ΧΕ 12-13

Πραγματική Ανάλυση

Πρόβλημα 1. *(i) Να δοθεί ο ορισμός του εξωτερικού μέτρου.*

(ii) Τι ονομάζουμε μετρήσιμο σύνολο ως προς ένα εξωτερικό μέτρο;

(iii) Να αποδείξετε ότι η συλλογή των μετρησίμων συνόλων ως προς ένα εξωτερικό μέτρο είναι σ-άλγεβρα και ότι ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου στην συγκεκριμένη σ-άλγεβρα είναι πλήρες μέτρο.

Πρόβλημα 2. *Έστω* $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ *συναρτήσεις στο* $L^1 := L^1([0,1])$ *τέτοιες ώστε* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$*, στο* L^1*. Έστω επίσης* $(g_n)_n$ *μια ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων τέτοια ώστε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $x \in [0,1]$, $|g_n(x)| \leq M$*. Εάν επιπλέον* $\lim_{n\to\infty} g_n = g$*, σχεδόν παντού, να αποδείξετε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} g_n f_n = gf$$

στο L^1.

Πρόβλημα 3. *(α) Δίνεται η συνάρτηση :*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{εάν ο } x \text{ είναι ρητός,} \\ -x, & \text{εάν ο } x \text{ είναι άρρητος.} \end{cases}$$

(i) Να εξετασθεί εάν η f *είναι Lebesgue μετρήσιμη στο* $\mathbb{R}$ *και εάν η* f *ανήκει στον* $L^1(\mathbb{R})$.

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_{[0,1]} f dm$ *σε περίπτωση που υπάρχει.*

(iii) Να εξετάσετε εάν η f *είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα* $[0,1]$.

(β) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι εάν $\alpha > 0$ *τότε η* f_n *συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα* $[\alpha, \infty)$ *και να υπολογιστεί το όριο της.*

(ii) Να εξετάσετε εάν η f_n *συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα* $[0, \infty)$.

ΧΕ12-13

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

29/9/2012

ΘΕΜΑ 1. (i) Έστω $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ και $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Να βρεθεί σύμμορφη απεικόνιση του χωρίου $A \cap D$ στο D.

(ii) Έστω $f(z)$ ακέραια αναλυτική. Να υπολογισθεί

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)},$$

όπου C η περιφέρεια του κύκλου $|z| = R$ με θετική φορά και $|a|, |b| < R$. Ακολούθως να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα για να αποδείξετε το θεώρημα του Liouville. Κάθε ακέραια αναλυτική και φραγμένη συνάρτηση είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 2. (i) Πόσες ρίζες έχει το πολυώνυμο

$$z^6 - 5z^5 + z^3 - 2$$

μέσα στο χωρίο $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$;

(ii) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{3z^2 - 2z + 1}{z^3 - z^2 + z - 1}\,dz\,.$$

όπου γ η περιφέρεια του κύκλου $|z| = 2$ με θετική φορά.

ΘΕΜΑ 3. (i) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ακεραία αναλυτική και μη σταθερή. Να αποδειχθεί ότι το πεδίο τιμών της είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

(ii) Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $f : D \to \mathbb{C}$, όπου D ο ανοικτός μοναδιαίος δίσκος, με την ιδιότητα $\left(f(z)\right)^2 = z$, για κάθε $z \in D$; (Πλήρης αιτιολόγηση.)

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

ΧΕ 12-13

ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ **ΜΟΝΟ ΔΥΟ** ΑΠΟ ΤΑ ΤΡΙΑ ΘΕΜΑΤΑ

1. Διατυπώστε και αποδείξτε την ανισότητα *Harnack* για αρμονικές συναρτήσεις.

2. Δείξτε ότι το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = u^3 & x^2 + y^2 < 1 \\ u = 0 & x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

δεν έχει άλλες λύσεις εκτός από την $u = 0$.

3. α) Να βρεθεί η λύση $u = u(x, y)$ του προβλήματος

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 2 & x, y \in \mathbb{R} \\ u(x, -x) = x & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών.

β) Να βρεθεί η ομαλή λύση $u = u(x, y)$ του προβλήματος

$$\begin{cases} yu_x - xu_y = u & x, y \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f(x) & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

όπου f ομαλή συνάρτηση στο $[0, 3]$. Εξηγείστε.

