

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

- Αλγεβρα
- Γεωμετρία
- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
- Θεωρία Πιθανοτήτων
- Πραγματική Ανάλυση
- Στατιστική Θεωρία

Χειμερινό Εξάμηνο 2004 – 2005
11 & 18 Σεπτεμβρίου 2004

Θέμα 1

- (α) Ποιες είναι οι πιθανές Jordan κανονικές μορφές που μπορεί να έχει ένας 5×5 – πραγματικός πίνακας με χαρακτηριστικό πολυωνύμο $(t - 2)^3(t - 1)$;
- (β) Δώστε παράδειγμα δύο πινάκων που έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυωνύμο και το ίδιο ελάχιστο πολυωνύμο και δεν είναι όμοιοι.

Θέμα 2

Ταξινομείστε ως προς ισομορφισμό όλες τις ομάδες G .

- (α) $1 \leq |G| \leq 9$ (χωρίς απόδειξη).
- (β) $|G| = 2p$, p πρώτος, περιπτός, (με απόδειξη).

Θέμα 3

Εστω G ομάδα, $|G| = 175$.

- (α) Δείξτε ότι G περιέχει μοναδική Sylow 5-υποομάδα και μοναδική Sylow 7-υποομάδα.
- (β) Δείξτε ότι G είναι αβελιανή.

Θέμα 4

Εστω $f(x) = x^3 + 2x + 2 \in Z_3[x]$ και α μια ρίζα του f σε κάποια επέκταση του Z_3 .

- (α) Βρείτε την τάξη των στοιχείων α και $\alpha^2 + 1$ μέσα στην $(Z_3(\alpha)^*, \cdot)$.
- (β) Βρείτε το ελάχιστο πολυωνύμο του $\alpha^2 + 1$ επί του Z_3 και ένα σώμα διάσπασης αυτού του πολυωνύμου επί του Z_3 .

Θέμα 5

Βρείτε την ομάδα Galois του πολυωνύμου $f(t) = t^4 - 2$ επί του \mathbb{Q} .

Θέμα 6

- (α) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν απλές ομάδες με τάξη $2^2 \cdot 7 \cdot 11$, $2^4 \cdot 3$.
- (β) Εστω G πεπερασμένη ομάδα και P μία Sylow p -υποομάδα της G . Εστω επίσης $H \leq G$ τέτοια ώστε $N_G(P) \subseteq H$. Δείξτε ότι $N_G(H) = H$.

Θέμα 1

Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x & \alpha\nu \quad x \in Q \\ -x & \alpha\nu \quad x \in R \setminus Q \end{cases}$$

και

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \alpha\nu \quad x \in Q \\ 2 & \alpha\nu \quad x \in R \setminus Q \end{cases}$$

είναι μετρήσιμες στο R .

Θέμα 2

Εστω m^* το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στο R . Να δείξετε ότι:

- (1) Αν $m^*(A) = 0$ τότε $m^*(A \cup B) = m^*(B)$.
- (2) Κάθε αριθμήσιμο σύνολο έχει εξωτερικό μέτρο μηδέν.
- (3) Αν $m^*(E) = 0$ τότε το E είναι μετρήσιμο.

Θέμα 3

Για τη συνάρτηση $f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) = 0 \\ \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$ να εξετάσετε αν ισχύει η ισότητα

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx.$$

Πώς ερμηνεύεται το αποτέλεσμα;

Θέμα 4

Εστω μ θετικό μέτρο στο X με $\mu(X) = 1$. Εστω f πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση στο X . Να αποδείξετε ότι $\|f\|_p \leq \|f\|_q \alpha\nu \quad 0 < p < q < \infty$.

Θέμα 5

Να βρεθεί το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} \sin \frac{x}{n} dx$.

Θέμα 6

Εστω ότι η $f : E \rightarrow R$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση και $m(E) < +\infty$ (m είναι το μέτρο του Lebesgue στο R). Να αποδείξετε ότι αν το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f^n dm$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε είναι ίσο με $m(\{x \in E : f(x) = 1\})$.

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
ΧΕΟ4-05

1 Ένα σωματίδιο μάζας m εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα u . Την χρονική στιγμή που φθάνει στο μέγιστο ύψος, ένα δεύτερο σωματίδιο, μάζας $2m$, εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $2u$ από το ίδιο σημείο που εκτοξεύτηκε και το πρώτο σωματίδιο. Να δειχτεί ότι ο χρόνος που χρειάστηκε το δεύτερο σωματίδιο για να συγκρουστεί με το πρώτο είναι $\frac{u}{4g}$ και να βρεθεί το ύψος πάνω από το σημείο εκτόξευσης στο οποίο έγινε η κρούση.

Κατά την κρούση τα δύο σωματίδια γίνονται ένα. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος που θα φθάσει πάνω από το σημείο εκτόξευσης το συνδυασμένο σωματίδιο.

2 Να δοθούν οι εξισώσεις κίνησης σε πολικές συντεταγμένες.

Ενα σωματίδιο P με μάζα m και διάνυσμα θέσης \mathbf{r} κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης $m f(r) \mathbf{r}_1$, όπου \mathbf{r}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση OP (Ο η αρχή των αξόνων). Αν (r, θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες και h είναι η στροφορμή ανά μονάδα μάζας του σωματιδίου P , να αποδειχτεί ότι το σωματίδιο ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2 u^2}, \quad u = \frac{1}{r}.$$

Ενα σωματίδιο, το οποίο κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης, περιγράφει την καμπύλη $r(\theta + 1)^2 = a$, όπου a είναι σταθερά. Οταν το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $\theta = 0$, δέχεται μια ώθηση η οποία διπλασιάζει την εφαπτομενική συνιστώσα και μηδενίζει την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας. Να δειχτεί ότι η εξίσωση της νέας τροχιάς του σωματιδίου είναι

$$\frac{3a}{2r} = 1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right).$$

3 (α) Να δειχτεί ότι

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta f(x, y, y') dx.$$

Να δειχτεί ότι μια αναγκαία συνθήκη για να έχει το ολοκλήρωμα $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx$ ακρότατη τιμή είναι

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx = 0$$

και στη συνέχεια να αποδειχτεί η εξίσωση του Euler.

