ενός συστήματος και δίνει μια τελική κατάσταση. Έχει, δηλαδή, πινακοστοιχεία που εκφράζουν το πλάτος πιθανότητας ένα φυσικό σύστημα να μεταβεί από μια αρχική κατάσταση σε μια

τελική κατάσταση. Προφανώς, οι διαστάσεις του πίνακα αυτού είναι άπειρες αφού είναι άπειρος και ο αριθμός των δυνατών καταστάσεων του συστήματος. Όμως, τα στοιχεία του πίνακα δεν είναι ανεξάρτητα εξαιτίας των συμμετριών που περιέχει μια φυσική θεωρία.

Το θεώρημα των Coleman και Mandula μας βοηθάει να βρούμε τις συμμετρίες του πίνακα S και ξεκινά με τις εξής υποθέσεις:

- Ο πίνακας S βασίζεται σε μια τοπική, σχετικιστική θεωρία κβαντικών πεδίων στον τετραδιάστατο χωρόχρονο
- Υπάρχει μόνο πεπερασμένος αριθμός διαφορετικών σωματιδίων που σχετίζονται με τις μονοσωματιδιακές καταστάσεις συγκεκριμένης μάζας
- Υπάρχει ένα χάσμα ενέργειας μεταξύ του κενού και των μονοσωματιδιακών καταστάσεων

Η απόρροια του θεωρήματος αυτού είναι ότι ο πίνακας S έχει συμμετρίες χωροχρονικών μετατοπίσεων, μετασχηματισμών Lorentz και περιορισμένο αριθμό εσωτερικών συμμετριών. Δηλαδή, η πιο γενική άλγεβρα Lie των συμμετριών του πίνακα S περιέχει:

- τους τελεστές χωροχρονικών μετατοπίσεων P_m οι οποίοι μεταβάλλουν την τετραδιανυσματική θέση μιας κατάστασης
- τους τελεστές των μετασχηματισμών Lorentz M_{mn}
- πεπερασμένο αριθμό ερμιτιανών τελεστών B_l που είναι βαθμωτοί, οι οποίοι μετατίθενται με τους μετασχηματισμούς Lorentz (εσωτερικές συμμετρίες).

Οι τελευταίοι τελεστές εκτός από το ότι είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, ανήκουν και στην άλγεβρα μιας συμπαγούς ομάδας Lie.

Παρατηρήσαμε, με βάση το θεώρημα Coleman-Mandula, ότι μόνο τα τρία εκείνα είδη συνεχών συμμετριών του πίνακα S είναι επιτρεπτά. Όμως, το θεώρημα αυτό λαμβάνει υπόψιν μόνο γεννήτορες που ικανοποιούν μεταθετικές σχέσεις δηλαδή "ζυγά" αντικείμενα. Μπορούμε να γενικεύσουμε την άλγεβρα αυτή, εάν εκτός από τους B_l , P_m και M_{mn} προστεθούν και κάποιοι άλλοι γεννήτορες, τους οποίους θα ονομάσουμε "μονούς". Έτσι, θα υπάρχουν στην άλγεβρά μας τόσο σχέσεις μετάθεσης όσο και σχέσεις αντιμετάθεσης ανάμεσα στους γεννήτορες. Οι σχέσεις αυτές παίρνουν την πιο κάτω μορφή:

$$\begin{aligned} \{Q, Q'\} &= X \\ [X, X'] &= X'' \\ [Q, X] &= Q'' \end{aligned} \tag{5.1}$$

όπου Q , Q' και Q'' αντιπροσωπεύουν μονά (αντιμετατιθέμενα) στοιχεία της άλγεβρας και X , X' και X'' ζυγά (μετατιθέμενα) στοιχεία.

Η γενική υπερσυμμετρική άλγεβρα παρουσιάζεται πιο κάτω:

$$\begin{aligned}
[P_m, P_n] &= 0 \\
[P_m, Q_a^L] &= [P_m, \bar{Q}_{\dot{a}L}] = 0 \\
[P_m, B_l] &= [P_m, X^{\widehat{LM}}] = 0 \\
\{Q_a^L, \bar{Q}_{\dot{a}M}\} &= 2\sigma_{a\dot{a}}^m P_m \delta^L_M \\
\{Q_a^L, Q_b^M\} &= \epsilon_{ab} X^{\widehat{LM}} \\
\{\bar{Q}_{\dot{a}L}, \bar{Q}_{\dot{b}M}\} &= \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} X^{\dagger\widehat{LM}} \\
[X^{\widehat{LM}}, \bar{Q}_{\dot{a}K}] &= [X^{\widehat{LM}}, Q_a^K] = 0 \\
[X^{\widehat{LM}}, X^{\widehat{KN}}] &= [X^{\widehat{LM}}, B_l] = 0 \\
[B_l, B_m] &= i c_{lm}^k B_k \\
[Q_a^L, B_l] &= S_{lM}^L Q_a^M \\
[\bar{Q}_{\dot{a}L}, B^l] &= -S^{*l}_L{}^M \bar{Q}_{\dot{a}M} \\
X^{\widehat{LM}} &= \alpha^{l,\widehat{LM}} B_l
\end{aligned} \tag{5.2}$$

όπου S ερμιτιανός πίνακας. Οι τελεστές Q έχουν σπινωριακό δείκτη a και δρουν σε αριστερόστροφους σπίνωρες, δηλαδή σε σπίνωρες που μετασχηματίζονται με βάση την αναπαράσταση $M(\frac{1}{2}, 0)$ της ομάδας Lorentz. Οι τελεστές \bar{Q} έχουν δείκτη τύπου \dot{a} και δρουν σε δεξιόστροφους σπίνωρες, δηλαδή σε σπίνωρες που μετασχηματίζονται με βάση την αναπαράσταση $M(0, \frac{1}{2})$ της ομάδας Lorentz. Ο τελεστής \bar{Q} αποτελεί το ερμιτιανό συζυγές του τελεστή Q .

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι όσο περισσότερους τελεστές Q και \bar{Q} έχουμε, τόσο περισσότερα υπερσυμμετρικά σωματίδια έχουμε. Το πλήθος των τελεστών Q και \bar{Q} φαίνεται από τους δείκτες $L, M, K = 1, \dots, \mathcal{N}$. Επίσης, οι δείκτες $a, b, \dot{a}, \dot{b} = 1, 2$ των πιο πάνω τελεστών αναφέρονται τους σπίνωρες Weyl. Οι λατινικοί δείκτες $m, n, l = 1, \dots, 4$ δηλώνουν τα τετραδιανύσματα Lorentz. Τα μετατιθέμενα αντικείμενα X ονομάζονται κεντρικά φορτία γιατί μετατίθενται με όλους τους υπόλοιπους γεννήτορες. Ακόμη, όλοι οι γεννήτορες εκτός από τους Q είναι μετατιθέμενα αντικείμενα. Τέλος, ο συμβολισμός $X^{\widehat{LM}}$ υποδηλώνει αντισυμμετρικότητα ως προς L και M .

Σημειώνουμε ότι για να αποδειχτούν οι σχέσεις (5.2) χρησιμοποιήθηκε το θεώρημα Coleman-Mandula και οι ταυτότητες Jacobi. Επίσης, η άλγεβρα της Υπερσυμμετρίας ονομάζεται Graded Lie Algebra και είναι η μοναδική άλγεβρα που είναι συμβατή με τις συμμετρίες του πίνακα S και με τη σχετικιστική θεωρία κβαντικών πεδίων. Στην άλγεβρα αυτήν, συμπεριλαμβάνονται βεβαίως και οι τελεστές μετασχηματισμών Lorentz M_{mn} αλλά χάριν συντομίας οι σχέσεις μετάθεσης δεν έχουν συμπεριληφθεί στην εξίσωση (5.2).

Δημιουργία Υπερσυμμετρικών Καταστάσεων

Σε αυτό το υποκεφάλαιο, θα μελετήσουμε τις μη αναγώγιμες υπερσυμμετρικές αναπαράστασεις όταν βρισκόμαστε στην υπερσυμμετρική άλγεβρα με $\mathcal{N}=1$ ή σε διευρυμένες υπερσυμμετρικές άλγεβρες ($\mathcal{N}>1$). Για να επιτευχθεί αυτό, θα ξεκινήσουμε από μια μονοσωματιδιακή κατάσταση την οποία ονομάζουμε κατάσταση κενού, η οποία συμβολίζεται με Ω_{spin} , και θα δράσουμε με τους υπερσυμμετρικούς τελεστές στην κατάσταση αυτή. Επομένως, θα δημιουργηθούν καταστάσεις που ανήκουν στην ίδια αναπαράσταση και αποτελούν τους υπερσυμμετρικούς συντρόφους της κατάστασης κενού Ω_{spin} .

Πιο κάτω, θα αποδείξουμε ότι σε κάθε υπερσυμμετρική αναπαράσταση υπάρχει ίσος αριθμός μποζονικών και φερμιονικών καταστάσεων. Έτσι, εισάγουμε ένα τελεστή $(-)^{N_F}$ ο οποίος δρα σε φερμιονικές και μποζονικές καταστάσεις ως εξής:

$$\begin{aligned} (-)^{N_F}(boson) &= (boson) \\ (-)^{N_F}(fermion) &= -(fermion) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Έστω ότι έχουμε μια τυχαία κατάσταση $|\psi\rangle$ και μια καινούργια κατάσταση $|\psi_{new}\rangle = Q_a|\psi\rangle$. Η κατάσταση $|\psi_{new}\rangle$ θα είναι φερμιόνιο αν η κατάσταση $|\psi\rangle$ είναι μποζόνιο και το αντίστροφο λόγω του σπινωριακού δείκτη του τελεστή Q . Συνεπώς, προκύπτει:

$$\begin{aligned} (-)^{N_F}|\psi\rangle &= \pm|\psi\rangle \\ (-)^{N_F}Q_a|\psi\rangle &= \mp Q_a|\psi\rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την πρώτη σχέση με τον τελεστή Q_a από αριστερά και να εξισώσουμε τις δύο σχέσεις. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{aligned} (-)^{N_F}Q_a|\psi\rangle &= -Q_a(-)^{N_F}|\psi\rangle \\ \Rightarrow \{Q_a, (-)^{N_F}\} &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Τώρα, έστω ότι έχουμε:

$$tr[(-)^{N_F}\{Q_a^A, \bar{Q}_{bB}\}] = tr[(-)^{N_F}(Q_a^A\bar{Q}_{bB} + \bar{Q}_{bB}Q_a^A)] \quad (5.6)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την κυκλική ιδιότητα του ίχνους και τη σχέση αντιμετάθεσης στην εξίσωση (5.5) παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$tr[(-)^{N_F}\{Q_a^A, \bar{Q}_{bB}\}] = tr[-Q_a^A(-)^{N_F}\bar{Q}_{bB} + Q_a^A(-)^{N_F}\bar{Q}_{bB}] = 0 \quad (5.7)$$

Επίσης, λαμβάνοντας υπόψιν την πιο πάνω σχέση και τη σχέση αντιμετάθεσης που παρουσιάστηκε προηγουμένως:

$$\{Q_a^A, \bar{Q}_{bB}\} = 2\sigma_{ab}^m P_m \delta^A_B \quad (5.8)$$

καταλήγουμε:

$$\begin{aligned} 0 &= tr[(-)^{N_F} \{Q_a^A, \bar{Q}_{bB}\}] = 2\sigma_{ab}^m \delta^A_B tr[(-)^{N_F} P_m] \\ &\Rightarrow tr[(-)^{N_F}] = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Δεδομένου, βεβαίως, ότι $[P_m, Q_a^L] = [P_m, \bar{Q}_{aL}] = 0$, οι καταστάσεις που δημιουργούνται από τη δράση του Q στο κενό (το οποίο είναι ιδιοκατάσταση του P_m , με κάποια ιδιοτιμή p_m), έχουν την ίδια ιδιοτιμή όπως το κενό. Συνεπώς, στον χώρο των καταστάσεων αυτών, ο τελεστής P_m δρα ως ένα πολλαπλάσιο του μοναδιαίου τελεστή. Ξέρουμε ότι μπορούμε να ορίσουμε το ίχνος όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$tr[(-)^{N_F}] = \sum \langle \psi | (-)^{N_F} | \psi \rangle \quad (5.10)$$

με το πιο πάνω άθροισμα να εκτείνεται σε όλες τις καταστάσεις μιας αναπαράστασης. Αφού το πρώτο μέλος της πιο πάνω εξίσωσης είναι μηδέν, οι καταστάσεις στο δεύτερο μέλος πρέπει να είναι μισές μποζονικές και μισές φερμιονικές έτσι ώστε να ικανοποιείται η ισότητα. Με το τρόπο αυτό αποδείξαμε ότι σε μια αναπαράσταση έχουμε τον ίδιο αριθμό μποζονικών και φερμιονικών καταστάσεων.

Ας εστιάσουμε την προσοχή μας σε αναπαράστασεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας που αντιστοιχούν σε καταστάσεις ενός σωματιδίου με μάζα $\tilde{m} \neq 0$. Συνεπώς, ο τελεστής της ορμής θα πάρει τη μορφή $P^2 = -\tilde{m}^2$. Έστω ότι επιλέγουμε ένα σύστημα αναφοράς στο οποίο το σωματίδιο που μελετούμε ηρεμεί και συνεπώς $P_m = (-M, 0, 0, 0)$. Ξέρουμε ότι δρώντας με τους τελεστές Q στην κατάσταση αυτή θα προκύψουν οι υπερσυμμετρικοί συντρόφοι της κατάστασης κενού. Έτσι, οι καινούριες καταστάσεις θα έχουν την ίδια μάζα ηρεμίας με τις καταστάσεις κενού. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς ισχύουν οι πιο κάτω αντιμεταθετικές σχέσεις (σύγκρινε με Εξ.(5.2)):

$$\begin{aligned} \{Q_a^A, \bar{Q}_{bB}\} &= 2\tilde{m} \delta_{ab}^m \delta^A_B \\ \{Q_a^A, Q_b^B\} &= \{\bar{Q}_{aA}, \bar{Q}_{bB}\} = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

όπου οι δείκτες A, B παίρνουν τις τιμές 1 μέχρι \mathcal{N} ανάλογα με το σε ποια υπερσυμμετρική άλγεβρα βρισκόμαστε.

Στη συνέχεια, μπορούμε να ορίσουμε τους τελεστές αναβίβασης $(\alpha_a^A)^\dagger$:

$$(\alpha_a^A)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{m}}} \bar{Q}_{\dot{a}A} \quad (5.12)$$

και τους τελεστές καταβίβασης α_a^A :

$$\alpha_a^A = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{m}}} Q_a^A \quad (5.13)$$

Επίσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης έτσι ώστε οι σχέσεις (5.11) να πάρουν την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} \{\alpha_a^A, (\alpha_b^B)^\dagger\} &= \delta_a^b \delta^A_B \\ \{\alpha_a^A, \alpha_b^B\} &= \{(\alpha_a^A)^\dagger, (\alpha_b^B)^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Εξ ορισμού, όταν δράσουν οι τελεστές αναβίβασης πάνω σε μια κατάσταση κενού (Ω) δημιουργούνται οι καταστάσεις μιας αναπαράστασης ως εξής:

$$\Omega^{(n)a_1 \dots a_n}_{A_1 \dots A_n} = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\alpha_{a_1}^{A_1})^\dagger \dots (\alpha_{a_n}^{A_n})^\dagger \Omega \quad (5.15)$$

όπου οι δείκτες a_i παίρνουν τις τιμές 1 και 2 και οι δείκτες A_i τις τιμές 1 μέχρι \mathcal{N} . Το κενό (Ω) ορίζεται ως εξής:

$$\alpha_a^A \Omega = 0 \quad (5.16)$$

Λόγω του ότι ο τελεστής αναβίβασης $(\alpha_a^A)^\dagger$ αντιμετατίθεται, η κατάσταση $\Omega^{(n)}$ είναι αντισυμμετρική κάτω από εναλλαγές των δεικτών a_i ή A_i . Άρα, στο πιο πάνω γινόμενο τελεστών δεν μπορούμε να έχουμε δύο τελεστές με τους ίδιους δείκτες a_i ή A_i γιατί θα παίρναμε μηδέν.

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι κάθε τελεστής αναβίβασης έχει $2\mathcal{N}$ συνιστώσες, προκύπτει ότι, για οποιαδήποτε τιμή του n , υπάρχουν $\binom{2\mathcal{N}}{n}$ διαφορετικές καταστάσεις. Προσθέτοντας ως προς όλες τις τιμές που παίρνει το n , παίρνουμε τη διαστατικότητα της αναπαράστασής μας:

$$d = \sum_{n=0}^{2\mathcal{N}} \binom{2\mathcal{N}}{n} = 2^{2\mathcal{N}} \quad (5.17)$$

Συνεπώς, η αναπαράσταση αυτή περιέχει $2^{2\mathcal{N}}$ καταστάσεις, εκ των οποίων $2^{2\mathcal{N}-1}$ είναι μποζονικές και $2^{2\mathcal{N}-1}$ φερμιονικές.

