Πανεπιστημιο Κυπρου

Τμημα Μαθηματικων και Στατιστικης

Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009

Περιεκτική Εξέταση – Θεωρία Πιθανοτήτων

Ονοματεπώνυμο ....

Αριθμός ταυτότητος ....

27 Σεπτεμβρίου (09:00–12:00)

1. Η τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την διπλή εκθετική κατανομή ή κατανομή Laplace, αν και μόνο αν, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z δίνεται από

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}\exp(-|z|), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Αν Z ακολουθεί την κατανομή Laplace, να αποδειχτεί ότι η Z εκφράζεται ως γινόμενο τυχαίων μεταβλητών Z_1 και Z_2 οι οποίες ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες :

(α) Z_1 ανεξάρτητη της Z_2,

(β) Z_1 είναι θετική τυχαία μεταβλητή, και

(γ) Z_2 ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Υπόδειξη: Να υπολογίσετε την χαρακτηριστική συνάρτηση της Z.

2. (α) Έστω $\{X_n, n \geqslant 1\}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω X άλλη τυχαία μεταβλητή η οποία ορίζεται στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι $X_n \to X$, κατά πιθανότητα, όταν $n \to \infty$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $| X_n | \leqslant Y$ με $E(Y) < \infty$. Να αποδειχτεί ότι $E(X_n) \to E(X)$ αν $n \to \infty$.

(β) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$, συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν $0 \leqslant f(x) \leqslant cg(x)$, για κάθε $x \in [0,1]$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n-\text{φορές}} \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{\sum_{i=1}^n g(x_i)} dx_1 \ldots dx_n.$$

3. (α) Έστω $\{X_n, n \geqslant 1\}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με $E(X_n) = 0$ και έστω $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$. Να αποδειχτεί ότι $Y_n \to 0$, κατά πιθανότητα, όταν $n \to \infty$, αν και μόνο αν $E(Y_n^2/(1+Y_n^2)) \to 0$, όταν $n \to \infty$.

   (β) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ κανονικές τυχαίες μεταβλητές με $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = 1$, για κάθε i, και

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} \rho, & |i-j| = 1, \\ 0, & |i-j| > 1. \end{cases}$$

   Να αποδειχτεί ότι $\sum_{i=1}^{n} X_i/n \to 0$, κατά πιθανότητα, όταν $n \to \infty$.

Υπόδειξη: Έστω $a, b \in \mathbb{R}$, με $a > 0$ και $b > 0$. Τότε ισχύει ότι

$$\left(\frac{a}{1+a}\right)\left(\frac{1+b}{b}\right) \geqslant 1.$$

4. Έστω $X_1, X_2, \ldots,$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μ και διασπορά $\sigma^2 < \infty$. Έστω $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ και h πραγματική συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση.

(α) Έστω ότι $h'(\mu) \neq 0$. Να δειχθεί ότι

$$\sqrt{n}\left(h(\bar{X}_n) - h(\mu)\right) \to N\left(0, \sigma^2 (h'(\mu))^2\right)$$

κατά κατανομή όταν $n \to \infty$.

(β) Έστω ότι h δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη, $h'(\mu) = 0$, και $h''(\mu) \neq 0$. Να δειχθεί ότι

$$n\left(h(\bar{X}_n) - h(\mu)\right) \to \frac{1}{2}\sigma^2 h''(\mu)\chi_1^2$$

κατά κατανομή όταν $n \to \infty$.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί ανάπτυγμα Taylor.

5. (α) Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και $E|\ X_i\ |^3 < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ και $\tau_n^2 = Var(S_n)$. Αν $\tau_n^{-3} \sum_{i=1}^n E|\ X_i\ |^3 \to 0$, να δειχθεί ότι ισχύει η συνθήκη του Lindeberg.