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

ΚΕ 12-13

ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ **ΚΑΙ ΤΑ ΕΞΙ** ΘΕΜΑΤΑ

1. Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για αρμονικές συναρτήσεις.

2. Δίνεται αρμονική συνάρτηση u στο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και

$$v(x) = \frac{u(\frac{x_1}{r^2}, \frac{x_2}{r^2}, \ldots, \frac{x_n}{r^2})}{r^{n-2}}$$

με $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Εξετάστε αν η v είναι αρμονική.

3. α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες για την ΜΔΕ της μορφής

$$xu_x + yu_y = u^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

όπου $u = u(x, y) \in \mathbb{R}$.

β) Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} xu_x + yu_y &= u^2, \qquad (x, y) \in D \\ u(x, y) &= xe^{-y}, \qquad (x, y) \in \partial D \end{aligned} \tag{1}$$

Αποδείξτε ότι αυτό το πρόβλημα είναι καλώς ορισμένο στο χωρίο $D_\varepsilon = \{(x, y) : \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, όπου ε σταθερά, $0 < \varepsilon < 1$.

4. Αποδείξτε μοναδικότητα λύσεων $u : [0, 1] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u(x, t)$ του προβλήματος αρχικών και συνοριακών συνθηκών

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2 u_{xx} + ru_t = f(x, t), & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(0, t) - u_x(0, t) = g(t) & t \geq 0 \\ u_t(1, t) + u_x(1, t) = h(t) & t \geq 0\ , \end{array} \tag{2}$$

όπου r θετική σταθερά και $f : [0, 1] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, ϕ, $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ και g, $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ δεδομένες ομαλές και συμβατές με το πρόβλημα συναρτήσεις.

5. Έστω Ω φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και $x_0 \in \partial\Omega$. Θεωρούμε τη κλειστή μπάλα B με κέντρο y και ακτίνα R έτσι ώστε $B \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$w(x) = \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x - y|^{n-2}}$$

για $n \geq 3$ ικανοποιεί

α) w είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$.

β) $w > 0$ στο $\overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$.

γ) $w(x_0) = 0$.

δ) $\Delta w \leq 0$ στο Ω.

6. Έστω $u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(x,t)$, η ομαλή λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_t = [2+\sin(x^2t)]u_{xx} + \cos(xt^2)u_x + [3-2\cos^2(xt)]u - x(t^2+1) & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = t^3 & t \ge 0 \\ u(1,t) = \frac{1}{10}\sin^2 t & t \ge 0\,. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1]$,

$$u(x,\frac{1}{2}) \le \frac{1}{4}e^2.$$

$XE12-13$

ΑΝΑΛΥΣΗ

29/9/2012

Πρόβλημα 1. *Να βρεθεί ένας μετασχηματισμός Mobius, T, που να απεικονίζει το κύκλο $\{z \,||z| = 1\}$ στο κύκλο $\{z \,||z-1| = 1\}$, $T(0) = \frac{1}{2}$ και $T(1) = 0$.*

Πρόβλημα 2. *(i) Έστω $f(z)$ ακέραια αναλυτική συνάρτηση τέτοια ώστε $|f(z)| < 3\,|z|^2$, για όλα τα z με $|z| > 1$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο.*

(ii) Έστω

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2} = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n .$$

Να υπολογισθούν οι πρώτοι 6 συντελεστές της σειράς Taylor της f. Ποιά είναι η ακτίνα σύγκλισης της σειράς;

Πρόβλημα 3. *Να υπολογισθεί*

$$\int_\gamma \frac{1+z^2+z^4}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^6}\,dz$$

όπου γ ο κύκλος $|z| = 1$ με θετική φορά.

Πρόβλημα 4. *(i) Να δοθεί ο ορισμός του εξωτερικού μέτρου.*

(ii) Τι ονομάζουμε μετρήσιμο σύνολο ως προς ένα εξωτερικό μέτρο;

(iii) Να αποδείξετε ότι η συλλογή των μετρησίμων συνόλων ως προς ένα εξωτερικό μέτρο είναι σ-άλγεβρα και ότι ο περιορισμός του εξωτερικού μέτρου στην συγκεκριμένη σ-άλγεβρα είναι πλήρες μέτρο.

