MATHEMATICA 16/9/2017
Σύντομες σημειώσεις

Χάρης Παναγόπουλος – Καθηγητής Φυσικής, Π.Κ.
22892832 – haris@ucy.ac.cy

- Τί είναι η Mathematica ;

Πρόγραμμα για κάθε λογής μαθηματικούς υπολογισμούς
- Αριθμητικές πράξεις
- Αλγεβρικές / Τριγωνομετρικές πράξεις
- Παράγωγοι, ολοκληρώματα
- Λύση εξισώσεων (αλγεβρικών, διαφορικών)
- Χειρισμός πινάκων και διανυσμάτων
- Στατιστική ανάλυση
- Γραφήματα πολλών ειδών

Έχει κάποια κοινά στοιχεία με προγράμματα όπως: Matlab, Maple, όμως διαθέτει περισσότερες δυνατότητες για συμβολικές/αλγεβρικές πράξεις και πολύ μεγαλύτερη ποικιλία εφαρμογών.
Επινοήθηκε από τον Stephen Wolfram, περί το 1988.
Η πιο πρόσφατη έκδοση (version) είναι η 11η.

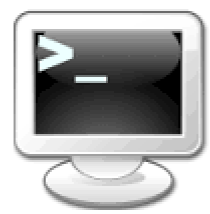
Website: www.wolfram.com
- Δωρεάν δοκιμή 15 ημερών
- Μειωμένη τιμή για μη επαγγελματίες: € 310 + VAT
- Μειωμένη τιμή για φοιτητές: € 140 + VAT

[Αν έχετε παλιότερη έκδοση (από την 7η και μετά) οι διαφορές δεν είναι ουσιώδεις:

- Βελτίωση κάποιων πολύπλοκων ολοκληρωμάτων
- Μεγαλύτερη ποικιλία σε γραφήματα
- Μενού πιο φιλικό προς τον χρήστη
- Καλύτερη επίλυση κάποιων διαφορικών εξισώσεων]

Ξεκινάμε το πρόγραμμα κάνοντας κλικ στο εικονίδιο:

Εναλλακτικά, ανοίγουμε ένα τερματικό παράθυρο από το εικονίδιο:
και πληκτρολογούμε την εντολή:



mathematica & : Ανοίγει γραφικό περιβάλλον, με παράθυρα και μενού.

- Πολύ φιλικό προς το χρήστη (user friendly).

ή

math & : Ανοίγει μη γραφικό περιβάλλον.

- Λιγότερο φιλικό προς το χρήστη, αλλά:
- ελαφρώς πιο γρήγορο
- η διαδικασία που ακολουθήθηκε φυλάγεται με πιο ευανάγνωστο τρόπο (για μελλοντική χρήση, διορθώσεις)

[Αν θα δώσουμε την εντολή **math**, τότε συμφέρει να τη δώσουμε όχι από συνηθισμένο τερματικό παράθυρο, αλλά από ένα τερματικό που θα ανοίξουμε μέσα από το λεκτικό επεξεργαστή **emacs**, δίδοντας στην **emacs** την εντολή: "**ESC-X shell**". Με αυτό τον τρόπο θα μπορούμε να ανατρέξουμε όλα τα πεπραγμένα μας, και να τα σώσουμε σε αρχείο.]

Μια συνοπτική εισαγωγή/tutorial βρίσκεται στο μενού:

Documentation [ή Help → Wolfram Documentation]

Εκεί ψάξτε τις λέξεις “**Virtual Book**” και μετά:

Virtual Book → Introduction → Getting Started

Αν δεν ανοίξει αυτομάτως φύλλο εργασίας “notebook” (ανάλογα με την έκδοση που χρησιμοποιούμε), τότε από το μενού επιλέγουμε:

New Document → Notebook

[Ιστοσελίδα https://www.wolframalpha.com/

- Δωρεάν εκτέλεση εντολών της Mathematica ✔
- Δεν απαιτείται ο “σωστός” τρόπος γραφής εντολών ✔
- Δεν μπορεί να γραφεί ολοκληρωμένο πρόγραμμα ✘
- Η εκτέλεση των εντολών έχει μικρές καθυστερήσεις ✘ **]**

<u>Πρώτες Δοκιμές</u>

Δοκιμάζουμε τις εντολές:

1+2 [SHIFT+ENTER για να εκτελεστεί η εντολή]
a + b + a

Παρατηρούμε ότι οι εντολές που δίνουμε απαριθμούνται:
`In[1], In[2],` κλπ.
Παρομοίως και για τα <u>αποτελέσματα</u> των εντολών:
`Out[1], Out[2],` κλπ.

% + a ("**%**" το αμέσως προηγούμενο αποτέλεσμα, "**%%**" το προ-προηγούμενο, "**%%%**", … "**%2**" το δεύτερο αποτέλεσμα, κλπ)
%1 + %%
(* Hi! *) (Χρησιμοποίουμε τα σύμβολα "**(***" και "***)**" για σχόλια)
a = 3 ; (Δίδει την τιμή 3 στη μεταβλητή a. Βάζουμε “**;**” αν δε θέλουμε να δούμε το αποτέλεσμα)
%2 (Το αποτέλεσμα 2 δίδεται τώρα με την δεδομένη τιμή του a)

cut/copy/paste : γίνονται όπως και στο περιβάλλον Windows,

με τα πλήκτρα: **CTRL-X CTRL-C CTRL-V**

Μπορείτε επίσης να διορθώσετε μια προηγούμενη εντολή και να την δώσετε εκ νέου. Η διορθωμένη εντολή θα αποκτήσει <u>νέο</u> αριθμό! Η παλιά εντολή και το αποτέλεσμά της, δε θα φαίνονται πλέον στην οθόνη, άλλα μένουν αποθηκευμένες στη μνήμη. Αλλάξτε, π.χ., την εντολή `In[2]`, με όποιον τρόπο θέλετε, και αργότερα πληκτρολογήστε `In[2]`. Τι θα συμβεί;

<u>Ορισμός συναρτήσεων</u>

Παράδειγμα: **f[x_] := 2x + a** ή **g[x_] = 2x + a**

Προσοχή:
- Το όρισμα σε αγκύλες! **[ ]**
- Underscore "**_**" σημαίνει <u>οποιοδήποτε</u> όρισμα.
- Το "**=**" σημαίνει άμεση ανάθεση τιμής, ενώ το "**:=**" σημαίνει «καθυστερημένη» ανάθεση.

Δοκιμάστε: **f[2], g[2], f[y], f[4f[z]], ...**

Θέστε **a = 5** και ξαναδοκιμάστε **f[2], g[2]**. Τι παρατηρείτε;

Δοκιμάστε επίσης τους ορισμούς:

h1[a_] = a + 1

και: **h2[a_] := a + 1**

Τι τιμή νομίζετε ότι θα πάρουν οι **h1[2]** και **h2[2]**;

2+1=3 ή μήπως 5+1=6; Δοκιμάστε το!

➡ Συνήθως οι ορισμοί συναρτήσεων χρησιμοποιούν την <u>καθυστερημένη</u> ανάθεση τιμής!

g[a_,b_] := a^2 b^3 Συνάρτηση δύο, τριών, ..., μεταβλητών

Μερικές «εγγενείς» συναρτήσεις της Mathematica

Υπάρχουν χιλιάδες εγγενείς συναρτήσεις στη Mathematica. Γνωστές τόσο οι αριθμητικές τιμές όσο και οι ιδιότητές τους! Σύμβαση: αρχίζουν όλες με κεφαλαίο γράμμα.

