

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥΣ

Όνομα:.....

Αρ. Ταυτότητας:.....

Εαρινό Εξάμηνο 1999-2000
29 Ιανουαρίου 2000
Ωρα: 0900-1200

**ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΟΥΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2000**

1. a) Δείξτε ότι αν η f είναι φραγμένη αναλυτική συνάρτηση στο επίπεδο \mathbb{C} τότε η f είναι σταθερή.
b) Να δειχθεί ότι κάθε μη σταθερό πολυώνυμο n -βαθμού έχει n -ακριβώς ρίζες στο \mathbb{C} .
2. Εστω f και g αναλυτικές συναρτήσεις στον δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και επιπλέον $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Re} g$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στην θήκη \overline{D} . Αν $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z)$ στο σύνορο ∂D τότε να δειχθεί ότι $f(z) - g(z) = ic, \forall z \in D$, όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.
3. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:
(i) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$
(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$
4. Εστω f αναλυτική συνάρτηση στον δίσκο $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ και τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0, n = 1, 2, \dots$
Να δειχθεί ότι υπάρχει συνάρτηση F αναλυτική στο \mathbb{C} : $F(z) = f(z) \quad \forall z \in B$.
5. (i) Να δώσετε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου m^* ενός συνόλου $E \subset IR$.
(ii) Να αποδείξετε ότι αν $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ είναι αριθμησίμου πλήθους υποσύνολα του IR τότε

$$m^*\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n m^*(E_n).$$

6. Αν $f:E \rightarrow [0,+\infty]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι

$$\int_E f dm = 0,$$

αν και μόνο αν, $f(x) = 0$ σχεδόν παντού στο E .

7. Αν η $f:E \rightarrow IR$ είναι μετρήσιμη και $m(E) < +\infty$, να αποδείξετε ότι αν το $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f^n dm$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε αυτό είναι ίσο με $m(\{x \in E : f(x) = 1\})$.

8. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ είναι ρητός,} \\ x^2, & \text{αν } x \text{ είναι ἀρρητός.} \end{cases}$$

Να εξετασθεί αν η συνάρτηση f είναι: (i) μετρήσιμη, (ii) συνεχής.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

5 Φεβρουαρίου 2000

ΟΝΟΜΑ:

1. (Βαθμοί 10)

- (α) Δώστε τον ορισμό ακολουθίας ορθογωνίων πολυωνύμων στο διάστημα (α, β) ως προς τη συνάρτηση βάρους $w(x)$.
- (β) Κατασκευάστε ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων \hat{L}_n στο (α, β) με συνάρτηση βάρους $w(x) = 1$. Δώστε τα πρώτα τρία πολυώνυμα.
- (γ) Ποία η σχέση των πολυωνύμων αυτών με τα αντιστοιχα πολυώνυμα Legendre \hat{P}_n στο διάστημα (α, β) ;
- (δ) Τα πολυώνυμα Legendre \hat{P}_n στο διάστημα (α, β) ικανοποιούν σχέσεις της μορφής:
 - (ι) $\hat{P}_{n+1}(x) = a(x)\hat{P}_n(x) + b(x)\hat{P}_{n-1}(x),$
 - (ιι) $\hat{P}''_n(x) + c(x)\hat{P}'_n(x) + d(x)\hat{P}_n(x) = 0.$
- (ε) Να βρεθούν τα $a(x), b(x), c(x)$ και $d(x)$.

2. (Βαθμοί 10)

- (α) Δώστε τη γενική μορφή κανόνων αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Legendre για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} y(x)dx$.
- (β) Δώστε τα σημεία ολοκλήρωσης στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για τα οποία ο πιο πάνω τύπος έχει μέγιστο βαθμό ακριβείας (με απόδειξη).
- (γ) Δείξτε ότι οι σταθμικοί συντελεστές είναι θετικοί. Ακολούθως δώστε αναλυτική έχφραση για τους συντελεστές αυτούς.
- (δ) Να βρεθούν οι τύποι Gauss-Legendre για $n = 1$ και $n = 2$.

3. (Βαθμοί 10)

- (α) Δώστε τους τύπους των τριών μεθόδων ενός βήματος (Αμεσης Euler, Εμμεσης Euler και μεθοδου του χανόνα του τραπεζίου) γιά το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 0$. Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποχοπής των τριών μεθόδων.
- (β) Γιά την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$, θεωρούμε τη ακόλουθη μέθοδο δύο βημάτων

$$Y_{r+1} + \alpha_1 Y_r + \alpha_2 Y_{r-1} = h[\beta_1 Y'_r + \beta_2 Y'_{r-1}].$$

Να βρεθούν οι συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ και β_2 ουτως ώστε ο πιό πάνω τύπος να έχει μέγιστη ακρίβεια. Ακολούθως να εξεταστεί η μηδέν-ευστάθεια της μεθόδου.