Πρόβλημα 5. *Έστω $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ συναρτήσεις στο $L^1 := L^1([0,1])$ τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, στο L^1. Έστω επίσης $(g_n)_n$ μια ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in [0,1]$, $|g_n(x)| \leq M$. Εάν επιπλέον $\lim_{n\to\infty} g_n = g$, σχεδόν παντού, να αποδείξετε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} g_n f_n = gf$$

στο L^1.

Πρόβλημα 6. *(a) Δίνεται η συνάρτηση :*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{εάν ο } x \text{ είναι ρητός,} \\ -x, & \text{εάν ο } x \text{ είναι άρρητος.} \end{cases}$$

(i) Να εξετασθεί εάν η f είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ και εάν η f ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$.

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_{[0,1]} f dm$ σε περίπτωση που υπάρχει.

(iii) Να εξετάσετε εάν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα $[0, 1]$.

(β) Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}}, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι εάν $\alpha > 0$ τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[\alpha, \infty)$ και να υπολογιστεί το όριο της.

(ii) Να εξετάσετε εάν η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, \infty)$.

ΧΕ12-13

Γεωμετρία -Περιεχτικές 2012

1. Έστω η απεικόνιση

$$f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$$
$$[x, y, z] \mapsto \left(\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

από τον προβολικό χώρο στο επίπεδο.

(α) Δείξετε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $[1, 1, 2]$.

(β) Είναι η f immersion;

(γ) Έστω $\mathbb{R}^2 = \{(s,t) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$ και $\eta = t\,ds + s\,dt$ διαφορική 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2$. Δώστε ένα χάρτη γύρω από το σημείο $[1, 1, 2]$ και υπολογίστε $f^*\eta$ και $f^*(d\eta)$ ως προς αυτό το χάρτη.

2. Έστω η απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z) \mapsto (xy\,, y^2 + z^2)$$

Δίνεται $\mathbb{R}^2 = \{(s,t) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\}$ και $\omega = -t\,ds + s\,dt$ διαφορική 1-μορφή στο $\mathbb{R}^2$.

(α) Υπολογίστε $f^*\omega$ και $f^*(d\omega)$.

(β) Αν $S^1 = \{(s,t) \,|\, s^2 + t^2 = 1\}$ υπολογίστε $\int_{S^1} \omega$.

(γ) Αν $S^2 = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ υπολογίστε $\int_{S^2} f^*(d\omega)$

3. (α) Σε μια πολλαπλότητα Riemann M δώστε τον ορισμό διανυσματικού πεδίου Jacobi και τον ορισμό συζυγούς σημείου ενός $p \in M$.

(β) Έστω M πλήρης πολλαπλότητα Riemann τέτοια ώστε $K(\sigma, p) \leq 0$ για κάθε σημείο $p \in M$ και δισδιάστατο υποχώρο $\sigma \subset T_pM$. Δειξετε ότι ένα σημείο $p \in M$ δεν έχει συζυγή σημεία.
($K(\sigma, p)$ είναι η καμπυλότητα τομής (sectional curvature) του σ).

4. (α) Έστω M συνεκτική πολλαπλότητα Riemann τέτοια ώστε $\exp_p$ να ορίζεται σε ολόκληρο τον εφαπτόμενο χώρο T_pM. Δείξετε ότι για κάθε $q \in M$ υπάρχει γεωδαισιακή γ από το p στο q με $l(\gamma) = d(p,q)$, όπου $l(\gamma)$ το μήκος της γ.

(β) Έστω M συνεκτική πολλαπλότητα Riemannan. Διατυπώστε τρεις συνθήκες ισοδύναμες με την ακόλουθη:

Η M είναι γεωδαισιακά πλήρης.

5. Έστω $(M, \langle,\rangle^M)$ και $(N, \langle,\rangle^N)$ πολλαπλότητες Riemannan και $f : M \to N$ ισομετρία, δηλαδή διαφορομορφισμός τέτοιος ώστε

$$\langle df_p v, df_p w\rangle^N_{f(p)} = \langle v, w\rangle^M_p \quad \forall p \in M,\ v, w \in T_pM.$$

(α) Δείξετε ότι $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)\ \forall x, y \in M$ όπου d_N και d_M η απόσταση Riemann της N και M αντίστοιχα.

