

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

---

**ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 1998 - 1999**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΚΑΘΑΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**  
**ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1998**

1. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\int_C e^{e^{\frac{1}{z}}} dz, \quad \int_C \frac{z^2 + z - 2}{z^2(z-1)} dz$$

όπου  $C$  ο κύκλος  $|z| = 2$  με θετική φορά.

2. Έστω  $f(z)$  αναλυτική στο χωρίο  $\{|z| < 2\}$  και έστω  $C$  ο μοναδιαίος κύκλος. Με υποθέσεις ότι η  $f$  δεν έχει ρίζες πάνω στο κύκλο  $C$  και

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C z^2 \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2},$$

να βρεθούν οι ρίζες της  $f$  στο εσωτερικό του  $C$ .

3. Έστω  $f(z)$  ακέραια αναλυτική συνάρτηση τέτοια ώστε  $|f(z)| < 3 |z|^2$ , για όλα τα  $z$  με  $|z| > 1$ . Δείξτε ότι η  $f$  είναι πολυώνυμο. 4. Έστω  $f$  αναλυτική για

$|z| < 2$ . Δείξτε ότι

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2 \frac{t}{2} dt = 2f(0) + f'(0).$$

5. i) Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση  $f$  από  $D = \{z : |z| < 1\}$  στον εαυτό του, με  $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$  και  $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$ ;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
 ΚΑΘΑΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ  
 ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1998

1. Αν η φραγμένη συνάρτηση  $f(x)$  είναι ολοχληρώσιμη στο  $[a, b]$  να δειχθεί ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin nx dx = 0 ,$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x)| |\sin nx| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b |f(x)| dx .$$

2. Η  $f$  ορίζεται στο  $[0, 1]$  έτσι ώστε

$$f(x) = x^2$$

για κάθε  $x$  ρητό στο  $[0, 1]$ .

Επίσης για κάθε ρητό  $x$  στο  $[0, 1]$ , και για κάθε άρρητο  $y$  στο  $[0, 1]$  ισχύει

$$(x - y)(f(x) - f(y)) > 0 .$$

Δείξτε ότι

(i) Η  $f$  είναι αύξουσα στο  $[0, 1]$ .

(ii)  $f(x) = x^2$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

3. Έστω

$$\lambda_f(\alpha) = m\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\} .$$

Να δείξετε ότι

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha) d\alpha .$$

4. Έστω  $C[-1, 1]$  ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο  $[-1, 1]$

και

$$M = \{f \in C[-1, 1] : \int_{-1}^1 f(x) x^{2n} dx = 0, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

4.

$$\int_a^b |K_n(x, t)| dx < M \quad \forall t \in [a, b].$$

Εάν  $f \in L_1([a, b])$  ορίζουμε την ακόλουθα

$$f_n(x) = \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt.$$

Να αποδείξετε τα ακόλουθα:

α) Εάν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$  τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

ομοιόμορφα ως προς  $x \in [a, b]$ .

β) Γιά κάθε  $f \in L_1([a, b])$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L_1} = 0.$$

8 Για κάθε μια από τις ακόλουθες προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα:

1. Αν  $f \in L^1(\mathbb{R})$  τότε  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .
2. Κάθε χλειστό σύνολο με μέτρο Lebesgue 0 είναι πουθενά πυκνό.
3. Αν  $f_n \rightarrow f$  στο  $L_1$  τότε  $f_n \rightarrow f$  σ. π.
4. Κάθε συνάρτηση που είναι ολοχληρώσιμη χατά Lebesgue είναι ολοχληρώσιμη και χατά Riemann.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ  
 ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥΣ  
 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1999

1. Έστω

$$A = \{(x, y) : x^2 - y^2 = 1, x, y \geq 0\}$$

και

$$B = \{(x, y) : y = x, x, y \geq 0\}.$$

Έστω  $f(x, y)$  συνεχής συνάρτηση στο  $\mathbb{R}^2$  τέτοια ώστε

- (i) Όταν  $(x, y) \rightarrow \infty$  στο  $A$ ,  $f(x, y) \rightarrow L < \infty$ ,
- (ii) Όταν  $(x, y) \rightarrow \infty$  στο  $B$ ,  $f(x, y) \rightarrow M < \infty$ . Πρέπει κατ ανάγκη  $L = M$ ; Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

2. (i) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των ρητών αριθμών είναι  $F_\sigma$  αλλά δέν είναι  $G_\delta$  σύνολο.