- (γ) Γιά την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών $y' = f(x, y)$, $y(0) = 0$ θεωρούμε τη μέθοδο Runge-Kutta

$$k_1 = hf(x_r, Y_r), \quad k_2 = hf(x_r + \Gamma_2 h, Y_r + \Gamma_2 k_1),$$

$$k_3 = hf(x_r + \Gamma_3 h, Y_r + (\Gamma_3 - A_3)k_1 + A_3 k_2),$$

$$Y_{r+1} = Y_r + B_1 k_1 + B_2 k_2 + B_3 k_3.$$

- (ι) Αν $B_2 = B_3 = 0$ να βρεθεί το B_1 γιά να έχουμε μέγιστη ακρίβεια (δηλαδή ελάχιστο τοπικό σφάλμα αποχοπής).
- (ii) Αν $B_3 = 0$ να βρεθεί η σχέση μεταξύ των B_1, B_2 και Γ_2 γιά να έχουμε μέγιστη ακρίβεια.
- (iii) Αν χανένα από τα B_1, B_2, B_3 δεν είναι ίσο με το μηδέν να βρεθεί η σχέση μεταξύ των $B_1, B_2, B_3, \Gamma_2, \Gamma_3$ και A_3 γιά να έχουμε μέγιστη ακρίβεια.

4. (Βαθμοί 10) Δίδεται το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & , \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = f(x) & , \quad u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0, x \in (0,1), \end{cases}$$

και έστω ότι χρησιμοποιούμε για την προσέγγισή του την πιό κάτω μέθοδο:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{k}{h^2} (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}),$$

όπου $h = \Delta x$ και $k = \Delta t$.

- (α) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής.
- (β) Να μελετηθεί η ευστάθεια του ανωτέρω σχήματος πεπερασμένων διαφορών με τη μέθοδο των πινάκων.
- (γ) Να μελετηθεί η ευστάθεια του ανωτέρω σχήματος πεπερασμένων διαφορών με τη μέθοδο των πινάκων στην περίπτωση που οι συνοριακές συνθήκες ειναι $\frac{\partial u(0,t)}{\partial n} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial n} = 0$.
- (δ) Να μελετηθεί η ευστάθεια του ανωτέρω σχήματος πεπερασμένων διαφορών με τη μέθοδο των πινάκων στην περίπτωση που οι συνοριακές συνθήκες ειναι $\frac{\partial u(0,t)}{\partial n} = u(1,t) = 0$.

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

Όνομα:.....

Αρ. Ταυτότητας:.....

**Εαρινό Εξάμηνο 1999-2000
29 Ιανουαρίου 2000
Ωρα: 0900-1200**

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2000

1. a) Δείξτε ότι αν η f είναι φραγμένη αναλυτική συνάρτηση στο επίπεδο \mathbb{C} τότε η f είναι σταθερή.
β) Να δειχθεί ότι κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $n -$ βαθμού έχει $n -$ ακριβώς ρίζες στο \mathbb{C} .
2. Εστω f και g αναλυτικές συναρτήσεις στον δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και επιπλέον $\operatorname{Re} f$ και $\operatorname{Re} g$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στην θήκη \overline{D} . Αν $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z)$ στο σύνορο ∂D τότε να δειχθεί ότι $f(z) - g(z) = ic$, $\forall z \in D$, όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.
3. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:
 - (i) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos\theta}$
 - (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$
4. Εστω f αναλυτική συνάρτηση στον δίσκο $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ και τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $n = 1, 2, \dots$
Να δειχθεί ότι υπάρχει συνάρτηση F αναλυτική στο \mathbb{C} : $F(z) = f(z) \quad \forall z \in B$.
5. Εστω X και Y χώροι με νόρμα και $T: X \rightarrow Y$ ενός φραγμένος, γραμμικός τελεστής. Δείξτε ότι:
 - (i) Ο συζηγής τελεστής $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ είναι φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$.
 - (ii) Ο T^* είναι $1-1$ αν και μόνο αν το $T(x)$ είναι πυκνό υποσύνολο του Y .