Τώρα, για $\mathcal{N}=1$ η θεμελιώδης αναπαράσταση (δηλαδή η αναπαράσταση που προκύπτει ξεκινώντας από κατάσταση κενού με σπιν 0) αποτελείται από τις εξής καταστάσεις:

$$\begin{aligned} & \Omega \\ & (\alpha_a)^\dagger \Omega \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_a)^\dagger(\alpha_b)^\dagger \Omega = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\epsilon^{ab}(\alpha^c)^\dagger(\alpha_c)^\dagger \Omega \end{aligned} \quad (5.18)$$

Η κατάσταση Ω έχει σπιν μηδέν, η κατάσταση $(\alpha_a)^\dagger \Omega$ έχει σπιν $\frac{1}{2}$ και η κατάσταση $\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_a)^\dagger(\alpha_b)^\dagger \Omega$ έχει σπιν 0.

Υπάρχουν, όμως περιπτώσεις όπου η κατάσταση κενού Ω_j έχει σπιν j μεγαλύτερο από μηδέν. Στον πιο κάτω πίνακα φαίνονται τα σωματίδια που υπάρχουν σε τέτοιες περιπτώσεις αλλά και τα σωματίδια που υπάρχουν στη θεμελιώδη αναπαράσταση.

Spin	Ω_0	$\Omega_{\frac{1}{2}}$	Ω_1	$\Omega_{\frac{3}{2}}$
0	2	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	2	1	0
1	0	1	2	1
$\frac{3}{2}$	0	0	1	2
2	0	0	0	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 5.1: Υπερσυμμετρικές αναπαραστάσεις για $\mathcal{N}=1$

Αναπαραστάσεις, για τις οποίες η κατάσταση κενού έχει σπιν $j > 3/2$, περιέχουν και σωματίδια με σπιν > 2 , και κατά συνέπεια δεν βρίσκουν εφαρμογή στη φύση, δεδομένου ότι η κβάντωση σωματιδίων με σπιν > 2 οδηγεί σε παραβίαση της μοναδιακότητας. Μπορούμε να βρούμε και τις υπερσυμμετρικές αναπαραστάσεις για τις περιπτώσεις $\mathcal{N} > 1$. Βεβαίως, η περίπτωση $\mathcal{N}=1$ είναι αυτή που έχει μεγαλύτερη εφαρμογή στη φαινομενολογία της Φυσικής beyond the Standard Model (BSM), και μπορεί να μελετηθεί με περισσότερο ελεγχόμενο τρόπο σε αριθμητικές προσομοιώσεις. Οι περιπτώσεις για $\mathcal{N} > 4$ απορρίπτονται καθώς η θεμελιώδης αναπαράσταση περιέχει καταστάσεις με τιμή ιδιοστροφορμής μεγαλύτερη από 2.

5.2 Θεωρία Υπερσυμμετρίας για Βαθμωτά Πεδία

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την πιο απλή θεωρία της Υπερσυμμετρίας. Η θεωρία αυτή αποτελείται από το βαθμωτό πεδίο A , το σπινωριακό πεδίο ψ και το βαθμωτό, βοηθητικό (auxiliary) πεδίο F . Το πεδίο F ονομάζεται βοηθητικό γιατί μπορεί να εκφραστεί συναρτησί των υπόλοιπων πεδίων της θεωρίας, δηλαδή συναρτησί των πεδίων A και ψ . Σίγουρα, η θεωρία αυτή δεν αποτελεί μια θεωρία που μπορεί να περιγράψει τη φύση αφού

αποτελείται από πεδία με σπιν $\frac{1}{2}$ όπως το πεδίο ψ και σπιν 0 όπως τα πεδία A και F, ενώ στη φύση υπάρχουν και σωματίδια με σπιν 1.

Αρχικά, κάτω από ένα μετασχηματισμό Υπερσυμμετρίας, το βαθμωτό πεδίο A μετασχηματίζεται όπως φαίνεται πιο κάτω:

$$A' = e^{\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}} A \quad (5.19)$$

όπου ξ και $\bar{\xi}$ είναι αντιμετατιθέμενες, ανεξάρτητες παράμετροι με σπινοριακό δείκτη, δηλαδή με δύο βαθμούς ελευθερίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το γινόμενο ξQ να μην έχει σπινοριακούς δείκτες αφού οι τελεστές Q έχουν σπινοριακούς δείκτες. Οι συνιστώσες των παραμέτρων ξ και $\bar{\xi}$ αντιμετατίθενται μεταξύ τους αλλά και με τις συνιστώσες των τελεστών Q επειδή είναι επίσης μονά αντικείμενα. Κάποιες σχέσεις μετάθεσης και αντιμετάθεσης είναι οι πιο κάτω:

$$\{\xi^a, \xi^b\} = \{\xi^a, Q_b\} = \{\xi^a, \bar{\xi}^b\} = \{\xi^a, \bar{Q}_b\} = [P_m, \xi^a] = 0 \quad (5.20)$$

και παρομοίως για το $\bar{\xi}$.

Οι παράμετροι ξ και $\bar{\xi}$ μας επιτρέπουν να εκφράσουμε την υπερσυμμετρική θεωρία μόνο μέσω μεταθετικών σχέσεων:

$$\begin{aligned} [\xi Q, \bar{\xi} \bar{Q}] &= 2\xi \sigma^m \bar{\xi} P_m \\ [\xi Q, \xi Q] &= [\bar{\xi} \bar{Q}, \bar{\xi} \bar{Q}] = 0 \\ [P^m, \xi Q] &= [P^m, \bar{\xi} \bar{Q}] = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

όπου

$$\begin{aligned} \xi Q &= \xi^a Q_a \\ \bar{\xi} \bar{Q} &= \bar{\xi}_a \bar{Q}^a \end{aligned} \quad (5.22)$$

Τώρα, θα βρούμε τις διαστάσεις του τελεστή Q, καθώς και της παραμέτρου ξ . Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2\sigma_{ab}^m P_m \quad (5.23)$$

και το ότι ο τελεστής P_m έχει διαστάσεις ενέργειας προκύπτει ότι ο τελεστής Q έχει διαστάσεις $[\text{Ενέργεια}]^{\frac{1}{2}}$. Στη συνέχεια, παρατηρώντας τη σχέση (5.19) καταλήγουμε ότι η παράμετρος ξ έχει διαστάσεις $[\text{Ενέργεια}]^{-\frac{1}{2}}$.

Μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor τον όρο του εκθετικού στη σχέση (5.19) έτσι ώστε:

$$A' = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q})^N}{N!} A \quad (5.24)$$

οπότε ο απειροελάχιστος μετασχηματισμός Υπερσυμμετρίας του πεδίου A ο οποίος περιέχει μόνο μία δύναμη των παραμέτρων ξ και $\bar{\xi}$ έχει την εξής μορφή:

$$\delta_{\xi} A = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \times A \quad (5.25)$$

Παρομοίως,

$$\delta_{\xi} \psi = (\xi Q + \bar{\xi} \bar{Q}) \times \psi \quad (5.26)$$

Ο μετασχηματισμός δ_{ξ} ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} (\delta_{\eta} \delta_{\xi} - \delta_{\xi} \delta_{\eta}) A &= 2(\eta \sigma^m \bar{\xi} - \xi \sigma^m \bar{\eta}) P_m A \\ &= -2i(\eta \sigma^m \bar{\xi} - \xi \sigma^m \bar{\eta}) \partial_m A \end{aligned} \quad (5.27)$$

και

$$(\delta_{\eta} \delta_{\xi} - \delta_{\xi} \delta_{\eta}) \psi = -2i(\eta \sigma^m \bar{\xi} - \xi \sigma^m \bar{\eta}) \partial_m \psi \quad (5.28)$$

σύμφωνα με τις σχέσεις (5.21).

Ξεκινώντας από ένα βαθμωτό πεδίο A, το οποίο είναι κατάσταση υψηλότερου βάρους μιας αναπαράστασης της υπερσυμμετρίας (δηλαδή $\bar{Q}A=0$, κατ'αναλογία με τη σχέση (5.16)), ορίζουμε το σπίνορα ψ ως το πεδίο στο οποίο μετασχηματίζεται το A με τον εξής τρόπο:

$$\delta_{\xi} A = \sqrt{2} \xi \psi \quad (5.29)$$

Σημειώνουμε ότι αν το πεδίο A έχει διαστάσεις [Ενέργεια]^l, τότε το πεδίο ψ έχει διαστάσεις [Ενέργεια]^{l+ $\frac{1}{2}$} λόγω του ότι το η παράμετρος ξ έχει διαστάσεις [Ενέργεια]^{- $\frac{1}{2}$} . Επίσης, το πεδίο ψ έχει σπινორιακούς δείκτες, δηλαδή έχει δύο βαθμούς ελευθερίας.

Τώρα, κάτω από ένα υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό, το καινούριο πεδίο ψ μετασχηματίζεται σε ένα τανυστικό πεδίο F και στην παράγωγο του πεδίου A:

$$\delta_{\xi} \psi = i\sqrt{2} \sigma^m \bar{\xi} \partial_m A + \sqrt{2} \xi F \quad (5.30)$$

Προφανώς, το καινούριο πεδίο F θα είναι βαθμωτό και θα έχει διαστάσεις $[\text{Ενέργεια}]^{l+1}$. Η έκφραση που πολλαπλασιάζει το $\bar{\xi}$ στην εξίσωση (5.30) έχει τη δεδομένη μορφή προκειμένου να ικανοποιείται η σχέση (5.27).

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.28) και κάνοντας τις πράξεις:

$$\begin{aligned} (\delta_\eta \delta_\xi - \delta_\xi \delta_\eta) \psi &= -2i(\eta \sigma^n \bar{\xi} - \xi \sigma^n \bar{\eta}) \partial_n \psi - i \sigma^n \bar{\sigma}^m \partial_m \psi [\eta \sigma^n \bar{\xi} - \xi \sigma^n \bar{\eta}] \\ &+ \sqrt{2}(\xi \delta_\eta F - \eta \delta_\xi F) \end{aligned} \quad (5.31)$$

προκύπτει ότι ο μοναδικός τρόπος να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (5.28) και (5.31) είναι να ισχύει η πιο κάτω σχέση για τον απειροελάχιστο μετασχηματισμό του πεδίου F :

$$\delta_\xi F = i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m \partial_m \psi \quad (5.32)$$

Παρατηρούμε ότι αφού δεν εμφανίζεται άλλο πεδίο στην εν λόγω θεωρία, το πεδίο F είναι το τελευταίο πεδίο της θεωρίας αυτής. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι μετασχηματισμοί και των τριών πεδίων είναι γραμμικοί ως προς τα πεδία αυτά.

Η επιλογή των πεδίων και των μετασχηματισμών τους έγινε με τέτοιο τρόπο ούτως ώστε να κατασκευαστεί ένα multiplet που περιέχει συνιστάμενα πεδία τα οποία μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (5.27) και (5.28). Αυτό ονομάζεται χειραλικό ή βαθμωτό multiplet.

Μελετώντας τη διαστατικότητα των πεδίων, παρατηρούμε ότι το τελευταίο πεδίο που εισάγεται στη θεωρία είναι πάντα το πεδίο με τις μεγαλύτερες διαστάσεις. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι γιατί όταν εισάγεται ένα νέο πεδίο στη θεωρία μας μέσα από ένα απειροελάχιστο μετασχηματισμό, έχει αυτομάτως μεγαλύτερες διαστάσεις από το πεδίο που μετασχηματίζεται. Λόγω του ότι οι διαστάσεις των παραμέτρων ξ και $\bar{\xi}$ είναι $\frac{1}{2}$, οι διαστάσεις των καινούριων πεδίων στη θεωρία μας θα αυξάνονται κατά $\frac{1}{2}$. Για να ικανοποιούνται αυτές οι διαστασιακές απαιτήσεις και ταυτόχρονα να μην εισάγεται ένα νέο πεδίο στη θεωρία, το τελευταίο πεδίο της θεωρίας πρέπει να μετασχηματίζεται σαν χωροχρονική ολική παράγωγος των προηγούμενων πεδίων, όπως συμβαίνει με το πεδίο F στη θεωρία αυτή.

Τώρα, για να δημιουργήσουμε μια δράση η οποία να είναι αναλλοίωτη κάτω από τους απειροελάχιστους μετασχηματισμούς Υπερσυμμετρίας πρέπει να εισαγάγουμε μια Λαγκρανζιανή πυκνότητα η οποία να μετασχηματίζεται σε μια ολική παράγωγο. Δύο όροι αυτής της Λαγκρανζιανής πυκνότητας είναι:

$$\begin{aligned} L_0 &= i(\partial_m \bar{\psi}) \bar{\sigma}^m \psi + A^* \square A + F^* F \\ L_m &= AF + A^* F^* - \frac{1}{2} \psi \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} \bar{\psi} \end{aligned} \quad (5.33)$$

όπου L_0 ο κινηματικός όρος και L_m ο όρος μάζας.

Από την ολική Λαγκρανζιανή πυκνότητα (όπου m αυθαίρετη παράμετρος):

$$L = L_0 + mL_m \quad (5.34)$$

προκύπτουν οι εξής εξισώσεις κίνησης:

$$i\bar{\sigma}^n \partial_n \psi + m\bar{\psi} = 0 \quad (5.35)$$

$$F + mA^* = 0 \quad (5.36)$$

και

$$\square A + mF^* = 0 \quad (5.37)$$

Τελικά, βλέπουμε ότι το πεδίο F (και F^*) εκφράζεται πλήρως συναρτήσει του πεδίου A . Γι' αυτό το πεδίο F ονομάζεται βοηθητικό πεδίο και η θεωρία μας περιέχει δύο αντί τρία ανεξάρτητα πεδία. Επίσης, όταν αντικαταστήσουμε τη εξίσωση (5.36) στην εξίσωση (5.37), προκύπτει:

$$\square A - m^2 A = 0 \quad (5.38)$$

Επομένως, κατασκευάσαμε μια Λαγκρανζιανή πυκνότητα που περιγράφει δύο ελεύθερα πεδία με την ίδια μάζα. Επίσης, αφού το πεδίο A είναι μιγαδικό και το πεδίο ψ σπινωριακό, οι μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας είναι ίσοι με τους φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας.

Πιο κάτω, θα αποδείξουμε ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα μεταβάλλεται σαν ολική παράγωγος κάτω από τους μετασχηματισμούς των εξισώσεων (5.29), (5.30) και (5.32). Αυτό σημαίνει πως η δράση παραμένει αναλλοίωτη. Ξεκινώντας από τον κινηματικό όρο, προκύπτει η ποσότητα $\delta_\xi L_0$:

$$\begin{aligned} \delta_\xi L_0 &= i\partial_n[-i\sqrt{2}\xi\sigma^m(\partial_m A^*) + \sqrt{2}\bar{\xi}F^*]\bar{\sigma}^n\psi + i(\partial_n\bar{\psi})\bar{\sigma}^n[i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}(\partial_m A) + \sqrt{2}\xi F] \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\psi}(\partial_m\partial^m A) + A^*\partial_m\partial^m(\sqrt{2}\xi\psi) - i\sqrt{2}(\partial_m\bar{\psi})\bar{\sigma}^m\xi F + F^*[i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m(\partial_m\psi)] \\ &= \sqrt{2}\xi\sigma^m(\partial_n\partial_m A^*)\bar{\sigma}^n\psi + i\sqrt{2}\bar{\xi}(\partial_n F^*)\bar{\sigma}^n\psi - \sqrt{2}(\partial_n\bar{\psi})\bar{\sigma}^n\sigma^m\bar{\xi}(\partial_m A) \\ &\quad + \sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\psi}(\partial_m\partial^m A) + \sqrt{2}A^*\xi(\partial_m\partial^m\psi) + i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m(\partial_m\psi)F^* \\ &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m(\partial_m\psi)F^* + i\sqrt{2}\bar{\xi}(\partial_n F^*)\bar{\sigma}^n\psi + \sqrt{2}\xi\sigma^m(\partial_n\partial_m A^*)\bar{\sigma}^n\psi \\ &\quad - \sqrt{2}(\partial_n\bar{\psi})\bar{\sigma}^n\sigma^m\bar{\xi}(\partial_m A) + \sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\psi}(\partial_m\partial^m A) + \sqrt{2}A^*\xi(\partial_m\partial^m\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i\sqrt{2}\partial_m(F^*\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\psi) - \sqrt{2}(\partial_m\partial^m A^*)\xi\psi + \sqrt{2}(\partial_m\bar{\psi})\bar{\xi}(\partial^m A) + \sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\psi}(\partial_m\partial^m A) \\
&\quad + \sqrt{2}A^*\xi(\partial_m\partial^m\psi) \\
&= i\sqrt{2}\partial_m(\bar{\xi}F^*\bar{\sigma}^m\psi) + \sqrt{2}\partial_m[\bar{\psi}\bar{\xi}(\partial^m A)] - \sqrt{2}(\partial_m\partial^m A^*)\xi\psi + \sqrt{2}A^*\xi(\partial_m\partial^m\psi)
\end{aligned}$$

