ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Φεβρουάριος 2020

1. Θεωρούμε τη μέθοδο

$$\boldsymbol{Y}_{n+1} = \boldsymbol{Y}_n + h\left[\vartheta \boldsymbol{f}(x_n, \boldsymbol{Y}_n) + (1-\vartheta)\boldsymbol{f}(x_{n+1}, \boldsymbol{Y}_{n+1})\right], \quad \text{όπου} \quad 0 \le \vartheta \le 1, \tag{1}$$

για την επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(x), \quad x > 0, \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 \quad \text{όπου} \quad A \quad \text{σταθερός} \quad N \times N \quad \text{πίνακας.} \tag{2}$$

(α) Να βρεθεί το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου.

(β) Να μελετηθεί η σύγκλιση της μεθόδου.

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + 2\sqrt{2}y' + 2y = 1, \quad x > 0, \qquad y(0) = \frac{1}{2}, \qquad y'(0) = 0. \tag{3}$$

(α) Το πρόβλημα (3) να μετατραπεί σε σύστημα πρώτης τάξεως μορφής (2).

(β) Να βρεθεί το σφάλμα της μεθόδου (1) με $\vartheta = 1$ στο σημείο $x_1 = h$ για τα y και y'.

2. Θεωρούμε το εξής πρόβλημα συνοριακών τιμών: Να βρεθεί η συνάρτηση w τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &-w''(x) + w(x) = f(x)\ ,\ x \in \Omega = (a,b) \\ &w(a) = 0, w'(b) + w(b) = g \end{aligned}$$

όπου $a, b, g, \in \mathbb{R}$ είναι γνωστές σταθερές, και $f(x)$ είναι γνωστή, επαρκώς ομαλή συνάρτηση.

(α) [40%] Να βρεθεί η μεταβολική διατύπωση του πιο πάνω ΠΣΤ και να δείξετε ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του μεταβολικού προβλήματος.

(β) [10%] Χρησιμοποιώντας τη μεταβολική μορφή και τη διαφορική εξίσωση, να δείξετε ότι υπάρχουν θετικές σταθερές C, C_0, ανεξάρτητες της w, τέτοιες ώστε

$$\|w\|_{1,\Omega} \leq C\left(\|f\|_{0,\Omega} + |g|\right),\ \ \|w\|_{2,\Omega} \leq C_0\left(\|f\|_{0,\Omega} + |g|\right),$$

όπου

$$\|w\|_{m,\Omega} := \left\{\sum_{i=0}^{m} \int_a^b \left[w^{(i)}(x)\right]^2 dx\right\}^{1/2}$$

η νόρμα του χώρου Sobolev $H^m(\Omega)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

(γ) [30 %] Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά C_1, που δεν εξαρτάται από τη w, τέτοια ώστε

$$\|w\|_{r+2,\Omega} \leq C_1\left(\|f\|_{r,\Omega} + |g|\right), r = 0, 1, 2, \ldots$$

(δ) [20 %] Να βρεθεί το διακριτό πρόβλημα που αντιστοιχει στη μεταβολική μορφή του ΠΣΤ, για το χώρο πεπερασμένης διάστασης V_p^h, ο οποίος ορίζεται ως εξής: χωρίζουμε το Ω ως $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{j-1} < x_j < \ldots < x_N = b$ και θέτουμε $I_j = (x_{j-1}, x_j)$, $h_j = x_j - x_{j-1}$, $h = \max_{1\leq j\leq N} h_j$. Με p θετικό ακέραιο, ορίζουμε

$$V_h^p = \left\{v_h \in C([a,b]) : v_h|_{I_j} \in \mathcal{P}_p(I_j), j = 1, \ldots, N\right\},$$

όπου $C([a,b])$ ο χώρος των συνεχών συναρτησεων στο $[a,b]$, και $\mathcal{P}_p(I_j)$ ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού $\leq p$ στο I_j. Ο χώρος V_h^p έχει την εξής προσεγγιστική ιδιότητα (την οποία θεωρείστε δεδομένη):

$$\|v - v_{h,p}^I\|_{1,\Omega} \leq C_2 h^p \|v\|_{p+1,\Omega}\ ,\ \forall\, v \in H^{p+1}(\Omega),$$

όπου C_2 είναι μια θετική σταθερά ανεξάρτητη του h, και $v_{h,p}^I \in V_h^p$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της $v \in H^{p+1}(\Omega)$ που ικανοποιεί, για $j = 1, \ldots, N$,

$$v_{h,p}^I(x_{j-s/p}) = v(x_{j-s/p})\ ,\ s = 0, 1, \ldots, p,\ x_{j-s/p} = (1 - s/k)x_j + \frac{s}{k}x_{j-1}.$$

Στη συνέχεια, έστω w η λύση του μεταβολικού προβλήματος για το δοθέν ΠΣΤ, και έστω w_{FEM} η αντίστοιχη λύση Πεπερασμένων Στοιχειων. Να δείξετε ότι υπάρχει θετική σταθερά C_3, τέτοια ώστε

$$\|w - w_{FEM}\|_{1,\Omega} \leq C_3 h^p \left(\|f\|_{p-1,\Omega} + |g|\right).$$

