Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών
και Στατιστικής

Περιεκτική Εξέταση ΑΝΑΛΥΣΗ - 29/9/2021

ΟΝΟΜΑ: ....
ΕΠΩΝΥΜΟ: ....
Α.Φ.Τ.: ....

Να λυθούν όλα τα θέματα.

1. α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Morrera.

   β) Δίνεται συνάρτηση
$$f(z) = \int_0^1 \frac{\sin tz}{t} dt.$$
   Δείξτε ότι η f είναι αναλυτική.

2. Έστω $D_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r\}$ ο δίσκος με κέντρο 0 και ακτίνα r στο μιγαδικό επίπεδο. Θεωρούμε συνάρτηση $f(z)$ που είναι αναλυτική στο $D_2(0)$ εκτός απο τα σημεία z_i με $|z_i| = 1$ για $i = 1, .., k$. Υποθέτουμε οτι η f έχει τα z_i πόλους τάξης 1, με αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα ρ_i για $i = 1, .., k$. Αν συμβολίσουμε το ανάπτυγμα *Taylor* της $f(z)$ στο 0 ως
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
   Δείξτε ότι υπάρχει θετική σταθερά C τέτοια ώστε $|a_n| \leq C$
   Υπόδειξη: Θεωρείστε την ολόμορφη συνάρτηση $g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{k} \frac{\rho_j}{z - z_j}$.

3. Έστω $D_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ ο δίσκος με κέντρο 0 και ακτίνα 1 στο μιγαδικό επίπεδο. Για $k > 0$, ορίζουμε το παρακάτω σύνολο συναρτήσεων:
$$A_k = \left\{ f \text{ αναλυτική στο } D_1(0) : \sup_{z \in D_1(0)} (1 - |z|)^k |f(z)| < \infty \right\}.$$
   α) Αν $z \in D_1(0)$, ποιος είναι ο ολοκληρωτικός τύπος του *Cauchy* για κύκλο με κέντρου 0 και ακτίνα $r = \frac{1-|z|}{2}$;

   β) Δείξτε ότι $f \in A_k$ αν και μόνο αν $f' \in A_{k+1}$.

4. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε
$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \text{ και } \ B = \bigcap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$$
   α) Δείξτε ότι $\lambda_1(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$, όπου λ_1 το μονοδιάστατο μέτρο *Lebesgue*.

   β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε οτι το $[0, 1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μή κενό.

   γ) Δείξτε ότι $B \subseteq [0, 1]$ και $\lambda_1(B) = 0$.

   δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq B$ και ότι το B είναι υπεραριθμήσιμο.

5. α) Δίνετε η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin Q, \\ 0, & x \in Q. \end{cases}$$

(i) Να εξετάσετε αν η f είναι κατά Riemman ολοκληρώσιμη.

(ii) Είναι η f κατά Lebesgue μετρήσιμη στο $[0,1]$;

(iii) Είναι η f κατά Lebesgue ολοκληρώσιμη;

β) Να αποδείξετε ότι εάν μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι κατά Riemman ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ τότε είναι και κατά Lebesgue ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα και τα δύο ολοκληρώματα είναι ίδια.

6. Έστω E ένα *Lebesgue* μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ γνησίως θετική, μετρήσιμη συνάρτηση.

   α) Θεωρείστε τα σύνολα $E_m = \{x : f(x) > 1/m\}$. Δείξτε ότι
   $$\lim_{m\to\infty} \lambda_k(E_m) = \lambda_k(E).$$

   β) Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν A είναι *Lebesgue* μετρήσιμο υποσύνολο του E με $\lambda_k(A) > \varepsilon$ τότε
   $$\int_A f d\lambda_k \geq \delta.$$