(ii) Αν  $P \subset [0, 1]$  και το  $P$  είναι χλειστό, πουθενά πυκνό στο  $[0, 1]$  και  $m(P) > 0$  τότε για κάθε διάστημα  $I$ , όπου  $I \subset [0, 1]$ , ισχύει  $m(P \cap I) < l(I)$ .

3. Να εξετασθεί ως προς τη σύγχλιση και την απόλυτη σύγχλιση το ολοκλήρωμα Riemann

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Να εξετασθεί αν υπάρχει το ολοκλήρωμα Lebesgue

$$\int_{[0, +\infty]} \frac{\sin x}{x} dm.$$

4. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} \frac{n^2 x e^{-n^2 \bar{x}^2}}{1+x^2} dx = 0$$

για κάθε  $a > 0$ . Ισχύει η ισότητα αυτή όταν  $a = 0$ ;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
 ΚΑΘΑΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
 ΑΛΓΕΒΡΑ  
 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1999

1. (i) Έστω ότι  $G$  είναι κυκλική ομάδα πεπερασμένης τάξης και ότι  $n$  διαιρεί  $|G|$ . Άν

$$H = \{g \in G \mid g^n = 1\},$$

να δείξετε ότι η  $H$  είναι κυκλική υποομάδα της  $G$  τάξης  $n$ .

(ii) Άν  $K$  είναι υποομάδα της  $(C - \{0\}, \cdot)$ , να δείξετε ότι η  $K$  είναι κυκλική.

2. Να βρείτε τον αριθμό των στοιχείων της  $S_5$  που έχουν τάξη 5 και να δείξετε ότι υπάρχει υποομάδα  $N$  της  $S_5$  με  $[S_5 : N] = 6$ .

Άν  $g \in S_5$ , να δείξετε ότι  $N(g(123)) \neq Ng$ .

3. Για χάθε  $a \in Q(\sqrt{2})$ , όπου  $a = a_0 + a_1\sqrt{2}$ , ( $a_0, a_1 \in Q$ ) θέτουμε  $\|a\| = |a_0^2 - 2a_1^2|$ . Να δείξετε τα πιο χάτω:

(i) Για χάθε  $z \in Q(\sqrt{2})$ , υπάρχει  $q \in Z[\sqrt{2}]$  τ.ω.  $\|z - q\| < 1$ .

(ii)  $Z[\sqrt{2}]$  είναι Ευχλείδεια περιοχή.

4. (i) Δείξτε ότι χάθε ομάδα τάξης  $p^2$ , όπου  $p$  πρώτος, είναι αβελιανή.

(ii) Να ταξινομηθούν όλες οι ομάδες τάξης 77. Το ίδιο για τις ομάδες τάξης 45.

5. (i) Να κατασκευασθεί πεπερασμένο σώμα με 9 στοιχεία.

(ii) Έστω  $F$  πεπερασμένο σώμα. Δείξτε ότι χάθε στοιχείο του  $F$  είναι άθροισμα δύο τετραγώνων.

6. Έστω  $R$  το σύνολο των  $2 \times 2$  πινάκων της μορφής

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

όπου  $a, b$  ανοίχουν σε σώμα  $F$ . Δείξτε ότι  $R$  είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Για ποια από τα ακόλουθα σώματα είναι το  $R$  σώμα;  $F = Q, C, Z_5, Z_7$ .