6. Εστω X ενας αυτοπαθής χώρος Banach. Δείξτε ότι ένας κλειστός υπόχωρος του είναι αυτοπαθής.
7. Εστω X ένας χώρος Hilbert και $\{x_n\} \subset X$ μια ακολουθία που συγκλίνει ασθενώς στο x . Εστω επίσης ότι $\lim_n \|x_n\| = \|x\|$. Δείξτε ότι η $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x (ως προς την τοπολογία της νόρμας).
8. i) Εστω X χώρος Banach και $\{x_n^*\} \subset X^*$ για την οποία υπάρχει το $\lim_n x_n^*(x) \quad \forall x \in X$. Δείξτε ότι υπάρχει $x^* \in X^*$ έτσι η $\{x_n^*\}$ να συγκλίνει στο x^* ως προς την ασθενή *-τοπολογία.
ii) Δώστε παράδειγμα χώρου Banach και ακολουθίας του δυικού του χώρου, που να συγκλίνει ως προς την ασθενή *-τοπολογία, αλλά να μη συγκλίνει ως προς την τοπολογία της νορμάς.

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

Όνομα:.....

Αρ. Ταυτότητας:.....

**Εαρινό Εξάμηνο 1999-2000
5 Φεβρουαρίου 2000
Ωρα: 0900-1200**

ΘΕΜΑ 1ο

Εστω Y_1, \dots, Y_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε η Y_i ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λx_i , όπου $\lambda > 0$ άγνωστη παράμετρος και $x_i \geq 1$ γνωστά, $i = 1, \dots, n$. Εστω $\hat{\lambda}$ η Ε.Μ.Π. του λ .

- (α) Να υπολογισθεί το $\hat{\lambda}$.
- (β) Μια μέθοδος να απαντήσουμε στο (α) είναι να εξετάσουμε τη δεύτερη παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης πιθανοφάνειας $\sum_{i=1}^n Y_i / \lambda^2$ και να αποφασίσουμε αν είναι μικρότερη από μηδέν. Σημειώστε ότι αν αυτή η ποσότητα είναι ίση με μηδέν τότε δεν υπάρχει εγγύηση ότι έχουμε μέγιστο με αυτήν τη μέθοδο. Ποιά η πιθανότητα να μην υπάρχει εγγύηση για μέγιστο;
- (γ) Επειδή τα x_i είναι γνωστά μπορεί να γίνει η εικασία ότι $\sum_{i=1}^n Y_i$, το τυχαίο μέρος του $\hat{\lambda}$ είναι επαρκής στατιστική συνάρτηση για το λ . Να εξεταστεί αυτή η εικασία.
- (δ) Να δειχθεί ότι $\hat{\lambda}$ είναι συνεπής εκτιμήτρια του λ .
- (ε) Να βρεθεί ομοιόμορφα ισχυρότατος έλεγχος για τις υποθέσεις

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad vs \quad H_1 : \lambda > \lambda_0$$

ΘΕΜΑ 2ο

Εστω $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. από την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 και έστω η συνάρτηση

$$g_c(S^2) = cS^2$$

όπου $c \in R^+$ και S^2 η συνήθης αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου σ^2 όταν η μέση τιμή μ είναι άγνωστη. Προφανώς η $g_c(S^2)$ είναι μια εκτιμήτρια του σ^2 .

- (α) Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διασπορά της $g_c(S^2)$ (ως συνάρτηση του c).
(β) Να δειχθεί ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της $g_c(S^2)$ δίνεται από τη σχέση

$$MSE(c) = \sigma^4 \{2c^2(n-1)^{-1} + (c-1)^2\}$$

- (γ) Να προσδιορισθεί η τιμή c^* για την οποία

$$MSE(c^*) = \min_{c \in R^+} MSE(c)$$

- (δ) Να υπολογισθεί η σχετική αποδοτικότητα των $g_1(S^2)$ & $g_c(S^2)$.

- (ε) Εστω ότι η τιμή της $P\left[\sum_{i=1}^n X_i \leq a\right]$ είναι γνωστή όπου a άγνωστη παράμετρος.

Να βρεθεί ΑΟΕΔ εκτιμήτρια του a (σημ.: Το ερώτημα δεν σχετίζεται με τα (α)-(δ). Θεωρήστε ότι $\sigma^2 = \text{γνωστό}$).

ΘΕΜΑ 3ο

Να προσδιορισθεί η Ε.Μ.Π. της παραμέτρου β της κατανομής $G(1, \beta)$ με σ.π.π.

$$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x > 0 \quad \text{με τη βοήθεια τυχαίου δείγματος όταν}$$

- (α) τα x_1, x_2, \dots, x_n είναι γνωστά (έχουν δηλαδή παρατηρηθεί)

και

- (β) όταν είναι γνωστό μόνο ότι k ($0 < k < n$) από τις x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι $\leq M$, όπου M και k γνωστές θετικές σταθερές (αλλά οι τιμές x_i δεν έχουν παρατηρηθεί).
- (γ) Να διερευνηθεί εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες που απαιτούνται για την συνέπεια της εκτιμήτριας του ερωτήματος (α).
- (δ) Να δειχθεί ότι η εκτιμήτρια του ερωτήματος (α) είναι συνεπής.