   (β) Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την X_k να ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p_k. Θέτουμε $\mu_n = \sum_{k=1}^n p_k$ και $\tau_n^2 = \sum_{k=1}^n p_k(1 - p_k)$. Να δειχθεί ότι αν $\sum_{k=1}^\infty p_k(1 - p_k) = +\infty$ τότε $(S_n - \mu_n)/\tau_n \to N(0, 1)$ κατά κατανομή, όταν $n \to \infty$.

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Περιεκτικές Εξετάσεις

- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (ΠΓΕ)
    - Ανάλυση (Πρώτο Μέρος)
    - Μιγαδική Ανάλυση (Δεύτερο Μέρος)
    - Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
    - Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
- Θεωρία Πιθανοτήτων

Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009
27 Σεπτεμβρίου 2008

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Περιεκτικές Εξετάσεις

- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (ΠΓΕ)
  - **Ανάλυση (Πρώτο Μέρος)**
  - Μιγαδική Ανάλυση (Δεύτερο Μέρος)
  - Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
  - Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Ονοματεπώνυμο: ....

Ταυτότητα: ....

Βαθμολογία:

Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009
27 Σεπτεμβρίου 2008

Ανάλυση

1. Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$$

είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,\infty[$

2. Να ευρεθεί το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx\log x}{1+n^2x^2}\,dx$$

3. Έστω ο χώρος με μέτρο $(X,\mathcal{A},\mu)$ και έστω μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f: X\to\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι εάν

$$\int_E f(x)\,d\mu(x)\geq 0 \quad \forall E\in\mathcal{A}$$

τότε $f(x)\geq 0$ για σχεδόν όλα τα $x\in X$.

4. Έστω ο χώρος με μέτρο $(X,\mathcal{A},\mu)$ και έστω μία μετρήσιμη συνάρτηση $f: X\to\mathbb{R}$. Υποθέτομε ότι $\mu(X)<\infty$ και ότι $f\geq 0$.

α) Πότε έχομε

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f^n(x)\,d\mu(x)=\infty \quad ?$$

b) Νά δείξετε ότι εάν $0 \leq f(x) \leq 1$ γιά σχεδόν όλα τά $x \in X$ τότε

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f^n(x)\, d\mu(x) = \mu(\{x \in X : f(x) = 1\})$$

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Περιεκτικές Εξετάσεις

- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (ΠΓΕ)
  - Ανάλυση (Πρώτο Μέρος)
  - **Μιγαδική Ανάλυση (Δεύτερο Μέρος)**
  - Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
  - Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Ονοματεπώνυμο: ....
Ταυτότητα: ....

Βαθμολογία:

Να λυθούν και τα 2 Θέματα

Ασκηση 1:

Εστω $K(0,2) = \{z \in C : |z| = 2\}$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{K(0,2)} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{z}} dz$$

Ασκηση 2:

Εστω f ακέραια συνάρτηση (ή f είναι αναλυτική στο C) και U ένα ανοικτό, φραγμένο υποσύνολο του C.

Δείξτε ότι υπάρχει z_0 τέτοιο ώστε $f(z_0) \in U$.

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Περιεκτικές Εξετάσεις

- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (ΠΓΕ)
  - Ανάλυση (Πρώτο Μέρος)
  - Μιγαδική Ανάλυση (Δεύτερο Μέρος)
  - Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων
  - **Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις**

Ονοματεπώνυμο: ....

Ταυτότητα: ....

Βαθμολογία:

Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009
27 Σεπτεμβρίου 2008

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις - Χειμερινό Εξάμηνο 2008-09

ΘΕΜΑ 1. (i) (3 βαθμοί) Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης

$$u_x + yu_y = e^x, \quad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

και ακολούθως να επιλυθεί το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών με αρχική συνθήκη

$$u(0,y) = \cos y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

(ii) (1 βαθμός) Τι θα συνέβαινε, όσον αφορά στην ύπαρξη και πεδίο ορισμού των λύσεων, αν η αρχική συνθήκη ήταν της μορφής

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

(iii) (1 βαθμός) Τι θα συνέβαινε αν η αρχική συνθήκη ήταν της μορφής

$$u(x,1) = f(x), \quad x \in \mathbb{R};$$

ΘΕΜΑ 2. (i) (3 βαθμοί) Νά διατυπωθεί και να αποδειχθεί η Αρχή του Μεγίστου για την εξίσωση της θερμότητας στο χωρίο $[0,L] \times [0,T]$.