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΚΑΘΑΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**  
**ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1999**

1. Δείξτε ότι η  $f(z) = \tan z$  είναι αναλυτική στο  $\mathbb{C}$  εκτός από απλούς πόλους στα σημεία  $a_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$ . Να υπολογιστεί  $\operatorname{Res}_{a_n} f(z)$ . Να βρεθεί η σειρά Taylor της  $f(z)$  σε μιά περιοχή του 0 (4-5 όροι είναι αρχετοί). Ποιά είναι η ακτίνα σύγχλισης της σειράς;

2. i) Να βρεθεί ακέραια αναλυτική συνάρτηση  $f$  τέτοια ώστε  $f(n+in) = 0$  για κάθε ακέραιο  $n$ .

ii) Δείξτε ότι

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

3. i) Διατυπώστε (χωρίς απόδειξη) τα θεωρήματα Liouville, Rouche, ανοικτής απεικόνισης και την αρχή του μέγιστου μέτρου. Χρησιμοποιώντας ένα από τα θεωρήματα να αποδείξετε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

ii) Έστω  $0 < r < 1$ . Δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$p(z) = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1}$$

δεν έχει ρίζες στον δίσκο  $|z| < r$ ; όταν το  $n$  είναι αρχετά μεγάλο.

4. Έστω  $f$  ακέραια αναλυτική. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz,$$

όπου  $\gamma$  ο κύκλος  $|z| = r$  και  $a, b$  στο εσωτερικό του κύκλου. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα να αποδείξετε το θεώρημα του Liouville.

5. i) Έστω  $A = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$  και  $B = \{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\}$ . Να βρεθεί σύμμορφη απεικόνιση του  $A$  στο  $B$ .

ii) Έστω  $A = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  και  $B = \{z : |z| > 1\}$ . Να βρεθεί η εικόνα του χωρίου  $A \cap B$  μέσω της συνάρτησης  $f(z) = z + \frac{1}{z}$ .

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΚΑΘΑΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ  
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1999

1. Έστω

$$A = \{(x, y) : x^2 - y^2 = 1, x, y \geq 0\}$$

και

$$B = \{(x, y) : y = x, x, y \geq 0\}.$$

Έστω  $f(x, y)$  συνεχής συνάρτηση στο  $\mathbb{R}^2$  τέτοια ώστε

- (i) Όταν  $(x, y) \rightarrow \infty$  στο  $A$ ,  $f(x, y) \rightarrow L < \infty$ ,
- (ii) Όταν  $(x, y) \rightarrow \infty$  στο  $B$ ,  $f(x, y) \rightarrow M < \infty$ . Πρέπει κατ ανάγκη  $L = M$ ;  
Να δικαιολογηθεί η απάντηση.

2. (i) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των ρητών αριθμών είναι  $F_\sigma$  αλλά δέν είναι  $G_\delta$  σύνολο.

- (ii) Αν  $P \subset [0, 1]$  και το  $P$  είναι χλειστό, πουθενά πυκνό στο  $[0, 1]$  και  $m(P) > 0$  τότε για κάθε διάστημα  $I$ , όπου  $I \subset [0, 1]$ , ισχύει  $m(P \cap I) < l(I)$ .

3. Να εξετασθεί ως προς τη σύγχλιση και την απόλυτη σύγχλιση το ολοχλήρωμα Riemann

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Να εξετασθεί αν υπάρχει το ολοχλήρωμα Lebesgue

$$\int_{[0, +\infty]} \frac{\sin x}{x} dm.$$

4. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} \frac{n^2 x e^{-n^2 x^2}}{1+x^2} dx = 0$$

για κάθε  $a > 0$ . Ισχύει η ισότητα αυτή όταν  $a = 0$ ;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
 ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
 ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ  
 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 1999

