Μιγαδική Ανάλυση

Θέματα περιεκτικής εξέτασης.

Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε 10 μονάδες

Ονομα Φοιτητή:

Θεμα 1:

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\cos\frac{1}{\zeta}}$$

Θέμα 2:

Εστω f-συνάρτηση πού είναι αναλυτική στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1) = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ και συνεχής στήν κλειστή του θήκη $\overline{D}(0,1)$. Να δειχθεί ότι

1) $\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)d\zeta = 0$

2) $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ γιά κάθε $z \in D(0,1)$.

Θέμα 3:

1) Εστω f-συνάρτηση πού είναι αναλυτικη στο χωρίο $U = D(0,1)\backslash\{0\}$, όπου $D(0,1) = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < 1\}$. Αν $|f(\zeta)| \leq |\zeta|^{-\frac{1}{2}}$ για κάθε $\zeta \in U$, τότε δείξτε οτι στο σημείο $\zeta = 0$ η συνάρτηση f έχει άρσημο ανώμαλο σημείο.

2)Εστω ότι η αναλυτική στον μοναδιαίο δίσκο$D(0,1)$ συνάρτησση h ικανοποιεί την εξίσωση $h''(\frac{1}{2^n}) = h(\frac{1}{2^n})$ για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots.$. Δείξτε ότι η συνάρτηση h είναι αναλυτική σέ όλο το μιγαδικό επίπεδο.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Θέματα περιεκτικής εξέτασης

Να απαντηθούν τρία από τα τέσσερα Θέματα. Σε κάθε Θέμα αντιστοιχούν 10 μονάδες.

Θέμα 1. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Θέτουμε $f_0(x) = f(x)$ και για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt, \quad 0 \le x \le 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

α)

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f(t)\, dt, \quad \text{για κάθε } \; n = 1, 2, \ldots, \quad 0 \le x \le 1.$$

β) Η συνάρτηση

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

είναι συνεχής στο $[0,\, 1]$.

Θέμα 2. Υποθέτουμε ότι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ειναι χώρος μέτρου και $f :\, X \to [0,\, +\infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $\nu(E) = \displaystyle\int_E f\, d\mu, \quad \forall\; E \in \mathcal{A}$. Να αποδειχθεί ότι το ν είναι μέτρο στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$, το οποίο είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ και ότι αν φ είναι μετρήσιμη και μη αρνητική συνάρτηση, τότε ισχύει η ισότητα $\displaystyle\int_X \varphi\, d\nu = \int_X \varphi\, f\, d\mu\,.$

Θέμα 3. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f\, :\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη και ότι $1 \le p < q \le \infty$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap \in L^q(\mathbb{R})$ να αποδείξετε ότι

$$f \in L^r(\mathbb{R}), \quad \text{για κάθε } \; r \in (p,\, q)\;.$$

Θέμα 4. Υποθέτουμε ότι $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f :\, X \to [0,\, +\infty)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$E_n := \{x \in X :\; f(x) \ge n\} \;\text{ για κάθε }\; n = 1, 2, \ldots$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_X f\, d\mu < +\infty \;\text{ αν και μόνο αν }\; \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) < +\infty\;.$$

Ισχύει το συμπέρασμα αυτό αν $\mu(X) = +\infty$;

Πανεπιστήμιο
Κύπρου

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Περιεκτικες Εξετασεις στις
Μερικες Διαφορικες Εξισωσεις
3 Φεβρουαριου 2021

ΟΝΟΜΑ : ....

ΕΠΩΝΥΜΟ : ....

Α. Τ.: ....