(β) Αφού βρεθεί η συνάρτηση Green, ή διαφορετικά, για τον κατάλληλο διαφορικό τελεστή, να μετασχηματιστεί το συνοριακό πρόβλημα

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - \lambda y &= x^2, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ y(0) &= 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

σε ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm.

4. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός του επιπέδου

$$\begin{aligned}x' &= \cos t x + \sin t y \\y' &= -\sin t x + \cos t y\end{aligned}$$

είναι μονοπαραμετρική ομάδα. Ακολούθως να υπολογισθεί ο γεννήτορας της δράσης και να δείξετε ότι είναι συμμετρία της διαφορικής εξίσωσης

$$(y - x) \frac{dy}{dx} + y + x = 0 .$$

5. Έστω $H(q_1, q_2, \dots, q_N, p_1, p_2, \dots, p_N)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο \mathbf{R}^{2N} .

- i) Να δωθεί ο ορισμός του ολοκληρώσιμου Χαμιλτονιανού συστήματος και να ορίσετε όλες τις έννοιες που αναφέρετε στον ορισμό.
- ii) Αν f_1, \dots, f_k είναι σταθερές κίνησης Χαμιλτονιανού συστήματος ανεξάρτητες και σε ενέλιξη, να δείξετε ότι $k \leq N$.
- iii) Να αποδείξετε το θεώρημα του Poisson. Η αγγίλη Poisson δ' ψο σταθερών κίνησης είναι επίσης σταθερά κίνησης.

6. Στον \mathbf{R}^{2N} με συντεταγμένες $(\lambda_1, \dots, \lambda_N, r_1, \dots, r_N)$ ορίζω

$$H_2 = \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_N^2) .$$

i) Χρησιμοποιώντας την αγγύλη Poisson

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \{r_i, r_j\} = 0 ,$$

$$\{\lambda_i, r_j\} = \delta_{ij} r_j ,$$

να γράψετε τις εξισώσεις Χάμιλτον για το σύστημα.

ii) Να γράψετε τις ίδιες εξισώσεις Hamilton για τη Χαμιλτονιανή

$$H_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_N$$

χρησιμοποιώντας μια άλλη αγγύλη.

iii)

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$H_j = \frac{1}{j} (\lambda_1^j + \dots + \lambda_N^j)$$

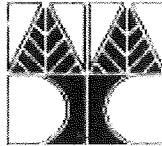
για $j = 1, 2, \dots, N$ και οι συναρτήσεις

$$I_j = \left(\frac{r_{j+1}}{r_j} \right)^2 e^F$$

όπου

$$F = \frac{(\lambda_{j+1} - \lambda_j)}{H_1} \log r_1 r_2 \dots r_N$$

$j = 1, 2, \dots, N-1$ είναι στεθερές κίνησης. Είναι όλες σε ενελιξή;

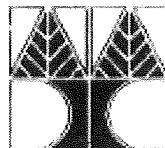


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

- Αλγεβρα
- Αριθμητική Ανάλυση
- Διαφορικές Εξισώσεις
- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
- Πραγματική Ανάλυση

Εαρινό Εξάμηνο 2004 – 2005
29 Ιανουαρίου 05 & 5 Φεβρουαρίου 05



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

Άλγεβρα

Όνοματεπώνυμο:

Αρ. Ταυτότητας:

Εαρινό Εξάμηνο 2004-2005
5 Φεβρουαρίου 2005
09:00 – 12:00

Θέμα 1

- (α) Δείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο. Ισχύει το αντίστροφο;
- (β) Εστω P_2 ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού ≤ 2 ως προς το t και $D: P_2 \rightarrow P_2$ ο ενδομορφισμός:

$$f \rightarrow -\frac{1}{2}t^2 \frac{d^2 f}{dt^2} + t \frac{df}{dt} - 3 \frac{df}{dt}$$

Ποια η κανονική μορφή Jordan του D ;

Θέμα 2

- (α) Δείξτε ότι αντίστροφος ενός αντιστρέψιμου άνω τριγωνικού πίνακα είναι άνω τριγωνικός.
- (β) Εστω $S \in GL(n, \mathbb{R})$. Δείξτε ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $K \in O(n)$, διαγώνιος πίνακας A και άνω τριγωνικός πίνακας N με μονάδες στη διαγώνιο, έτσι ώστε $S = KAN$.

Θέμα 3

Εστω $f(x) = x^4 + x^3 + 1 \in Z_2[x]$ και α μια ρίζα του f σε κάποια επέκταση του Z_2 .

- (α) Βρείτε την τάξη του α μέσα στη $(Z_2(\alpha)^*, \bullet)$.
- (β) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο των στοιχείων α^3 και α^4 επί του Z_2 .

Θέμα 4

Εστω $f(x) = x^3 - 2 \in Q[x]$ και $\omega = \exp(i2\pi/3)$. Βρείτε την ομάδα Galois του f

- (α) Επί του $Q(\omega)$.
- (β) Επί του Q .

Θέμα 5

Εστω $w = \exp(i\pi/3)$ και $T = \langle a, b \rangle \leq GL(2, C)$, όπου

$$a = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & 1/w \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (α) Δείξτε ότι T είναι μια μη-αβελιανή ομάδα τάξης 12 και ότι $T \not\cong D_{12}$.
- (β) Εστω G μια μη-αβελιανή ομάδα τάξης 12 η οποία περιέχει στοιχείο τάξης 6. Αν $G \not\cong D_{12}$, δείξτε ότι $G \cong T$.

Θέμα 6

- (α) Εστω $|G| = 207$. Δείξτε ότι G είναι αβελιανή.
- (β) Εστω $|G| = 351$. Δείξτε ότι G ή περιέχει μια κανονική Sylow 3 – υποομάδα ή μια κανονική Sylow 13 – υποομάδα.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

29 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ, 2005, 09:00–12:00

ONOMA
A.Φ.Τ.

ΘΕΜΑ	ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ
1.	/20
2.	/20
3.	/20
4.	/20
5.	/20
6.	/20

Συνολική βαθμολογία	/100
---------------------	------

Να δοθούν απαντήσεις σε όλα τα κατωτέρω θέματα.