1. (i) Να αποδείξετε ότι

$$(l_1)' = l_\infty .$$

(ii) Να εξετάσετε εάν

$$(l_\infty)' = l_1 .$$

2. Έστω  $T : l_2 \rightarrow \mathbb{R}$  η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση

$$T(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} .$$

Να αποδείξετε ότι  $T \in (l_2)'$  και να βρείτε τη στάθμη της  $\|T\|_{(l_2)'}.$

3. Έστω  $H = L_2(-1, 1)$  ο χώρος των πραγματικών συναρτήσεων εφοδιασμένος με τη στάθμη

$$\|f\|_H = \left( \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

και  $M$  ο υπόχωρος του  $H$  που αποτελείται από δλες τις άρτιες συναρτήσεις στο  $(-1, 1)$ . Δηλαδή,  $f \in M$  αν και μόνο αν  $f(x) = f(-x)$  για κάθε  $x$  στο  $(-1, 1)$ .

1. Να απόδειξετε ότι ο  $M$  είναι κλειστός υπόχωρος του  $H$ .

2. Να βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $M$  στο  $H$ .

3. Εάν  $f \in H$  να βρείτε την προβολή της  $f$  στο  $M$ .

4. Έστω  $X$  ένας γραμμικός σταθμητός χώρος και  $\{x_n\}$  μια ακολουθία του  $X$ . Λέμε ότι η  $\{x_n\}$  συγκλίνει ασθενώς στο  $x \in X$  εάν για κάθε  $f \in X'$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$$

και το συμβολίζουμε με  $x_n \rightarrow x$  (a).

Να αποδείτε τα ακόλουθα:

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γενική Μεταπτυχιακή Εξέταση Εαρινού Εξαμήνου 1998-99 στην  
Αριθμητική Ανάλυση

Σάββατο, 30 Ιανουαρίου 1999

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΘΕΜΑ 1ο

(Mov. 20)

- (a) Ο τελεστής  $A$  απεικονίζει τον πλήρη μετρικό χώρο  $(X, d)$  στον εαυτό του και ικανοποιεί,

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

για κάποια σταθερά  $\alpha$ , με  $0 \leq \alpha < 1$ . Δείξτε ότι η εξίσωση  $x = Ax$  έχει μοναδική λύση στο χώρο  $X$ . Αν ο τελεστής  $T : X \rightarrow X$ , είναι τέτοιος ώστε  $T^k = A$ , για κάποιο θετικό ακέραιο  $k$ , δείξτε ότι η εξίσωση  $y = Ty$  έχει μοναδική λύση στο χώρο  $X$ .

- (b) Ο τελεστής  $B$  ορίζεται για συνεχείς συναρτήσεις  $x \in C[0, 1]$  από την σχέση

$$[Bx](s) = \int_0^s K(s, t)x(t)dt + f(s), \quad s \in [0, 1],$$

όπου  $K$  είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, συνεχής στο  $[0, 1] \times [0, 1]$  και  $f \in C[0, 1]$ . Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση  $x \in C[0, 1]$ , τέτοια  $x = Bx$  και υποδείξτε τρόπο με τον οποίο μπορούμε να την προσεγγίσουμε.

## ΘΕΜΑ 2ο

(Mov. 20)

Εστω  $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $d \in \mathbb{R}^n$  και θεωρήστε την επαναληπτική μέθοδο που περιγράφεται από την εξίσωση

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

όπου  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  αυθαίρετο αρχικό διάνυσμα.

- (a) Δείξτε ότι η ακολουθία διανυσμάτων  $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$  συγκλίνει στην μοναδική λύση της εξίσωσης

$$x = Mx + d,$$

αν και μόνο αν  $\rho(M) < 1$ .

- (b) Δείξτε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|M^k\|^{1/k} = \rho(M),$$

για κάθε εξαρτώμενη στάθμη πίνακα και στη συνέχεια περιγράψτε, εν' συντομία, τα σχετικά με την ταχύτητα σύγκλισης της επαναληπτικής μεθόδου (1).