(β) Έστω $\gamma : I \to M$ γεωδαισιακή της M, με $||\dot\gamma(t)|| = 1\ \ \forall\, t \in I$. Δείξετε ότι η $f \circ \gamma$ είναι γεωδαισιακή της N.

6. (α) Υπάρχει πλήρης μετρική στο $\mathbb{R}^2$ με καμπυλότητα Ricci $\mathrm{Ric} \geq 2$;

(β) Ποιά η καμπυλότητα τομής του $\mathbb{R} \times S^1$ με τη μετρική γινόμενο; (Αιτιολογήστε την απάντησή σας)

Αριθμητική Επίλυση Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων

ΧΕ 12-13

1. (Μονάδες 50)

Θεωρούμε τη μέθοδο

$$Y'_{n+1} = Y_n + h\left[\vartheta f\left(x_n, Y_n\right) + (1-\vartheta) f\left(x_{n+1}, Y_{n+1}\right)\right], \text{ όπου } 0 \le \vartheta \le 1, \quad (1)$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y) = Ay + g(x), \quad x > 0, \quad y(0) = y_0 \text{ όπου } A \text{ σταθερός } N \times N \text{ πίνακας.} \quad (2)$$

(i) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου.

(ii) Να μελετηθεί η σύγκλιση της μεθόδου.

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + 4y' + 4y = 1, \quad x > 0, \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = 0. \quad (3)$$

(i) Το πρόβλημα (3) να μετατραπεί σε σύστημα πρώτης τάξεως της μορφής (2).

(ii) Να βρεθεί το σφάλμα της μεθόδου (1) με $\vartheta = 1$ στο σημείο $x_1 = h$ για τα y και y'.

2. (Μονάδες 50)

Θεωρούμε το εξής Π.Σ.Τ.: Να βρεθεί η συνάρτηση u τέτοια ώστε

$$\begin{cases} -\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x) \text{ για } x \in \Omega = (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

όπου $f \in L^2(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p_1 \ge p(x) \ge p_0 > 0, q_1 \ge q(x) \ge q_0 > 0, p(x), q(x) \in C([a,b])$ είναι γνωστά. (Οι σταθερές p_0, p_1, q_0, q_1 είναι επίσης γνωστές.)

(α) Να βρεθεί η μεταβολική μορφή του πιο πάνω Π.Σ.Τ., δηλ. να βρεθούν συναρτησιακοί χώροι X και Y, διγραμμική μορφή B: $X \times Y \to \mathbb{R}$ και γραμμικό συναρτησιακό F: $Y \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $u \in X$ να ικανοποιεί $B(u,v) = F(v) \forall v \in Y$. (Οι χώροι X, Y μπορεί να μην είναι διαφορετικοί.)

(β) Με $B(\cdot\,,\cdot)$ την διγραμμική μορφή που προκύπτει από το (α), να δειχτεί ότι $B(u_{FE}, u_{FE}) \le B(u,u)$, όπου u η ακριβής λύση και u_{FE} η λύση πεπερασμένων στοιχείων.

(γ) Αν $q_0 = 0$, να δειχτεί ότι $\|u\| = \left[B(u,u)\right]^{1/2}$, <u>δεν</u> ορίζει νόρμα στον χώρο $H^1(\Omega)$.

Εαρινό Εξάμηνο 12-13

ΑΝΑΛΥΣΗ

Να απαντηθούν όλα τα ερωτήματα

26/1/2013

Όνομα:

1 (ι) Να βρεθεί σύμμορφη απεικόνιση του χωρίου $\{\mathrm{Im} z > 0, \ |z-1| < 1\}$ πάνω στο μοναδιαίο δίσκο $\{|z| < 1\}$.

(ιι) Έστω $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ άκεραια αναλυτική και

$$|u(x,y)| \leq 1 \ \forall x, y \ .$$

Δείξτε ότι η $f(z)$ είναι σταθερή.

2 (ι) Έστω $p(z)$ πολυώνυμο βαθμού N. Έστω R αρκετά μεγάλο ούτως ώστε όλες οι ρίζες του $p(z)$ να είναι μέσα στο κύκλο $|z| = R$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = N \ .$$

(ιι) Αν η $f(z)$ είναι αναλυτική σε μία περιοχή που περιέχει τον κύκλο $|z| = R$, $|f(z)| > m$ πάνω στο κύκλο, και $|f(0)| < m$, να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστο μία ρίζα στο εσωτερικό του κύκλου.