Sqrt[ ], Log[ ], Exp[ ], Abs[ ], Sign[ ]
Sin[ ], Cos[ ], Tan[ ], ArcSin[ ], …
Sinh[ ], Cosh[ ], Tanh[ ], ArcSinh[ ]

Υπάρχουν επίσης εγγενείς σταθερές, όπως:

Pi (= π = 3.14159...)
E (= e = 2.71828...)
I (= i, $i^2 = -1$)
Infinity (= ∞)
Degree (= 2π/360, μοίρες σε ακτίνια)

Δοκιμές: **Sin[Pi/4]**, **Sin[30 Degree]**, **Sqrt[8]**, **Sqrt[8.]**

Η εντολή N (numerical value)

N[%] (Αριθμητική τιμή του πιο πάνω αποτελέσματος)
N[Pi, 500] (Αριθμητική τιμή του "π", 500 δεκαδικά ψηφία!)

Ασκήσεις: Να υπολογιστούν, σε ακριβή και προσεγγιστική μορφή 20 ψηφίων, οι ποσότητες:

$$50!,\ \sin(\pi/2),\ \sqrt{3+\sqrt{5}}\ ,\ \tan^{-1}(3),\ \cos(\pi/6),\ e^{i\pi/12}$$

Η Mathematica κάνει απλοποιήσεις, αλλά **όχι** προσεγγίσεις (εκτός αν το ζητήσουμε)!

Παράγωγοι - Ολοκληρώματα

D[g[x,y], x] Παράγωγος ως προς τη μεταβλητή x
D[g[x,y], {x,2}] 2η παράγωγος (προσέξτε το άγκιστρο! **{ }**)

Δοκιμές: **D[g[x,y],y], D[Sin[x]/x, x], D[D[g[x,y],y],y]**

Integrate[f[y], y] Ολοκλήρωση αναλυτικά, αν είναι εφικτό

Δοκιμές: **Integrate**[**Sin[x]^2, x]**
Integrate[Sqrt[x^5+1] Log[x^2+1], x]
Integrate[x^2 Exp[-b x], {x, 0, Infinity}]

NIntegrate[f[x], {x, 3, 5}]
Ολοκλήρωση αριθμητική στο διάστημα 3<x<5
(προσέξτε τις αγκύλες **[ ]** και το άγκιστρο **{ }** !!)

Δοκιμές:
NIntegrate[Sqrt[x^2+1], {x, 3, 5}]
(Δίνει μόνο 6 ψηφία. Η εντολή **N[%, 20]** δε βοηθά!)
NIntegrate[Sqrt[x^2+1], {x, 3, 5}, WorkingPrecision -> 30]
ή **SetAccuracy[NIntegrate[Sqrt[x^2+1], {x, 3, 5}], 30]**
(όχι εξ ίσου ακριβές ...)

Αθροίσματα

Sum[f[x], {x, 2, 5}] (= f(2)+f(3)+f(4)+f(5))
Sum[f[x], {x, 1, 8, 2}] (= f(1)+f(3)+f(5)+f(7))

Δοκιμές: **Sum[x^2, {x, 1, n}]**,
Sum[1/n^2, {n, 1, Infinity}]
Sum[(n^2+1)^(-5/4), {n, 1, Infinity}]

Ασκήσεις: Υπολογίστε σε κλειστή ή αριθμητική μορφή (με 20 σημαντικά ψηφία):

$$\int dx\ x^4 \cos(kx)\ ,\quad \int_0^\infty dx\, \frac{1}{(x^2+a^2)^3}\ ,\quad \int_1^2 dx\, (x^2+2)^{1/3},\quad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{sinx}\right),$$

$$\sum_{n=3}^{\infty}(1/n!),\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4}{(n!)^2},\quad \prod_{n=0}^{10}(n^4+1)$$

Απλοποιήσεις εκφράσεων

Factor[x^6 -1] (Παραγοντοποίηση)
Expand[%] (Ανάπτυγμα εκφράσεων)
TrigExpand[Sin[b+c]] (Τριγωνομετρικά αναπτύγματα)
Simplify[%] («Απλοποιεί» την έκφραση)
FullSimplify[%] (Δοκιμάζει ακόμα περισσότερες απλοποιήσεις)