- (c) Υποθέστε ότι ο πίνακας  $M$  είναι τέτοιος ώστε  $\rho(M) = 0$ . Τι αποτέλεσμα έχει αυτή η υπόθεση στην σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου (1); (Αιτιολογήστε τα συμπεράσματά σας.)

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**30 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 1999  
10:00-13:00**

## ΑΣΚΗΣΗ 1

Εστω  $(X, Y)$  τυχαίο σημείο στο επίπεδο και έστω  $D = \sqrt{X^2 + Y^2}$  η απόσταση του  $(X, Y)$  από το σημείο τομής των αξόνων. Υποθέτουμε ότι η παράμετρος που μας ενδιαφέρει είναι η

$$\vartheta = P(D > d_o),$$

όπου  $d_o > 0$  είναι καθορισμένο. Υποθέτουμε ότι οι  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την  $N(0, \sigma^2)$  με  $\sigma^2$  άγνωστο.

(α) Να δειχθεί ότι  $\vartheta = \exp\left(-\frac{d_o^2}{2\sigma^2}\right)$ .

(β) Υποθέτουμε ότι έχουμε τυχαίο δείγμα  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  από τέτοια σημεία με αποστάσεις  $D_1, \dots, D_n$ .

(i) Να δοθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια της  $\vartheta$  η οποία να είναι συνεπής. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(ii) Να υπολογισθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της  $\vartheta$ .

(iii) Εξηγήστε πως θα βρείτε την αμερόληπτη εκτιμήτρια ομοιόμορφα ελάχιστης διασποράς.

Υπόδειξη: Η κατανομή  $X_k^2$  είναι η  $G\left(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}\right)$  και η  $G(1, \lambda)$  η εκθετική με παράμετρο  $\lambda$ .

### ΑΣΚΗΣΗ 3

Εστω  $X_1, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα με πυκνότητα

$$f(x, \vartheta) = \vartheta(\vartheta+1)(1-x)x^{\vartheta-1} \quad 0 < x < 1, \quad \vartheta > 0.$$

(α) Να εξετασθεί αν η  $f$  ανήκει στην εκθετική οικογένεια.

(β) Να βρεθεί ελάχιστη επαρκής στατιστική συνάρτηση για την  $\vartheta$ .

(γ) Εστω  $\delta(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{2\bar{X}}{1-\bar{X}}$  η εκτιμήτρια της  $\vartheta$  με τη μέθοδο των ροπών.

Να εξετασθεί η  $\delta$  ως προς τη συνέπεια.

(δ) Να βρεθεί η ασυμπτωτική κατανομή της  $\delta$ .

(ε) Να δειχθεί ότι η  $\delta$  δεν είναι αποτελεσματική.

(στ) Εστω ότι  $n=1$ . Για συγκεκριμένο μέγεθος  $\alpha \in (0,1)$  να βρεθεί ο ισχυρότατος έλεγχος για τις υποθέσεις

$$H_0: \vartheta = 1 \text{ vs. } H_1: \vartheta = 2.$$

(ζ) Για τα δεδομένα του (στ) να βρεθεί ανάμεσα στους ελέγχους λόγου πιθανοφανειών εκείνος που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των πιθανοτήτων σφάλματος τύπου I και σφάλματος τύπου II.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Εστω  $U = \{\Delta : \Delta \text{ αμερόληπτη εκτιμήτρια για την } \vartheta \in \Theta, E_\vartheta(\Delta^2) < \infty, \forall \vartheta\}$  και  $U_0 = \{S : E_\vartheta(S) = 0, E_\vartheta(S^2) < \infty, \forall \vartheta \in \Theta\}$ . Υποθέτουμε ότι η οικογένεια  $U$  είναι μή κενή.