Όταν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση:

$$\square(A^*\psi_\alpha) = \psi_\alpha(\square A^*) + (\square\psi_\alpha)A^* + 2(\partial_m A^*)(\partial^m\psi_\alpha) \quad (5.39)$$

προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi L_0 &= i\sqrt{2}\partial_m(F^*\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\psi) + \sqrt{2}\partial_m[\bar{\psi}\bar{\xi}(\partial^m A)] - \sqrt{2}(\square A^*)\xi\psi \\
&\quad + \sqrt{2}\xi[\square(A^*\psi) - \psi(\square A^*) - 2(\partial_m A^*)(\partial^m\psi)] \\
&= i\sqrt{2}\partial_m(F^*\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\psi) + \sqrt{2}\xi\square(A^*\psi) + \sqrt{2}\partial_m[\bar{\psi}\bar{\xi}(\partial^m A)] \\
&\quad - 2\sqrt{2}\xi\psi(\square A^*) - 2\sqrt{2}\xi(\partial_m A^*)(\partial^m\psi) \\
&= i\sqrt{2}\partial_m(F^*\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\psi) + \sqrt{2}\xi\square(A^*\psi) + \sqrt{2}\partial_m[\bar{\psi}\bar{\xi}(\partial^m A)] - 2\sqrt{2}\xi\partial^m[(\partial_m A^*)\psi] \\
\Rightarrow \delta_\xi L_0 &= \sqrt{2}\partial_m[i\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\psi F^* + \xi\partial^m(A^*\psi) + \bar{\psi}\bar{\xi}(\partial^m A) - 2\xi(\partial^m A^*)\psi]
\end{aligned}$$

Παρομοίως, βρίσκουμε τη μεταβολή του όρου μάζας $\delta_\xi L_m$:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi L_m &= (\delta_\xi A)F + A(\delta_\xi F) + (\delta_\xi A^*)F^* + A^*(\delta_\xi F^*) - \frac{1}{2}(\delta_\xi\psi)\psi \\
&\quad - \frac{1}{2}\psi(\delta_\xi\psi) - \frac{1}{2}(\delta_\xi\bar{\psi})\bar{\psi} - \frac{1}{2}\bar{\psi}(\delta_\xi\bar{\psi}) \\
&= \sqrt{2}\xi\psi F + i\sqrt{2}A\bar{\xi}\bar{\sigma}^m(\partial_m\psi) + \sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\psi}F^* - i\sqrt{2}A^*(\partial_m\bar{\psi})\bar{\sigma}^m\xi \\
&\quad - \frac{1}{2}[i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}(\partial_m A) + \sqrt{2}\xi F]\psi - \frac{1}{2}\psi[i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}(\partial_m A) + \sqrt{2}\xi F] \\
&\quad - \frac{1}{2}[-i\sqrt{2}\xi\sigma^m(\partial_m A^*) + \sqrt{2}\bar{\xi}F^*]\bar{\psi} - \frac{1}{2}\bar{\psi}[-i\sqrt{2}\xi\sigma^m(\partial_m A^*) + \sqrt{2}\bar{\xi}F^*] \\
&= i\sqrt{2}A\bar{\xi}\bar{\sigma}^m(\partial_m\psi) - i\sqrt{2}A^*(\partial_m\bar{\psi})\bar{\sigma}^m\xi - i\frac{\sqrt{2}}{2}\psi\sigma^m\bar{\xi}(\partial_m A) - i\frac{\sqrt{2}}{2}\psi\sigma^m\bar{\xi}(\partial_m A) \\
&\quad + i\frac{\sqrt{2}}{2}\xi\sigma^m(\partial_m A^*)\bar{\psi} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\xi\sigma^m\bar{\psi}(\partial_m A^*) \\
&= i\sqrt{2}A\bar{\xi}\bar{\sigma}^m(\partial_m\psi) - i\sqrt{2}A^*(\partial_m\bar{\psi})\bar{\sigma}^m\xi - i\sqrt{2}\psi\sigma^m\bar{\xi}(\partial_m A) + i\sqrt{2}\xi\sigma^m\bar{\psi}(\partial_m A^*)
\end{aligned}$$

Τέλος, όταν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\chi_1\sigma^m\bar{\chi}_2 = -\bar{\chi}_2\bar{\sigma}^m\chi_1 \quad (5.40)$$

όπου χ_1, χ_2 τυχαίοι σπινόρες Weyl, προκύπτει:

$$\delta_\xi L_m = i\sqrt{2}\partial_m(A\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\psi - \bar{\psi}\bar{\sigma}^m\xi A^*)$$

Συνοψίζοντας η συνολική μεταβολή της Λαγκρανζιανής πυκνότητας κάτω από ένα απειροελάχιστο μετασχηματισμό Υπερσυμμετρίας είναι:

$$\begin{aligned} \delta_\xi L = & \sqrt{2}\partial_m[i\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\psi F^* + \xi\partial^m(A^*\psi) + \bar{\psi}\bar{\xi}(\partial^m A) - 2\xi(\partial^m A^*)\psi] \\ & + \sqrt{2}im\partial_m(A\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\psi - \bar{\psi}\bar{\sigma}^m\xi A^*) \end{aligned} \quad (5.41)$$

Έτσι, αποδείξαμε ότι η μεταβολή αυτή της Λαγκρανζιανής πυκνότητας είναι ολική παράγωγος. Επομένως, αποδείξαμε και το αναλλοίωτο της δράσης κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς.

5.3 Υπερσυμμετρικές Θεωρίες Βαθμίδας

Στο παρόν υποκεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την εύρεση της γενικότερης Λαγκρανζιανής πυκνότητας που υπάρχει στην SQED και στην SQCD. Στις δύο αυτές Λαγκρανζιανές συμπεριλαμβάνονται όροι αλληλεπίδρασης ανάμεσα σε χειραλικά και διανυσματικά υπερπεδία. Τα χειραλικά και διανυσματικά υπερπεδία αναπαριστούν πεδία ύλης και πεδία βαθμίδας, αντίστοιχα, στην υπερσυμμετρική θεωρία. Πιο κάτω θα αναφερθούμε στο σπινორιακό πεδίο ψ και στον υπερσυμμετρικό σύντροφό του, το πεδίο A (και τα δύο με μάζα m), τα οποία είναι χειραλικά πεδία. Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε το πεδίο v_m , το οποίο αναπαριστά το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό και ένα σπινორιακό πεδίο λ το οποίο αποτελεί τον υπερσυμμετρικό σύντροφο του πεδίου v_m .

Ξεκινούμε με την περίπτωση $U(1)$ και στη συνέχεια θα γενικεύσουμε την περίπτωση αυτή για μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας. Αρχικά, εισάγουμε τον καθολικό $U(1)$ μετασχηματισμό ενός χειραλικού πεδίου:

$$\Phi'_l = e^{-it_l\Lambda}\Phi_l \quad (5.42)$$

όπου το εκθετικό $e^{-it_l\Lambda}$ είναι στοιχείο της ομάδας κάτω από περιστροφές $U(1)$, t_l είναι το φυσικό φορτίο του πεδίου Φ_l και Λ είναι η γωνία περιστροφής. Αφού t_l και Λ είναι σταθερές, το καινούριο πεδίο είναι επίσης χειραλικό.

Αν η παράμετρος Λ είναι σταθερά, είναι εύκολο να δημιουργήσεις μια Λαγκρανζιανή η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό της εξίσωσης (5.42):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{K.E.} + \mathcal{L}_{P.E.} \quad (5.43)$$

όπου:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{K.E.} &= \Phi_i^\dagger \Phi_i |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ \mathcal{L}_{P.E.} &= [(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k) |_{\theta\theta} + E.\Sigma.] \end{aligned} \quad (5.44)$$

Σημειώνουμε ότι απαιτείται m_{ij} ή g_{ijk} να είναι ίσο με μηδέν όταν $t_i + t_j$ ή $t_i + t_j + t_k \neq 0$, αντίστοιχα. Στη βιβλιογραφία, ο όρος $\mathcal{L}_{P.E.}$ ονομάζεται υπερδυναμικό.

Η περίπτωση όπου η παράμετρος Λ εξαρτάται από τις μεταβλητές του χωροχρόνου x^m είναι πιο περίπλοκη. Στην περίπτωση, δηλαδή, όπου ο μετασχηματισμός είναι τοπικός, ο αντίστοιχος μετασχηματισμός της εξίσωσης (5.42) μετατρέπεται σε:

$$\begin{aligned}\Phi'_l &= e^{-it_l\Lambda}\Phi_l \\ \Phi_l'^\dagger &= e^{it_l\Lambda^\dagger}\Phi_l^\dagger \end{aligned} \quad (5.45)$$

με

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{a}}\Lambda &= 0 \\ D_a\Lambda^\dagger &= 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

όπου

$$\begin{aligned}D_a &= \frac{\partial}{\partial\theta^a} + i\sigma_{a\dot{a}}^m\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_m \\ \bar{D}_{\dot{a}} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{a}}} - i\theta^a\sigma_{a\dot{a}}^m\partial_m \end{aligned} \quad (5.47)$$

Μόνο κάτω από αυτούς τους τοπικούς μετασχηματισμούς το πεδίο Φ'_l παραμένει χειραλικό.

Τώρα, παρατηρούμε ότι ο όρος $\mathcal{L}_{P.E.}$ της Λαγκρανζιανής (5.43) παραμένει αναλλοίωτος κάτω από τον πιο πάνω μετασχηματισμό. Ο όρος $\mathcal{L}_{K.E.}$, όμως, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\Phi_l'^\dagger\Phi'_l = \Phi_l^\dagger\Phi_l e^{it_l(\Lambda^\dagger - \Lambda)} \quad (5.48)$$

Είναι εύκολο ο όρος $\mathcal{L}_{K.E.}$ να παραμείνει αναλλοίωτος αν εισαγάγουμε το πιο κάτω διανυσματικό υπερπεδίο:

$$V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (5.49)$$

Λεπτομερής περιγραφή των συνιστωσών ενός διανυσματικού υπερπεδίου δίδεται στο βιβλίο [7].

Επομένως, η ολική Λαγκρανζιανή πυκνότητα:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4}(W^a W_a |_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{a}} \bar{W}^{\dot{a}} |_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi_l^\dagger e^{t_l V} \Phi_l |_{\theta\theta\bar{\theta}} \\ & + [(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k) |_{\theta\theta} + E.\Sigma.] \end{aligned} \quad (5.50)$$

όπου

$$\begin{aligned} W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{1}{4}DD\bar{D}_{\dot{\alpha}} V \end{aligned} \quad (5.51)$$

και παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς U(1).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα της σχέσης (5.50) φαίνεται μη κανονικοποιήσιμη αφού περιέχει τον όρο $e^{t_l V}$ ο οποίος δυνητικά περιέχει συνεισφορές με το πεδίο V υψωμένο σε οσοδήποτε μεγάλη δύναμη. Αυτό φαίνεται όταν αναπτύξουμε τον όρο αυτό σε Taylor δυναμοσειρά. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα αυτό δουλεύοντας στη "βαθμίδα Wess-Zumino". Έτσι, προκύπτει:

$$e^{t_l V} = 1 + t_l V + \frac{(t_l V)^2}{2} \quad (5.52)$$

αφού οι μεγαλύτερες δυνάμεις του V μηδενίζονται στη βαθμίδα αυτή.

Στη βαθμίδα Wess-Zumino, το υπερπεδίο V αποτελείται από 3 μόνο συνιστώσα πεδία: v^m , λ , D. Έτσι, ο όρος $\Phi^\dagger e^{t_l V} \Phi |_{\theta\theta\bar{\theta}}$ μετατρέπεται σε:

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger e^{t_l V} \Phi |_{\theta\theta\bar{\theta}} = & FF^* + A\Box A^* + i\partial_m \bar{\psi} \bar{\sigma}^m \psi + \frac{1}{2} t v^m (\bar{\psi} \bar{\sigma}^m \psi + iA^* \partial_m A - i(\partial_m A^*) A) \\ & - \frac{it}{\sqrt{2}} (A\bar{\lambda}\bar{\psi} - A^* \lambda\psi) + \frac{t}{2} DA^* A - \frac{t^2}{4} \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} v_m v^m A^* A \end{aligned} \quad (5.53)$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή τη βαθμίδα, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα δεν περιέχει όρους με διαστάσεις πάνω από τέσσερα.

Τώρα, μπορούμε να κατασκευάσουμε την υπερσυμμετρική επέκταση της Λαγκρανζιανής πυκνότητας της QED εισάγοντας τα 2 πιο κάτω χειραλικά υπερπεδία:

$$\begin{aligned} \Phi'_+ &= e^{-ie\Lambda} \Phi_+ \\ \Phi'_- &= e^{ie\Lambda} \Phi_- \end{aligned} \quad (5.54)$$

όπου το Φ'_+ αντιστοιχεί σε σωματίδια με θετικό φορτίο e και το Φ'_- σε σωματίδια με αρνητικό φορτίο -e. Η πιο γενική Λαγκρανζιανή πυκνότητα που μπορεί να δημιουργηθεί και να είναι

αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς (5.54) είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQED} = & \frac{1}{4}(W^a W_a |_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot{a}} \bar{W}^{\dot{a}} |_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) + \Phi_+^\dagger e^{eV} \Phi_+ |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ & + \Phi_-^\dagger e^{-eV} \Phi_- |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + m(\Phi_+ \Phi_- |_{\theta\theta} + \Phi_+^\dagger \Phi_-^\dagger |_{\bar{\theta}\bar{\theta}}) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Παρατηρούμε ότι στην πιο πάνω Λαγκρανζιανή πυκνότητα δεν υπάρχουν όροι με γινόμενα τριών χειραλικών υπερπεδίων λόγω του ότι κανένας συνδυασμός τους δεν μπορεί να διατηρηθεί αναλλοίωτος κάτω από τους μετασχηματισμούς (5.54). Χρησιμοποιώντας τα συνιστώντα πεδία η πιο πάνω Λαγκρανζιανή πυκνότητα μετατρέπεται σε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SQED} = & \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v_{mn}v^{mn} - i\lambda\sigma^n\partial_n\bar{\lambda} + F_+F_+^* + F_-F_-^* \\ & + A_+^*\square A_+ + A_-^*\square A_- + i[(\partial_n\bar{\psi}_+)\bar{\sigma}^n\psi_+ + (\partial_n\bar{\psi}_-)\bar{\sigma}^n\psi_-] + ev^n[\frac{1}{2}\bar{\psi}_+\bar{\sigma}^n\psi_+ \\ & - \frac{1}{2}\bar{\psi}_-\bar{\sigma}^n\psi_- + \frac{i}{2}A_+^*(\partial_n A_+) - \frac{i}{2}(\partial_n A_+^*)A_+ - \frac{i}{2}A_-^*(\partial_n A_-) + \frac{i}{2}(\partial_n A_-^*)A_-] \\ & - \frac{ie}{\sqrt{2}}(A_+\bar{\psi}_+\bar{\lambda} - A_+^*\psi_+\lambda - A_-\bar{\psi}_-\bar{\lambda} + A_-^*\psi_-\lambda) \\ & + \frac{e}{2}D[A_+^*A_+ - A_-^*A_-] - \frac{1}{4}e^2v_nv^n(A_+^*A_+ + A_-^*A_-) \\ & + m[A_+F_- + A_-F_+ - \psi_+\psi_- - \bar{\psi}_+\bar{\psi}_- + A_+^*F_-^* + A_-^*F_+^*] \end{aligned} \quad (5.56)$$

όπου τα πεδία D , F_+ και F_- είναι βοηθητικά (auxiliary) πεδία. Τα πεδία αυτά μπορούν να απαλειφούν αν χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Euler-Lagrange αφού δεν υπάρχουν παράγωγοι των πεδίων αυτών στην Λαγκρανζιανή. Επίσης, στην πιο πάνω εξίσωση, αν συνδυαστούν οι σπίνορες Weyl ψ_+ και ψ_- θα σχηματίσουν ένα φερμιόνιο Dirac με μάζα, το ηλεκτρόνιο. Τα συνιστώντα βαθμωτά πεδία A_+ και A_- εκφράζουν σωματίδιο με σπιν μηδέν και μάζα. Το σωματίδιο αυτό είναι το υπερσυμμετρικό αντίστοιχο του ηλεκτρονίου και ονομάζεται selectron. Ακόμη, το συνιστών πεδίο λ , το οποίο είναι φερμιόνιο Majorana, είναι το υπερσυμμετρικό αντίστοιχο του φωτονίου και ονομάζεται photino. Το σωματίδιο αυτό είναι άμαζο με σπιν $\frac{1}{2}$. Τέλος, το v_{mn} είναι ο ηλεκτρομαγνητικός ταυστής που εμπεριέχει το φωτονικό πεδίο v_m . Συζεύξεις στην πιο πάνω Λαγκρανζιανή παρατηρούμε μεταξύ selectron, ηλεκτρόνιο και photino.