3 Έστω C ο κύκλος $|z| = \sqrt{2}$ με θετική φορά. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{\cot \pi z dz}{z^2} \ .$$

4 Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$-χώρος μέτρου. Άν $A_1, A_2, \ldots,$ είναι μία ακολουθία $\mathcal{A}$-μετρησίμων συνόλων τέτοιων ώστε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty, \tag{1}$$

τότε δείξτε οτι σχεδόν κάθε $x \in X$ ανήκει σε το πολύ πεπερασμένο πλήθος των συνόλων A_i (δηλαδή, το σύνολο $\{i \in \mathbf{N} : x \in A_i\}$ είναι πεπερασμένο). Αν στην θέση της (1) ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \infty,$$

τότε αληθεύει το ίδιο συμπέρασμα;

5 (ι) Έστω οτι η συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow [0, +\infty)$ είναι *Lebesgue* ολοκληρώσιμη. Άν $\alpha > 0$ καί $E_\alpha = \{x \in \mathbf{R}^2 : \ f(x) > \alpha\}$, τότε δείξτε ότι

$$m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int f.$$

(ιι) Άν η συνάρτηση f είναι *Lebesgue* ολοκληρώσιμη στο $\mathbf{R}$ τότε δείξτε ότι η f

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

είναι ομοιόμορφα συνέχης.

6 Έστω οτι η συνάρτηση $f : [0, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ είναι *Lebesgue* ολοκληρώσιμη. Ορίζω την συνάρτηση

$$g(x) = \int_{x}^{b} \frac{f(t)}{t} dt, \ 0 < x \leq b.$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι *Lebesgue* ολοκληρώσιμη στο $[0, b]$. Επιπλέον, δείξτε ότι

$$\int_{0}^{b} g(x)dx = \int_{0}^{b} f(t)dt.$$

Εαρινό Εξάμηνο
2012-201

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

2 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2013

Να απαντηθούν και τα 6 θέματα

ΟΝΟΜΑ: ______________________________

Άσκηση	1	2	3	4	5	6	Βαθμός
Μονάδες							

Δίδεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x,y) = Ay + g(x), \quad x > 0, \quad y(0) = y_0 \text{ όπου } A \text{ σταθερός } N\times N \text{ πίνακας.} \quad (1)$$

(Το πιο πάνω πρόβλημα αφορά τα θέματα 1, 2 και 3.)

1. (Μονάδες 15)

Θεωρούμε την άμεση μέθοδο του Euler για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (1).

(i) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου.

(ii) Να μελετηθεί η σύγκλιση της μεθόδου.

2. (Μονάδες 15)

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + 2y' + y = 1, \quad x > 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \qquad (2)$$

(i) Το πρόβλημα (2) να μετατραπεί σε σύστημα πρώτης τάξεως της μορφής (1).

(ii) Να βρεθεί το σφάλμα της άμεσης μεθόδου του Euler στο σημείο $x_1 = h$ για τα y και y'.

3. (Μονάδες 20)

Θεωρούμε τη μέθοδο του κανόνα του τραπεζίου για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (1).

(i) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου.

(ii) Να μελετηθεί η σύγκλιση της μεθόδου.

(iii) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο του κανόνα του τραπεζίου στο πρόβλημα (2). Να βρεθεί το σφάλμα της μεθόδου στο σημείο $x_1 = h$ για τα y και y'.

4. (Μονάδες 25)

Θεωρούμε το εξής Π.Σ.Τ.: Να βρεθεί η συνάρτηση u τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u^{(4)}(x) + u(x) = f(x) \text{ για } x \in \Omega = (a,b) \\ u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

όπου $f \in L^2(\Omega)$, $a, b \in \mathbb{R}$, είναι γνωστά. Ορίζουμε τον χώρο

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0 \right\}.$$

(α) Να βρεθεί μια <u>συμμετρική</u> μεταβολική μορφή του πιο πάνω Π.Σ.Τ. χρησιμοποιώντας σαν συναρτησιακό χώρο τον $H_0^2(\Omega)$. Δηλαδή, να βρεθούν $B: H_0^2(\Omega)\times H_0^2(\Omega)\to \mathbb{R}$ και $F: H_0^2(\Omega)\to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $u\in H_0^2(\Omega)$ να ικανοποιεί $B(u,v)=F(v)\forall v\in H_0^2(\Omega)$.

