

1 Να αποδειχτεί ότι ένα σωματίδιο P μάζας m που κινείται κάτω από την επίδραση της κεντρικής δύναμης $mf(r)\mathbf{r}_1$, όπου \mathbf{r}_1 είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση OP (O η αρχή των αξόνων), ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{h^2u^2}, \quad u = \frac{1}{r},$$

όπου r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σωματιδίου P και h είναι η στροφορμή του P ανά μονάδα μάζας.

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων μέτρου $\frac{\mu m}{r^3}$ και κατεύθυνση προς το σημείο O. Αρχικά το σωματίδιο ρίχτηκε από το σημείο A που είναι σε απόσταση a από το O με ταχύτητα $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ και γωνία $\frac{\pi}{4}$ με την OA. Να βρεθεί η τροχιά της κίνησης.

[Υπόδειξη: Μπορούν να χρησιμοποιηθούν, χωρίς απόδειξη, οι εξισώσεις $r^2\dot{\theta} = h$, $m(\ddot{r} - h^2/r^3) = f(r)$]

2 Μια ομοιόμορφη ράβδος AB μάζας m και μήκους $2a$ βρίσκεται σε ηρεμία πάνω σε ομαλό οριζόντιο τραπέζι. Ένα σωματίδιο P μάζας m κινείται πάνω στο τραπέζι με ταχύτητα u και με κατεύθυνση κάθετη πάνω στη ράβδο. Το σωματίδιο P συγκρούεται με τη ράβδο σε σημείο που βρίσκεται σε απόσταση $\frac{2}{3}a$ από το B και αμέσως προσκολλάται πάνω στη ράβδο. Το κέντρο μάζας του συνδυασμένου σώματος είναι στο σημείο C της ράβδου και το σώμα αρχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω .

(i) Ναδειχτεί ότι η ροπή αδράνειας του συνδυασμένου σώματος γύρω από κάθετο άξονα που διέρχεται από το C είναι $\frac{7}{18}ma^2$.

(ii) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω .

(iii) Ναδειχτεί ότι $\frac{3}{7}$ της κινητικής ενέργειας έχουν χαθεί κατά την κρούση.

3 (α) Αρχίζοντας από τους νόμους του Newton να αποδειχτεί η αρχή του Hamilton για ένα σωματίδιο μάζας m .

(β) Να δειχτεί ότι η συνάρτηση Green του τελεστή του Bessel τάξης n

$$Ly = \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - \frac{n^2}{x} y$$

σχετικός με τις συνθήκες $y(0) = y(1) = 0$, είναι της μορφής

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \left(\frac{s}{x} \right)^n (1 - x^{2n}), & s < x, \\ \frac{1}{2n} \left(\frac{x}{s} \right)^n (1 - s^{2n}), & s > x, \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να μετασχηματιστεί το πρόβλημα

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda x^2 - n^2) y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

σε ολοκληρωτική εξίσωση, όταν $n \neq 0$.

4 Έστω π αγγύλη Poisson στο \mathbf{R}^n με συντεταγμένες (x_1, \dots, x_n) . Ορίζω στον \mathbf{R}^n το διανυσματικό πεδίο X_π με

$$X_\pi = \sum_{i,j} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

i) Για την ακόλουθη αγγύλη π στον \mathbf{R}^4 να υπολογισθεί το X_π :

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= x_1 x_2 x_4 \\ \{x_1, x_3\} &= -x_1(x_3^2 + x_1^2) \\ \{x_1, x_4\} &= x_1(x_1^2 + x_4^2) \\ \{x_2, x_3\} &= -x_1^2 x_2 \\ \{x_2, x_4\} &= -x_2(x_4^2 + 2x_2^2) \\ \{x_3, x_4\} &= 2x_1^2(x_3 + x_4), \end{aligned} \tag{1}$$