Άσκηση	1	2	3	4	5	6	Βαθμός
Μονάδες							

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΘΟΥΝ ΚΑΙ ΤΑ ΕΞΙ ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1. Αν $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$, να επιλυθεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1, & x, y \in \mathbb{R}, \\ u(x, x) = \frac{1}{2}x, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Θέμα 2. Να βρεθεί η λύση $u : U \to \mathbb{R}$ του πιο κάτω προβλήματος:

$$\begin{cases} \Delta u = 0\ ,\ 0 < r < a, 0 < \theta < \theta_0 \\ u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \theta_0) = 0\ ,\ 0 \leq r \leq a \\ u(a, \theta) = g(\theta)\ ,\ 0 < \theta < \theta_0 \end{cases}$$

όπου το χωρίο $U \subset \mathbb{R}^2$ δίδεται σε πολικές συντεταγμένες $(r, \theta) \in [0, a] \times [0, \theta_0]$, ο τελεστής $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ είναι η Λαπλασιανή, $a > 0$ σταθερά, g είναι δοθείσα, επαρκώς ομαλή συνάρτηση που ικανοποιεί $g(0) = 0$, και $\theta_0 < \pi/2$.

Θέμα 3. Εστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ένα φραγμένο και συνεκτικό χωρίο με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$. Θεωρούμε $u : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u(x, t)$, την ομαλή λύση του προβλήματος

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2\Delta u + h(u_t) = f(x, t), & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & x \in \Omega \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{array} \tag{1}$$

όπου $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $\phi,\ \psi : \Omega \to \mathbb{R}$ δεδομένες ομαλές και συμβατές με το πρόβλημα συναρτήσεις και ισχύει ότι $s\,h(s) \geq \lambda s^2$ για κάποια θετική σταθερά λ. Επίσης, $\frac{\partial u}{\partial n}$ είναι η εξωτερική κάθετη παράγωγος του u στο σύνορο $\partial\Omega$.

Αποδείξτε ότι η ενέργεια $e(t)$ ικανοποιεί:

$$e(t) := \frac{1}{2}\left(\|u_t(t)\|^2 + c^2\|\nabla u(t)\|^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(\|\psi\|^2 + c^2\|\nabla\phi\|^2\right) + C_\lambda \int_0^t \|f(s)\|^2\,ds \qquad t > 0$$

όπου $\|\cdot\|$ η L^2 στάθμη στο Ω και C_λ μια σταθερά που εξαρτάται απο το λ. Επίσης, να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς C_λ.

Θέμα 4. Έστω D ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$, με ομαλό σύνορο ∂D. Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\begin{cases} -\Delta\Psi = \lambda\Psi\ ,\ \text{στο } D \\ \Psi = 0\ ,\ \text{στο } \partial D \end{cases}$$

το οποίο υποθέτουμε ότι έχει λύσεις $\lambda_i \in \mathbb{R}, \Psi_i \neq 0, i = 1, 2, \ldots$ (Δ είναι η Λαπλασιανή).

(α) Να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές λ_i είναι θετικές.

(β) Για $\lambda_1 \neq \lambda_2$ να δείξετε ότι $\int_D \Psi_1 \Psi_2 = 0$, όπου Ψ_i η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i.

Θέμα 5. Έστω $K = [0,1] \times [0,T]$ και

$$\Gamma = [0,1] \times \{0\} \cup \{0,1\} \times [0,T],$$

Εάν η ομαλή συνάρτηση $u = u(x,t) : K \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$u_t = u_{xx} + 2u_x - 1\,,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\max_{(x,t)\in K} u(x,t) = \max_{(x,t)\in \Gamma} u(x,t).$$

Θέμα 6. Έστω $u(x,t) \in C^4\left([0,2\pi]\right)$ η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0\ ,\ x \in (0,2\pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(2\pi,t)\ ,\ t \geq 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2\pi,t)\ ,\ t \geq 0 \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(2\pi,t)\ ,\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x)\ ,\ x \in [0,2\pi] \end{cases}$$

όπου $f(x)$ δοθείσα, επαρκώς ομαλή, περιοδική συνάρτηση (με περίοδο 2π).

(α) Να δείξετε ότι $M(t) = \int_0^{2\pi} u(x,t)dx$ δεν αλλάζει με το χρόνο.