(a) Να δειχθεί όπι η  $\Delta \in U$  είναι A.E.O.E.Δ. αν και μόνο αν

$$E_\theta(S\Delta) = 0 \quad \forall \vartheta \in \Theta \quad \text{and} \quad \forall S \in U_0.$$

(β) Να δειχθεί ότι υπάρχει το πολύ μια  $A.E.O.E.\Delta.$  της 9.

(γ) Εστω  $\{\Delta_n\}$  ακολουθία A.E.O.E.Δ και Δ στατιστική συνάρτηση με  $E_\theta(\Delta^2) < \infty$  ώστε  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_\theta(\Delta_n - \Delta)^2 = 0, \quad \forall \theta \in \Theta$ . Να δειχθεί ότι η Δ είναι επίσης A.E.O.E.Δ.

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥΣ**

**18 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1999  
0900-1200**

### Ασκηση 1

- (ι) Να δείξετε ότι το  $Q = \text{ρητοί}$  έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.
- (ii) Εστω  $1 > \varepsilon > 0$ . Να κατασκευάσετε ένα κλειστό, πουθενά πυκνό υποσύνολο  $A$  του  $[0,1]$  που να έχει μέτρο Lebesgue  $> 1 - \varepsilon$ . Υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο  $A$  του  $[0,1]$  πρώτης κατηγορίας με  $m(A) = 1$ ;

### Ασκηση 3

Εστω  $\mu(X) = 1$  και  $f, g$  μετρήσιμες συναρτήσεις στο  $X$  τ.ω.  $f(x) > 0, g(x) > 0$  και  $f(x)g(x) \geq 1, \forall x \in X$ .

Δείξτε ότι

$$\int_X f d\mu \cdot \int_X g d\mu \geq 1.$$

5. Να υπολογισθούν τα ολοχληρώματα:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{x^2 + 1}$$

και

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} \theta \, d\theta.$$

7. Έστω  $G$  το χωρίο που βρίσκεται μέσα στο κύριο  $|z| = 2$  και έξω από το κύριο  $|z - 1| = 1$ . Έστω  $D = \{z : |z| < 1\}$ . Να βρεθεί σύμμορφη απεικόνιση του  $G$  στο  $D$ .

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

**18 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1999  
0900-1200**

### Ασκηση 1

- (i) Να δείξετε ότι το  $Q = \rho\text{ητοί}$  έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.
- (ii) Εστω  $1 > \varepsilon > 0$ . Να κατασκευάσετε ένα κλειστό, πουθενά πυκνό υποσύνολο  $A$  του  $[0,1]$  που να έχει μέτρο Lebesgue  $> 1 - \varepsilon$ . Υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο  $A$  του  $[0,1]$  πρώτης κατηγορίας με  $m(A) = 1$ ;

### Ασκηση 3

Εστω  $\mu(X) = 1$  και  $f, g$  μετρήσιμες συναρτήσεις στο  $X$  τ.ω.  $f(x) > 0, g(x) > 0$  και  $f(x)g(x) \geq 1, \forall x \in X$ .

Δείξτε ότι

$$\int_X f d\mu \cdot \int_X g d\mu \geq 1.$$

### Ασκηση 5

Να εξετασθεί αν το ολοκλήρωμα Lebesgue

$$\int_{[0,+\infty)} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 dm(x)$$

υπάρχει. Σε περίπτωση που υπάρχει, να υπολογισθεί.

**Ασκηση 7**

Αν η  $f$  είναι απόλυτα συνεχής στο  $[a, b]$  τότε η  $f$  είναι φραγμένης κύμανσης στο  $[a, b]$ . Ισχύει το αντίστροφο;

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ**

**18 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1999  
0900-1200**

- (1) Εστω  $X$  μη αρνητική τυχαία μεταβλητή και  $g$  μη αρνητική αύξουσα συνάρτηση ορισμένη στο  $[0, \infty)$ , τέτοια ώστε  $0 < E[g(X)] < \infty$ . Εστω  $M \leq \infty$  τέτοιο ώστε  $P[X \leq M] = 1$ .