Πιο κάτω, παρουσιάζουμε τους μετασχηματισμούς που συσχετίζουν το κάθε σωματίδιο με τους υπερσυμμετρικούς του εταίρους:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\psi & (5.57) \\
\delta_\xi\psi &= i\sqrt{2}\sigma^m\bar{\xi}\mathcal{D}_m A + \sqrt{2}\xi F \\
\delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\psi \\
\delta_\xi v_{mn} &= i[\xi\sigma^n\partial_m\bar{\lambda} + \bar{\xi}\bar{\sigma}^n\partial_m\lambda - \xi\sigma^m\partial_n\bar{\lambda} - \bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_n\lambda] \\
\delta_\xi\lambda &= i\xi D + \sigma^{mn}\xi v_{mn} \\
\delta_\xi D &= \bar{\xi}\bar{\sigma}^m\partial_m\lambda - \xi\sigma^m\partial_m\bar{\lambda}
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_m A &= \partial_m A + iev_m A & (5.58) \\
\mathcal{D}_m\psi &= \partial_m\psi + iev_m A
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση των μη αβελιανών θεωριών βαθμίδας, μπορεί να αποδειχθεί ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα για ένα υπερπεδίο βαθμίδας, συζευγμένο με ένα χειραλικό υπερπεδίο, συναρτήσει συνιστώντων πεδίων στην βαθμίδα Wess-Zumino είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}v_{mn}^\alpha v_{mn}^\alpha - i\bar{\lambda}^\alpha\bar{\sigma}^m\mathcal{D}_m\lambda^\alpha + \frac{1}{2}D^\alpha D^\alpha - \mathcal{D}_m A^+\mathcal{D}_m A \\
&\quad - i\bar{\psi}\bar{\sigma}^m\mathcal{D}\psi + F^+F + i\sqrt{2}g(A^+T^\alpha\psi\lambda^\alpha - \bar{\lambda}^\alpha T^\alpha A\bar{\psi}) & (5.59) \\
&\quad + gD^\alpha A^+T^\alpha A
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_m A &= \partial_m A + igv_m^\alpha T^\alpha A \\
\mathcal{D}_m\psi &= \partial_m\psi + igv_m^\alpha T^\alpha\psi & (5.60) \\
\mathcal{D}_m\lambda^\alpha &= \partial_m\lambda^\alpha - gf^{\alpha\beta\gamma}v_m^\beta\lambda^\gamma \\
v_{mn}^\alpha &= \partial_m v_n^\alpha - \partial_n v_m^\alpha - gf^{\alpha\beta\gamma}v_m^\beta v_n^\gamma
\end{aligned}$$

Όπως και στην περίπτωση της SQED, η πιο πάνω Λαγκρανζιανή μας οδηγεί στην SQCD, αν συμπεριλάβουμε δύο χειραλικά υπερπεδία και αντίστοιχο όρο μάζας. Στην εξίσωση (5.59) υπάρχει ο γκλουονικός τανυστής v_{mn}^α που περιέχει το γκλουονικό πεδίο v_m^α . Επίσης, υπάρχει το πεδίο λ^α το οποίο συμβολίζει το gluino που έχει spin $\frac{1}{2}$ και είναι το υπερσυμμετρικό αντίστοιχο του γκλουονίου. Στο πεδίο του gluino λ^α και του γκλουονίου v_m^α υπάρχουν χρωματικοί δείκτες αφού τα πεδία αυτά βρίσκονται στην προσαρτημένη αναπαράσταση της ομάδας στην οποία ανήκουν οι μη αβελιανοί μετασχηματισμοί βαθμίδας. Για την SQCD η ομάδα αυτή είναι η SU(3) και οι δείκτες α παίρνουν τιμές από 1 μέχρι 8.

Ακόμη, στην εξίσωση (5.59) υπάρχει ένα πεδίο A το οποίο συμβολίζει το squark, ένα σωματίδιο με σπιν 0 που αποτελεί το υπερσυμμετρικό αντίστοιχο του κουαρκ ψ . Το κουαρκ αυτό είναι σπινόρας Weyl με 2 βαθμούς ελευθερίας. Όπως και στη Λαγκρανζιανή της SQED, τα F και D είναι βοηθητικά (auxiliary) πεδία. Συζεύξεις στη Λαγκρανζιανή της εξίσωσης (5.59) παρατηρούμε μεταξύ gluino, κουαρκ και squark.

Πιο κάτω, παρουσιάζουμε τους μετασχηματισμούς που συσχετίζουν το κάθε σωματίδιο με τους υπερσυμμετρικούς του εταίρους:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi A &= \sqrt{2}\xi\psi \\
\delta_\xi \psi &= i\sqrt{2}\sigma^m \bar{\xi} \mathcal{D}_m A + \sqrt{2}\xi F \\
\delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \mathcal{D}_m \psi + i2gT^\alpha A \bar{\xi} \bar{\lambda}^\alpha \\
\delta_\xi v_m^\alpha &= -i\bar{\lambda}^\alpha \bar{\sigma}^m \xi + i\bar{\xi} \bar{\sigma}^m \lambda^\alpha \\
\delta_\xi \lambda^\alpha &= \sigma^{mn} \xi v_{mn}^\alpha + i\xi D^\alpha \\
\delta_\xi D^\alpha &= -\xi \sigma^m \mathcal{D}_m \bar{\lambda}^\alpha - \mathcal{D}_m \lambda^\alpha \sigma^m \bar{\xi}
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Τώρα, αν συμπεριλάβουμε δύο χειραλικά υπερπεδία και αντίστοιχο όρο μάζας, προκύπτει η Λαγκρανζιανή πυκνότητα της SQCD:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{SQCD}} &= -\frac{1}{4}u_{\mu\nu}^\alpha u^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2}D^\alpha D^\alpha - i\bar{\lambda}^\alpha \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^\alpha \\
&\quad - \mathcal{D}_\mu A_+^\dagger \mathcal{D}^\mu A_+ - \mathcal{D}_\mu A_-^\dagger \mathcal{D}^\mu A_- - i\bar{\psi}_+ \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_+ - i\bar{\psi}_- \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_- + F_+^\dagger F_+ + F_-^\dagger F_- \\
&\quad + i\sqrt{2}g(A_+^\dagger \lambda^\alpha T^\alpha \psi_+ - \bar{\psi}_+ \bar{\lambda}^\alpha T^\alpha A_+ + A_- \bar{\lambda}^\alpha T^\alpha \bar{\psi}_- - \psi_- \lambda^\alpha T^\alpha A_-) \\
&\quad + g(A_+^\dagger D^\alpha T^\alpha A_+ - A_- D^\alpha T^\alpha A_-^\dagger) \\
&\quad + m(A_- F_+ + F_- A_+ - \psi_- \psi_+ + A_+^\dagger F_-^\dagger + F_+^\dagger A_-^\dagger - \bar{\psi}_+ \bar{\psi}_-)
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Κεφάλαιο 6

Επανακανονικοποίηση και Μίξη του Τελεστή Gluino-Glue στην Υπερσυμμετρική Θεωρία Yang-Mills

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε τους τελεστές με τους οποίους κάνει μίξη ο τελεστής Gluino-Glue χρησιμοποιώντας τις δύο μεθόδους ομαλοποίησης που αναφέραμε σε προηγούμενα κεφάλαια (την εισαγωγή χωροχρονικού πλέγματος και τη διαστατική ομαλοποίηση).

Ο τελεστής Gluino-Glue ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{O}_{Gg} = \sigma_{\mu\nu} tr_c(u_{\mu\nu}\lambda) \quad (6.1)$$

όπου:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (6.2)$$

και το tr_c υπονοεί ίχνος των πινάκων χρώματος. Αυτός είναι ο τελεστής με τη μικρότερη δυνατή διαστατικότητα ο οποίος παραμένει αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδος. Ο τελεστής Gluino-Glue δρώντας στο κενό, δημιουργεί κατά κύριο λόγο την ελαφρότερη υπερσυμμετρική δέσμια κατάσταση μεταξύ gluino και γκλουονίου και συγκεκριμένα ένα υποθετικό σωματίδιο που ονομάζεται Gluino-Glue. Το σωματίδιο αυτό έχει spin 1/2, διαστάσεις 7/2 και είναι Majorana. Επίσης, δεν έχει γεύση αλλά ούτε και

χρώμα επειδή οι δείκτες χρώματος του γκλουονικού τανυστή συστέλλονται με τους αντίστοιχους δείκτες του πεδίου του gluino.

Επομένως, ο τελεστής Gluino-Glue μπορεί να κάνει μίξη με τελεστές χωρίς γεύση και χρώμα. Παράλληλα, οι τελεστές αυτοί πρέπει να έχουν ίσες ή μικρότερες (στο πλέγμα) διαστάσεις από τον τελεστή Gluino-Glue. Πρέπει, επίσης, να φέρουν τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και καθολικούς μετασχηματισμούς βαθμίδος αλλά και να έχουν τον ίδιο "αριθμό φάντασμα" (ghost number).

Οι υπολογισμοί μας θα γίνουν στα πλαίσια της $\mathcal{N}=1$ Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills (SYM), μιας θεωρίας η οποία περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ γκλουονίων και gluinos. Στη θεωρία αυτή, θα υπολογίσουμε τις συναρτήσεις Green δύο σημείων του τελεστή Gluino-Glue, στη θεωρία διαταραχών, τόσο στο συνεχές (χρησιμοποιώντας διαστατική ομαλοποίηση) όσο και στο πλέγμα. Το αποτέλεσμα αυτό θα μας επιτρέψει να καθορίσουμε τον παράγοντα επανακανονικοποίησης του τελεστή στο σχήμα $\overline{\text{MS}}$. Επίσης, δεδομένου ότι κβαντικές διορθώσεις στις συναρτήσεις αυτές μπορούν να προκαλέσουν μίξη με άλλους τελεστές, στους υπολογισμούς μας θα βρούμε τους συντελεστές μίξης για τους τελεστές αυτούς.

6.2 Δράση Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills στο Συνεχές

Όπως αναφέραμε, η μελέτη μας για τη μίξη του τελεστή Gluino-Glue θα γίνει στα πλαίσια της $\mathcal{N}=1$ Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills (SYM). Η δράση της SYM, στο χωρόχρονο Minkowski, είναι:

$$\mathcal{S}_{SYM} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} v_{\mu\nu}^\alpha v_{\mu\nu}^\alpha + \frac{i}{2} \bar{\lambda}_M^\alpha \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda_M^\alpha + \frac{1}{2} D^\alpha D^\alpha \right) \quad (6.3)$$

όπου D^α βοηθητικό πεδίο. Απαλείφοντας το πεδίο αυτό, παίρνουμε την εξής δράση της SYM:

$$\mathcal{S}_{SYM} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} v_{\mu\nu}^\alpha v_{\mu\nu}^\alpha + \frac{i}{2} \bar{\lambda}_M^\alpha \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda_M^\alpha \right) \quad (6.4)$$

Το πεδίο του gluino, λ_M^α , γράφεται ως εξής συναρτήσει των σπινόρων Weyl:

$$\lambda_M = \begin{pmatrix} \lambda_a \\ \bar{\lambda}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Το σύμβολο M στο πεδίο του *gluino* υπάρχει για να μας θυμίζει ότι το σωματίδιο αυτό είναι Majorana.

Η δράση \mathcal{S}_{SYM} είναι αναλλοίωτη κάτω από τους εξής υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned}\delta_\xi u_\mu^\alpha &= -i\bar{\xi}_M \gamma^\mu \lambda_M^\alpha, \\ \delta_\xi \lambda_M^\alpha &= \frac{1}{4} u_{\mu\nu}^\alpha [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \xi_M,\end{aligned}\tag{6.6}$$

Τώρα, επιλέγουμε τον εξής gauge fixing όρο:

$$B^\alpha = \partial_\mu u_\mu^\alpha\tag{6.7}$$

ο οποίος, εκ κατασκευής, παραβιάζει τη συμμετρία βαθμίδος.

Η συνολική δράση της SYM θα εμπεριέχει ένα μέρος που θα σχετίζεται με τον gauge fixing όρο:

$$\mathcal{S}_{GF} = \frac{1}{\xi} \int d^4x \text{tr}_c (\partial_\mu u_\mu)^2\tag{6.8}$$

όπου $\xi = 1(0)$ στη βαθμίδα Feynman (Landau).

Επίσης, η συνολική δράση θα περιέχει ένα μέρος που θα σχετίζεται με τα πεδία φαντάσματα που προήλθαν από τη διαδικασία Faddeev-Popov:

$$\mathcal{S}_{Ghost} = -2 \int d^4x \text{tr}_c (\bar{c} \partial_\mu D_\mu c)\tag{6.9}$$

όπου τα πεδία φαντάσμα c είναι μεταβλητές Grassmann και η συναλλοίωτή τους παράγωγος ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{D}_\mu c = \partial_\mu c + ig [u_\mu, c]\tag{6.10}$$

Συνεπώς, η συνολική δράση της SYM στο συνεχές είναι:

$$\mathcal{S}_{\text{totalSYM}} = \mathcal{S}_{SYM} + \mathcal{S}_{GF} + \mathcal{S}_{Ghost}\tag{6.11}$$

Σημειώνουμε ότι η BRS συμμετρία που αναφέραμε στο κεφάλαιο 3 ισχύει και για την θεωρία SYM. Οι μετασχηματισμοί BRS των πεδίων που εμφανίζονται στη συνολική Λαγκρανζιανή SYM φαίνονται πιο κάτω:

$$\begin{aligned}
 u_\mu^\alpha &\rightarrow u_\mu^\alpha + \mathcal{D}_\mu^{\alpha\beta} c^\beta \xi, \\
 \lambda &\rightarrow \lambda + g c^\alpha \lambda^\beta f^{\beta\alpha\gamma} T^\gamma \xi \\
 c^\alpha &\rightarrow c^\alpha - \frac{g}{2} f^{\alpha\beta\gamma} c^\beta c^\gamma \xi, \\
 \bar{c}^\alpha &\rightarrow \bar{c}^\alpha + B^\alpha \xi, \\
 B^\alpha &\rightarrow B^\alpha
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς, η συνολική δράση SYM παραμένει αναλλοίωτη.

6.3 Υποψήφιοι Τελεστές για Μίξη με Τελεστή Gluino-Glue

Πιο κάτω, θα παρουσιάσουμε τους υποψήφιους τελεστές που πιθανόν να κάνουν μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} είτε στο συνεχές, είτε στο πλέγμα. Από γενικά θεωρήματα επανακανονικοποίησης, μια κατηγορία τελεστών που πιθανόν να κάνουν μίξη με τον τελεστή Gluino-Glue είναι τελεστές αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδος. Επίσης, υπάρχουν επιπλέον τελεστές που κάνουν τη συγκεκριμένη μίξη και χωρίζονται σε τρεις ομάδες:

- τελεστές οι οποίοι προκύπτουν από μετασχηματισμούς BRS άλλων τελεστών (ομάδα A)
- τελεστές οι οποίοι μηδενίζονται από τις εξισώσεις κίνησης (ομάδα B)
- τελεστές που δεν ανήκουν στις πιο πάνω ομάδες (ομάδα C)

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωσή μας, δεν υπάρχουν άλλοι τελεστές οι οποίοι να είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδος στη θεωρία SYM και να έχουν τους ίδιους χβαντικούς αριθμούς με τον τελεστή Gluino-Glue. Συνεπώς, δεν υπάρχουν τελεστές αυτού του είδους που να κάνουν μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} .

Πιο κάτω θα περιγράψουμε γιατί συγκεκριμένοι τελεστές των πιο πάνω ομάδων είναι υποψήφιοι να κάνουν μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} . Ξεκινώντας από την ομάδα A, μπορούμε να παραγάγουμε τελεστές από τους μετασχηματισμούς της εξίσωσης (6.12), οι οποίοι να έχουν τις σωστές διαστάσεις. Πρέπει να βρούμε το μετασχηματισμό BRS για τελεστές οι οποίοι φέρουν ένα σπινωριακό δείκτη όπως και ο τελεστής μας, δηλαδή για τελεστές οι οποίοι περιέχουν ένα gluino. Επίσης οι τελεστές αυτοί πρέπει να έχουν διαστάσεις μέχρι 5/2 ώστε, μετά από μετασχηματισμό BRS, να προκύπτουν τελεστές με διαστάσεις μέχρι 7/2. Παράλληλα, οι χρωματικοί δείκτες στους τελεστές πρέπει είναι όλοι ζευγαρωμένοι.