Πληροφορίες για συναρτήσεις/σταθερές/σύμβολα

?Sin (πληροφορίες για τη συνάρτηση sin)
??Sin (περισσότερες πληροφορίες για τη sin)
?*Sin* (κατάλογος όλων των αντικειμένων που περιέχουν στό όνομά τους τα 3 συνεχόμενα γράμματα "Sin")

Χρήσιμες γενικές εντολές

Quit Έξοδος από το πρόγραμμα
File→Save Σώζει όλο το "notebook" σ'ένα αρχείο τύπου .nb
Save["mynewfile.m", f, g]
Σώζει τους ορισμούς των **f**, **g** σ'ένα αρχείο
<< mynewfile.m
Διαβάζει ό,τι είχαμε σώσει σ'ένα αρχείο

Αντικαταστάσεις

In[5] := (1 + x + y)^2

%5 /. x -> 1	Αντικαθιστά το x με το 1
%5 /. {x -> 1}	Ίδιο αποτέλεσμα όπως πριν
%5 /. {x -> y, y -> 2}	Ταυτόχρονη αντικατάσταση
%5 /. x -> y /. y -> 2	Ετερόχρονη αντικατάσταση
%5 /. {{x -> 1}, {x -> 2, y -> 3}}	Λίστα 2 αντικαταστάσεων

Με άγκιστρα **{}** η Mathematica συμβολίζει **λίστες** {a, b, c}, ή λίστες από λίστες {{a, b}, c, {d, e, {f, g}}}, κ.ο.κ.

Λύση πολυωνυμικών εξισώσεων

Solve[x^3 - 2x^2 - 23x + 60 ==0, x]

Λύνει πολυωνυμικές εξισώσεις.
Προσέξτε το "=="! Είναι ισότητα, όχι ανάθεση τιμής
Η απάντηση: Μια λίστα από τις δυνατές λύσεις με μορφή αντικατάστασης: **Out[9] = {{x → -5}, {x → 3}, {x → 4}}**

%9[[2]]	Το 2ο στοιχείο της πιο πάνω λίστας: **{x → 3}** **Προσέξτε τις <u>διπλές</u> αγκύλες!**
f[x] /. %9	Θέτει σε εφαρμογή καθεμιά αντικατάσταση στη λίστα

Δοκιμή: Να βρεθεί η τιμή της έκφρασης $\mathbf{x^3 + 5}$ όταν το **x** είναι η πρώτη από τις λύσεις της πιο πάνω εξίσωσης:

x^3 + 5 /. %9[[1]]

Μόνο μέχρι 4ου βαθμού εξισώσεις λύνονται σε κλειστή μορφή! (Θεώρημα της Άλγεβρας)

Δοκιμή: **Solve[x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1 == 0, x]**

Για υψηλότερου βαθμού εξισώσεις; Αριθμητική επίλυση

NSolve[x^11 + x^4 + 8==0, x]
NSolve[x^11 + x^4 + 8==0, x, WorkingPrecision -> 20]

Λύση άλλων αλγεβρικών εξισώσεων

FindRoot[Cos[x]-Tan[x]==0, {x, 2.8}]

- Αριθμητική λύση τυχαίας αλγεβρικής εξίσωσης, ξεκινώντας από κάποια αρχική τιμή, π.χ. **x=2.8**
- Αλλάζοντας την αρχική τιμή μπορεί να οδηγηθούμε σε κάποια άλλη από τις λύσεις που επιδέχεται η εξίσωση

Συστήματα αλγεβρικών εξισώσεων

Solve[{x^2+y==1, x-y==5},{x,y}]

Σύστημα (λίστα) 2 εξισώσεων, ως προς τις άγνωστες **x, y**

FindRoot[{Cos[x] == Sin[y], x^2 + y ==2}, {{x, 2}, {y, 7}}]

Σύστημα εξισώσεων με αρχικές τιμές των αγνώστων **x, y**

Απλά γραφήματα

Plot[Sin[1/x], {x, 0.1, 5}]