- (α) Να δειχθεί ότι για κάθε  $a > 0$

$$\frac{E[g(X)] - g(a)}{g(M)} \leq P[X \geq a] \leq \frac{E[g(X)]}{g(a)} \quad (*)$$

όπου  $g(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ .

- (β) Να διατυπωθεί η  $(*)$  στην ειδική περίπτωση όπου  $g(x) = \exp\{tx\}$ ,  $t > 0$ .

- (γ) Να δειχθεί ότι αν  $r > 0$  τότε  $g(x) = \frac{x^r}{1+x^r}$ ,  $x \geq 0$  πληροί τις συνθήκες του (α).

Μετά με τη βοήθεια της  $(*)$  να δειχθεί ότι  $Y_n \xrightarrow{P} Y$  αν και μόνο αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \frac{|Y_n - Y|^r}{1 + |Y_n - Y|^r} \right] = 0.$$

- (3) Εστω  $\{X_n, n \geq 1\}$  μια ακολουθία ανεξαρτήτων και ισονόμων τυχαίων μεταβλητών με  $P(X_1 > 0) = 1$ , και  $\{a_n, n \geq 1\}$  μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θέτουμε

$$T_n = \frac{a_1 X_1 + \dots + a_n X_n}{X_1 + \dots + X_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Αποδείξτε ότι

(i)  $E(T_n) = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n).$

(ii)  $Var(T_n) \leq \frac{1}{n} (a_1^2 + \dots + a_n^2) - \frac{1}{n^2} (a_1 + \dots + a_n)^2.$

(iii) Εάν  $a_n \rightarrow \mu$  καθώς  $n \rightarrow \infty$  (όπου  $-\infty < \mu < \infty$ ) τότε

$$T_n \xrightarrow{P} \mu \text{ καθώς } n \rightarrow \infty.$$

- (5) Εστω  $\Omega = [0,1]$ ,  $A$  η Borel  $\sigma$ -άλγεβρα του  $\Omega$  και  $P$  το μέτρο Lebesgue. Εστω  $X, Y$  δύο τυχαίες μεταβλητές που ορίζονται στο  $\Omega$  ως

$$Y(\omega) = \begin{cases} a & \gamma\alpha \quad \omega \in B = [0, 1/2] \\ & \text{όπου } 0 < a < \frac{1}{2} \\ 1-a & \gamma\alpha \quad \omega \in B^c = (1/2, 1] \end{cases}$$

και  $X$  η ταυτοική συνάρτηση  $X(\omega) = \omega$ .

(a) Για  $0 \leq x \leq 1$  να βρεθούν οι

$$P(X \leq x, Y = a) \text{ και } P(X \leq x, Y = 1-a)$$

(β) Είναι οι  $X$  και  $Y$  ανεξάρτητες; Εξηγήστε.

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ**

**18 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1999  
0900-1200**

- (1) Εστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τυχαίο δείγμα από την  $U(0, \theta)$ ,  $\theta > 0$ .
- (α) Να βρεθεί Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμήτρια  $T_1$  και Ε.Μ.Π.  $T_2$  του  $\theta$ .
  - (β) Να βρεθούν οι συναρτήσεις κινδύνου (με συνάρτηση απώλειας το τετραγωνικό σφάλμα)  $R(\theta, T_1)$  και  $R(\theta, T_2)$  των εκτιμητριών  $T_1$  και  $T_2$ .
  - (γ) Να δειχθεί ότι υπάρχει εκτιμήτρια  $T$  τέτοια ώστε  $R(\theta, T) < \min\{R(\theta, T_1), R(\theta, T_2)\}$   $\forall \theta \in \Theta$ . Τί συμπέρασμα προκύπτει για τις  $T_1$  και  $T_2$ ;