Δύο τελεστές που πληρούν τις πιο πάνω προϋποθέσεις είναι οι εξής:

$$\delta_{BRS}(\lambda^\alpha \bar{c}^\alpha) = \lambda^\alpha B^\alpha + g f^{\alpha\beta\gamma} c^\beta \lambda^\gamma \bar{c}^\alpha \quad (6.13)$$

$$\delta_{BRS}(\lambda^\alpha c^\alpha) = f^{\alpha\beta\gamma} c^\alpha c^\beta \lambda^\gamma \quad (6.14)$$

Οι τελεστές που προκύπτουν είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς BRS. Από τους δύο πιο πάνω τελεστές ο τελεστής που πιθανόν να κάνει μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} είναι ο πρώτος και θα τον συμβολίζουμε με \mathcal{O}_{A1} . Ο δεύτερος τελεστής απορρίπτεται αφού έχει αριθμό φάντασμα +2 και όχι 0, όπως ο τελεστής \mathcal{O}_{Gg} . Για τον ίδιο λόγο πρέπει να απορριφθεί και ο μετασχηματισμός BRS του τελεστή $\gamma_\mu \lambda^\alpha u^{\alpha\mu}$.

Τώρα, για τους τελεστές που ανήκουν στην ομάδα B, εξετάζουμε τις εξισώσεις κίνησης για το *gluino* και το *γκλουόνιο*. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι τελεστές πρέπει να έχουν αριθμό φάντασμα ίσο με μηδέν και οι εξισώσεις κίνησης για το *γκλουόνιο* έχουν ήδη διαστάσεις τρία, συμπεραίνουμε ότι εμφανίζονται μόνο τελεστές που μηδενίζονται από την εξίσωση κίνησης του *gluino*. Οι τελεστές αυτοί πρέπει να μην έχουν ελεύθερους χρωματικούς δείκτες για να είναι επιτρεπτή η μίξη. Επομένως, η μόνη επιλογή είναι να πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση κίνησης του *gluino* με ένα παράγοντα $u_\mu \gamma_\mu$. Βεβαίως, μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε και με λ αλλά θα δημιουργούσαμε ένα τελεστή με διαστάσεις 4.

Οι τελεστές που ανήκουν στην ομάδα C δεν είναι ούτε αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδος, ούτε κάτω από μετασχηματισμούς BRS. Επίσης, δεν μηδενίζονται από τις εξισώσεις κίνησης αλλά πρέπει να ικανοποιούν τις πιο πάνω απαιτήσεις για να κάνουν μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} .

Πιο κάτω παρουσιάζονται όλοι οι υποψήφιοι τελεστές που μπορεί να κάνουν μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} :

$$\mathcal{O}_{A1} = \text{tr}_c(\lambda B) - ig \text{tr}_c(\lambda[c, \bar{c}]) \quad (6.15)$$

$$\mathcal{O}_{B1} = \text{tr}_c(\psi \not{D} \lambda) \quad (6.16)$$

$$\mathcal{O}_{C1} = \text{tr}_c(\partial_\mu \lambda u^\mu) \quad (6.17)$$

$$\mathcal{O}_{C2} = \text{tr}_c(\psi \lambda) \quad (6.18)$$

$$\mathcal{O}_{C3} = ig \sigma_{\mu\nu} \text{tr}_c(\lambda[u_\mu, u_\nu]) \quad (6.19)$$

$$\mathcal{O}_{C4} = ig \text{tr}_c(\lambda[c, \bar{c}]) \quad (6.20)$$

Ο τελεστής \mathcal{O}_{A1} μπορεί να συνεισφέρει στη μίξη με τον τελεστή \mathcal{O}_{Gg} στο συνεχές, στο σχήμα $\overline{\text{MS}}$. Επίσης, μπορεί να δώσει επιπρόσθετους, πεπερασμένους συντελεστές μίξης

στο πλέγμα. Ο τελεστής \mathcal{O}_{C2} είναι χαμηλότερης διάστασης και έτσι δεν θα κάνει μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} μέσω διαστατικής ομαλοποίησης, όμως, ενδέχεται να συνεισφέρει στο πλέγμα. Άλλοι τελεστές που δεν αναφέρθηκαν πιο πάνω δεν θα κάνουν μίξη λόγω της παρουσίας της καθολικής συμμετρίας $SU(N)$ στη δράση SYM η οποία απαγορεύει άλλους τελεστές να κάνουν μίξη με τον τελεστή Gluino-Gluon τόσο στο συνεχές όσο και στο πλέγμα.

Η επανακανονικοποίηση του τελεστή Gluino-Gluon υπολογίζεται δημιουργώντας ένα 7×7 πίνακα μίξης, σε αντιστοιχία με τους 7 εμπλεκόμενους τελεστές: \mathcal{O}_{Gg} , \mathcal{O}_{A1} , \mathcal{O}_{B1} , \mathcal{O}_{C1} , \mathcal{O}_{C2} , \mathcal{O}_{C3} και \mathcal{O}_{C4} . Ο πίνακας μίξης εκφράζει τους επανακανονικοποιημένους τελεστές συναρτήσει των τελεστών που δεν είναι επανακανονικοποιημένοι και είναι άνω τριγωνικός κατά blocks. Εμείς υπολογίζουμε την πρώτη σειρά αφού ενδιαφερόμαστε μόνο για την επανακανονικοποίηση του τελεστή Gluino-Gluon.

Επομένως, ο επανακανονικοποιημένος τελεστής \mathcal{O}_{Gg}^R σχετίζεται με τους bare τελεστές ως εξής:

$$\mathcal{O}_{Gg}^R = Z_{Gg} \mathcal{O}_{Gg}^B + z_{A1} \mathcal{O}_{A1}^B + z_{B1} \mathcal{O}_{B1}^B + z_{C1} \mathcal{O}_{C1}^B + z_{C2} \mathcal{O}_{C2}^B + z_{C3} \mathcal{O}_{C3}^B + z_{C4} \mathcal{O}_{C4}^B \quad (6.21)$$

όπου ο παράγοντας επανακανονικοποίησης $Z = 1 + \mathcal{O}(g^2)$ και οι συντελεστές μίξης $z = \mathcal{O}(g^2)$. Το σύμβολο B υπονοεί ότι είναι bare τελεστές ενώ το σύμβολο R ότι είναι επανακανονικοποιημένοι (renormalized). Για να υπολογίσουμε τον παράγοντα επανακανονικοποίησης και τους συντελεστές μίξης, υπολογίζουμε τη συνάρτηση Green δύο σημείων του \mathcal{O}_{Gg}^R με ένα εξωτερικό γκλουόνιο και ένα εξωτερικό gluino. Πιο κάτω, για σκοπούς πληρότητας φαίνονται οι ορισμοί επανακανονικοποίησης του γκλουονίου, του gluino, του πεδίου φαντάσματος, της σταθεράς σύζευξης και της παραμέτρου βαθμίδος:

$$u_\mu^R = \sqrt{Z_u} u_\mu^B, \quad (6.22)$$

$$\lambda^R = \sqrt{Z_\lambda} \lambda^B, \quad (6.23)$$

$$c^R = \sqrt{Z_c} c^B, \quad (6.24)$$

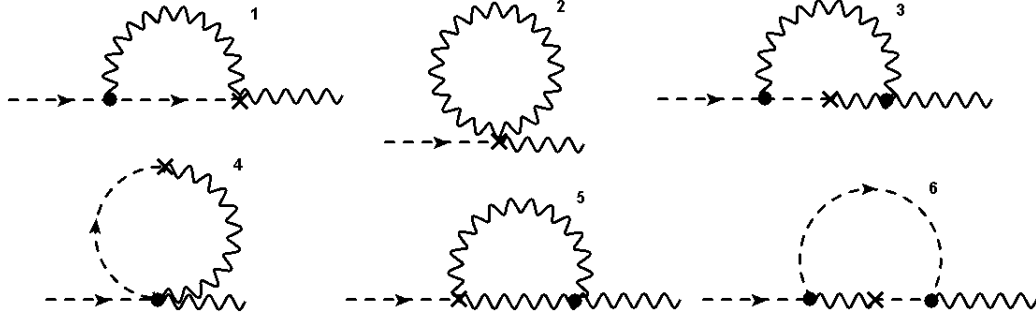
$$g^R = Z_g \mu^{-\epsilon} g^B, \quad (6.25)$$

$$\xi^R = Z_\xi Z_u \xi^B \quad (6.26)$$

όπου μ σταθερά με διαστάσεις αντίστροφου μήκους. Σημειώνουμε ότι για διαγράμματα ενός βρόχου, τα οποία θα υπολογίσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, οι ποσότητες Z_g και Z_ξ απαιτούνται μόνο σε τάξη $\mathcal{O}(g^0)$, συνεπώς θα θέσουμε: $Z_g = 1$, $Z_\xi = 1$. Εφεξής θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο g για το g^R .

Στην εξίσωση (6.21) φαίνονται όλοι οι τελεστές που πιθανόν να κάνουν μίξη με τον τελεστή Gluino-Gluon. Οι tree-level συναρτήσεις Green αυτών των τελεστών εμφανίζονται στα αποτελέσματα των συναρτήσεων Green ενός βρόχου του \mathcal{O}_{Gg} επιτρέποντάς μας έτσι

να εξαγάγουμε τους αντίστοιχους συντελεστές μίξης. Στο σχήμα 6.1 φαίνονται όλα τα διαγράμματα Feynman ενός βρόχου (1PI) τα οποία συνεισφέρουν στη συνάρτηση Green. Η κυματιστή γραμμή συμβολίζει τα γκλουόνια, η διακεκομμένη γραμμή συμβολίζει τα gluinos και ο σταυρός συμβολίζει τον τελεστή *Gluiino-Glue*. Σίγουρα, τα διαγράμματα 2 και 4 δεν θα συνεισφέρουν στη διαστατική ομαλοποίηση, αλλά θα εμφανίζονται στους υπολογισμούς μας για το πλέγμα.



ΣΧΗΜΑ 6.1: Διαγράμματα Feynman ενός βρόχου (1PI) που συνεισφέρουν στη συνάρτηση Green δύο σημείων του τελεστή *Gluiino-Glue*

Τώρα, ας συσχετίσουμε τις ακρωτηριασμένες και επανακανονικοποιημένες συναρτήσεις Green με τις bare. Συγκεκριμένα, για τη συνάρτηση Green του \mathcal{O}_{Gg}^R :

$$\begin{aligned}
 \langle u_\nu^R \mathcal{O}_{Gg}^R \bar{\lambda}^R \rangle_{amp} &= Z_\lambda^{-1/2} Z_u^{-1/2} Z_{Gg} \langle u_\nu^B \mathcal{O}_{Gg}^B \bar{\lambda}^B \rangle_{amp} \\
 &+ z_{A1} \langle u_\nu^B \mathcal{O}_{A1}^B \bar{\lambda}^B \rangle_{amp}^{tree} + z_{B1} \langle u_\nu^B \mathcal{O}_{B1}^B \bar{\lambda}^B \rangle_{amp}^{tree} \\
 &+ z_{C1} \langle u_\nu^B \mathcal{O}_{C1}^B \bar{\lambda}^B \rangle_{amp}^{tree} + z_{C2} \langle u_\nu^B \mathcal{O}_{C2}^B \bar{\lambda}^B \rangle_{amp}^{tree} + z_{C3} \langle u_\nu^B \mathcal{O}_{C3}^B \bar{\lambda}^B \rangle_{amp}^{tree} \\
 &+ z_{C4} \langle u_\nu^B \mathcal{O}_{C4}^B \bar{\lambda}^B \rangle_{amp}^{tree} + \mathcal{O}(g^4)
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι οι σταθερές επανακανονικοποίησης του πεδίου του γκλουονίου Z_u και του gluino Z_λ θα εξαρτώνται από τη γεύση στη θεωρία SYM.

Επιβάλλοντας συνθήκες επανακανονικοποίησης στη συνάρτηση Green δύο σημείων, θα εξαγάγουμε όλους τους συντελεστές μίξης και παράγοντες επανακανονικοποίησης. Όπως αναφέραμε, οι tree-level συναρτήσεις Green των τελεστών που πρόκειται να κάνουν μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} θα εμφανίζονται στη συνάρτηση Green του \mathcal{O}_{Gg} , με συντελεστή ο οποίος απειρίζεται στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ (στη διαστατική ομαλοποίηση) ή $a \rightarrow 0$ (στην πλεγματική ομαλοποίηση). Επομένως, για να επιβάλουμε συνθήκες επανακανονικοποίησης, υπολογίζουμε τις ακρωτηριασμένες tree-level συναρτήσεις Green δύο σημείων των άλλων τελεστών και του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} :

$$\begin{aligned}
 \langle u_\nu^{a1}(q_1) \mathcal{O}_{Gg} \bar{\lambda}^{a2}(q_2) \rangle_{amp}^{tree} &= \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2 i} e^{i(q_1+q_2)x} \sigma_{\mu\rho} (q_{1\mu} \delta_{\nu\rho} - q_{1\rho} \delta_{\mu\nu}) \\
 &= -\delta^{a_1 a_2 i} e^{i(q_1+q_2)x} (\gamma_\nu \not{q}_1 - q_{1\nu})
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{A1} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp}^{tree} = \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} i e^{i(q_1+q_2)x} q_{1\nu} \quad (6.29)$$

$$\langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{B1} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp}^{tree} = \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} i e^{i(q_1+q_2)x} (\gamma_\nu \gamma_\rho) q_{2\rho} \quad (6.30)$$

$$\langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{C1} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp}^{tree} = \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} i e^{i(q_1+q_2)x} q_{2\nu} \quad (6.31)$$

$$\langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{C2} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp}^{tree} = \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} e^{i(q_1+q_2)x} \gamma_\nu \quad (6.32)$$

$$\langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{C3} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp}^{tree} = 0 \quad (6.33)$$

$$\langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{C4} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp}^{tree} = 0 \quad (6.34)$$

Το γεγονός ότι οι συναρτήσεις Green (6.33) και (6.34) μηδενίζονται, συνεπάγεται ότι η εξεύρεση των συντελεστών μίξης για τους τελεστές \mathcal{O}_{C3} και \mathcal{O}_{C4} απαιτεί υπολογισμό συναρτήσεων Green 3 σημείων (gluino-gluon-gluon και gluino-ghost-antighost, αντίστοιχα). Ο υπολογισμός αυτός, ο οποίος είναι πέρα από τους στόχους της παρούσας διπλωματικής, ήδη έχει ξεκινήσει.

6.4 Αποτελέσματα Διαστατικής Ομαλοποίησης

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα των παραγόντων επανακανονικοποίησης και των συντελεστών μίξης που υπολογίσαμε στο συνεχές. Χρησιμοποιήσαμε διαστατική ομαλοποίηση, όπως μελετήσαμε στο κεφάλαιο 4, για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Green δύο σημείων του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} . Ο ομαλοποιητής εδώ είναι οι $4 - 2\epsilon$ διαστάσεις. Στο συνεχές, χρησιμοποιήθηκαν συνολικά τέσσερις κορυφές για να δημιουργηθούν τα διαγράμματα στο σχήμα 6.1. Οι δύο από αυτές προέρχονταν από τον τελεστή \mathcal{O}_{Gg} και οι άλλες δύο από τη δράση SYM. Πιο κάτω, παρατίθενται οι αλγεβρικές εκφράσεις των κορυφών του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} :

$$V\mathcal{O}_{Gg}^{1-gluon} = \frac{1}{2} \delta^{a_1 c_2} i e^{i(k_1+\kappa_2)x} \sigma_{\rho\sigma} (k_{1\rho} \delta_{\sigma\mu_1} - k_{1\sigma} \delta_{\rho\mu_1}) \quad (6.35)$$

$$V\mathcal{O}_{Gg}^{2-gluons} = -\frac{g}{2} f^{a_1 a_2 c_3} e^{i(k_1+k_2+\kappa_3)x} \sigma_{\rho\sigma} \delta_{\mu_1\rho} \delta_{\mu_2\sigma} \quad (6.36)$$

και των κορυφών της δράσης SYM:

$$VGgg = \frac{g}{2} (2\pi)^4 \delta(k_1 - \kappa_2 + \kappa_3) f^{a_1 c_2 c_3} (\gamma^{\mu_1})_{f_{\mu_2} f_{\mu_3}} \quad (6.37)$$

$$VGGSym = -\frac{1}{2} ig (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3) f^{a_1 a_2 a_3} \delta^{\mu_1 \mu_2} (-2k_1 + 2k_2)_{\mu_3} \quad (6.38)$$

όπου k_j οι ορμές των γκλουονίων, κ_i οι ορμές των gluinos, οι δείκτες a_j και c_j είναι χρωματικοί δείκτες των γκλουονίων και gluinos, αντίστοιχα. Επίσης, οι δείκτες μ_j , ν , σ και ρ είναι δείκτες Lorentz και $f_{\mu j}$ είναι σπινωριακοί δείκτες.