1. (i) Πότε ένας μετρικός χώρος ονομάζεται διαχωρίσιμος;
 (ii) Δείξατε ότι κάθε συμπαγής χώρος είναι διαχωρίσιμος. Ισχύει το αντίστροφο;
 (iii) Εξετάστε αν οι χώροι

$$l^1(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}, \quad l^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}$$
 είναι διαχωρίσιμοι.
2. Έστω $\langle X, \mathcal{M} \rangle$ μετρήσιμος χώρος και έστω $F : X \rightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Έστω ότι η f είναι φραγμένη. Να δειχθεί ότι υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
 - (i) $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \dots \leq \varphi_n \leq f$ και
 - (ii) $\varphi_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.
3. (i) Να δοθεί η εκφώνηση του Θεωρήματος της Μονοτόνου Συγκλίσεως.
 (ii) Να δοθεί η εκφώνηση και η απόδειξη του Λήμματος του Fatou.
 (iii) Να δοθεί η εκφώνηση και η απόδειξη του Θεωρήματος της Κυριαρχημένης Συγκλίσεως.
4. Έστω $\langle X, \mathcal{M}, \mu \rangle$ χώρος μέ μέτρο και έστω $f \in L^1(\mu)$, $f \geq 0$.
 - (i) Να δοθεί ο ορισμός του $\int_X f d\mu$.
 - (ii) Δείξατε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει απλή μετρήσιμη συνάρτηση s τέτοια ώστε

$$\int_X |f - s| d\mu < \varepsilon.$$
 - (iii) Έστω τώρα ότι $X = \mathbb{R}$ και μ το μέτρο Lebesgue. Αν $I = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, δείξατε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\int_{\mathbb{R}} |\chi_I - h| d\mu < \varepsilon$.
 - (iv) Γενικότερα δείξατε ότι αν $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) < \infty$, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση h ώστε $\int_{\mathbb{R}} |\chi_E - h| d\mu < \varepsilon$.
 - (v) Τέλος, συμπεράνατε ότι αν $f \geq 0$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση h τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} |f - h| d\mu < \varepsilon$.
5. Έστω $\langle X, \mathcal{M}, \mu \rangle$ χώρος μέ μέτρο και έστω $f \in L^1(\mu)$. Δείξατε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $E \in \mathcal{M}$ με $\mu(E) < \delta$ να ισχύει ότι $\int_E |f| d\mu < \varepsilon$.
6. (i) Δείξατε ότι κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.
 (ii) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} , $\mu(E) < \infty$ (όπου μ είναι το μέτρο Lebesgue) και $\varepsilon > 0$. Δείξατε ότι υπάρχει συμπαγές K υποσύνολο του E τέτοιο ώστε

$$\mu(E \setminus K) < \varepsilon \quad \text{και} \quad K^o = \emptyset.$$

Καλή επιτυχία

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Όνομα:

Αρ. Φοιτ. Ταυτότητας:

Ασκηση	1	2	3	4	5	6
Βαθμός						

Τελική βαθμολογία:

1 Δύο σωματίδια A και B της ίδιας μάζας βρίσκονται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας 30° και η απόσταση μεταξύ τους είναι ίση με a . Το A βρίσκεται στα δεξιά του B και πιο ψηλά. Τα δύο σωματίδια εκτοξεύονται την ίδιαν χρονική στιγμή και το μέτρο των ταχυτήτων τους είναι ίσο με \sqrt{ga} . Το A εκτοξεύεται οριζόντια προς τα αριστερά και το B εκτοξεύεται με γωνία 60° με την οριζόντια προς τα δεξιά. Να δειχτεί ότι τα σωματίδια συγκρούονται. Τα δύο σωματίδια προσκολλούνται και σχηματίζουν ένα νέο σωματίδιο. Να βρεθεί η αρχική ταχύτητα του νέου σωματιδίου και να προσδιοριστεί η γωνία που σχηματίζει αυτή η ταχύτητα με το οριζόντιο επίπεδο.

2 Να αποδειχτεί ότι ένα σωματίδιο P μάζας m που κινείται κάτω από την επίδραση της κεντρικής δύναμης $mf(r)\mathbf{r}_1$, όπου \mathbf{r}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση OP (Ο η αρχή των αξόνων), ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2u^2}, \quad u = \frac{1}{r},$$

όπου r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σωματιδίου P και h είναι η στροφορμή του P ανά μονάδα μάζας.

Ενα σωματίδιο μάζας m που κινείται κάτω από την επίδραση κεντρικής δύναμης περιγράφει την καμπύλη $r \cos 2\theta = a$ και έχει στροφορμή ίση με mh . Να δειχτεί ότι η δύναμη έχει μέτρο ίσο με $\frac{3mh^2}{r^3}$ και να προσδιοριστεί η κατεύθυνσή της.

Οταν το σωματίδιο περνά από το σημείο $r = a$, $\theta = 0$, δέχεται μια ώθηση η οποία του διπλασιάζει την ταχύτητα. Να δειχτεί ότι η εξίσωση της νέας τροχιάς του σωματιδίου είναι

$$\frac{a}{r} = \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\theta\right).$$

[**Υπόδειξη:** Μπορούν να χρησιμοποιηθούν, χωρίς απόδειξη, οι εξισώσεις $r^2\dot{\theta} = h$, $m(\ddot{r} - h^2/r^3) = f(r)$]

3 (α) Αρχίζοντας από τους νόμους του Newton να αποδειχτεί η αρχή του Hamilton για ένα σωματίδιο μάζας m .

(β) Να δειχτεί ότι η συνάρτηση Green του τελεστή του Bessel τάξης n

$$Ly = \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - \frac{n^2}{x} y$$

σχετικός με τις συνθήκες $y(0) = y(1) = 0$, είναι της μορφής

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left(\frac{s}{x}\right)^n (1 - x^{2n}), & s < x, \\ \frac{1}{2n} \left(\frac{x}{s}\right)^n (1 - s^{2n}), & s > x, \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να μετασχηματιστεί το πρόβλημα

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda x^2 - n^2)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

σε ολοκληρωτική εξίσωση, όταν $n \neq 0$.

4 Έστω

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2),$$

όπου $V(q_1, q_2) = q_1 q_2 + (q_1 - q_2)^3$.