(β) Να δειχτεί ότι το μεταβολικό πρόβλημα που βρήκατε στο (α) έχει μοναδική λύση.

5. (Μονάδες 15)

Θεωρούμε το εξής Π.Σ.Τ.:

$$\begin{cases} -u''(x)=f(x) \quad , \quad x\in I=(-1,1) \\ u(-1)=u(1)=0 \end{cases}$$

όπου $f(x)=60x^4+2$.

(α) Να δείξετε ότι η ακριβής λύση είναι $u(x)=-2x^6-x^2+3$ και ότι η λύση του αντίστοιχου μεταβολικού προβλήματος ανήκει στον χώρο

$$V=\left\{ v: \int_I (v')^2\, dx<\infty, v(-1)=v(1)=0\right\}.$$

(β) Έστω ότι $V_N\subseteq V$ με $V_N=span\{1,x,x^2\}$. Να δείξετε ότι $\dim V_N=1$. (Υπόδειξη: Να δείξετε ότι αν $\phi(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\in V_N$ τότε <u>μόνο μια</u> από τις σταθερές a, b, c χρειάζεται για τον προσδιορισμό της .)

6. (Μονάδες 10)

Να βρείτε την συνάρτηση $u_N\in V_N$ η οποία λύνει το διακριτό μεταβολικό πρόβλημα που αντιστοιχεί στο Π.Σ.Τ. του Θέματος 5 (δηλ. να βρείτε τη λύση της μεθόδου Galerkin όταν χρησιμοποιήσουμε δευτεροβάθμια πολυώνυμα και μόνο ένα στοιχείο για τον προσδιορισμό της.)

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
Εαρινό Εξάμηνο 12-13

ΝΑ ΛΥΘΟΥΝ **ΚΑΙ ΤΑ ΕΞΙ** ΘΕΜΑΤΑ

1.

Δείξτε ότι αν $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αρμονική και φραγμένη, τότε είναι σταθερή.

2.

Στο τετράγωνο $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -1 & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Βρείτε άνω και κάτω φράγματα για την τιμή $u(0,0)$. (Υπόδειξη: Θεωρείστε την $v = u + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$).

3.

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(**) \begin{cases} u_t - u_x = u^2 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = -\frac{1}{1+x^2} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

α) Σχεδιάστε τις χαρακτηριστικές καμπύλες που αντιστοιχούν στην ΜΔΕ του (**).

β) Επιλύστε το πρόβλημα (**).

4.

Δίνεται η τριδιάστατη κυματική εξίσωση

$$(K) \qquad u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

για $t > 0$ και $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ όπου $u = u(x,y,z,t)$. Έστω ο μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$(\Sigma) \begin{cases} x = & r \sin\theta \cos\phi \\ y = & r \sin\theta \sin\phi \\ z = & r \cos\theta \end{cases}$$

όπου $r \in [0,\infty)$ και $\theta \in [0,\pi]$, $\phi \in [0,2\pi]$. Τότε η τριδιάστατη κυματική εξίσωση (K) μετασχηματίζεται στην ΜΔΕ

$$u_{tt} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$

αν εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό (Σ). Έστω

$$u(x,y,z,t) = U(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, t)$$

η σφαιρική λύση της (K) (δηλ. η λύση που εξαρτάται μόνο από το χρόνο t και την απόσταση $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ από την αρχή των αξόνων). Να βρείτε και να επιλύσετε τη ΜΔΕ που ικανοποιεί η σφαιρική λύση U.

5.

Έστω $u(x,t)$ ομαλή λύση του προβλήματος

$$(4) \begin{cases} u_t = u_{xx} + u & (x,t) \in (0,l) \times (0,T] \\ u(x,0) = x(l-x) & x \in [0,l] \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 & t \in (0,T) \end{cases}$$

Δείξτε ότι

$$0 \leq u(x,t) \leq \frac{l^2}{4} e^t$$

για κάθε $(x,t) \in [0,l] \times [0,T]$

6.

Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

$$(6) \begin{cases} u_{tt} + 3u_{xt} + 2u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x,0) = x & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$