Για να υπολογίσουμε τις κορυφές αυτές καθορίσαμε τις εξής συμβάσεις για τους μετασχηματισμούς Fourier:

$$\tilde{u}_\mu(q) = \int d^4x e^{-iq \cdot x} u_\mu(x), \quad u_\mu(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq \cdot x} \tilde{u}_\mu(q) \quad (6.39)$$

$$\tilde{\lambda}(q) = \int d^4x e^{-iq \cdot x} \lambda(x), \quad \lambda(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq \cdot x} \tilde{\lambda}(q) \quad (6.40)$$

$$\tilde{\bar{\lambda}}(q) = \int d^4x e^{iq \cdot x} \bar{\lambda}(x), \quad \bar{\lambda}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot x} \tilde{\bar{\lambda}}(q) \quad (6.41)$$

$$\tilde{c}(q) = \int d^4x e^{-iq \cdot x} c(x), \quad c(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq \cdot x} \tilde{c}(q) \quad (6.42)$$

$$\tilde{\bar{c}}(q) = \int d^4x e^{iq \cdot x} \bar{c}(x), \quad \bar{c}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot x} \tilde{\bar{c}}(q) \quad (6.43)$$

Η συνολική έκφραση για τη συνάρτηση Green μπορεί να γραφεί χωρίζοντάς την σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιέχει τους αποκλίνοντες όρους (πόλους) και το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει πεπερασμένους όρους. Για να επιστρέψουμε στις τέσσερις διαστάσεις, πρέπει να πάρουμε το όριο όπου $\epsilon \rightarrow 0$. Επειδή οι όροι που περιέχουν πόλους είναι οπωσδήποτε πολλαπλάσια των tree-level συναρτήσεων Green που αναφέρθηκαν πιο πάνω αυτό μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές μίξης/επανακανονικοποίησης, με τρόπο ώστε οι πόλοι να απαλείφονται. Απαλείφουμε, συνεπώς, τους πόλους που εμφανίζονται στη συνάρτηση Green, αφήνοντας τους πεπερασμένους όρους ανέπαρους, όπως απαιτεί το σχήμα επανακανονικοποίησης $\overline{\text{MS}}$ (βλέπε κεφάλαιο 4).

Η συνάρτηση Green δύο σημείων του τελεστή *Gluino-Glue*, για τυχαίες τιμές των ορμών του εξωτερικού γκλουονίου q_1 και του εξωτερικού gluino q_2 είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη. Για τους σκοπούς της επανακανονικοποίησης, όμως, αρκεί να την υπολογίσουμε για τις εξής ειδικές περιπτώσεις: $q_2 = 0$, $q_1 = 0$ και $q_2 = -q_1$. Στη διαστατική ομαλοποίηση, οι αποκλίσεις προέρχονται από τους πόλους $1/\epsilon$. Η γενική μορφή της συνάρτησης Green είναι:

$$c_0 + c_1 \left(\frac{1}{\epsilon} + \log \left(\frac{\bar{\mu}^2}{q^2} \right) \right) \quad (6.44)$$

όπου c_1 ανάλογο των tree-level συναρτήσεων Green του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} και των τελεστών που κάνουν μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} .

Η συνάρτηση Green του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} με μηδενική ορμή του gluino είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{Gg} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp} \Big|_{q_2=0}^{DR} &= -\delta^{a_1 a_2} i e^{i q_1 x} (\gamma_\nu \not{q}_1 - q_{1\nu}) + \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} e^{i q_1 x} \\ &\times \left[i (\gamma_\nu \not{q}_1 - q_{1\nu}) \left(-\frac{12-3\beta}{2\epsilon} - 6 - \beta + \frac{\beta^2}{2} - \frac{12-3\beta}{2} \log \left(\frac{\bar{\mu}^2}{q_1^2} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.45)$$

όπου $\beta \equiv 1 - \xi$.

Παρατηρούμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι ανάλογη μόνο της tree-level συνάρτησης Green του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} . Έτσι, μπορούμε μόνο να εξαγάγουμε τον παράγοντα επανακανονικοποίησης του \mathcal{O}_{Gg} στο σχήμα $\overline{\text{MS}}$ από την πιο πάνω συνάρτηση. Από την εξίσωση (6.27), και τις σχέσεις [13]:

$$Z_u^{DR, \overline{\text{MS}}} = 1 - \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \quad (6.46)$$

$$Z_\lambda^{DR, \overline{\text{MS}}} = 1 + \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} (1 - \beta) \quad (6.47)$$

ο παράγοντας αυτός φαίνεται πιο κάτω και είναι ανεξάρτητος βαθμίδος:

$$Z_{Gg}^{DR, \overline{\text{MS}}} = 1 - \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{3}{\epsilon} \quad (6.48)$$

Τώρα, παρουσιάζουμε τη συνάρτηση Green του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} με μηδενική ορμή του γκλουονίου:

$$\langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{Gg} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp} \Big|_{q_1=0}^{DR} = \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} e^{i q_2 x} \left[-i q_{2\nu} - i \gamma_\nu \not{q}_2 \left(\frac{3}{2\epsilon} + 1 + \frac{3}{2} \log \left(\frac{\bar{\mu}^2}{q_2^2} \right) \right) \right] \quad (6.49)$$

Η πιο πάνω συνάρτηση είναι ανάλογη των tree-level συναρτήσεων Green των τελεστών \mathcal{O}_{A_1} και \mathcal{O}_{B_1} . Παρατηρούμε ότι η σταθερά αναλογίας της tree-level συνάρτησης Green του τελεστή \mathcal{O}_{A_1} δεν περιέχει όρους με πόλους. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο τελεστής αυτός δεν κάνει μίξη με τον τελεστή \mathcal{O}_{Gg} στο συνεχές, στο σχήμα $\overline{\text{MS}}$. Παράλληλα, παρατηρούμε ότι ο τελεστής \mathcal{O}_{B_1} κάνει μίξη στο συνεχές και μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε το συντελεστή μίξης του τελεστή αυτού:

$$z_{\mathcal{O}_{B_1}}^{DR, \overline{\text{MS}}} = \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{3}{2\epsilon} \quad (6.50)$$

Σημειώνουμε ότι και ο συντελεστής αυτός είναι ανεξάρτητος βαθμίδας, επειδή η μεταβολή του \mathcal{O}_{B_1} κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, μολονότι διάφορη του μηδενός, αντιστοιχεί

σε τελεστή ομάδας C.

Η συνάρτηση Green του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} επιβάλλοντας τη συνθήκη $q_2 = -q_1$ είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{Gg} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp} \Big|_{q_2=-q_1}^{DR} &= -\delta^{a_1 a_2} i(\gamma_\nu \not{q}_1 - q_{1\nu}) + \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} \\ &\times \left[(i\gamma_\nu \not{q}_1 - q_{1\nu}) \left(-7 - \frac{12 - 3\beta}{2\epsilon} + \frac{\beta^2}{2} - \frac{12 - 3\beta}{2} \log \left(\frac{\bar{\mu}^2}{q_1^2} \right) \right) \right. \\ &\left. + i\gamma_\nu \not{q}_1 \left(2 + \frac{3}{2\epsilon} + \frac{3}{2} \log \left(\frac{\bar{\mu}^2}{q_1^2} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.51)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ανάλογη των tree-level συναρτήσεων Green των τελεστών \mathcal{O}_{C_1} , \mathcal{O}_{B_1} και \mathcal{O}_{Gg} . Για τον ίδιο λόγο που αναφέρθηκε για τον τελεστή \mathcal{O}_{A_1} , ούτε ο τελεστής \mathcal{O}_{C_1} κάνει μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} . Μπορούμε τώρα να επαληθεύσουμε ότι οι τιμές των συντελεστών Z_{Gg} και $z_{\mathcal{O}_{B_1}}$, όπως τις είχαμε ήδη προσδιορίσει, είναι οι κατάλληλες προκειμένου να καταστήσουν και την εξίσωση (6.51) πεπερασμένη.

Συμπερασματικά, στο υποκεφάλαιο αυτό είδαμε ότι ο μόνος τελεστής από τους υποψήφιους τελεστές που κάνει μίξη στο συνεχές στο σχήμα \overline{MS} με τον τελεστή \mathcal{O}_{Gg} είναι ο \mathcal{O}_{B_1} .

Τώρα, αν αφαιρέσουμε τους πόλους από τις εξισώσεις (6.45), (6.49) και (6.51), θα βρούμε τις επανακανονικοποιημένες συναρτήσεις Green δύο σημείων στο σχήμα \overline{MS} . Από τη διαφορά των bare συναρτήσεων Green στο πλέγμα και των επανακανονικοποιημένων συναρτήσεων Green στο σχήμα \overline{MS} προσδιορίζουμε τους αντίστοιχους συντελεστές μίξης και τον αντίστοιχο παράγοντα επανακανονικοποίησης στο πλέγμα.

6.5 Τελεστής Gluino-Gluon και Δράση Υπερσυμμετρικής Θεωρίας Yang-Mills στο Πλέγμα

Πιο κάτω, θα χρησιμοποιήσουμε το πλέγμα ως ομαλοποιητή. Έτσι, αρχικά, ορίζουμε τον τελεστή Gluino-Gluon στο πλέγμα ως εξής:

$$\mathcal{O}_{Gg} = \sigma_{\mu\nu} tr_c(\underline{F}_{\mu\nu} \lambda) \quad (6.52)$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} &= \frac{1}{8}(Q_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu}) \\
 Q_{\mu\nu} &= U_{x,x+\mu}U_{x+\mu,x+\mu+\nu}U_{x+\mu+\nu,x+\nu}U_{x+\nu,x} \\
 &\quad + U_{x,x+\nu}U_{x+\nu,x+\nu-\mu}U_{x+\nu-\mu,x-\mu}U_{x-\mu,x} \\
 &\quad + U_{x,x-\mu}U_{x-\mu,x-\mu-\nu}U_{x-\mu-\nu,x-\nu}U_{x-\nu,x} \\
 &\quad + U_{x,x-\nu}U_{x-\nu,x-\nu+\mu}U_{x-\nu+\mu,x+\mu}U_{x+\mu,x}
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

Επισημαίνουμε ότι σε αυτή τη διακριτοποίηση τα gluinos βρίσκονται στα σημεία του πλέγματος ενώ τα γκλουόνια βρίσκονται στους συνδέσμους. Έτσι το $U_\mu(x)$ καθορίζεται από τη σχέση:

$$U_{x,x+\mu} = U_\mu(x) = e^{igaT^\alpha u_\mu^\alpha(x+a\hat{\mu}/2)} \tag{6.54}$$

όπου a η σταθερά πλέγματος.

Η Ευκλείδεια δράση S_{SYM}^L στο πλέγμα μετατρέπεται σε:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{SYM}}^L &= a^4 \sum_x \left[\frac{N_c}{g^2} \sum_{\mu,\nu} \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{tr} U_{\mu\nu} \right) + \sum_\mu \left(\text{tr} \left(\bar{\lambda}_M \gamma_\mu D_\mu \lambda_M \right) - \frac{ar}{2} \text{tr} \left(\bar{\lambda}_M D^2 \lambda_M \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\mu,\nu} \left(\frac{c_{sw}a}{4} \bar{\lambda}_M \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \lambda_M \right) \right]
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

και ο τελευταίος όρος ονομάζεται όρος clover με σταθερά clover c_{sw} . Επίσης, διακρίνουμε τον όρο που είναι ανάλογος της παραμέτρου Wilson r ο οποίος αίρει το πρόβλημα του διπλασιασμού των φερμιονίων με τίμημα να χάνεται η χειραλική συμμετρία. Στην πιο πάνω δράση πρέπει να προστεθεί ένας gauge-fixing όρος, μαζί με ένα όρο με πεδία φάντασμα και ένα όρο “measure” οι οποίοι είναι οι ίδιοι με την μη υπερσυμμετρική περίπτωση. Σίγουρα, στο όριο όπου $a \rightarrow 0$, η δράση SYM στο πλέγμα δίνει τη δράση SYM στο συνεχές.

Οι ορισμοί για τις συναλλοίωτες παραγώγους φαίνονται πιο κάτω:

$$\mathcal{D}_\mu \lambda_M(x) \equiv \frac{1}{2a} \left[U_\mu(x) \lambda_M(x+a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x) - U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu}) \lambda_M(x-a\hat{\mu}) U_\mu(x-a\hat{\mu}) \right] \tag{6.56}$$

$$\mathcal{D}^2 \lambda_M(x) \equiv \frac{1}{a^2} \sum_\mu \left[U_\mu(x) \lambda_M(x+a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x) - 2\lambda_M(x) + U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu}) \lambda_M(x-a\hat{\mu}) U_\mu(x-a\hat{\mu}) \right] \tag{6.57}$$

6.6 Αποτελέσματα στο Πλέγμα

Η διαταρακτική θεωρία στο πλέγμα είναι πολύ πιο περίπλοκη από αυτή στο συνεχές. Για παράδειγμα, από τη διακριτοποιημένη Λαγκρανζιανή εξάγονται περισσότερες κορυφές και

έτσι καταλήγουμε σε περισσότερα διαγράμματα Feynman. Επίσης, οι εκφράσεις των διαδοτών και των κορυφών είναι πιο περίπλοκες στο πλέγμα και τυπικά οδηγούν σε συναρτήσεις Green με μεγάλο αριθμό όρων.

Πιο κάτω, παρουσιάζουμε τους εξής tree-level διαδότες στο πλέγμα:

- Διαδότης Γκλουονίου:

$$\frac{1}{\hat{q}^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{\hat{q}_\mu \hat{q}_\nu}{\hat{q}^2} \right) \quad (6.58)$$

όπου

$$\hat{q}_\mu = \frac{2}{a} \sin \frac{aq_\mu}{2}, \quad \hat{q}^2 = \sum_\mu \hat{q}_\mu^2 \quad (6.59)$$

- Διαδότης Φάντασμα:

$$\frac{1}{\hat{q}^2} \quad (6.60)$$

- Διαδότης Gluino:

$$\frac{2}{i \not{q} + \frac{2r}{a} \sum_\mu \sin^2(aq_\mu/2)} \quad (6.61)$$

Επίσης, παρατίθενται οι αλγεβρικές εκφράσεις των κορυφών του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} στο πλέγμα. Αρχικά, παρουσιάζουμε την έκφραση με ένα γκλουόνιο:

$$V \mathcal{O}_{Gg}^{1-gluon} = -i \delta^{a_1 c_2} e^{i(k_1 + \kappa_2)x} \sigma_{\mu_1 \rho_1} \sin(k_{1\rho_1}) \cos(k_{1\mu_1}/2) \quad (6.62)$$

Η έκφραση, στο πλέγμα, της κορυφής του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} με δύο γκλουόνια είναι:

$$\begin{aligned} V \mathcal{O}_{Gg}^{2-gluons} = & -i g f^{a_1 a_2 c_3} e^{i(k_1 + k_2 + \kappa_3)x} \left(\sigma_{\mu_2 \mu_1} \cos(k_{2\mu_2}/2) \cos((k_1 + 2k_2)_{\mu_1}/2) \right. \\ & + \sigma_{\mu_2 \mu_1} \cos((2k_1 + k_2)_{\mu_2}/2) \cos((k_1 + 2k_2)_{\mu_1}/2) \\ & + \sigma_{\mu_1 \mu_2} \cos(k_{1\mu_1}/2) \cos(k_{2\mu_2}/2) \\ & + \sigma_{\mu_2 \mu_1} \cos(k_{1\mu_1}/2) \cos((2k_1 + k_2)_{\mu_2}/2) \\ & + \delta_{\mu_1 \mu_2} \sigma_{\mu_1 \rho_1} \sin(k_{1\rho_1}) \sin((k_1 + k_2)_{\mu_1}/2) \\ & \left. + \delta_{\mu_1 \mu_2} \sigma_{\rho_1 \mu_1} \sin(k_{2\rho_1}) \sin((k_1 + k_2)_{\mu_1}/2) \right) \quad (6.63) \end{aligned}$$

όπου k_j οι ορμές των γκλουονίων, κ_i οι ορμές των gluinos, οι δείκτες a_j και c_j είναι χρωματικοί δείκτες των γκλουονίων και gluinos, αντίστοιχα. Επίσης, οι δείκτες μ_j και ρ_j είναι δείκτες Lorentz.

Παρατηρούμε από τον ορισμό του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} στο πλέγμα ότι υπάρχουν επίσης κορυφές του τελεστή αυτού με τρία και περισσότερα γκλουόνια. Η κορυφή με τρία γκλουόνια $V\mathcal{O}_{Gg}^{3-gluons}$ χρησιμοποιείται για να κατασκευαστούν διαγράμματα Feynman ενός βρόχου για συναρτήσεις Green δύο σημείων, όπως φαίνεται από το διάγραμμα 2 στο σχήμα 6.1. Η αλγεβρική έκφραση της κορυφής $V\mathcal{O}_{Gg}^{3-gluons}$ δεν θα παρουσιαστεί γιατί είναι μια έκφραση πολλών όρων. Η κορυφή $V\mathcal{O}_{Gg}^{4-gluons}$ δεν εμφανίζεται στην κατασκευή διαγραμμάτων Feynman ενός βρόχου για συναρτήσεις Green δύο σημείων. Παρ' όλα αυτά, χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς συναρτήσεων Green τριών σημείων.