Γράφημα μιας συνάρτησης. Τα όρια του x είναι σε λίστα

Plot[{Sin[1/x], Cos[x^2]}, {x, 0.1, 5}]

Απεικόνιση 2 συναρτήσεων στο ίδιο γράφημα

Export["grafima.pdf", %]

Σώζει το πιο πάνω γράφημα σ'ένα αρχείο pdf, με όνομα grafima.pdf

{{0.5, 3.1}, {0.8, 2.9}, {1.3, 2.8}, {2.2, 1.5}}

Λίστα από σημεία (x,y)

ListPlot[%, Joined->True]

Γραφική παράσταση της πιο πάνω λίστας
(Υπάρχουν **πάρα** πολλές επιλογές όπως το **Joined**, για χρώματα, άξονες, κλίμακα, τίτλους, tickmarks, κλπ. π.χ. **PlotRange -> {0, 2}**, **AspectRatio -> 3**)

ParametricPlot[{Sin[t], 2Cos[t]}, {t, 0, 2 Pi}]

Γράφημα των σημείων (x,y), όπου:
x(t) = sin(t), y(t) = 2 cos(t), και 0 < t < 2π

Plot3D[Sqrt[1 - x^2 - y^2], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]

3-διάστατο γράφημα $z(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$
από όποια οπτική γωνία επιθυμούμε!

[Για ακόμα πιο εξειδικευμένα σχέδια υπάρχουν λογισμικά όπως CAD (Computer Aided Design). Όμως είναι πολύ πιο ακριβά, και περιορίζονται μόνο σε σχέδια.]

Λίστες

Table[k^3,{k, 1, 10}] Δημιουργεί μια λίστα τιμών του **k**^{3}
f[a_] := a + 1
f /@ %% Η **f** δρά σε κάθε στοιχείο της λίστας

Έστω ότι:
Out[8] = {{0.5, 3.1}, {0.8, 2.9}, {1.3, 2.8}, {2.2, 1.5}}

Τότε:
%8[[3]] θα δώσει: **{1.3, 2.8}**
%8[[4,1]] θα δώσει: **2.2**
Table[%8[[i,2]], {i,4}] θα δώσει: **{3.1, 2.9, 2.8, 1.5}**
Table[{i, %8[[i,2]]}, {i,4}]
θα δώσει: **{{1, 3.1}, {2, 2.9}, {3, 2.8}, {4, 1.5}}**

- Στη Mathematica **κάθε έκφραση** είναι ή ένα **άτομο** (π.χ. 38, a, Pi) ή μια **λίστα**!
- Κάθε λίστα αποτελείται από μια **κεφαλή** και από 0 ή περισσότερα **στοιχεία**.
  - Π.χ. **a+b+c** αντιστοιχεί σε: **Plus[a,b,c]** (κεφαλή: Plus, στοιχεία: a,b,c)
  - {a,b,c} αντιστοιχεί σε: List[a,b,c] (κεφαλή: List, στοιχεία: a,b,c)
  - a^2 αντιστοιχεί σε: Power[a,2] (κεφαλή: Power, στοιχεία: a,2)
- Η εντολή: **<νέα κεφαλή> @@ <έκφραση>** αντικαθιστά την κεφαλή της έκφρασης με τη νέα κεφαλή, π.χ. **Times @@ (a+b+c)** δίνει **a*b*c**

<u>Επίλυση διαφορικών εξισώσεων</u>

- Σε κλειστή μορφή (όπου είναι δυνατόν!), π.χ.

DSolve[y'[x] == x, y[x], x]

Λύνει την εξίσωση: **dy/dx = x**
Άγνωστη: **y(x)**, Ανεξάρτητη μεταβλητή: **x**
Απάντηση: **{{y[x] -> x^2/2 + C[1]}}** (**C[1]**: σταθερά)

DSolve[y'[x] == x^2 + y[x]^2, y[x], x] (δύσκολη!!)