Να γράψετε τις εξισώσεις Hamilton για το σύστημα. Είναι το σύστημα ολοκληρώσιμο; Έχουμε τις ακόλουθες συμμετρίες για το σύστημα.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_2 &= (q_1 + q_2) \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \\ X_3 &= \cos t \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \\ X_4 &= \sin t \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \right) \end{aligned}$$

Να βρεθούν δύο εξαρτόμενες από το χρόνο σταθερές κίνησης I_1 και I_2 χρησιμοποιώντας το θεώρημα της Noether. Χρησιμοποιώντας τις I_1 και I_2 να βρεθεί σταθερά κίνησης ανεξάρτητη του χρόνου.

5 a Να βρεθεί η τιμή των a, b ούτως ώστε η διαφορική εξίσωση

$$(3xy + 2y^3)dx + (x^2 + 3xy^2)dy = 0$$

να είναι αναλλίωτη ως προς τη παραμετρική ομάδα του επιπέδου

$$\bar{x} = e^{at} \quad \bar{y} = e^{bt}$$

b Να δείξετε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$$

είναι συμμετρία της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = \frac{2}{x^2} .$$

Ακολούθως να λυθεί η εξίσωση χρησιμοποιώντας κανονικές μεταβλητές.

6 a Στο \mathbf{R}^3 με συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) ορίζουμε αγκύλη Poisson με πίνακα Poisson

$$\pi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω $H = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$ η Χαμιλτονιανή. Να γράψετε τις εξισώσεις κίνησης για το σύστημα. Να βρεθεί μια δεύτερη σταθερά κίνησης ανεξάρτητη από την H .

b Είναι ο μετασχηματισμός

$$Q_1 = \frac{1}{2}q_1^2 \quad P_1 = \frac{p_1}{q_1} \quad Q_2 = q_2 \quad P_2 = p_2$$

κανονικός;

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Εαρινό Εξάμηνο 2004 – 2005

Αριθμητική Ανάλυση

5 Φεβρουαρίου, 2005, 09:00 – 12:00

Να λύσετε 4 από τα πιο κάτω θέματα. Κάθε θέμα αντιστοιχεί σε 25 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1^ο:

- (1) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $\|\cdot\|$ μια επαγόμενη νόρμα πινάκων. Δείξτε ότι $\rho(A) \leq \|A\|$, όπου $\rho(A)$ η φασματική ακτίνα του A . Δείξτε επίσης ότι αν $\|A\| < 1$, τότε ο $I + A$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

- (2) Έστω $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας τριδιαγώνιος πίνακας με μη-μηδενικά στοιχεία

$$b_{i,i} = 1, b_{i,i-1} = b_{i+1,i} = 1/4, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

και $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας πίνακας με $\|E\|_\infty = \varepsilon < 1/2$. Δείξτε ότι αν \underline{x} και \underline{y} είναι οι λύσεις των συστημάτων

$$B\underline{x} = \underline{b} \quad \text{και} \quad (B + E)\underline{y} = \underline{b}$$

τότε

$$\|\underline{y}\|_\infty \leq \frac{2}{1 - 2\varepsilon} \|\underline{b}\|_\infty \quad \text{και} \quad \|\underline{y} - \underline{x}\|_\infty \leq \frac{4\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \|\underline{b}\|_\infty.$$

ΘΕΜΑ 2^ο:

Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = f(t, y), \quad t \in [0, T]$$

$$y(0) = y_0$$

όπου T, y_0 γνωστές σταθερές και $f(t, y)$ γνωστή συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

για κάποια σταθερά $K \geq 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα προσδιορισμού μιας προσέγγισης για τη συνάρτηση $y(t)$ στο διάστημα $[0, T]$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα ομοιόμορφο διαμερισμό

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$, με $h = t_{j+1} - t_j$, και υπολογίζουμε τιμές y_j , $j = 1, \dots, n$, έτσι ώστε

$y_j \approx y(t_j)$, ως εξής:

- (i) Ολοκληρώστε την πιο πάνω διαφορική εξίσωση, στο διάστημα $[t_j, t_{j+1}]$, για να εκφράσετε το $y(t_{j+1})$ συναρτήσει του $y(t_j)$ και ενός ολοκληρώματος στο διάστημα $[t_j, t_{j+1}]$ που περιέχει το $f(t, y)$.
- (ii) Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Τραπεζίου, προσεγγίστε το πιο πάνω ολοκλήρωμα, βρίσκοντας έτσι μια έκφραση για το $y(t_{j+1})$. (Αυτή θα είναι στη μορφή μιας μη-γραμμικής εξίσωσης και θα περιέχει τους όρους y_j , y_{j+1} , $f(t_j, y_j)$ και $f(t_{j+1}, y_{j+1})$.)
- (iii) Θεωρήστε τώρα τη λύση της πιο πάνω μη-γραμμικής εξίσωσης με μια επαναληπτική μέθοδο σταθερού σημείου, δεδομένης μιας καλής αρχικής εκτίμησης $y_{j+1}^{(0)} \approx y(t_{j+1})$. Να γράψετε την εξίσωση αυτής της μεθόδου και να βρείτε μια ικανή συνθήκη (συναρτήσει των h και K) για τη σύγκλισή της.

ΘΕΜΑ 3^ο:

- (1) Έστω y μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα $[a, b] \in \mathbb{R}$ και

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

ένας διαμερισμός του $[a, b]$. Δείξτε ότι:

- (a) Είναι μοναδικό πολυώνυμο $p_n \in \mathbb{P}_n$ που πληροί τις συνθήκες παρεμβολής

$$p_n(x_i) = y(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

- (β) Αν $y \in C^{n+1}[a, b]$, τότε $\forall x \in [a, b]$,

$$y(x) - p_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

για κάποιο $\xi = \xi(x) \in [a, b]$.

- (2) Έστω $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, και p_2 το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο παρεμβολής που πληροί τις συνθήκες

$$p_2(x_i) = \sin(x_i), \quad i = 0, 1, 2.$$

Δείξτε ότι

$$\max_{x \in [0, 1]} |\sin x - p_2(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216}.$$

ΘΕΜΑ 4^ο:

(1) Έστω $C \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ένας σύνθετος πίνακας της μορφής

$$C = \begin{bmatrix} P & O \\ Q & P \end{bmatrix},$$

όπου O είναι ο μηδενικός πίνακας του $\mathbb{R}^{n \times n}$ και $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας.

Προσδιορίστε τον πίνακα $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, έτσι ώστε ο σύνθετος πίνακας

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & O \\ R & P^{-1} \end{bmatrix},$$

να είναι ο αντίστροφος του C .