Γενικές Μεταπτυχιακές Εξετάσεις στην Ανάλυση - Ιανουάριος 2020

Να δοθούν απαντήσεις σε 3 θέματα της ομάδας Α και σε 3 θέματα της ομάδας Β

Α. Πραγματική Ανάλυση

1. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν
$$\int_E f\,dx = 0, \quad \text{για κάθε μετρήσιμο } E \subset [0,1],$$
δείξατε ότι $f(x) = 0$, σχεδόν παντού.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και $1 \le p < q \le \infty$. Αν $f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$, τότε δείξατε ότι
$$f \in L^r(\mathbb{R}), \quad \text{για κάθε } r \in (p,q).$$

3. Έστω $\langle \mathcal{X}, \mathcal{M}, \mu \rangle$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξατε ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει ότι
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} f_n\,d\mu = \int_{\mathcal{X}} f\,d\mu.$$

4. Με κατάλληλη χρήση του *Θεωρήματος Κυριαρχημένης Συγκλίσεως του Lebesgue*, αποδείξτε ότι
$$\frac{d}{da}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\sin(ax)\,dx = \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2}\cos(ax)\,dx, \quad a \in \mathbb{R}.$$
Υποδειξη. Αρκεί να δείξετε ότι για κάθε ακολουθία $\{h_n\} \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$, με $h_n \to 0$, η αντίστοιχη ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{h_n}\big(\mathrm{e}^{-x^2}\sin\big((a+h_n)x\big) - \mathrm{e}^{-x^2}\sin(ax)\big)$ πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Συγκλίσεως του Lebesgue.

Β. Μιγαδική Ανάλυση

1. Δείξατε ότι κάθε πολυώνυμο έχει ρίζα.

2. Υπάρχει αναλυτική συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$, όπου $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, για την οποία να ισχύει
$$f\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{1}{n},$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$;

   Υποδειξη. Αν υπήρχε, τότε $f^2(z) = z$.

3. Δείξατε ότι όλες οι ρίζες του πολυωνύμου
$$p(z) = z^7 - 5z^3 + 12$$
περιέχονται εντός του δακτυλίου $A = \{z \in C : 1 < |z| < 2\}$.

4. Δείξατε ότι
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΕΡΙΕΚΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Άλγεβρα

ΕΠΩΝΥΜΟ: .... **ΟΝΟΜΑ:** ....

ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ: ....

ΟΔΗΓΙΕΣ:

(α) Η εξέταση διαρκεί 3 ώρες.
(β) Να λύσετε και τα 6 θέματα.
(γ) Γράφετε καθαρά και ευανάγνωστα.
(δ) Γράφετε εντός του πλαισίου στις σελίδες λύσεων.
(ε) Με τη λήξη της εξέτασης όλα τα χαρτιά (εξεταστικό δοκίμιο και πρόχειρες σελίδες) θα πρέπει να επιστραφούν στον επιτηρητή.

1. (i) Αποδείξετε ότι μια ομάδα τάξης 35 είναι κυκλική. (4 μ.)

   (ii) Αποδείξετε ότι μια ομάδα τάξης 105 έχει κυκλική κανονική υποομάδα με δείκτη 3. (6 μ.)

2. Έστω G ομάδα.

   (i) Αποδείξετε ότι αν η $G/Z(G)$ είναι κυκλική ομάδα τότε η G είναι αβελιανή ομάδα. (4 μ.)

   (ii) Αποδείξετε ότι αν η $\mathrm{Aut}(G)$ είναι κυκλική ομάδα τότε η G είναι αβελιανή ομάδα. (6 μ.)

3. (i) Έστω G μη-τετριμμένη πεπερασμένη ομάδα και p ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης της τάξης της G. Έστω $H \leq G$ με $[G : H] = p$. Αποδείξετε ότι η H είναι κανονική υποομάδα της G. (5 μ.)

   (ii) Έστω p περιττός πρώτος αριθμός. Βρείτε όλες τις ομάδες τάξης $2p$, ως προς ισομορφισμό. (5 μ.)

4. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο και I ιδεώδες του R.

   (i) Δείξτε ότι I είναι μεγιστικό ιδεώδες του R αν, και μόνο αν, ο δακτύλιος R/I είναι σώμα. (5 μ.)

   (ii) Να κατασκευάσετε ένα σώμα με ακριβώς 9 στοιχεία. (5 μ.)

5. (i) Έστω $f(x) = (x^2 - 3)(x^3 + 1) \in \mathbb{Q}[x]$. Δείξτε ότι $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ είναι ένα σώμα διάσπασης του $f(x)$ επί του $\mathbb{Q}$ και βρείτε τον βαθμό $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i) : \mathbb{Q}]$. (3 μ.)

   (ii) Θέτουμε $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(u, i\sqrt{3})/\mathbb{Q})$ όπου $u = \sqrt[3]{5}\,(\in \mathbb{R})$. Βρείτε την τάξη της G. Επίσης, για κάθε $\sigma \in G$ να υπολογίσετε τα $\sigma(u)$ και $\sigma(i\sqrt{3})$. Είναι η G αβελιανή;

   Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (7 μ.)

6. Έστω ότι $f(x)$, $p(x) \in F[x]$ με $\deg(f(x)) \geq 1$, όπου F είναι σώμα. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $p(x)$ είναι ανάγωγο επί του F και ότι K είναι ένα σώμα διάσπασης του $f(x)$ επί του F. Δείξτε ότι οι ανάγωγοι παράγοντες του $p(x)$ επί του K έχουν όλοι τον ίδιο βαθμό. (10 μ.)