ΘΕΜΑ 4ο

Εστω X_1, \dots, X_n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x_k, \vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{k\vartheta}, & 0 < x_k < k\vartheta \quad , \quad k = 1, \dots, n, \quad \vartheta > 0 \\ 0 , & \text{αλλιως} \end{cases}$$

Να βρεθεί η Ε.Μ.Π. της ϑ .

ΘΕΜΑ 5ο

Εστω τυχαίο δείγμα X_1, \dots, X_n από την κατανομή Bernoulli με παράμετρο $p \in (0,1)$.

Εστω επίσης ότι η κατανομή του p είναι Beta (c_1, c_2) όπου $c_1 > 0$ και $c_2 > 0$. Εστω τέλος ότι για οποιαδήποτε εκτιμήτρια η συνάρτηση απώλειας είναι η τετραγωνική.

- (α) Να υπολογισθεί η εκτιμήτρια Bayes $\delta(x)$ της παραμέτρου p .
- (β) Να υπολογισθεί η συνάρτηση διακινδύνευσης της $\delta(x)$.
- (γ) Να προσδιορισθεί εκτιμήτρια minimax για την παράμετρο p και να δοθεί η τιμή της συνάρτησης διακινδύνευσης της εκτιμήτριας αυτής.

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ**

Όνομα:.....

Αρ. Ταυτότητας:.....

**Εαρινό Εξάμηνο 1999-2000
5 Φεβρουαρίου 2000
Ωρα: 0900-1200**

ΘΕΜΑ 1:

Εστω X_1, X_2, \dots ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με

$$P(X_k = k^2) = \frac{1}{k^2} \text{ και } P(X_k = -1) = 1 - \frac{1}{k^2}, \forall k.$$

Εστω $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(α) Να διατυπωθεί το θεώρημα Borel-Cantelli.

(β) Να δειχθεί ότι $P(X_k \neq -1 \text{ i.o.}) = 0$

(γ) Να δειχθεί ότι $S_n \xrightarrow{a.s.} -\infty$ και $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.s.} -1$.

ΘΕΜΑ 2:

Εστω X, Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[x-(3+2y)]^2 - \frac{1}{2}y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

- (α) Να δειχθεί ότι η περιθώριος κατανομή της Y είναι $N(0,1)$.
- (β) Να βρεθεί η δεσμευμένη πυκνότητα της X δεδομένου ότι $Y = y$.
- (γ) Να βρεθεί η $E(X|Y = y)$
- (δ) Να υπολογισθεί η $E(X)$ και η $Var(X)$.

ΘΕΜΑ 3:

Έστω $X \geq 0$ μια τυχαία μεταβλητή.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $a > 0$,

$$a \sum_{n=1}^{\infty} P[X > na] \leq E(X) \leq a \sum_{n=0}^{\infty} P[X > na].$$

(ii) Δείξτε ότι

$$\lim_{a \downarrow 0} a \sum_{n=1}^{\infty} P[X > na] = E(X)$$

ΘΕΜΑ 4:

Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές έτσι ώστε $P(X \geq a) \geq P(Y \geq a)$ για κάθε a . Έστω g γνησίως αύξουσα συνάρτηση για την οποία $E(g(X))$ και $E(g(Y))$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες. Να δειχτεί:

- (α) $E(X) \geq E(Y)$ και
(β) $E(g(X)) \geq E(g(Y))$.

ΘΕΜΑ 5:

Θεωρούμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών Z_n με $n = 1, 2, 3, \dots$ έτσι ώστε για κάθε n , η Z_n ακολουθεί την κατανομή με σ.μ.π. που δίνεται από τον τύπο

$$p(z) = \frac{(z + a_n - 1)}{z} p_n^{a_n} (1 - p_n)^z, \quad z = 0, 1, 2, \dots$$

όπου $a_n \rightarrow \infty$, $p_n = 1 - q_n \rightarrow 0$, ενώ $q_n a_n$ τείνει σε μιά πραγματική θετική σταθερά c .

- α) Ζητείται ο προσδιορισμός της ροπογεννήτριας της τ.μ. Z_n .
- β) Ζητείται ο προσδιορισμός του ορίου της ροπογεννήτριας της τ.μ. Z_n .
- γ) Με τη χρήση του (β) να προσδιορισθεί τ.μ. Z στην οποία συγκλίνει κατά κατανομή η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών Z_n , $n = 1, 2, 3, \dots$