(ii) (2 βαθμοί) Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + x^2, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= x, \quad u_t(x,0) = -1, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Να βρεθεί αρχικά λύση ανεξάρτητη του χρόνου.

Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

Περιεκτικές Εξετάσεις

- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά (ΠΓΕ)
  - Ανάλυση (Πρώτο Μέρος)
  - Μιγαδική Ανάλυση (Δεύτερο Μέρος)
  - **Αριθμητική Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων**
  - Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Ονοματεπώνυμο: ....

Ταυτότητα: ....

Βαθμολογία:

Χειμερινό Εξάμηνο 2008-2009
27 Σεπτεμβρίου 2008

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

27 Σεπτεμβρίου 2008

ΟΝΟΜΑ: ______________________________

Άσκηση	1	2	Βαθμός
Μονάδες			

1. (Μονάδες 50)

(i) Να δοθούν οι τύποι της (άμεσης) μεθόδου του Euler και της μεθόδου του κανόνα του τραπεζίου για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = Ay + g(t), \quad t > 0, \quad y(0) = \alpha, \tag{1}$$

όπου A σταθερός $N \times N$ πίνακας.

(ii) Να βρεθεί η τάξη εκάστης μεθόδου όταν αυτές εφαρμόζονται στο πρόβλημα αρχικών τιμών (1).

(iii) Να αποδειχθεί ότι η μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου συγκλίνει.

(iv) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$2y'' + 5y' + 2y = 1, \quad t > 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0. \tag{2}$$

Το πρόβλημα (2) να μετατραπεί σε σύστημα πρώτης τάξεως της μορφής (1).

(v) Να βρεθεί το σφάλμα στο σημείο $x_1 = h$ για την κάθε μέθοδο για τα y και y'.

2. (Μονάδες 50)

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών: Να βρεθεί η συνάρτηση $u(x_1, x_2)$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2) \text{ στο } \Omega = (0,1) \times (0,1), \tag{3}$$

$$u = 0 \text{ στο } \partial\Omega, \tag{4}$$

όπου η συνάρτηση f είναι δοθείσα.

(i) Για να λύσουμε το πιο πάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών με τη *μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων* πρέπει πρώτα να το μετατρέψουμε σε ένα μεταβολικό πρόβλημα. Να βρεθεί το μεταβολικό πρόβλημα που αντιστοιχεί στο πρόβλημα (3)–(4) και να αποδειχτεί η μοναδικότητα της λύσης του. (Να διατυπωθούν όλοι οι συναρτησιακοί χώροι που εμπλέκονται στο μεταβολικό πρόβλημα.)

(ii) Να δοθεί ένα παράδειγμα υπόχωρου πεπερασμένης διάστασης (μαζί με τις συναρτήσεις βάσης του) ο οποίος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη λύση του διακριτού προβλήματος που προκύπτει από το μεταβολικό πρόβλημα που βρήκατε στο (i).

(iii) Για να λύσουμε το πρόβλημα (3)–(4) με τη *μέθοδο πεπερασμένων διαφορών* διαμερίζουμε ομοιόμορφα το χωρίο Ω με μήκος πλέγματος h (όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα) και χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \approx \frac{u(x_1 + h, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 - h, x_2)}{h^2},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \approx \frac{u(x_1, x_2 + h) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 - h)}{h^2}.$$

Να βρεθεί το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (στο οποίο άγνωστοι είναι οι τιμές της u στα κομβικά σημεία) που αντιστοιχεί σε αυτή τη μέθοδο στη περίπτωση που $h = 0.2$.