Αν $\{, \}$ είναι αγγύλη Poisson με πίνακα π , και X τυχαίο διανυσματικό πεδίο, ορίζω μια νέα αγγύλη με το τύπο

$$\{f, g\}_2 = X\{f, g\} - \{f, Xg\} - \{Xf, g\}.$$

Η καινούργια αγγύλη συμβολίζεται με $L_X \pi$.

ii) Αν π είναι η αγγύλη

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\} &= 0 \\ \{x_1, x_3\} &= -x_1 \\ \{x_1, x_4\} &= x_1 \\ \{x_2, x_3\} &= 0 \\ \{x_2, x_4\} &= -x_2 \\ \{x_3, x_4\} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

και X το διανυσματικό πεδίο του μέρους i) να υπολογισθεί $L_X \pi$.

5 Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}y^2 + y + e^x$$

έχει απειροστό γεννήτορα της μορφής

$$\xi \frac{d}{dx} + \eta \frac{d}{dy}$$

όπου ξ, η συναρτήσεις της μορφής $Ax + By + C$. Να υπολογισθούν οι συναρτήσεις ξ, η και να λυθεί η εξίσωση.

6 Στο \mathbf{R}^5 με συντεταγμένες $(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3)$ ορίζω το ζεύγος Lax $\dot{L} = [B, L]$ όπου L είναι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ a_1 & b_2 & 1 \\ 0 & a_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

και B ο πίνακας

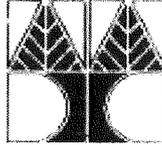
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Δείξτε ότι H_2 είναι σταθερά κίνησης, όπου

$$H_2 = \frac{1}{2} \text{tr} L^2.$$

ii) Να γράψετε τις εξισώσεις Hamilton για τη Χαμιλτονιανή H_2 χρησιμοποιώντας κατάλληλη αγγύλη Poisson π .

iii) Να βρεθεί συνάρτηση Casimir (αν υπάρχει) για την αγγύλη π του προηγούμενου μέρους. Να υπολογισθεί X_π .



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

- Θεωρία Πιθανοτήτων
- Στατιστική Θεωρία

Εαρινό Εξάμηνο 2005 – 2006

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γ.Μ.Ε. 2006: ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Πρόβλημα 1: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου.

1. Αν $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία μη-αρνητικών \mathcal{A} -μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ τότε ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu = \int \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu.$$

2. Αν η f είναι μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση, τότε η συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ με $\nu(A) = \int_A f d\mu$, για $A \in \mathcal{A}$, είναι μέτρο.

Πρόβλημα 2: Εξετάστε κατά πόσο η αντιστροφή της εξής πρότασης είναι σωστή: Αν $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία στον \mathcal{A} τ.ω. $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, τότε $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

Πρόβλημα 3: Έστω $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $E(X_i)^{2+\alpha} < \infty$ για $\alpha > 0$, και

$$\sigma_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i)}.$$

Δείξτε ότι αν υπάρχει ακολουθία μη αρνητικών αριθμών $\{c_n, n \in \mathbb{N}\}$ με

$$\max_{1 \leq i \leq n} |X_i| \leq c_n, \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n / \sigma_n = 0,$$

τότε ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\delta) = 0$, για όλα τα $\delta > 0$, όπου

$$L_n(\delta) = \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{i=1}^n E[(X_i - E(X_i))^2 I(|X_i - E(X_i)| \geq \delta \sigma_n)].$$

Πρόβλημα 4: Έστω X_1, X_2, \dots ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Έστω $\alpha > 1$ και $\forall j = 1, 2, \dots, P(X_j = \pm j^\alpha) = j^{-2(\alpha-1)}/6$ και $P(X_j = 0) = 1 - j^{-2(\alpha-1)}/3$. Δείξτε ότι αν $\alpha < 1.5$ τότε ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\delta) = 0$, για όλα τα $\delta > 0$, όπου $L_n(\delta)$ η συνάρτηση που έχει οριστεί στο Πρόβλημα 3.