Για να προσδιορίσουμε τον παράγοντα επανακανονικοποίησης του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} και τους συντελεστές μίξης χρειάζεται να υπολογίσουμε τους παράγοντες επανακανονικοποίησης του πεδίου του gluino και του γκλουονίου στο πλέγμα στο σχήμα $\overline{\text{MS}}$ [13]:

$$Z_\lambda^{L,\overline{\text{MS}}} = 1 - \frac{g^2 N_c}{16 \pi^2} \left(12.8524 + 3.79201\beta - 5.58907 c_{sw}^2 - 4.49774 c_{sw} r + (1 - \beta) \log(a^2 \bar{\mu}^2) \right) \quad (6.64)$$

$$Z_u^{L,\overline{\text{MS}}} = 1 + \frac{g^2 N_c}{16 \pi^2} \left[19.7392 \frac{1}{N_c^2} - 17.1775 - 1.38629\beta + 18.8508 c_{sw}^2 - 1.59389 c_{sw} r + \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \log(a^2 \bar{\mu}^2) \right] \quad (6.65)$$

όπου N_c ο αριθμός χρώματος.

Τώρα, θα υπολογίσουμε τις bare συναρτήσεις Green δύο σημείων του *Gluiino-Gluon* τελεστή στο πλέγμα για τις εξής ειδικές περιπτώσεις: $q_2 = 0$, $q_1 = 0$ και $q_2 = -q_1$. Οι περιπτώσεις αυτές είναι οι ίδιες που υπολογίσαμε στο συνεχές αφού αυτές αρκούν για τους σκοπούς της επανακανονικοποίησης. Οι αλγεβρικές εκφράσεις των συναρτήσεων Green θα χωρίζονται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος θα περιέχει όρους που συγκλίνουν στο όριο $a \rightarrow 0$ και έχουν πολύ περίπλοκη εξάρτηση από την εξωτερική ορμή. Η εξάρτηση αυτή αποτελείται από ένα μέρος της ανεξάρτητης επανακανονικοποιημένης συνάρτησης Green. Το δεύτερο μέρος των συναρτήσεων Green είναι όλοι οι εναπομείναντες όροι οι οποίοι αποκλίνουν στο όριο $a \rightarrow 0$ αλλά εξαρτώνται από την εξωτερική ορμή πολυωνυμικά. Στο πλέγμα έχουμε επιπρόσθετες συνεισφορές όρων οι οποίοι είναι πεπερασμένοι και πολυωνυμικοί ως προς q .

Αρχικά, παρουσιάζουμε τη συνάρτηση Green με μηδενική ορμή του gluino:

$$\begin{aligned}
 \langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{Gg} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp} \Big|_{q_2=0}^L &= -\delta^{a_1 a_2} i e^{iq_1 x} (\gamma_\nu \not{q}_1 - q_{1\nu}) \\
 &+ \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} e^{iq_1 x} i (\gamma_\nu \not{q}_1 - q_{1\nu}) \left(\frac{-39.4784}{N_c^2} + 27.5552 \right. \\
 &+ 4.1783\beta + 0.5\beta^2 - 4.60023c_{sw}^2 - 12.8568c_{sw} r \\
 &\left. + 6 \log(a^2 q_1^2) - \frac{3\beta}{2} \log(a^2 q_1^2) \right)
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

Από την έκφραση αυτή μπορούμε να καθορίσουμε τον παράγοντα επανακανονικοποίησης του \mathcal{O}_{Gg} αφού είναι ανάλογη της tree-level συνάρτησης Green του τελεστή \mathcal{O}_{Gg} . Επιβάλλοντας τις συνθήκες επανακανονικοποίησης της εξίσωσης (6.27) και λαμβάνοντας υπόψιν την εξίσωση (6.45) χωρίς τους πόλους, καταλήγουμε στον εξής παράγοντα επανακανονικοποίησης στο πλέγμα:

$$Z_{Gg}^{L, \overline{\text{MS}}} = 1 - \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \left(\frac{9.8696}{N_c^2} - 1.76261 - 9.9198 c_{sw}^2 + 4.97646 c_{sw} r - 3 \log(a^2 \bar{\mu}^2) \right) \tag{6.67}$$

Ο παράγοντας αυτός είναι ανεξάρτητος βαθμίδος όπως και στο συνεχές. Αυτό συμβαίνει επειδή ο τελεστής \mathcal{O}_{Gg} είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδος.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τη συνάρτηση Green με μηδενική ορμή γκλουονίου:

$$\langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{Gg} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp} \Big|_{q_1=0}^L = \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} e^{iq_2 x} \left[-iq_{2\nu} + i\gamma_\nu \not{q}_2 \left(1.42407 - \frac{3}{2} \log(a^2 q_2^2) \right) \right] \tag{6.68}$$

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να καθορίσουμε το συντελεστή μίξης του \mathcal{O}_{B1} αφού η πιο πάνω συνάρτηση είναι ανάλογη της tree-level συνάρτησης Green του τελεστή \mathcal{O}_{B1} . Επιβάλλοντας πάλι τη συνθήκη (6.27) και συγκρίνοντας τους πεπερασμένους όρους της εξίσωσης (6.49) με την πιο πάνω συνάρτηση, καθορίζουμε τον εξής συντελεστή μίξης στο πλέγμα:

$$z_{B1}^{L, \overline{\text{MS}}} = \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \left(-0.42407 + \frac{3}{2} \log(a^2 \bar{\mu}^2) \right) \tag{6.69}$$

Όπως αναφέρθηκε και στο συνεχές, ο συντελεστής αυτός είναι ανεξάρτητος βαθμίδος αφού η μεταβολή του \mathcal{O}_{B1} κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδος, μολονότι διάφορη του μηδενός, αντιστοιχεί σε τελεστή ομάδας C.

Επίσης, πιο κάτω φαίνεται η συνάρτηση Green του *Gluino-Gluon* τελεστή όταν επιβάλουμε τη συνθήκη $q_2 = -q_1$:

$$\begin{aligned}
 \langle u_\nu^{a_1}(q_1) \mathcal{O}_{Gg} \bar{\lambda}^{a_2}(q_2) \rangle_{amp} \Big|_{q_2=-q_1}^L &= -\delta^{a_1 a_2} i(\gamma_\nu \not{q}_1 - q_{1\nu}) \\
 &+ \frac{g^2 N_c}{16\pi^2} \frac{1}{2} \delta^{a_1 a_2} \left[i(\gamma_\nu \not{q}_1 - q_{1\nu}) \left(\frac{-39.4784}{N_c^2} + 26.5552 \right. \right. \\
 &+ 5.17831\beta + 0.5\beta^2 - 4.60023 c_{sw}^2 - 12.8568 c_{sw} r \\
 &+ \left. \left. 6 \log(a^2 q_1^2) - \frac{3\beta}{2} \log(a^2 q_1^2) \right) \right. \\
 &+ \left. \left. i\gamma_\nu \not{q}_1 \left(2.42407 - \frac{3}{2} \log(a^2 q_1^2) \right) \right] \quad (6.70)
 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί, όπως και στο συνεχές, να χρησιμοποιηθεί για έλεγχο των αποτελεσμάτων μας. Επίσης, σημειώνουμε ότι όλα τα σφάλματα στις εκφράσεις των αποτελεσμάτων μας είναι μικρότερα από το τελευταίο ψηφίο που φαίνεται.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Στην εργασία αυτή παρουσιάσαμε μια λεπτομερή μελέτη του τελεστή Gluino-Glue (\mathcal{O}_{Gg}), ενός τελεστή που συνδέεται άμεσα με τις ελαφρές δέσμιες καταστάσεις της SYM. Συγκεκριμένα, υπολογίσαμε τη συνάρτηση Green δύο σημείων του τελεστή αυτού τόσο στο συνεχές όσο και στο πλέγμα για να καθορίσουμε τον παράγοντα επανακανονικοποίησης του και τους συντελεστές με τους οποίους άλλοι τελεστές κάνουν μίξη με τον \mathcal{O}_{Gg} . Η επανακανονικοποίηση του τελεστή αυτού είναι ένα απαραίτητο συστατικό για τη σωστή ερμηνεία και το χειρισμό των συναρτήσεων Green που υπολογίζονται μέσα από αριθμητικές προσομοιώσεις στη SYM.

Μελλοντικές προεκτάσεις της εργασίας αυτής είναι ο υπολογισμός συναρτήσεων Green τριών σημείων τόσο για τον τελεστή \mathcal{O}_{Gg} όσο και για τους τελεστές \mathcal{O}_{C3} και \mathcal{O}_{C4} (gluino-gluon-gluon και gluino-ghost-antighost, αντίστοιχα). Ο υπολογισμός αυτός είναι απαραίτητος αν επιθυμούμε να βρούμε τους συντελεστές μίξης των τελεστών \mathcal{O}_{C3} και \mathcal{O}_{C4} αφού οι tree-level συναρτήσεις Green δύο σημείων των τελεστών αυτών είναι μηδενικές.

Θα ήταν επίσης ενδιαφέρον να επεκτείνουμε τη μελέτη μας σε μποζονικές glueballs και μεσονικές gluinoballs, αφού το Gluino-Glue σωματίδιο και τα gluinoballs αναμένουμε να είναι υπερσυμμετρικοί σύντροφοι του glueball.

Τέλος, μια μελλοντική προέκταση της εργασίας αυτής θα ήταν να μελετήσουμε τον τελεστή Gluino-Glue στη θεωρία SQCD. Οι συναρτήσεις Green του τελεστή αυτού στην SQCD θα δίνουν μια πληθώρα από συντρόφους μίξης, περιλαμβάνοντας πεδία squark και quark. Μπορούμε, και σε αυτή την περίπτωση, να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές μίξης διαταραχτικά, για χρήση σε μελλοντικές σε προσομοιώσεις.

Παράρτημα A

Άλγεβρα $SU(N)$

Η μοναδιακή ομάδα $SU(N)$ είναι μια ομάδα Lie η οποία περιέχει $N \times N$ μοναδιακούς πίνακες με ορίζουσα ίση με 1.

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= 1 \\ \det U &= 1 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Συγκεκριμένα, η ομάδα $SU(3)$ είναι η ομάδα συμμετρίας της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής, με $N = 3$ να είναι ο αριθμός των χρωμάτων.

Η άλγεβρα της ομάδας $SU(N)$ συμβολίζεται ως $su(N)$. Στοιχεία U της ομάδας αντιστοιχούν σε στοιχεία T της άλγεβρας μέσω αυτής της σχέσης:

$$U = e^{iT} \tag{A.2}$$

Κάθε στοιχείο T της άλγεβρας μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός ενός πεπερασμένου συνόλου πινάκων, T^a , που ονομάζονται γεννήτορες, με πραγματικούς συντελεστές. Από τις ιδιότητες στη σχέση (A.1), μπορεί εύκολα να αποδειχτεί ότι οι γεννήτορες πρέπει να είναι ερμιτιανοί πίνακες με ίχνος ίσο με μηδέν. Επιβάλλουμε την πιο κάτω σχέση κανονικοποίησης:

$$(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \tag{A.3}$$

Μια πολύ χρήσιμη ταυτότητα που περιέχει τους γεννήτορες της άλγεβρας $su(N)$ είναι η εξής:

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} (T^a)_{ij} T^a_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl} \tag{A.4}$$

Πολλές σημαντικές ταυτότητες προκύπτουν από τη σχέση (A.4), όπως (οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες υπονοούν άθροιση):

$$\begin{aligned}tr(XT^a)tr(YT^a) &= \frac{1}{2}tr(XY) - \frac{1}{2N}tr(X)tr(Y) \\ XT^aYT^aZ &= \frac{1}{2}tr(Y)XZ - \frac{1}{2N}XYZ\end{aligned}\tag{A.5}$$

Παράρτημα Β

Μεταβλητές Grassmann

B.1 Ορισμός

Στις θεωρίες χβαντικών πεδίων οι οποίες περιέχουν φερμιονικά πεδία χρειάζεται να εισαγάγουμε μεταβλητές που να αντιμετωπίζονται μεταξύ τους. Ο λόγος είναι ότι οι συναρτήσεις Green των φερμιονικών πεδίων είναι αντισυμμετρικές ως προς την ανταλλαγή δύο ορισμάτων τους. Οι αντιμετωπιζόμενες μεταβλητές ονομάζονται μεταβλητές Grassmann και έχουν εντελώς διαφορετική άλγεβρα από τις συνηθισμένες μεταβλητές. Τα στοιχεία ενός συνόλου $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ αποτελούν τους γεννήτορες μιας άλγεβρας Grassmann και ικανοποιούν την αντιμεταθετική σχέση:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 \quad \forall i, j \quad (\text{B.1})$$

Από τον πιο πάνω ορισμό συνεπάγεται ότι:

$$\theta_i^2 = 0 \quad (\text{B.2})$$

και από αυτή τη σχέση συμπεραίνουμε ότι όλα τα στοιχεία της άλγεβρας Grassmann είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού ως προς κάθε γεννήτορα θ_i . Κατά συνέπεια, πολυώνυμα n γεννητόρων (με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές) γεννούν ένα διανυσματικό χώρο με διαστάσεις 2^n . Ο γραμμικός αυτός χώρος ονομάζεται άλγεβρα Grassmann n γεννητόρων. Επίσης, αρνητικές δυνάμεις των θ_i δεν μπορούν να υπάρξουν διότι στην άλγεβρα αυτή δεν μπορεί να οριστεί αντίστροφος αριθμός Grassmann θ_i^{inv} του θ_i τέτοιος ώστε $\theta_i^{inv}\theta_i = \theta_i\theta_i^{inv} = 1$, εξαιτίας της πιο πάνω αντιμεταθετικής σχέσης.

B.2 Ομοτιμία Grassmann

Τώρα, θα ορίσουμε τον τελεστή ομοτιμίας σε μια τέτοια άλγεβρα:

$$P(\theta_i) = -\theta_i \quad (\text{B.3})$$

Γενικεύοντας, όταν ο τελεστής ομοτιμίας δράσει σε πολυώνυμο με ℓ μεταβλητές Grassmann, τότε:

$$P(\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\ell}) = (-1)^\ell \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\ell} \quad (\text{B.4})$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι ο τελεστής ομοτιμίας χωρίζει το χώρο A σε δύο υποχώρους. Ο πρώτος υποχώρος A^+ έχει θετική ομοτιμία και ισχύουν μεταθετικές σχέσεις των στοιχείων του ενώ ο δεύτερος υποχώρος A^- έχει αρνητική ομοτιμία και ισχύουν αντιμεταθετικές σχέσεις των στοιχείων του.

B.3 Παραγωγή ως προς μεταβλητές Grassmann

Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, μπορούμε να ορίσουμε και την παραγωγή ως προς μεταβλητές Grassmann. Αρχικά, στην παραγωγή αυτή υπάρχουν δύο είδη παραγώγων: η αριστερή παράγωγος $\partial/\partial\theta_i$, η οποία δρα στα στοιχεία που βρίσκονται εκ δεξιών της και η δεξιά παράγωγος $\overleftarrow{\partial}/\partial\theta_i$, η οποία δρα στα στοιχεία που βρίσκονται εξ αριστερών της και ορίζονται ως:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i} \theta_j = \delta_{ij} \quad (\text{B.5})$$

$$\theta_j \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial\theta_i}} = \delta_{ij} \quad (\text{B.6})$$

Οι δύο αυτές παράγωγοι πρέπει να οριστούν ξεχωριστά λόγω των αντιμεταθετικών σχέσεων των θ_i που επιτρέπουν στις δύο παραγώγους να μην ισούνται σε κάποιες περιπτώσεις. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις συνηθισμένες μεταβλητές, όπου τα στοιχεία μιας συνάρτησης ικανοποιούν πάντα μεταθετικές σχέσεις και έτσι τα δύο είδη παραγώγων θα ισούνται πάντοτε. Άρα, δεν υπάρχει λόγος χρησιμοποίησης και των δύο ειδών παραγώγων στις συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών. Στην παραγωγή μεταβλητών Grassmann είναι σημαντική η σειρά εμφάνισης των μεταβλητών σε κάθε όρο της συνάρτησης αφού όπως είδαμε υπάρχουν δύο υποχώροι που ικανοποιούν ο ένας μεταθετικές και ο άλλος αντιμεταθετικές σχέσεις. Αντίστοιχα, για τον ίδιο ακριβώς λόγο,

παίζει σημαντικό ρόλο και ποιο είδος παραγώγου χρησιμοποιούμε (αριστερή ή δεξιά). Ένα παράδειγμα όπου η δεξιά παραγωγή δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα από την αριστερή είναι:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\theta_i\theta_j) &= \theta_j \\ (\theta_i\theta_j)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_i} &= (-\theta_j\theta_i)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_i} = -\theta_j\end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί μια πολύ σημαντική ιδιότητα των τελεστών παραγωγής: Όταν ο ίδιος τελεστής δράσει περισσότερο από μια φορά σε μια έκφραση δίνει πάντα μηδενικό αποτέλεσμα. Υπό αυτήν την έννοια, οι τελεστές αυτοί καλούνται μηδενοδύναμοι.