(2) Βρείτε τους πίνακες επανάληψης Jacobi και Gauss-Seidel που αντιστοιχούν στον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\underline{x}_J^{(k)}$ και $\underline{x}_G^{(k)}$ οι k προσεγγίσεις της λύσης \underline{x} του γραμμικού συστήματος $A\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{b} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^n$, που προκύπτουν αντίστοιχα από την εφαρμογή των επαναληπτικών μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel. Αν τα αρχικά διανύσματα $\underline{x}_J^{(0)}$ και $\underline{x}_G^{(0)}$ είναι τέτοια ώστε

$$\underline{x}_J^{(0)} - \underline{x} = \underline{x}_G^{(0)} - \underline{x} = [1, 1, 1, 1]^T,$$

δείξτε ότι

$$\|\underline{x}_J^{(k)} - \underline{x}\|_\infty = \frac{1}{2^k}, \quad \|\underline{x}_J^{(k)} - \underline{x}\|_2 = \frac{1}{2^{k-1}},$$

και

$$\|\underline{x}_G^{(k)} - \underline{x}\|_\infty = \frac{1}{2^{2k-1}}, \quad \|\underline{x}_G^{(k)} - \underline{x}\|_2 = \frac{\sqrt{10}}{2^{2k}}.$$

ΘΕΜΑ 5^ο:

(1) Να περιγραφεί η μέθοδος ADI για την επίλυση της διδιάστατης εξισώσεως της θερμότητας. Να δείξετε ότι η μέθοδος αυτή είναι πάντοτε ευσταθής. Ποια πλεονεκτήματα έχει η ADI έναντι της άμεσης μεθόδου και ποια έναντι της μεθόδου Crank-Nicolson και γιατί;

(2) Να διατυπωθεί η συνθήκη CFL (Courant-Friedrichs-Lowy). Σε ποια ανισότητα καταλήγει η CFL στην περίπτωση όπου το σχήμα

$$u_j^{n+1} = cu_{j-1}^n + du_j^n,$$

προσεγγίζει τις λύσεις της εξίσωσης $u_t + u_x = 0$;

[Συμβολισμός: Με τους συνήθεις συμβολισμούς η τιμή u_j^n αποτελεί προσέγγιση της λύσεως στο σημείο $(x, t) = (j\Delta x, n\Delta t)$.]

ΘΕΜΑ 6^ο:

(1) Έστω φ_k , $k = 0, 1, \dots$, μια ακολουθία ορθογωνίων πολυωνύμων, ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο (a, b) , και

$$\int_a^b w(x)y(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i y(x_i),$$

ο αντίστοιχος προσεγγιστικός τύπος ολοκλήρωσης Gauss. (Δ ηλαδή, x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, είναι οι $n+1$ διακεκριμένες ρίζες του φ_{n+1} στο (a, b) και

$$A_i = \int_a^b w(x)\ell_i(x)dx \text{ με } \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Δείξτε ότι ο τύπος είναι ακριβής $\forall y \in \mathbb{P}_{2n+1}$.

(2) Αρχίζοντας από τον ορισμό

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

των πολυωνύμων Chebyshev, δείξτε τα πιο κάτω:

(α)

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} T_m(x) T_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

(β) Για $n \geq 1$, το πολυώνυμο T_n έχει ακριβώς n διακεκριμένες ρίζες στα σημεία

$$x_i = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

(γ)

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

(3) Έστω

$$I = \int_0^a \frac{t^{1/2} p(t)}{(a-t)^{1/2}} dt, \quad a > 0,$$

όπου p είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n$ ($n > 0$). Εξηγήστε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος ολοκλήρωσης Gauss-Chebyshev για τον ακριβή υπολογισμό του I .

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

29 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ, 2005, 09:00–12:00

ONOMA
A.Φ.Τ.

ΘΕΜΑ	ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ
1.	/20
2.	/20
3.	/20
4.	/20
5.	/20
6.	/20

Συνολική βαθμολογία /100

Να δοθούν απαντήσεις σε 5 από τα κατωτέρω θέματα.

Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα.

ΘΕΜΑ 1

(α) Για ποιές τιμές του $\alpha > 0$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}x' &= |x|^\alpha, \\x(0) &= 0,\end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση και για ποιές όχι ; [Πλήρης εξήγηση.]

(β) Να βρεθεί ο γενικός τύπος της αναδρομικής ακολουθίας Picard για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}x' &= x + 1, \\x(0) &= 1.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Weierstrass (ή άλλως) δείξατε ότι η ακολουθία αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα, υποσύνολο του \mathbb{R} , και το όριό της αποτελεί τη μοναδική λύση του ανωτέρω προβλήματος αρχικών τιμών.

(γ) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}x' &= |x| - 1, \\x(1) &= 0.\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

(α) Σώμα ρίπτεται κατακόρυφα προς τα άνω με αρχική ταχύτητα u_0 υπό την επίδραση της βαρύτητας g και της ατμοσφαιρικής τριβής που είναι ανάλογη της εκάστοτε ταχύτητας. Δηλαδή, $\gamma_{\text{τριβής}} = \kappa u$. Να υπολογισθεί το ανώτατο ύψος $h = h(\kappa)$ στο οποίο θα φθάσει το σώμα, και ο χρόνος $\tau = \tau(\kappa)$ που απαιτείται. Δείξατε ότι

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} h(\kappa) = \frac{u_0^2}{2g} \quad \text{και} \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} \tau(\kappa) = \frac{u_0}{g}.$$

(β) Έστω $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ λύσεις της εξισώσεως $x' = f(t, x)$ με αρχικές συνθήκες

$$\varphi_1(\tau) = \xi_1, \quad \varphi_2(\tau) = \xi_2,$$

αντιστοίχως. Άν η συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz:

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|,$$

τότε δείξατε ότι για κάθε $t \in I$ και $t < \tau$ ισχύει ότι:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |\xi_1 - \xi_2|e^{k|t-\tau|}.$$

ΘΕΜΑ 3

(α) Δείξατε ότι οι λύσεις της εξισώσεως

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x^{(0)} = 0,$$

αποτελούν n -διάστατο διανυσματικό χώρο.