2. Έστω $\alpha > 0$ και $\forall j = 1, 2, \dots, P(X_j = \pm j^\alpha) = P(X_j = 0) = 1/3$. Εξετάστε αν τότε ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n E|X_j - E(X_j)|^{2+\delta} = 0,$$

για κάποιο $\delta > 0$ και για σ_n όπως έχει ορισθεί στο Πρόβλημα 3.
(Υποδ.: Μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{t+1}} \sum_{j=1}^n j^t = \frac{1}{t+1},$$

για κάθε $t > 0$.)

Πρόβλημα 5: Έστω X_1, X_2, \dots τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{A}, P) . Η ακολουθία $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ καλείται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν

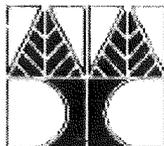
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_n E(|X_n| I(|X_n| > t)) = 0.$$

Εξετάστε κατά πόσο μία ακολουθία που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες (1) ή (2) είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

1. $\sup_{n \in \mathbb{N}} E(|X_n|^{1+\delta}) < \infty$ για κάποιο $\delta > 0$.
2. $P(|X_n| \geq c) \leq P(|X| \geq c)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $c > 0$, όπου η X είναι μία ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή.

Πρόβλημα 6: Έστω X_n τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $\theta \in (0, 1)$, όπου $n = 1, 2, \dots$. Έστω $Y_n = \log(X_n/n)$ όταν $X_n \geq 1$ και $Y_n = 1$ όταν $X_n = 0$.

1. Δείξτε ότι $Y_n \rightarrow \log(\theta)$, με πιθανότητα 1.
2. Να υπολογισθεί η σύγκλιση κατανομή της $\sqrt{n}(Y_n - \log(\theta))$.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

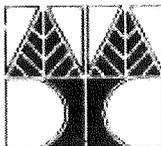
Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

Στατιστική Θεωρία

Όνοματεπώνυμο:

Αρ. Ταυτότητας:

Εαρινό Εξάμηνο 2005-2006
28 Ιανουαρίου 2006
09:00 – 12:00



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

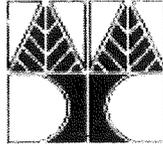
1. Έστω X_1, X_2, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, \lambda n)$. Θεωρούμε τη στατιστική συνάρτηση $T = \max X_i$ και έστω ότι για την παράμετρο ισχύει ότι $\lambda > 0$ και σταθερή όταν $n \rightarrow \infty$.

α) Να υπολογιστεί η ασυμπτωτική κατανομή της ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών

$$Z_n = \lambda n - T,$$

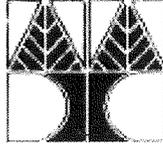
καθώς $n \rightarrow \infty$.

β) Να υπολογιστεί μία συνεπής εκτιμήτρια της παραμέτρου λ βάσει του προηγούμενου αποτελέσματος.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

2. Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και ας είναι $f_0(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$ και $f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ για $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί ο ομοιόμορφα ισχυρότερος έλεγχος για τη μηδενική υπόθεση $H_0 : f(x) = f_0(x)$ ως προς την εναλλακτική $H_1 : f(x) = f_1(x)$ σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = e^{-1}$ και να προσδιοριστεί ακριβώς η ισχύς του.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

3. Έστω το γραμμικό μοντέλο

$$Y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

όπου $E(\varepsilon_i) = 0$, $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ και $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ για $i \neq j$.

Έστω ότι b_1 και b_2 είναι οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των β_1 και β_2 αντίστοιχα.

Έστω ο πιο κάτω εναλλακτικός τρόπος εκτίμησης:

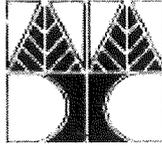
- I. Εκτιμούμε το β_1 από το μοντέλο $Y_i = \beta_1 x_{1i} + \varepsilon_i$; Έστω b_1^* η εκτιμήτρια αυτή.
- II. Έστω $Z_i = Y_i - b_1^* x_{1i}$ και εκτιμούμε το β_2 από το μοντέλο $Z_i = \beta_2 x_{2i} + \eta_i$ προσποιούμενοι ότι τα η_i είναι ασυσχέιστα. Έστω b_2^* αυτή η εκτιμήτρια.

α) Ναδειχθεί ότι $b_1^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i} Y_i}{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}$ και $b_2^* = (1 - r^2) b_2$ όπου

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_{1i}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_{2i}^2 \right)}}.$$

β) Να βρεθεί συνθήκη κάτω από την οποία οι b_1^* και b_2^* είναι αμερόληπτες.

γ) Ναδειχθεί ότι αν $\beta_2^2 < Var(b_2)$, τότε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα των b_1^* και b_2^* είναι μικρότερο από τη διασπορά των b_1 και b_2 αντίστοιχα.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

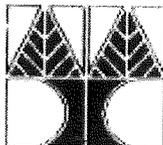
4. Έστω ότι X_1, X_2, \dots, X_n ($n > 1$) είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε η X_i ακολουθεί την $N(\mu, \sigma^2 c_i^{-1})$, $i = 1, \dots, n$. Οι ποσότητες c_1, \dots, c_n είναι γνωστές θετικές σταθερές ώστε $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ και οι παράμετροι μ και σ^2 που μας ενδιαφέρουν είναι άγνωστες με $\mu \in \mathfrak{R}$ και $0 < \sigma^2 < \infty$.

α) Να δειχθεί ότι $\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i, \sum_{i=1}^n c_i X_i^2 \right)$ είναι επαρκής και πλήρης για το (μ, σ^2) .

β) Έστω $T = \sum_{i=1}^n c_i X_i$ και $S^2 = \sum_{i=1}^n c_i (X_i - T)^2$. Είναι η (T, S^2) επαρκής και πλήρης για το (μ, σ^2) ; Να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

γ) Να δειχθεί ότι η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας είναι η μοναδική Α.Ε.Ο.Ε.Δ. του μ .

δ) Να δειχθεί ότι η εκτιμήτρια στο γ) ελαχιστοποιεί τη διασπορά ανάμεσα στις γραμμικές αμερόληπτες εκτιμήτριες του μ , χωρίς την υπόθεση της κανονικότητας, αλλά με τις ίδιες υποθέσεις για το μέσο και τις διασπορές των παρατηρήσεων.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

5. Έστω X_1, X_2, \dots, X_m τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη στο $(0, \theta)$ και έστω Y_1, Y_2, \dots, Y_n άλλο τυχαίο δείγμα ανεξάρτητο του πρώτου, από την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, \tau)$.

α) Να υπολογιστεί η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης $U = T_1 / T_2$ όπου

$$T_1 = \max X_i \text{ και } T_2 = \max Y_i.$$

β) Έστω ότι αναζητείται στατιστικός έλεγχος για τη μηδενική υπόθεση $H_0 : \theta \leq \tau$ ως προς την εναλλακτική $H_1 : \theta > \tau$. Ας υποθέσουμε ότι το χωρίο απόρριψης δίνεται από $U > c$, όπου η στατιστική συνάρτηση U ορίστηκε στο ερώτημα (α) και c γνωστή σταθερά. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση ισχύος του ελέγχου είναι αύξουσα ως προς τη μεταβλητή $\rho = \theta / \tau$.



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις

- Διαφορικές Εξισώσεις
- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Χειμερινό Εξάμηνο 2005 – 2006

24 Σεπτεμβρίου 05 & 3 Οκτωβρίου 05

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

24.09.2005

ΝΑ ΔΟΘΟΥΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΠΕΝΤΕ ΘΕΜΑΤΑ.

1. Εκθετική πίνακα.