DSolve[y''[x] == - 4 y[x], y[x], x]

Λύνει την: $d^2y/dx^2 = -4y$
Απάντηση: **{{y[x] -> C[1] Cos[2 x] + C[2] Sin[2 x]}}**
όπου **C[1], C[2]**: σταθερές, προσδιορίζονται από αρχικές συνθήκες

DSolve[{y''[x] == -4 y[x], y[0] == 1, y'[0] == 5}, y[x], x]

Τώρα δώσαμε και αρχικές συνθήκες.
Απάντηση: **{{y[x] -> (4 Cos[2 x] + 3 Sin[2 x]) / 2}}**

- Αριθμητική επίλυση (δίδοντας και αρχικές συνθήκες), π.χ.

NDSolve[{y'[x] == 1/(x^2 + y[x]^4), y[1]==0}, y[x], {x,1,2}]

Λύνει την: $\mathbf{dy/dx = 1/(x^2 + y^4)}$, με αρχική συνθήκη:
$\mathbf{y(1) = 0}$, στο διάστημα: $\mathbf{1 \le x \le 2}$

Απάντηση:
{{y[x] -> InterpolatingFunction[{{1.,2.}},<>][x]}}

Το σύμβολο **< >** σημαίνει οτι η πλήρης περιγραφή του αποτελέσματος δεν εμφανίζεται στην οθόνη, χάριν συντομίας. Αν επιμένετε να τη δείτε: **FullForm[%]**

Για γραφική παράσταση της λύσης:

Plot[y[x] /. %%, {x, 1, 2}] **Presto!!**

Στατιστικές αναλύσεις – Εισαγωγικά

Σ'ένα αρχείο (FakeData.txt) έγραψα δεδομένα της μορφής:

1980 3109
1981 3250
1982 3427
…
2015 14247

Η πρώτη στήλη καταγράφει τα έτη 1980-2015, ενώ η δεύτερη στήλη έχει το κέρδος μιας εταιρείας στο αντίστοιχο έτος.

Θέλουμε:

- Να διαβάσουμε το αρχείο στη Mathematica
- Να υπολογίσουμε το μέσο κέρδος, και τη διασπορά
- Να διερευνήσουμε την αυξητική πορεία (γραμμική; εκθετική;)
- Να προβλέψουμε τα κέρδη για τα έτη 2016-2020

ReadList[“FakeData.txt”, Number]

Διαβάζει όλους τους αριθμούς του αρχείου, και τους καταχωρεί σε μια λίστα: **{1980, 3109, 1981, 3250, …}**

mydata = Partition[%,2]

Ομαδοποιεί σε 2άδες: **{{1980, 3109}, {1981, 3250}, …}**

profitdata = Table[mydata[[i,2]], {i, Length[mydata]}]

Δημιουργεί τη λίστα: **{3109, 3250, …}**

Mean[profitdata] Μέση τιμή

StandardDeviation[profitdata] Τυπική απόκλιση

Fit[mydata, {1, x}, x]

Προσαρμογή σε συνάρτηση **α + β x**

Η μεταβλητή **x** συμβολίζει το πρώτο στοιχείο κάθε 2άδας

Fit[mydata, {1, x, x^2}, x]

Προσαρμογή σε συνάρτηση **α + β x + γ** $\mathbf{x^2}$

Οι πιο πάνω προσαρμογές είναι γραμμικές ως προς **α**, **β**, **γ**
Συχνά όμως θέλουμε και μη-γραμμικές προσαρμογές, π.χ. σε συνάρτηση της μορφής: **a exp(b (x-1980))**. Χρησιμοποιούμε:

FindFit[mydata, a Exp[b (x-1980)], {a, b}, x]