(β) Έστω ότι τα σύνολα $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ αποτελούν θεμελιώδη σύνολα λύσεων της εξισώσεως

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + p_0(t)x = 0,$$

όπου $p_0, \dots, p_{n-1} \in C(I)$ και I ανοικτό διάστημα. Δείξατε ότι υπάρχει σταθερός αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τέτοιος ώστε:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix},$$

για κάθε $t \in I$.

ΘΕΜΑ 4

(α) Έστω ότι $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ συνεχής και περιοδικός πίνακας με περιόδο $T > 0$. Δηλαδή: $A(t+T) = A(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αν $\Phi(t)$ θεμελιώδης πίνακας λύσεων του συστήματος $x' = A(t)x$, δείξατε ότι υπάρχει σταθερός αντιστρέψιμος πίνακας $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ώστε

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

(β) Τα δοχεία A , B και C , χωρητικότητας ενός λίτρου, είναι πλήρη διαλυμάτων ύδατος και άλατος. Τα ζεύγη δοχείων A και B , B και C , C και A συνδέονται με σωλήνες, από τους οποίους εκρέει από το πρώτο δοχείο του κάθε ζεύγους και εισρέει στο δεύτερο δοχείο του ίδιου ζεύγους, διάλυμα με ρυθμό ενός λίτρου ανά λεπτό, σ' όλους τους σωλήνες. Άν αρχικώς τα δοχεία A , B και C περιείχαν διαλυμένα 5, 7 και 12 γραμμάρια άλατος, αντιστόχως, και ανά πάσα στιγμή τα διαλύματα στα τρία δοχεία είναι ομοιογενή, δείξατε ότι μετά από άπειρο χρόνο το κάθε δοχείο χρόνο περιέχει διαλυμένα 8 γραμμάρια άλατος.

(γ) Έστω $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ διαγωνιοποιησιμος πίνακας με θετικές ιδιοτιμές και $\xi \in \mathbb{R}^N$. Τότε δείξατε ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} tx' &= Ax, \\ x(-1) &= \xi, \end{aligned}$$

τείνει στο μηδέν καθώς το t τείνει στο μηδέν.

ΘΕΜΑ 5

(α) Να βρεθεί η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξιώσεως

$$(2y + x) u_x + (y - 2x) u_y + 2u = 0.$$

(β) Να βρεθεί η ειδική λύση της μερικής διαφορικής εξιώσεως

$$x(y^2 + u) u_x - y(x^2 + u) u_y = (x^2 - y^2) u,$$

η οποία ικανοποιεί την συνθήκη $u(x, -x) = 1$.

(γ) Να γραφούν οι εξισώσεις του Charpit σε παραμετρική μορφή.

(δ) Να λυθεί παραμετρικά το πρόβλημα

$$x(u_x^2 + u_y^2) = uu_x, \quad u(0, s^2) = 2s.$$

[Υπενθυμίζεται ότι: $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \tanh^{-1} \frac{x}{a} + c, \quad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
 $\frac{d}{dx}[\tanh x] = \operatorname{sech}^2 x, \quad \frac{d}{dx}[\operatorname{sech} x] = -\tanh x \operatorname{sech} x]$

ΘΕΜΑ 6

(α) Να δοθεί ο ορισμός του ορθογωνίου συνόλου συναρτήσεων.

(β) Να δεχθεί ότι το σύνολο των συναρτήσεων $\phi_n(x) = \cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, είναι ορθογώνιο στο διάστημα $[0, \pi]$.

(γ) Να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 1, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

(δ) Να δειχθεί ότι η λύση του πιό πάνω προβλήματος είναι μοναδική.

[Υπενθυμίζεται ότι: $2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$]

(ε) Στην συνέχεια να λυθεί το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + xt, \quad 0 < x < \pi, t > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, u_x(\pi, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 1, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Καλή επιτυχία.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Έστω A ένας αντιστρέψιμος, συμμετρικός πραγματικός 3×3 πίνακας. Δείξτε ότι το σύνολο $M_A := \{x \in R^3 | \langle x, Ax \rangle = 1\}$ είναι υποπολλαπλότητα του R^3 .

2. (α) Έστω η παραμετρική ομάδα στο επίπεδο που είναι περιστροφή γύρω από το 0. Ποιό διανυσματικό πεδίο X παράγεται από αυτή τη ροή;

(β) Έστω $\omega = dx \wedge dy$. Ορίζω $i_X(\omega)(Y) = \omega(X, Y)$. Να υπολογιστεί το $i_X(\omega)$.

(γ) Να βρεθεί συνάρτηση $f : R^2 \rightarrow R$ τέτοια ώστε $df = -i_X(\omega)$.

3. (α) Έστω $f : M \rightarrow N$ και $g : N \rightarrow K$ διαφορίσιμες απεικονίσεις μεταξύ των πολλαπλοτήτων N, M και K . Αν η τάξη της g στο $f(p)$ είναι ίση με τη διάσταση της N , δείξτε ότι οι f και $g \circ f$ έχουν την ίδια τάξη στο p .

(β) Δείξτε ότι δεν υπάρχει διαφορίσιμη και επί απεικόνιση $f : R^n \rightarrow R^{n+1}$.

4. Έστω τα διάχυνυσματικά πεδία στο R :

(α) $x \frac{\partial}{\partial x}$,

(β) $x^2 \frac{\partial}{\partial x^2}$.

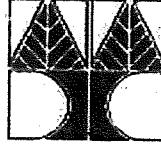
Ορίζεται η ροή τους για κάθε $t \in R$. Αν ναι, υπολογίστε τη ροή.

5. Έστω M προσανατολισμένη, συμπαγής n -διάστατη πολλαπλότητα με σύνορο και $f : M \rightarrow N$ διαφορίσιμη και N $(n - 1)$ -διάστατη πολλαπλότητα. Έστω επίσης μια $(n - 1)$ -μορφή η της N και $\omega = f^*\eta$. Δείξτε ότι $\int_{\partial M} \omega = 0$.