(3) Τυχαιοποιημένες τεχνικές απαντήσεων

Τυχαιοποιημένες τεχνικές απαντήσεων χρησιμοποιούνται για την ερώτηση διακριτικών ερωτήσεων σε δειγματοληψίες. Οι μέθοδοι αυτοί επιτρέπουν στον συνεντευξιαζόμενο να δίνει απαντήσεις σε συγκεκριμένες ερωτήσεις χωρίς να το γνωρίζει ο στατιστικός. Προφανώς οι μέθοδοι αυτοί δίνουν πιο ρεαλιστικά αποτελέσματα.

Στην εφαρμογή μίας τυχαιοποιημένης τεχνικής απαντήσεων, κάθε συνεντευξιαζόμενος διαλέγει ένα χαρτί από μία τράπουλα και καλείται να απαντήσει «ΝΑΙ» ή «ΟΧΙ» στην ερώτηση που έχει το χαρτί. Εστω  $\theta$  το ποσοστό των χαρτιών που γράφουν

«Έχω χρησιμοποιήσει ναρκωτικά τον τελευταίο χρόνο»

«ΝΑΙ» «ΟΧΙ».

Υποθέτουμε ότι το  $\theta$  είναι γνωστό.

Τα υπόλοιπα χαρτιά γράφουν:

«Δεν έχω χρησιμοποιήσει ναρκωτικά τον τελευταίο χρόνο»

«ΝΑΙ» «ΟΧΙ».

Ο στατιστικός συλλέγει τις απαντήσεις «ΝΑΙ» και «ΟΧΙ» χωρίς να γνωρίζει ποιο είδος χαρτιού είχε ο συνεντευξιαζόμενος. Υποθέτουμε ότι ένα απλό τυχαίο δείγμα μεγέθους  $n$  δίνεται από έναν άπειρο πληθυσμό και το πρόβλημα του στατιστικού είναι να εκτιμήσει την παράμετρο  $p$ , δηλαδή το ποσοστό χρηστών ναρκωτικών τον τελευταίο χρόνο. Εστω ο  $X$  ο ολικός αριθμός ατόμων που απαντούν «ΝΑΙ» αφού έχουν διαβάσει το χαρτί, από το δείγμα μας.

- (i) Να εκφραστεί η πιθανότητα όπως κάποιος από το δείγμα απαντά «ΝΑΙ» αφού διαβάσει την κάρτα, συναρτήσει των  $p, \theta$ . Ποιά είναι η κατανομή της  $X$ ;
- (ii) Βρείτε μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του  $p$  και υπολογίστε την διακύμανσή της.
- (iii) Ποιά είναι η μορφή της εκτιμήτριας που βρήκατε στο (ii) όταν  $\theta = 0$  και  $\theta = 1$ . Γιατί; Δώστε μια απάντηση διαισθητική. –
- (iv) Ποιά είναι η σχέση μεταξύ της διακύμανσης της εκτιμήτριας που βρήκατε στο (ii) και της Α.Ο.Ε.Δ. εκτιμήτριας του  $p$ , αν δεν είχαμε χρησιμοποιήσει την τυχαιοποιημένη τεχνική απαντήσεων; Είναι αυτό το αποτέλεσμα αναμενόμενο; Δικαιολογήστε την απάντηση σας.

(5) Εστω  $X_i = \theta X_{i-1} + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  όπου  $X_0 = 0$  και  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή  $N(0, \sigma^2)$  και  $\theta \in (-1, 1)$ .

- (i) Να προσδιορισθεί η από κοινού κατανομή του τυχαίου διανύσματος  $(X_1, X_2, \dots, X_n)'$ .
- (ii) Να βρεθεί η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας της  $(\theta, \sigma^2)$ , όπου  $(\theta, \sigma^2) \in R \times R^+$ .
- (iii) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=2}^n X_{i-1}^2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Var[X_n] = \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2}.$$