Έστω $f(\theta)$ και $g(\theta)$ συναρτήσεις των μεταβλητών Grassmann θ_i , τότε ο κανόνας παραγωγής αθροίσματος θα είναι:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}(\lambda_1 f(\theta) + \lambda_2 g(\theta)) = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial\theta_i} f(\theta) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial\theta_i} g(\theta) \quad (\text{B.7})$$

$$(\lambda_1 f(\theta) + \lambda_2 g(\theta))\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_i} = \lambda_1 (f(\theta)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_i}) + \lambda_2 (g(\theta)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_i}) \quad (\text{B.8})$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ή \mathbb{C} . Επίσης, ο κανόνας παραγωγής γινομένου θα είναι:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}(f(\theta)g(\theta)) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} f(\theta)\right)g(\theta) + P(f(\theta))\frac{\partial}{\partial\theta_i} g(\theta) \quad (\text{B.9})$$

$$(f(\theta)g(\theta))\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_i} = f(\theta)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_i} P(g(\theta)) + f(\theta)(g(\theta)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_i}) \quad (\text{B.10})$$

B.4 Ολοκλήρωση ως προς μεταβλητές Grassmann

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε την ολοκλήρωση ως προς μεταβλητές Grassmann. Συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει ο ορισμός του συναρτησιακού ολοκληρώματος ως προς μεταβλητές Grassmann, ο οποίος είναι σημαντικός για τη θεωρία φερμιονικών πεδίων, και άρα χρειαζόμαστε τον ορισμό του αναλόγου $\int_{-\infty}^{\infty} dx$. Πιο κάτω θα παρουσιαστούν κάποιοι κανόνες ολοκλήρωσης που σχετίζονται με την περίπτωση αυτή:

1. Το ολοκλήρωμα μιας ολικής παραγώγου μηδενίζεται στην απουσία συνεισφοράς συνοριακών συνθηκών.

$$\int d\theta_i \frac{\partial}{\partial\theta_i} f(\theta) = 0 \quad (\text{B.11})$$

2. Αν μια έκφραση ολοκληρωθεί ως προς μια μεταβλητή τότε δεν εξαρτάται από αυτήν και άρα η παράγωγός της μηδενίζεται.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \int d\theta_i f(\theta) = 0 \quad (\text{B.12})$$

3. Αν ένας παράγοντας δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης τότε μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα.

$$\int d\theta_i (f(\theta) c) = \left(\int d\theta_i f(\theta) \right) c, \quad \text{αν } \frac{\partial}{\partial \theta_i} c = 0 \quad (\text{B.13})$$

4. Ο κανόνας ολοκλήρωσης αθροίσματος είναι:

$$\int d\theta_i (\lambda_1 f(\theta) + \lambda_2 g(\theta)) = \lambda_1 \int d\theta_i f(\theta) + \lambda_2 \int d\theta_i g(\theta), \quad \text{όπου } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C} \quad (\text{B.14})$$

5. Αν έχουμε την εξής γραμμική αλλαγή μεταβλητών $\theta = a\theta' + b$, το ολοκλήρωμα μετατρέπεται ως εξής:

$$\int d\theta f(\theta) = a^{-1} \int d\theta' f(a\theta' + b) \quad (\text{B.15})$$

Σημειώνουμε ότι η Ιακωβιανή των ολοκληρωμάτων Grassmann είναι ίση με a^{-1} , ενώ στην περίπτωση των πραγματικών και μιγαδικών μεταβλητών θα ισούταν με a .

Τέλος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η παραγωγή και η ολοκλήρωση ταυτίζονται στην άλγεβρα Grassmann. Πράγματι, η παράγωγος, όπως ορίζεται πιο πάνω, ικανοποιεί και τις πέντε συνθήκες. Επομένως,

$$\int d\theta_i f(\theta) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\theta) \quad (\text{B.16})$$

Παράρτημα Γ

Το Γκαουσιανό Ολοκλήρωμα

Στο παράρτημα αυτό θα μελετήσουμε τον τρόπο υπολογισμού γκαουσιανών ολοκληρωμάτων, στην περίπτωση πεπερασμένου αριθμού πραγματικών μεταβλητών ολοκλήρωσης και μεταβλητών Grassmann. Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή πολυωνύμου με γκαουσιανό βάρος για τη κάθε περίπτωση.

Γ.1 Γκαουσιανό Ολοκλήρωμα Πραγματικών Μεταβλητών

Ένα γενικό γκαουσιανό συναρτησιακό ολοκλήρωμα με πεπερασμένο αριθμό από πραγματικές μεταβλητές ολοκλήρωσης έχει τη μορφή:

$$I(K, b) = \int \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m + \sum_{n=1}^N b_n x_n \right) \quad (\Gamma.1)$$

όπου K ένας συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές λ_i . Οι ιδιοτιμές αυτές πρέπει να ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda_i) &\geq 0 \\ \lambda_i &\neq 0 \end{aligned} \quad (\Gamma.2)$$

Διαγωνιοποιώντας τον πίνακα K : $K = VDV^{-1}$ και ορίζοντας $x' = V^{-1}x$ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα (Γ.1) όταν $b_n = 0$:

$$\begin{aligned} I(K, 0) &= \int \prod_{i=1}^N dx_i \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m\right) = \int \prod_{i=1}^N dx'_i \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N x'_n D_{nn} x'_n\right) \\ &= \int \prod_{i=1}^N dx'_i \prod_{n=1}^N \exp\left(-\frac{1}{2} x'_n D_{nn} x'_n\right) = \prod_{i=1}^N \int dx'_i \exp\left(-\frac{1}{2} x'_i D_{ii} x'_i\right) \\ &= \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{(\det K)}} \end{aligned}$$

Για να επιλύσουμε το γενικευμένο γκαουσιανό ολοκλήρωμα (Γ.1), απαιτείται η εύρεση του σημείου στο οποίο ελαχιστοποιείται η τιμή της ολοκληρωτέας συνάρτησης:

$$\frac{d}{dx_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m - \sum_{n=1}^N b_n x_n \right) = 0 \quad (\Gamma.3)$$

Η λύση της πιο πάνω έκφρασης είναι:

$$x_{n,min} = \sum_{m=1}^N (K^{-1})_{nm} b_m \quad (\Gamma.4)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών:

$$x_i = \sum_{j=1}^N (K^{-1})_{ij} b_j + y_i \quad (\Gamma.5)$$

καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$I(K, b) = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det K}} \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N b_n (K^{-1})_{nm} b_m\right) \quad (\Gamma.6)$$

Η μέση τιμή πολυωνύμου πραγματικών μεταβλητών με γκαουσιανό βάρος ορίζεται ως:

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_l} \rangle \equiv \mathcal{N} \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) [x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_l}] \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m\right) \quad (\Gamma.7)$$

όπου $N = \frac{1}{I(K,0)}$ η σταθερά κανονικοποίησης έτσι ώστε $\langle 1 \rangle = 1$. Για να προκύψει το αποτέλεσμα της πιο πάνω σχέσης μπορούμε να παραγωγίσουμε την έκφραση (Γ.1) ως προς τις μεταβλητές b_{k_i} και να θέσουμε $b = 0$.

Όντως, αν παραγωγίσουμε μια φορά την (Γ.1) ως προς b_k προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial b_k} I(K, b) = \int \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) x_k \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m + \sum_{n=1}^N b_n x_n \right) \quad (\Gamma.8)$$

Επομένως, η επαναλαμβανόμενη παραγωγή οδηγεί στη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle x_{k_1} x_{k_1} \cdots x_{k_l} \rangle &= (2\pi)^{-n/2} \sqrt{\det(K)} \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{k_l}} I(K, b) \Big|_{b=0} \\ \langle x_{k_1} x_{k_1} \cdots x_{k_l} \rangle &= \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{k_l}} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N b_n (K^{-1})_{nm} b_m \right) \Big|_{b=0} \end{aligned} \quad (\Gamma.9)$$

Από τη σχέση αυτή πηγάζει το θεώρημα του Wick. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό έχουμε:

$$\langle x_{k_1} \cdots x_{k_\ell} \rangle = \sum_{\substack{\text{όλα τα δυνατά ζευγάρια} \\ \text{των δεικτών } k_1, \dots, k_\ell}} K_{k_{p_1} k_{p_2}}^{-1} \cdots K_{k_{p_{\ell-1}} k_{p_\ell}}^{-1} \quad (\Gamma.10)$$

Το θεώρημα του Wick επισημαίνει ότι ο δείκτης l πρέπει να είναι ζυγός, αλλιώς η πιο πάνω μέση τιμή θα ήταν ίση με μηδέν.

Γ.2 Γκαουσιανό Ολοκλήρωμα Μεταβλητών Grassmann

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε και το γκαουσιανό ολοκλήρωμα με μιγαδικές μεταβλητές Grassmann. Ένα γκαουσιανό συναρτησιακό ολοκλήρωμα με πεπερασμένο αριθμό από μιγαδικές μεταβλητές Grassmann ολοκλήρωσης ορίζεται:

$$I_G(K) = \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \exp \left(-\sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m \right) \quad (\Gamma.11)$$

όπου K είναι ένας πίνακας $N \times N$. Αν ο K είναι Ερμιτιανός, τότε, όπως ακριβώς και στην περίπτωση των πραγματικών μεταβλητών, διαγωνιοποιούμε τον πίνακα K και παίρνουμε την έκφραση:

$$\begin{aligned} I_G(K) &= \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \prod_{n=1}^N \exp \left(-\bar{\theta}_n K_{nn} \theta_n \right) = \prod_{i=1}^N \left[\int d\bar{\theta}'_i d\theta'_i \exp \left(-\bar{\theta}'_i D_{ii} \theta'_i \right) \right] \\ &= \prod_{i=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'_i} \frac{\partial}{\partial \theta'_i} \exp \left(-\bar{\theta}'_i D_{ii} \theta'_i \right) \right] \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, γράφουμε το εκθετικό ως σειρά Taylor, όπου γνωρίζουμε ότι οι όροι δεύτερης τάξης και άνω ως προς θ' και $\bar{\theta}'$ είναι μηδενικοί. Άρα,

$$\exp\left(-\bar{\theta}'_i D_{ii} \theta'_i\right) = 1 - \bar{\theta}'_i D_{ii} \theta'_i \quad (\Gamma.12)$$

Τότε,

$$I_G(K) = \prod_{i=1}^N D_{ii} = + \det K \quad (\Gamma.13)$$

Το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα προκύπτει ακόμα και για μη Ερμιτιανό πίνακα K .

Τώρα, θέλουμε να επιλύσουμε το γενικευμένο γκαουσιανό ολοκλήρωμα που ορίζεται ως εξής:

$$Z_G(K, J, \bar{J}) = \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \exp\left(-\sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m + \sum_{n=1}^N \bar{J}_n \theta_n + \bar{\theta}_n J_n\right) \quad (\Gamma.14)$$

όπου J είναι ένα διάνυσμα. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με τη μέθοδο επίλυσης του ολοκληρώματος του παραρτήματος Γ.1, βρίσκουμε το ελάχιστο της ολοκληρωτέας συνάρτησης ως προς θ_i και $\bar{\theta}_i$. Επομένως,

$$\bar{\theta}_i (min) = \sum_{j=1}^N \bar{J}_j (K^{-1})_{ji}, \quad \theta_i (min) = \sum_{j=1}^N (K^{-1})_{ij} J_j$$

Αλλάζοντας μεταβλητές:

$$\theta_i = \sum_{j=1}^N (K^{-1})_{ij} J_j + \theta'_i, \quad \bar{\theta}_i = \sum_{j=1}^N \bar{J}_j (K^{-1})_{ji} + \bar{\theta}'_i \quad (\Gamma.15)$$

το ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε:

$$\begin{aligned} Z_G(K, J, \bar{J}) &= \exp\left(\sum_{n,m=1}^N \bar{J}_n (K^{-1})_{nm} J_m\right) \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}'_i d\theta'_i \exp\left(-\sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}'_n K_{nm} \theta'_m\right) \\ &= \exp\left(\sum_{n,m=1}^N \bar{J}_n (K^{-1})_{nm} J_m\right) I_G(K) = (\det K) \exp\left(\sum_{n,m=1}^N \bar{J}_n (K^{-1})_{nm} J_m\right) \quad (\Gamma.16) \end{aligned}$$

Η μέση τιμή του μιγαδικού πολυωνύμου με γκαουσιανό βάρος ορίζεται ως:

$$\langle \theta_{k_1} \bar{\theta}_{q_1} \cdots \theta_{k_\ell} \bar{\theta}_{q_\ell} \rangle \equiv \mathcal{N} \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i [\theta_{k_1} \bar{\theta}_{q_1} \cdots \theta_{k_\ell} \bar{\theta}_{q_\ell}] \exp \left(- \sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m \right) \quad (\Gamma.17)$$

όπου $\mathcal{N} = 1/I_G(K)$ είναι η σταθερά κανονικοποίησης. Για να προκύψει το αποτέλεσμα της πιο πάνω σχέσης μπορούμε να παραγωγίσουμε την έκφραση (Γ.14) ως προς τις μεταβλητές J_i και \bar{J}_i και να θέσουμε $J_i = 0$ και $\bar{J}_i = 0$. Όντως, παραγωγίζοντας μια φορά ως προς κάποιο \bar{J}_q με τη χρήση αριστερής παραγώγου:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{J}_q} Z_G(K, J, \bar{J}) = \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \theta_q \exp \left(- \sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m \right)$$

Αντίστοιχα, παραγωγίζοντας μια φορά ως προς κάποιο J_k με τη χρήση δεξιάς παραγώγου:

$$Z_G(K, J, \bar{J}) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_k}} = \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \bar{\theta}_k \exp \left(- \sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m \right)$$

Επομένως, η επαναλαμβανόμενη παραγωγή ως προς όλες τις μεταβλητές J_i και \bar{J}_i , δίνουν τη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle \theta_{k_1} \theta_{k_2} \cdots \bar{\theta}_{q_1} \bar{\theta}_{q_2} \cdots \rangle &= \mathcal{N} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{J}_{q_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{J}_{q_\ell}} Z_G(K, J, \bar{J}) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_{k_1}}} \cdots \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_{k_\ell}}} \right]_{J=\bar{J}=0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{J}_{q_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{J}_{q_\ell}} \left[\exp \left(\sum_{n,m=1}^N \bar{J}_n (K^{-1})_{nm} J_m \right) \right] \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_{k_1}}} \cdots \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_{k_\ell}}} \right\}_{J=\bar{J}=0} \end{aligned} \quad (\Gamma.18)$$

Το θεώρημα του Wick για φερμιόνια, όπως απορρέει από την πιο πάνω σχέση, παίρνει τη μορφή:

$$\langle \theta_{k_1} \bar{\theta}_{q_1} \cdots \theta_{k_\ell} \bar{\theta}_{q_\ell} \rangle = \sum_{\substack{\text{όλες οι μεταθέσεις των δεικτών} \\ k_1, \dots, k_\ell \text{ που γίνονται} \\ \text{ζεύγη με τους } q_1, \dots, q_\ell}} \epsilon_{k_{p_1} \cdots k_{p_\ell}} K_{k_{p_1} q_1}^{-1} \cdots K_{k_{p_\ell} q_\ell}^{-1} \quad (\Gamma.19)$$

όπου:

$$\epsilon_{k_{p_1} \cdots k_{p_\ell}} = \begin{cases} +1, & \text{αν ο αριθμός των εναλλαγών των δεικτών είναι άρτιος} \\ -1, & \text{αν ο αριθμός των εναλλαγών των δεικτών είναι περιττός} \end{cases}$$

Βιβλιογραφία

- [1] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theories. An Introduction.* World Scientific Lecture Notes in Physics, World Scientific, 3rd ed., 2005.
- [2] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics.* International series in pure and applied physics, McGraw - Hill Book Company, 1964.
- [3] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields.* International series in pure and applied physics, McGraw - Hill Book Company, 1965.
- [4] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory.* Westview Press Reading (Mass.), 1995.
- [5] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena.* Clarendon Press, 3rd ed., 1996.
- [6] M. Kaku, *Quantum Field Theory. A Modern Introduction.* Oxford University Press, 1993.
- [7] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity.* Princeton University Press, 1992.
- [8] S. Caracciolo, P. Menotti and A. Pelissetto, “One-loop analytic computation of the energy—momentum tensor for lattice gauge theories,” *Nucl. Phys. B375 (1992) 195-239.*
- [9] J. C. Collins, *Renormalization.* Cambridge University Press, 1984.
- [10] J. Giedt, “Progress in four-dimensional lattice supersymmetry,” *Int. J. Mod. Phys. A24 (2009) 4045-4095*, [[arXiv: 0903.2443v1](#)].
- [11] R. Horsley, H. Perlt, P.E.L. Rakow, G. Schierholz and A. Schiller, “One - loop renormalisation of quark bilinears for overlap fermions with improved gauge actions,” *Nucl. Phys. B693 (2004) 3, Erratum-ibid. B713 (2005) 601.*
- [12] Robert D.C. Miller, “Supersymmetric gauge fixing and the effective potential,” 1983.

-
- [13] M. Costa and H. Panagopoulos, “Renormalization of supersymmetric qcd on the lattice,” *2017*.