(i) Νά δοθεί ο ορισμός της εκθετικής τετραγωνικού πίνακα και ναδειχθεί ότι

$$e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA},$$

για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(ii) Νά βρεθεί η γενική λύση του γραμμικού συστήματος

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

2. Έστω ότι το ραδιενεργό ισότοπο A υφίσταται σχάση με χρόνο ημισείας ζωής T_A , μετατρέπόμενο εξ ολοκλήρου σε ραδιενεργό ισότοπο B άλλου στοιχείου, με χρόνου ημισείας ζωής T_B , το οποίο με τη σειρά του υφίσταται σχάση, μετατρέπόμενο εξ ολοκλήρου σε μη ραδιενεργό στοιχείο C . Αν κατά την χρονική στιγμή $\tau = 0$ υπάρχει ποσότητα m του ισότοπου A και μόνον αυτού, να βρεθούν οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την εξέλιξη των μαζών των τριών στοιχείων. Πότε μεγιστοποιείται η μάζα του B ;

3. Συνθήκη Lipschitz και μοναδικότητα

(i) Έστω ότι $f \in D$, όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

για κάθε $(t, x_1), (t, x_2) \in D$, για κάποιο $L > 0$. Αν $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ λύσεις της εξίσωσης

$$x' = f(t, x),$$

όπου I ανοικτό διάστημα, δείξτε ότι για κάθε $\tau, t \in I$ ισχύει η ανισότητα

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq e^{L|t-\tau|}|\varphi(\tau) - \psi(\tau)|.$$

(ii) Έστω μία συνάρτηση $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, όπου D ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , ικανοποιεί τοπικώς τη συνθήκη και $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ λύσεις της $x' = f(t, x)$. Αν $\varphi_1(\tau) < \varphi_2(\tau)$ για κάποιο $\tau \in I$, τότε $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ για κάθε t στο κοινό πεδίο ορισμού των φ_1 και φ_2 .

4. (i) Έστω I ανοικτό διάστημα και $p_0, \dots, p_{n-1} \in C(I)$. Δείξτε ότι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + p_0(t)x^{(0)} = 0,$$

αποτελεί n -διάστατο γραμμικό χώρο.

- (ii) Δείξτε ότι αν $\{\varphi, \psi\}$ θεμελιώδες σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

στο I , τότε μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της φ υπάρχει μοναδική ρίζα της ψ .

5. (i) Έστω το μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - \cos x, & 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(0, t) &= -2, \quad u(\pi, t) = 1, & t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin x - \cos x, & 0 < x < \pi. \end{aligned} \quad (1)$$

Να βρεθεί η λύση ισορροπίας του προβλήματος (1) (Θέτουμε $u(x, t) = U(x)$).

Χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο μετασχηματισμό, να αναχθεί το πρόβλημα (1) σε ομογενές πρόβλημα. Στη συνέχεια να λυθεί το ομογενές πρόβλημα.

Να δειχθεί ότι η λύση του ομογενούς προβλήματος είναι μοναδική.

Να λυθεί το μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (1).

[**Υπόδειξη:** Η λύση του προβλήματος ιδιοτιμών, $X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$ είναι $X_n(x) = \sin nx$, $\lambda = n^2$, $n = 1, 2, \dots$. Επίσης $\int_0^\pi \sin mx \sin nx dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}$.]

- (ii) Να δοθεί (χωρίς απόδειξη) η γενική λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$(\alpha_1 D_x + \beta_1 D_y + \gamma_1)(\beta_2 D_y + \gamma_2)u = 0,$$

όπου $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ και $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

Στη συνέχεια να λυθεί η μερική διαφορική εξίσωση

$$(\alpha D_x + \beta D_y + \gamma)^2 u = 0.$$

6. (i) Να δειχθεί ότι η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= q(x, t), & 0 < x < L, & t > 0 \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < L \end{aligned}$$

είναι

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n e^{-\lambda_n kt} + \int_0^t e^{-\lambda_n k(t-\tau)} q_n(\tau) d\tau \right] X_n(x),$$

όπου οι συναρτήσεις $X_n(x)$ και $q_n(t)$ και οι σταθερές c_n και λ_n πρέπει να προσδιορισθούν.

- (ii) Να λυθεί το πρόβλημα

$$u_x u_y = u, \quad u(x, -x) = 1.$$