6. Έστω $f : R^3 \rightarrow R^2$ με $f(x, y, z) = (x + z^2, y - z^2) = (u, v)$ και $\alpha = du + u dv$. Να υπολογισθούν:

- (α) $f^* \alpha$,
- (β) $f^*(d\alpha)$,

(γ) $\int_S f^*(d\alpha)$, όπου S η επιφάνεια $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ με προσανατολισμό από κάθετο που δείχνει προς τα πάνω.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

Θεωρία Πιθανοτήτων

Όνοματεπώνυμο:

Αρ. Ταυτότητας:

Χειμερινό Εξάμηνο 2004-2005
11 Σεπτεμβρίου 2004
09:00 – 12:00

Θέμα 1

Όλες οι πιο κάτω τυχαίες μεταβλητές είναι ορισμένες στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{A}, P) και τα ενδεχόμενα είναι στοιχεία της σ -άλγεβρας \mathcal{A} . Η έκφραση ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι σταθερή, σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $P(X = c) = 1$. Για κάθε μια από τις πιο κάτω προτάσεις δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

- (α) Αν A, B ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα, τότε A, B είναι ανεξάρτητα.
- (β) Αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και Y, Z ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε X, Z ανεξάρτητες.
- (γ) Αν X, Y τυχαίες μεταβλητές τότε X, Y ανεξάρτητες $\Leftrightarrow X^2$ και Y^2 ανεξάρτητες.
- (δ) Αν X τυχαία μεταβλητή και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση ώστε X και $Y \equiv g(X)$ είναι ανεξάρτητες τότε η Y είναι σταθερή.
- (ε) Αν X, Y ανεξάρτητες και $E|Y| < \infty$ τότε $E(Y | X) = E(Y)$. a.s.

Θέμα 2

Εστω (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας.

(α) Εστω $\{E_n, n \in N\}$ ακολουθία ενδεχομένων στο χώρο πιθανότητας. Να δειχθεί ότι αν $\sum_{n \in N} P(E_n) < \infty$

$$\text{τότε } P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = 0.$$

(β) Εστω X_1, X_2, \dots ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στο χώρο πιθανότητας, με $P(X_k = k^2) = \frac{1}{k^2}$ και

$$P(X_k = -1) = 1 - \frac{1}{k^2} \quad \forall \quad k \in N.$$

Εστω $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Να περιγραφεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά των S_n και $\frac{S_n}{n}$ όταν $n \rightarrow \infty$.

Θέμα 3

Εστω λ_k , $k \geq 1$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$.

(α) Εστω $\{P_i, i \in N\}$ μέτρα πιθανότητας στη σ -άλγεβρα $Borel \mathcal{B}$ του \mathbb{R} και $\{F_i, i \in N\}$ οι συναρτήσεις κατανομής τους. Να δειχθεί ότι:

(i) Ο (κυρτός) συνδυασμός $\sum_{i \in N} \lambda_i P_i$ είναι μέτρο πιθανότητας στην \mathcal{B} .

(ii) Η $\sum_{i \in N} \lambda_i F_i$ είναι συνάρτηση κατανομής του $\sum_{i \in N} \lambda_i P_i$.

(β) Εστω X_1, X_2, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές από κατανομή με χαρακτηριστική συνάρτηση φ_X . Εστω N τυχαία μεταβλητή από την κατανομή Poisson (λ) ανεξάρτητη από τις X_1, X_2, \dots . Εστω $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$. Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της S_N .

(γ) Εστω ότι $\forall \kappa \geq 1 \quad \varphi_\kappa$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση (δηλαδή υπάρχει τυχαία μεταβλητή με χαρακτηριστική συνάρτηση φ_κ). Να δειχθεί ότι $\varphi = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \lambda_\kappa \varphi_\kappa$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση.

Θέμα 4

Εστω (Ω, \mathcal{A}, P) χώρος πιθανότητας.

- (α) Εστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ P – ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή. Να δειχθεί ότι το $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \neq 0\}$ είναι σ – πεπερασμένο κάτω από το P .
- (β) Εστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Να δειχθεί ότι $\int_{\Omega} |X| dP = 0 \Leftrightarrow X = 0$ P – σχεδόν παντού.
- (γ) Εστω $X : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ P – ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή. Να δειχθεί ότι $X(\omega) < \infty$ P – σχεδόν παντού.

Θέμα 5

Εστω (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας και $X, Y, X_n \quad n \geq 1$ τυχαίες μεταβλητές στο χώρο αυτό.

(α) Αν X, Y ολοκληρώσιμες με $E(X1_A) = E(Y1_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$ να δειχθεί ότι $P(X = Y) = 1$.

(β) Αν $X_n \xrightarrow{P} X$ και $X_n \xrightarrow{P} Y$ να δειχθεί ότι $P(X = Y) = 1$.

(γ) Εστω ότι $X, X_n, \quad n \geq 1$ ανεξάρτητες και ισόνομες από την $N(0,1)$. Να δειχθεί ότι $X_n \xrightarrow{D} X$ αλλά $X_n \not\xrightarrow{} X$ με κανένα άλλο τρόπο.

Θέμα 6

Εστω (Ω, \mathcal{F}, P) χώρος πιθανότητας.

(α) Να διατυπωθούν τα θεωρήματα μονότονης σύγκλισης και κυριαρχημένης σύγκλισης στο χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) .

(β) Εστω $\{X_n, n \in N\}$ ακολουθία μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών $X_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$. Να δειχθεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int X_n dP = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \right) dP.$$

(γ) Εστω $\{X_n, n \in N\}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Εστω ότι η $\sum_{k=1}^n X_k$

συγκλίνει στο $\overline{\mathbb{R}}$. Είναι η $Y = \sum_{n \in N} X_n$ τυχαία μεταβλητή;

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
ΓΜΕ: Στατιστική Θεωρία
 Χειμερινό Εξάμηνο 2004-2005
 (18/9/04)

1. Έστω $X = (Z, Y)'$ τυχαίο διάνυσμα το οποίο ορίζεται από την σχέση $Y = Z + \lambda W$, με $\lambda > 0$ και Z, W ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή.

- a) Να προσδιοριστεί η κατανομή του τυχαίου διανύσματος X .
 β) Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την παραπάνω κατανομή. Να υπολογιστεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου λ και να δοθεί η μέση τιμή και η διακύμανση της.

2. Έστω μία παρατήρηση από την τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την λογιστική κατανομή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{1 + e^{-(x-\theta)}}, \quad x, \theta \in R.$$

- a) Να κατασκευαστεί ισχυρότατος έλεγχος για τον έλεγχο της απλής υπόθεσης $H_0 : \theta = 0$ προς την απλή εναλλακτική $H_1 : \theta = \theta_1, (\theta_1 > 0)$ με επίπεδο σημαντικότητας α και να υπολογιστεί η ισχύς του.
 β) Είναι ο παραπάνω έλεγχος ομοιόμορφα ισχυρότατος για τον έλεγχο $H_0 : \theta \leq 0$ προς $H_1 : \theta > 0$;
 Αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.

3. Έστω X ρ-διάστατη τυχαία μεταβλητή, Π_1 η κατανομή $N_p(\mu_1, \Sigma)$ και Π_2 η κατανομή $N_p(\mu_2, \Sigma)$ όπου μ_1 και μ_2 ρ-διάστατα διανύσματα και Σ ο $p \times p$ πίνακας διασποράς – συνδιασποράς της τυχαίας μεταβλητής X . Έστω ο έλεγχος

$H_0 : X$ ανήκει στο Π_1 έναντι $H_1 : X$ ανήκει στο Π_2

- (α) Να προσδιορισθεί κατάλληλη ελεγχοσυνάρτηση T για τον πιο πάνω έλεγχο για την οποία το χωρίο απορρίψεως είναι της μορφής $T < 0$.
 (β) Να προσδιορισθεί η κατανομή της T κάτω από τη μηδενική υπόθεση.
 (γ) Να προσδιορισθεί η κατανομή της T κάτω από την εναλλακτική υπόθεση.

- (δ) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I ισούται με $\Phi(-0.5\Delta)$ όπου Φ η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και

$$\Delta^2 = (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2)$$

Ποιος ο αντίστοιχος τύπος για το σφάλμα τύπου II;

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής
ΓΜΕ: Στατιστική Θεωρία
 Χειμερινό Εξάμηνο 2004-2005
 (18/9/04)

4. Έστω $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε

$$\mathbf{X}_i \sim N\left(\frac{\mu + \gamma_i^2}{2}, \sigma^2\right), i = 1, 2, \dots, n$$

με $\sigma^2, \gamma_i, i = 1, 2, \dots, n$ γνωστές σταθερές.

(a) Να προσδιορισθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια $\mathbf{T}(\mathbf{X}_1)$ της παραμέτρου μ η οποία να εξαρτάται μόνο από την τ.μ. \mathbf{X}_1 .

Με βάση την $\mathbf{T}(\mathbf{X}_1)$ να προσδιορισθεί η Α.Ε.Ε.Δ. της παραμέτρου μ .

(b) Χρησιμοποιώντας την Α.Ε.Ε.Δ. που βρέθηκε στο (a), να κατασκευασθεί διάστημα εμπιστοσύνης για την παράμετρο μ με συντελεστή εμπιστοσύνης 1- α .

(γ) Αν είναι γνωστό ότι $0 \leq \gamma_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ να προσδιορισθούν οι τιμές των $\gamma_i, i = 1, 2, \dots, n$ για τις οποίες το διάστημα εμπιστοσύνης που κατασκευάσθηκε στο (β) έχει το ελάχιστο μήκος για δεδομένη τιμή του α .

5. Έστω τυχαίο δείγμα X_1, X_2, \dots, X_n μεγέθους n . Θεωρείστε την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ η οποία έχει μολυνθεί (contaminated) σ' ένα ποσοστό ίσο με λ από την κατανομή $N(\mu + \alpha, \sigma^2)$ όπου α, λ και σ^2 γνωστές σταθερές. Λόγω της μόλυνσης, ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n αντί να προέρχεται εξ' ολοκλήρου από την $N(\mu, \sigma^2)$, περιλαμβάνει αριθμό παρατηρήσεων από την $N(\mu + \alpha, \sigma^2)$. Έστω R η τυχαία μεταβλητή που μετρά τον αριθμό των μολυσμένων παρατηρήσεων και υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητη των X_1, X_2, \dots, X_n .

(α) Να προσδιορισθεί η κατανομή και οι δύο πρώτες ροπές της τ.μ. R .

(β) Έστω ότι ζητείται η εκτίμηση του μέσου μ της κατανομής με βάση τις παρατηρήσεις που ελήφθησαν. Να μελετηθεί ως προς την αμερόληψία η συνήθης εκτιμήτρια (δειγματική μέση τιμή).

(γ) Να προσδιορισθεί η διασπορά της δειγματικής μέσης τιμής.

(δ) Να προσδιορισθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα εκτίμησης.

(ε) Να προσδιορισθεί η μικρότερη τιμή του n για την οποία η μεροληψία της δειγματικής μέσης τιμής δεν υπερβαίνει το ήμισυ του μέσου τετραγωνικού σφάλματος εκτίμησης.

Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

ΓΜΕ: Στατιστική Θεωρία

Χειμερινό Εξάμηνο 2004-2005

(18/9/04)

6. Έστω f ομαλή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στο $(-\infty, \infty)$. Υποθέτουμε ότι X_1, X_2, \dots, X_n είναι τυχαίο δείγμα με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p_\theta(x)$ η οποία $p_\theta(x) = f(x - \theta)$, όπου θ παράμετρος θέσης η οποία ζητείται να εκτιμηθεί. Έστω εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ η οποία ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K(X_i - \hat{\theta}) = 0, \quad (1)$$

όπου K ομαλή συνάρτηση η οποία είναι τέτοια ώστε

$$\int f(t)K(t)dt = 0 \text{ και } \int (f(t)K(t))' dt = 0, \quad (2)$$

και συμβολίζει την πρώτη παράγωγο. Επιπλέον, έστω $\sup_x |K''(x)| < \infty$.

- a) Έστω ότι K επιλέγεται με τέτοιον τρόπο ώστε η εκτιμήτρια $\hat{\theta}$ να είναι συνεπής για την παράμετρο θ . Να δειχτεί ότι

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \rightarrow N(0, v), \text{ κατά κατανομή}$$

όπου

$$v = \frac{\int K^2(t)f(t)dt}{\left(\int K''(t)f(t)dt \right)^2}.$$

- b) Να αποδειχτεί ότι η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας ικανοποιεί την (1).

Τι μορφή λαμβάνει η συνάρτηση K για την εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας;

- γ) Να αποδειχτεί ότι η ποσότητα v η οποία ορίστηκε στο (a) ικανοποιεί την συνθήκη

$$v \geq \frac{1}{\int \frac{(f'(t))^2}{f(t)} dt}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;