Γενικός τύπος της ακολουθίας Fibonacci

Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται από τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1}.$$

Θα δούμε ότι ο γενικός της τύπος αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των δυνάμεων των ριζών της *χαρακτηριστικής εξισώσεως*

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Δηλαδή, υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, ώστε

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n,$$

όπου

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Κατ' αρχάς οι ρίζες αυτές ικανοποιούν τις σχέσεις

$$x_1 + x_2 = 1 \quad \& \quad x_1 x_2 = -1,$$

οπότε ο αναδρομικός τύπος γράφεται και ως εξής:

$$a_{n+2} = (x_1 + x_2) a_{n+1} - x_1 x_2 a_{n+1},$$

ή ισοδύναμα

$$a_{n+2} - x_1 a_{n+1} = x_2 (a_{n+1} - x_1 a_{n+1}),$$

και άρα η ακολουθία $\{b_n\}$, με τύπο $b_n = a_{n+1} - x_1 a_{n+1}$, ικανοποιεί την σχέση $b_{n+1} = x_2 b_n$. Συνεπώς

$$b_n = x_2 b_{n-1} = x_2^2 b_{n-2} = \cdots = x_2^n b_0,$$

και συνεπώς

$$a_{n+1} - x_1 a_n = (a_1 - x_1 a_0) x_2^n = x_2^n. \tag{1}$$

Οι ρόλοι των x_1 και x_2 δύνανται να εναλλαγούν, οπότε κατ' αναλογίαν λαμβάνομε

$$a_{n+1} - x_2 a_n = (a_1 - x_2 a_0) x_1^n = x_1^n. \tag{2}$$

Συνδυασμός των (1) και (2) παρέχει

$$a_n = \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$