(β) Έστω $E(t) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\right)^2 dx$. Να δείξετε ότι $E(t)$ δεν αλλάζει με το χρόνο.

Πανεπιστημιο Κυπρου
Τμημα Μαθηματικων και Στατιστικης

Περιεκτική εξέταση στη Γεωμετρία

Τετάρτη, 3 Φεβρουαρίου 2021

ΟΝΟΜΑ: ....
ΕΠΩΝΥΜΟ: ....
Α.Φ.Τ.: ....

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία!

Θέμα	1	2	3	4	5	6	Βαθμός
Μονάδες	10	10	10	10	10	10	60

Θέμα 1ο: Έστω ο πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^2$ και $f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(yz, zx, y^2).$$

α) Δείξτε οτι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $[1, 1, 0]$.
β) Δείξτε οτι η f δεν είναι εμφύτευση (immersion).

Θέμα 2ο: Έστω M, N διαφορίσιμες πολλαπλότητες διάστασης n και $M \to N$ C^∞-διαφορίσιμη απεικόνιση. Αποδείξτε ή βρείτε αντιπαράδειγμα για τις παρακάτω προτάσεις:
α) Αν το διαφορικό της f, d_pf είναι 1-1 για κάθε $p \in M$, τότε η f είναι 1-1.
β) Αν d_pf είναι 1-1 για κάποιο $p \in M$, τότε η f είναι 1-1 σε μια περιοχή του p.

Θέμα 3ο: Έστω $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ και

$$\omega = (x + \cos y + \cos z)dy \wedge dz + (e^{xz} + y)dz \wedge dx + (\sin xy + z)dx \wedge dy.$$

Υπολογίστε το $\int_{S^2} \omega$.

Θέμα 4ο: Έστω $(M, \langle , \rangle^M)$ και $(N, \langle , \rangle^N)$ πολλαπλότητες Riemann και $f\colon M \to N$ ισομετρία, δηλαδή διαφορομορφισμός τέτοιος ώστε

$$\langle df_p v, df_p w \rangle^N_{f(p)} = \langle v, w \rangle^M_p \ \ \forall p \in M, \ v, w \in T_pM.$$

(ι) Δείξτε οτι $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y) \ \forall x, y \in M$ όπου d_N και d_M η απόσταση Riemann της N και M αντίστοιχα.
(ιι) Έστω $\gamma : I \to M$ γεωδαισιακή της M, με $||\dot{\gamma}(t)|| = 1 \ \forall \ t \in I$. Δείξτε οτι η $f \circ \gamma$ είναι γεωδαισιακή της N.

Θέμα 5ο: Έστω α μια 1-μορφή σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M, που δε μηδενίζεται πουθενά και θ μια 1-μορφή τέτοια ώστε $\theta \wedge \alpha = 0$. Δείξτε οτι υπάρχει $f \in C^\infty(M)$ τέτοια ώστε $\theta = f\alpha$.

Θέμα 6ο: Έστω $(M, \langle , \rangle^M)$ πολλαπλότητα Riemann και $X_1(t), X_2(t)$ παράλληλα διανυσματικά πεδία κατά μήκος της καμπύλης $c(t)$.

α) Δείξτε ότι το $\langle X_1(t), X_2(t)\rangle^M$ δεν εξαρτάται από το t.

β) Δείξτε ότι $\langle X_1(t), c'(t)\rangle^M$ είναι σταθερό αν η c είναι γεωδαισιακή.

γ) Αν υποθέσουμε οτι η M είναι η $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, βρείτε την παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος $(0, 5, 0)$ από το βόρειο πόλο $(0, 0, 1)$ κατά μήκος του μέγιστου κύκλου $(0, \sin(t), \cos(t))$ στο $(0, 1, 0)$, μετά κατά μήκος του $(\sin(t), \cos(t), 0)$ στο $(1, 0, 0)$ και πίσω στο βόρειο πόλο κατά μήκος του $(\cos(t), 0, \sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.