Απάντηση: **{a -> 3114.23, b -> 0.0512687}**

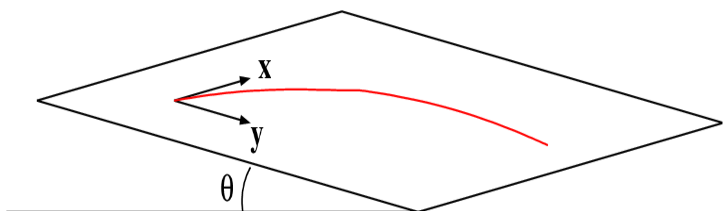
Οι προβλέψεις μας για τα κέρδη κατά τα έτη 2016-2020 μπορούν τώρα να υπολογιστούν ως εξής:

Table[a Exp[b (x-1980)] /. % , {x, 2016, 2020}]

Απάντηση: **{19720.5, 20757.9, 21849.9, 22999.3, 24209.2}**

<u>Πρόβλημα-Εφαρμογή</u>
<u>(για φοιτητές Θετικών/Πολυτεχνειακών κατευθύνσεων)</u>

Σώμα κινείται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο με τριβή. Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η τροχιά του.



Δεδομένα: **θ** κλίση επιπέδου
μ συντελεστής τριβής ολίσθησης
$\mathbf{v_0}$ μέτρο αρχικής ταχύτητας
$\boldsymbol{\varphi_0}$ κατεύθυνση αρχικής ταχύτητας στο κεκλιμένο επίπεδο x-y
g επιτάχυνση βαρύτητας
T ολικός χρόνος εξέλιξης

Υπόδειξη: Οι εξισώσεις κίνησης είναι (<u>αποδείξτε το</u>!):

$$\ddot{y} = -\mu\, g \cos\theta \frac{\dot{y}}{(\dot{y}^2 + \dot{x}^2)^{1/2}} + g \sin\theta, \qquad \ddot{x} = -\mu\, g \cos\theta \frac{\dot{x}}{(\dot{y}^2 + \dot{x}^2)^{1/2}}$$

Επίλυση

```
(* Πρώτα ας επιλέξουμε τιμές για τα δεδομένα *)
θ = Pi/6; μ = 0.3; v0 = 2; φ0 = -Pi/4; g = 10; T = 3;

(* Λύνουμε τις διαφορικές εξισώσεις για x(t), y(t), στο
   διάστημα 0 ≤ t ≤ T *)
s = NDSolve[
 {x''[t] == - μ g Cos[θ] x'[t]/Sqrt[x'[t]^2 + y'[t]^2],
  y''[t] == - μ g Cos[θ] y'[t]/Sqrt[x'[t]^2 + y'[t]^2]
             + g Sin[θ],
  x[0] == 0,
  y[0] == 0,
  x'[0] == v0 Cos[φ0],
  y'[0] == v0 Sin[φ0]},
{x, y}, {t, 0, T}]

(* Γράφημα της οριζόντιας συνιστώσας x(t) *)
Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, T}, PlotRange -> All]

(* Γράφημα της κατακόρυφης συνιστώσας y(t) *)
Plot[Evaluate[y[t] /. s], {t, 0, T}, PlotRange -> All]

(* Γράφημα της τροχιάς y(x) *)
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. s], {t, 0, T}]
```

Δοκιμάστε το!

<u>Εντολές «ροής ελέγχου»</u> (όπως σε άλλες γλώσσες προγραμματισμού, π.χ. Fortran, C, κλπ.)

- Η εντολή **If** : το αποτέλεσμα εξαρτάται από την τιμή (**true** ή **false**) που θα πάρει το «κατηγόρημα» (predicate). Χρήση της, π.χ., στον ορισμό ασυνεχών συναρτήσεων:

  f[x_] := If[x < 0, -x, x]
  g[x_]:= If[x < -1, 0, If[x < 1, -2, 1]]

- Η εντολή **Do** : Επαναληπτική εκτέλεση εντολών. Χρήση της, π.χ., στον ορισμό του «παραγοντικού» (**a!**)

  a = 1; Do[a = a*n, {n, 1, 10}]; a

… και αμέτρητες άλλες εντολές και εφαρμογές!

ΚΑΛΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ !