ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Δρ Σοφοκλής Μιχαηλίδης

Η Γενική Μέθοδος Κατασκευής και Εφαρμογής Μαθηματικών Μοντέλων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΜΕΣΟΓΕΙΟΣ

Δρ Σοφοκλής Μιχαηλίδης
Ανώτερος Διευθυντής
Κεντρική Τράπεζα της Κύπρου

Βιογραφικό Σημείωμα

Ο Δρ Σοφοκλής Μιχαηλίδης γεννήθηκε στη Λάρνακα της Κύπρου στις 15 Απριλίου 1947. Συνδυάζει εξαιρετικά επιστημονικά προσόντα με πολύτιμη επαγγελματική πείρα. Σπούδασε με υποτροφία του Ιδρύματος Fulbright στις Ηνωμένες Πολιτείες, όπου εξελέγη μέλος του ανώτατου ακαδημαϊκού συνδέσμου ΦΒΚ. Το 1974 αναγορεύθηκε Διδάκτορας της Φιλοσοφίας από το Πανεπιστήμιο Cornell της Νέας Υόρκης. Η διατριβή του Money, Debt, Inflation and Growth επικεντρώθηκε στα μαθηματικά μοντέλα της οικονομίας, που έκτοτε αποτελούν το κύριο ερευνητικό του ενδιαφέρον. Δίδαξε στο Πανεπιστήμιο των Φιλιππινών, στο Πανεπιστήμιο του Eastern Michigan στις ΗΠΑ και στο Μεσογειακό Ινστιτούτο Διεύθυνσης στη Λευκωσία. Σήμερα, είναι ανώτερος διευθυντής της Κεντρικής Τράπεζας της Κύπρου.

Κατά την τριακονταετή τριβή του με τα τραπεζικά ασχολήθηκε με την επένδυση διεθνών αποθεμάτων, τη διαχείριση εξωτερικού χρέους, τη διαφήμιση χρηματοοικονομικών υπηρεσιών, τη στατιστική έρευνα και ανάλυση, την εφαρμογή της πληροφορικής τεχνολογίας, την οργάνωση ανθρώπινου δυναμικού, καθώς επίσης με όλες τις πτυχές της οικονομικής και νομισματικής πολιτικής. Ο Δρ Μιχαηλίδης αντιπροσώπευσε την Κεντρική Τράπεζα σε κυβερνητικές επιτροπές και διεθνή συνέδρια και διετέλεσε μέλος επιτροπών της Ευρωπαϊκής Ένωσης και της Ευρωπαϊκής Κεντρικής Τράπεζας. Έχει δημοσιεύσει άρθρα και μελέτες για οικονομικά θέματα. Είναι πρόεδρος των Αποφοίτων Πανεπιστημίων Ivy League και μέλος του Συμβουλίου του Ευρωπαϊκού Κινήματος στην Κύπρο.

Ταχυδρομική Διεύθυνση:
Δρ Σοφοκλής Μιχαηλίδης
Ανώτερος Διευθυντής
Κεντρική Τράπεζα της Κύπρου
Τ.Θ. 25529, 1395 Λευκωσία
ΚΥΠΡΟΣ

Ηλεκτρονική Διεύθυνση:
scmichae@centralbank.gov.cy
somapomi@logos.cy.net

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Δρ Σοφοκλής Μιχαηλίδης

Η Γενική Μέθοδος Κατασκευής
και Εφαρμογής Μαθηματικών Μοντέλων

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΜΕΣΟΓΕΙΟΣ

Εκδόσεις Μεσόγειος
Πανεπιστήμιο Κύπρου

Επιστημονική Επιτροπή
Πρόεδρος: Κυριάκος Ν. Δημητρίου
Τμήμα Κοινωνικών και Πολιτικών Επιστημών
Email: k.demetriou@ucy.ac.cy

Μέλη (Κοινωνικές και Ανθρωπιστικές Επιστήμες):
Γιώργος Κασσίνης
(Τμήμα Δημόσιας Διοίκησης και Διοίκησης Επιχειρήσεων)
Αντώνης Μπαλασόπουλος
(Τμήμα Αγγλικών Σπουδών)
Λευτέρης Παπαλεοντίου
(Τμήμα Βυζαντινών και Νεοελληνικών Σπουδών)

Διοικητική Διεύθυνση
Δώρος Μιχαήλ

Διόρθωση
Χριστόδουλος Τζιονής

Σχεδιασμός Εξωφύλλου/ Σελιδοποίηση
FBRH Consultants Ltd – Σάιμον Πιτσιλλίδης

Διαχωρισμοί Χρωμάτων
ΧΡΩΜΑσυν Λτδ

Εκτύπωση
RPM Lithographica Ltd

Copyright © 2006 Σοφοκλής Μιχαηλίδης & ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
για την ελληνική γλώσσα σε όλο τον κόσμο

Κεντρική Διάθεση
Εκδόσεις ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ Α.Ε.
Εμμ. Μπενάκη 59, 106 81 Αθήνα. Τηλ.: 210 3891859 – Fax: 210 3891872
www.ellinikagrammata.gr
ISBN 9963-9176-0-7

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Η Γενική Μέθοδος Κατασκευής και Εφαρμογής Μαθηματικών Μοντέλων

Κεφάλαιο		Σελίδα
I	**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ**	
	1. Λεπτομέρειες και Επακόλουθα των Προτάσεων	2
	2. Μαθηματικές Πτυχές της Μεθοδολογίας	3
	3. Ανάμειξη Θεωρίας και Πράξης	6
	4. Σύγκριση με τα Οικονομετρικά Μοντέλα	7
	5. Άλλα Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα	9
	6. Χρήσεις των Ευκλείδειων Προσομοιώσεων	11
	7. Οι Πηγές των Στατιστικών Δεδομένων	14
II	**ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ Ή ΑΞΙΩΜΑΤΑ;**	
	1. Οι Κανόνες των Συναλλαγών	17
	2. Η Συμπεριφορά των Τομέων	19
	3. Οι Μαθηματικές Προδιαγραφές	22
	4. Οι Νομισματικές Διευθετήσεις	24
III	**ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΗ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ**	
	1. Οι Πίνακες με τους Αλγόριθμους	32
	2. Οι Κατανομές Εσόδων και Εξόδων	37
	3. Το Αναγκαίο Νομικό Υπόβαθρο	40
	4. Η Συναρμολόγηση των Κομματιών	42
IV	**ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**	
	1. Η Μοναδικότητα της Στατικής Ισορροπίας	46
	2. Οι Συνθήκες Δυναμικής Σταθερότητας	47
	3. Οι Χρηματικές Ροές των Θεσμικών Τομέων	49
	4. Προϋποθέσεις ενός Κατευθυνόμενου Συστήματος	52
	5. Η Διελκυστίνδα των Ιδιοκτητών των Αγαθών	56
	6. Υπολογισμοί για τη Διαμόρφωση Πολιτικής	57
V	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**	
	1. Τα Στατιστικά Στοιχεία	61
	2. Οι Συνθήκες Σταθερότητας	62
	3. Οι Λύσεις Ισορροπίας	64
	4. Η Επαναλαμβανόμενη Κυκλοφορία	65
	5. Ελλείμματα και Πλεονάσματα	68
	6. Η Πολυμορφία του Πληθωρισμού	69
	7. Η Στρατηγική και η Τακτική	70
	8. Οι Χρηματοοικονομικοί Ισολογισμοί	73
	9. Το Ενδιάμεσο Συμπέρασμα	75
VI	**ΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΧΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΓΑΘΩΝ**	
	1. Οι Ροές του Νομισματικού (Εκδοτικού) Τομέα	78
	2. Η Αλληλεπίδραση των Πραγματικών (Μη-Εκδοτικών) Τομέων	81
	3. Το Σύμπλεγμα Συναλλαγών ως Δυναμικός Χώρος	84
VII	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**	
	1. Η Πυθαγόρεια Θεωρία των Αριθμών	87
	2. Μέτρηση του Βαθμού Σύγκλισης	88
	3. Το Πλατωνικό Δόγμα των Μορφών	89
	4. Ο Δυαδικός Κόσμος των Αντιθέτων	90
	5. Η Τρίτη Διάσταση του Χώρου	92
	6. Η Θεωρία του Μισθολογικού Κεφαλαίου	93

Κεφάλαιο		Σελίδα
VIII	**ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ Ή ΤΗΣ ΦΥΣΕΩΣ;**	
	1. Τα Ευκλείδεια Συμπλέγματα Συναλλαγών	95
	2. Οι Ομοιότητες Χρήματος και Ενέργειας	97
	3. Μετατροπή και Συντήρηση του Εξωγενούς Πλούτου	100
	4. Η Ανυπαρξία Αυτοκίνητων Οικονομικών Συστημάτων	102
	5. Το Στατικό Σημείο μιας Ενεργοποιημένης Διάταξης	102
	6. Διαφορές Δυναμικού μεταξύ Καταστάσεων Ισορροπίας	104
IX	**ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ**	
	1. Οι Ενδιάμεσες Χρηματοοικονομικές Υπηρεσίες	108
	2. Κίνδυνοι Αποσταθεροποίησης και η Αντιμετώπισή τους	109
	3. Ο Τετραπλός Ρόλος του Επιτοκίου	110
	4. Υπάρχει Παγίδα Ρευστότητας;	114
	5. Η Μακροχρόνια Οικονομική Μεγέθυνση	115
X	**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**	
	1. Η Συμπεριφορά των Κρατικών Εσόδων	120
	2. Η Συμπεριφορά των Κρατικών Εξόδων	122
	3. Η Κατασκευή του Συμπλέγματος Συναλλαγών	123
	4. Είναι Μαθηματικές ή Οικονομικές οι Συστημικές Ιδιότητες;	127
	5. Προϋποθέσεις μιας Πηδαλιουχούμενης Οικονομίας	129
	6. Προγραμματισμός των Παρεμβατικών Σταδίων	131
	7. Εφαρμογή της Θεωρίας στην Πράξη	134
	8. Το Ποσοστό των Φορολογικών Εσόδων	136
	9. Διαφοροποιήσεις των Φόρων Παρακράτησης	139
	10. Οι Επιδοτήσεις των Αγοραίων Αγαθών	142
	11. Η Τομεακή Κατανομή του Νέου Χρήματος	146
	12. Η Πολυδιάστατη Μορφή της Οικονομικής Πολιτικής	149
XI	**ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΕΘΝΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ**	
	1. Το Ενιαίο Οικονομικό και Χρηματοπιστωτικό Σύστημα	150
	2. Η Μαθηματική Ανάλυση και Σύνθεση των Συναλλαγών	153
	3. Παράδειγμα Προσομοίωσης της Παγκόσμιας Οικονομίας	158
	4. Δυναμικές και Στατικές Ιδιότητες του Μοντέλου	161
	5. Η Επίδραση του Διεθνούς Τραπεζικού Ισολογισμού	166
	6. Δύο Ανεξάρτητες Κλειστές Οικονομίες	170
	7. Η Παγκοσμιοποίηση της Προσφοράς και Ζήτησης Αγαθών	175
	8. Κέρδη ή Ζημιές από τις Διεθνείς Συναλλαγές;	178
	9. Ο Καθοριστικός Ρόλος των Συναλλαγματικών Ισοτιμιών	184
XII	**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ**	
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	195

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Μαθηματικοί Υπολογισμοί και Αποδείξεις

Σελίδες στο Βιβλίο		Σελίδες στο Παράρτημα
III.	**ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΗ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ**	
37	Μέθοδος Αριστοποίησης υπό Περιορισμούς τού Lagrange	202
IV.	**ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**	
45-47	Η Μοναδικότητα της Στατικής Ισορροπίας και οι Συνθήκες Δυναμικής Σταθερότητας του Συστήματος Διαφορικών Εξισώσεων **7**	207
49	Λύση του Συστήματος Ανισοτήτων που Σχηματίζεται από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz της Οικονομίας **Άλφα**	209
50-51	Εξεύρεση (με τον Κανόνα του Cramer) των Στατικών Ροών της Στοιχειώδους Νομισματικής Οικονομίας **7**	213
51	Οι Μερικές Παράγωγοι των Τομεακών Εισοδημάτων και Δαπανών ως προς την Κατανομή του Τραπεζικού Παθητικού h	217
V.	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**	
63	Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο και Λύση του Συστήματος Ανισοτήτων που Σχηματίζεται από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz του Υποδείγματος **20**	222
64-65	Εξεύρεση (με τον Κανόνα του Cramer) των Στατικών Ροών του Στοιχειώδους Μαθηματικού Υποδείγματος **20**	226
65-66	Οι Μερικές Παράγωγοι των Τομεακών Ροών της Στοιχειώδους Οικονομίας **Άλφα** ως προς το Μερίδιο h	232
65	Οι Επαναλαμβανόμενες Αγοραπωλησίες στα Παζάρια Αγαθών της **Άλφα**	235
VI.	**ΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΧΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΓΑΘΩΝ**	
81-84	Το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο και οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz του Υποδείγματος **43**	240
VII.	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**	
91-92	Ο Υπολογισμός του Εμβαδού ενός Τριγώνου Σύμφωνα με τον Τύπο της Αναλυτικής Γεωμετρίας	244
X.	**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**	
135-137	Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο και Λύση του Συστήματος Ανισοτήτων που Σχηματίζεται από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz του Υποδείγματος **87**	246
137-138	Λύση των Στατικών Εξισώσεων του Μοντέλου ως Συναρτήσεων του ζ και Υπολογισμός των Ελαστικοτήτων Ανταπόκρισης των Ετήσιων Ροών στο ζ	249
138-139	Η Λύση των Στατικών Εξισώσεων ως Ένα Σύστημα Ανισοτήτων και η Κατανομή των Ετήσιων Ροών Ανάμεσα στους Θεσμικούς Τομείς	261
139	Η Κατανομή των Επαναλαμβανόμενων Αγοραπωλησιών Ανάμεσα στα Παζάρια Αγαθών	265
140	Οι Συντελεστές του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου ως Συναρτήσεις των Φόρων Παρακράτησης και η Λύση των Αντίστοιχων Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Ένα Σύστημα Ανισοτήτων	267

Σελίδες στο Βιβλίο		Σελίδες στο Παράρτημα
141	Οι Ροές Στατικής Ισορροπίας ως Συναρτήσεις των Φορολογικών Συντελεστών και η Λύση τους ως Ένα Σύστημα Ανισοτήτων	277
141	Οι Ελαστικότητες Ανταπόκρισης των Τομεακών Ροών ως προς το Φόρο Παρακράτησης στην Εργασία	287
142	Οι Ελαστικότητες Ανταπόκρισης των Τομεακών Ροών ως προς το Φόρο Παρακράτησης στην Παραγωγή	295
143	Οι Συντελεστές του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου **88** ως Συναρτήσεις της Κατανομής των Δημόσιων Δαπανών και η Λύση των Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Σύστημα Ανισοτήτων	302
143-144	Οι Ροές Ισορροπίας ως Συναρτήσεις της Κατανομής των Δημόσιων Δαπανών και η Λύση του Αντίστοιχου Συστήματος Ανισοτήτων	318
144	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή των Δημόσιων Δαπανών Μεταξύ Προϊόντων και Ομολόγων	329
145	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή των Δημόσιων Δαπανών Μεταξύ Υπηρεσιών και Ομολόγων	334
145	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή των Δημόσιων Δαπανών Μεταξύ Υπηρεσιών και Προϊόντων	339
146-147	Οι Ροές Ισορροπίας ως Συναρτήσεις της Κατανομής του Τραπεζικού Παθητικού και η Λύση του Αντίστοιχου Συστήματος Ανισοτήτων	344
147	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Κράτους και Επιχειρήσεων	355
148	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Νοικοκυριών και Κράτους	360
148	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Επιχειρήσεων και Νοικοκυριών	365
XI.	**ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΕΘΝΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ**	
159	Η Αντικατάσταση των Συντελεστών Τομεακής Συμπεριφοράς τής Δέλτα στο Παγκόσμιο Οικονομικό Μοντέλο **116**	371
161-162	Οι Συντελεστές του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου ως Συναρτήσεις των Τραπεζικών Δαπανών και η Λύση των Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Σύστημα Ανισοτήτων	374
164	Οι Ροές Ισορροπίας ως Συναρτήσεις της Κατανομής του Διεθνούς Τραπεζικού Παθητικού και η Λύση τους ως Σύστημα Ανισοτήτων	382
165	Οι Ροές Ισορροπίας και η Κατανομή τους Ανάμεσα στους Θεσμικούς Τομείς των Δύο Χωρών τής Δέλτα	394
165	Η Κατανομή των Επαναλαμβανόμενων Αγοραπωλησιών Ανάμεσα στα Παζάρια Αγαθών των Δύο Χωρών της Δέλτα	397
166	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Διεθνούς Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Νοικοκυριών και Επιχειρήσεων	401
176	Αντικατάσταση των Συντελεστών Τομεακής Συμπεριφοράς τής Ζήτα στο Παγκόσμιο Οικονομικό Μοντέλο **116**	404

Σελίδες στο Βιβλίο		Σελίδες στο Παράρτημα
177	Υπολογισμός των Συντελεστών του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου και η Λύση των Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Σύστημα Ανισοτήτων ως προς το γ, όταν α = $^{1}/_{2}$, α = $^{3}/_{4}$, α = $^{7}/_{8}$, α = $^{127}/_{128}$	407
178-179	Εξεύρεση (με τον Κανόνα του Cramer) των Τομεακών Ροών του Συστήματος **139** και τα Όρια των Παραμέτρων α και γ, όπου όλες οι Τομεακές Ροές είναι Θετικές	435
179-180	Τα Έσοδα και τα Έξοδα των Τομέων των Δύο Χωρών και οι Διεθνείς Εισπράξεις και Πληρωμές τής Ζήτα	449
181	Η Κατανομή των Εσόδων και Εξόδων Ανάμεσα στους Θεσμικούς Τομείς των Δύο Χωρών	454
182-183	Υπολογισμός της Κατανομής των Επαναλαμβανόμενων Αγοραπωλησιών Ανάμεσα στα Παζάρια Αγαθών της Παγκόσμιας Οικονομίας Ζήτα	458
186	Λύση (με τον Κανόνα του Cramer) του Συστήματος των Τομεακών Ροών ως Συναρτήσεων της Συναλλαγματικής Ισοτιμίας ξ	460
187	Οι Ετήσιες Ροές των Τομέων των Δύο Χωρών ως Συναρτήσεις της Συναλλαγματικής Ισοτιμίας ξ και η Λύση του Αντίστοιχου Συστήματος Ανισοτήτων	472
188	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών των Δύο Χωρών ως προς τη Συναλλαγματική Ισοτιμία ξ	474
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	477

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ: Η Γενική Μέθοδος Κατασκευής και Εφαρμογής Μαθηματικών Μοντέλων είναι ένα φιλοσοφικό και μεθοδολογικό βιβλίο, το οποίο απευθύνεται σε ακαδημαϊκούς και επαγγελματίες οικονομολόγους, καθώς επίσης σε φοιτητές και πτυχιούχους των οικονομικών, των μαθηματικών, της φυσικής, της μηχανικής και άλλων επιστημών. Το βιβλίο αποτελεί ουσιαστική πηγή γνώσεων και προβληματισμών αναφορικά με την κατασκευή και χρήση μαθηματικών μοντέλων, τα οποία προσομοιώνουν την οικονομική πραγματικότητα. Απώτερος στόχος αυτής της διατριβής είναι να υποδειχθεί ότι τα οικονομικά, όπως οι περισσότερες επιστήμες, μπορούν και πρέπει να προσεγγίζονται μέσω:

- ενός ελάχιστου αριθμού αξιωματικών προτάσεων και
- των γενικά αποδεκτών νόμων των μαθηματικών.

Με την προτεινόμενη μεθοδολογία επιτυγχάνεται η αναπαράσταση οποιουδήποτε συμπλέγματος συναλλαγών ως ενός συστήματος μη-ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με αμετάβλητους συντελεστές. Το σύστημα, το οποίο απεικονίζει την αλληλεπίδραση των τομεακών εισοδημάτων και δαπανών, είναι προσδιορισμένο στο διανυσματικό χώρο $(\boldsymbol{R}^{2n}, t)$, όπου το $\boldsymbol{n}$ ορίζεται ως ο αριθμός των τομέων ή των αγαθών και το t ως ο χρόνος. Εξαιτίας της μαθηματικής μορφής των Ευκλείδειων μοντέλων, αλλά και χάρη στα διαθέσιμα λογισμικά προγράμματα, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε τις λύσεις στατικής ισορροπίας και τις συνθήκες δυναμικής σταθερότητας, οι οποίες προκύπτουν:

- εκλαμβάνοντας, με ελάχιστες εξαιρέσεις, τις αγοραίες συμπεριφορές των καταναλωτών, των παραγωγών κ.λπ., ως μεσοπρόθεσμα σταθερές και
- τροποποιώντας τις εξωγενείς μεταβλητές, όπως π.χ. τις παραμέτρους νομισματικής, δημοσιονομικής ή άλλης πολιτικής, σύμφωνα με διάφορες υποθέσεις.

Με τα Ευκλείδεια μαθηματικά υποδείγματα μπορούν να απαντηθούν κλασικά ερωτήματα και να γίνουν ετήσιες προβλέψεις για τις χρηματικές ροές των τομέων και τα ποσοτικά χάσματα των αγαθών, με απλότητα, ομοιομορφία και γενικότητα. Αναμφίβολα, η νέα μεθοδολογία θα αρχίσει να εφαρμόζεται σταδιακά για την επίλυση διάφορων οικονομικών προβλημάτων από όλες τις χώρες και οργανισμούς στον κόσμο, παράλληλα με τη συλλογή στατιστικών στοιχείων και την ανάπτυξη λογισμικών προγραμμάτων. Στο εγγύς μέλλον, το μάθημα των Ευκλείδειων Οικονομικών πολύ πιθανό να εισαχθεί και να διδάσκεται σε πλείστα πανεπιστήμια διεθνώς, τα οποία θα πεισθούν για τα βαθιά θεωρητικά του θεμέλια και τις πολλές πρακτικές του χρήσεις.

Κάθε νέα ανακάλυψη δημιουργεί ένα εργαλείο, το οποίο τίθεται στη διάθεση εκείνων που επιθυμούν να το χρησιμοποιήσουν για τη βελτίωση του ανθρώπου και του περιβάλλοντός του. Όσοι μελετήσουν, εφαρμόσουν και επεκτείνουν την προτεινόμενη μεθοδολογία, θα αποτελέσουν μέρος τού γίγνεσθαι της επιστήμης των αγοραίων συναλλαγών, η οποία θα ενώσει για πάντα τους κλάδους των οικονομικών, της στατιστικής και της λογιστικής μέσω των νόμων της γεωμετρίας και, επομένως, των μαθηματικών. Στόχος είναι να αναθεωρείται το βιβλίο σε τακτά χρονικά διαστήματα, ώστε να ενσωματώνει σχόλια και έρευνες από ακαδημαϊκούς και επαγγελματίες για τη θεωρία και πράξη των Ευκλείδειων Οικονομικών.

Ο κατάλογος των προσώπων που συνέβαλαν στην ολοκλήρωση του βιβλίου είναι μεγάλος. Εκφράζω θερμές ευχαριστίες στο Δρα Χριστόδουλο Χριστοδούλου, διοικητή της Κεντρικής Τράπεζας της Κύπρου, για την ηθική και οικονομική του συμπαράσταση. Ανάμεσα στους επιστημονικούς συνεργάτες ξεχωρίζω τη Δρα Χριστίνα Χρίστου του Πανεπιστημίου Πειραιώς για τις καίριες συμβουλές της σε κρίσιμα στάδια της προσπάθειας. Ο συγγραφέας ωφελήθηκε ιδιαίτερα και άντλησε ιδέες από το *Central Bank Macromodelling Workshop* (2003), που οργάνωσε η Nederlandsche Bank, από το συνέδριο *Inflation Persistence in the Euro Area* (2004) και το *International Research Forum on Monetary Policy* (2005), που οργάνωσε η Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα, καθώς επίσης από το *European Summer Symposium in International Macroeconomics* (2005), που φιλοξένησε η Κεντρική Τράπεζα της Κύπρου. Ο Δρ Γιώργος Μ. Γεωργίου και ο κ. Παντελής Μιτσής με βοήθησαν με τις διορθώσεις φραστικών και άλλων λαθών. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τη σύζυγό μου Μάρω για την υπομονή, την κατανόηση και την αφοσίωση που επέδειξε όλα τα χρόνια της προετοιμασίας του βιβλίου. Τέλος, είμαι ο μόνος υπεύθυνος για τυχόν παραλείψεις και λάθη, που εξακολουθούν να υπάρχουν στα *ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ*.

Δρ Σοφοκλής Μιχαηλίδης

Λευκωσία
15 Νοεμβρίου 2006

Κι εκείνοι, μόλις τον είδαν από μακριά, πριν τους πλησιάσει, έκαναν συμβούλιο εναντίον του να τον φονεύσουν. Και ο ένας είπε στον άλλον: ''Δέστε, έρχεται εκείνος ο κύριος των ονείρων· ελάτε, λοιπόν, τώρα, και ας τον φονεύσουμε, και ας τον ρίξουμε σε έναν από τους λάκκους και θα πούμε: Ένα κακό θηρίο τον κατέφαγε και θα δούμε, τι θα γίνουν τα όνειρά του.''

Η ΠΑΛΑΙΑ ΔΙΑΘΗΚΗ, Γένεση, 37, 18-20

ΑΦΙΕΡΩΣΗ

Η ζωή και το έργο:

(1) του Δανού συγγραφέα Hans Christian ANDERSEN (1805-1875)

(2) του Ούγγρου συνθέτη Bela BARTOK (1881-1945)

(3) του Γερμανού επιστήμονα Wernher von BRAUN (1912-1977)

(4) του Γάλλου φιλοσόφου René DESCARTES (1596-1650)

(5) του Ελβετού μαθηματικού Leonhard EULER (1707-1783)

(6) του Αμερικανού πολιτικού William J. FULBRIGHT (1905-1995)

(7) του Ολλανδού ζωγράφου Vincent van GOGH (1853-1890)

(8) του Αυστριακού μουσικού Joseph HAYDEN (1732-1809)

(9) του Άγγλου γιατρού William HARVEY (1578-1657)

(10) του Έλληνα ποιητή Κωνσταντίνου ΚΑΒΑΦΗ (1863-1933)

(11) του Εβραίου ψυχιάτρου Wilhelm REICH (1897-1957)

(12) του Αμερικανού αεροναυπηγού Wilbur WRIGHT (1867-1912)

αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης, γι' αυτό, ως ελάχιστη ευγνωμοσύνη,

τους αφιερώνονται τα ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ.

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Ο Ευκλείδης γεννήθηκε το 325 π.Χ. και έζησε στην Αλεξάνδρεια κατά τη διάρκεια της βασιλείας του Πτολεμαίου του Α', ιδρυτή της ομώνυμης δυναστείας και της ξακουστής βιβλιοθήκης. Γνώσεις για γεωμετρικά φαινόμενα, τα οποία χαρακτηρίζονται από ιδιότητες όπως το μήκος, το εμβαδόν ή ο όγκος, είχαν συσσωρευτεί πολύ πριν από τον Ευκλείδη. Παραδείγματος χάριν, οι πυραμίδες με τις εκπληκτικές σχέσεις τους προς άλλα αντικείμενα, τόσο στη γη όσο και στον ουρανό, είχαν κτισθεί περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια προηγουμένως. Εν τούτοις, μέχρι τον Ευκλείδη δεν υπήρξε καμία θεωρία , που να συνδέει λογικά τα διάφορα σχήματα, σχέδια ή δομές. Ο Ευκλείδης ήταν ο πρώτος ο οποίος απέδειξε με απλότητα, ομοιομορφία και γενικότητα ότι όλα τα γεωμετρικά φαινόμενα συνδέονται μέσω πέντε αξιωματικών προτάσεων, οι οποίες βασίζονται σε τρεις αφηρημένες έννοιες, δηλαδή το σημείο, τη γραμμή και τον κύκλο.

Σε αυτό το βιβλίο, ακολουθώντας τα βήματα της ίδιας παράδοσης, προσπαθούμε να ανακαλύψουμε κατά πόσο το ορατό φάσμα των οικονομικών φαινομένων μπορεί, επίσης, να εξηγηθεί με κάποιο ελάχιστο αριθμό θεμελιωδών υποθέσεων. Βασίζοντας την όλη προσέγγιση στις κοινές έννοιες της οικονομικής μονάδας, του περιορισμένου προϋπολογισμού και της αγοραίας συμπεριφοράς, οι οποίες, όπως θα διαφανεί, αντιστοιχούν στις Ευκλείδειες έννοιες του σημείου, της γραμμής και του κύκλου, υποθέτουμε ότι τα ομοειδή σύνολα μονάδων, δηλαδή οι τομείς των καταναλωτικών νοικοκυριών, των παραγωγικών επιχειρήσεων, των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, των κυβερνητικών οργανισμών, των κατοίκων εξωτερικού, κ.λπ., όταν συναλλάσσονται:

- συνδυάζουν την ορθολογική αριστοποίηση, το ένστικτο αυτοσυντήρησης και τη θέληση για δύναμη,
- αντιμετωπίζουν περιορισμούς τόσο όσο αφορά τα έσοδα όσο και τα έξοδά τους,
- κατανέμουν πλήρως τη ζήτηση εισοδημάτων ανάμεσα στις εφικτές πηγές και την προσφορά δαπανών ανάμεσα στους δυνητικούς προορισμούς.

Με την υιοθέτηση των πιο πάνω θεμελιωδών υποθέσεων, επιτυγχάνουμε να διαμορφώσουμε 12 αξιωματικές προτάσεις για την όλη αγοραία συμπεριφορά, οι οποίες διαποτίζονται από τις Ευκλείδειες έννοιες του σημείου, της γραμμής και του κύκλου. Ως

αποτέλεσμα, όλες οι αναλύσεις και συνθέσεις οικονομικών προβλημάτων, καθώς επίσης οι κατασκευές και εφαρμογές μοντέλων συναλλαγών που βασίζονται σε αυτές, υπόκεινται στους νόμους της γεωμετρίας και, επομένως, των μαθηματικών. Στο ανά χείρας βιβλίο επιλύονται κλασικά προβλήματα και απαντώνται σύγχρονα ερωτήματα με απλή, ομοιόμορφη και γενική μεθοδολογία, η οποία, εκτός από τους νόμους της γεωμετρίας και των μαθηματικών, ενσωματώνει, για πρώτη φορά, το θεμελιώδη κανόνα της λογιστικής.

I.1 Λεπτομέρειες και Επακόλουθα των Προτάσεων

Κάθε επιστήμη μελετά, από τη δική της σκοπιά, την αλληλεπίδραση και την πηδαλιούχηση των μεταβλητών, που είναι αντικείμενό της. Τα οικονομικά ασχολούνται με τις μεταβλητές, που ακολουθούν τους κανόνες συμπεριφοράς όσων συμμετέχουν σε αγοραίες συναλλαγές. Το κίνητρο του κέρδους, το ένστικτο της επιβίωσης και η θέληση για δύναμη είναι διαστάσεις αυτής της συμπεριφοράς. Πολλές θεωρίες έχουν προταθεί για τους τρόπους με τους οποίους λειτουργούν και αλληλεπηρεάζονται οι θεσμικοί τομείς και τα παζάρια αγαθών. Εξ αρχής, τονίζεται ότι τα Ευκλείδεια οικονομικά ορμώνται από τη νεοκλασική θεωρία. Υιοθετούνται όλες σχεδόν οι νεοκλασικές υποθέσεις εκτός από την 'καταναλωτική χρησιμότητα' (consumer utility), την 'οριακή παραγωγικότητα' (marginal productivity) και την 'αυτόματη προσαρμογή της τιμής' (automatic price adjustment) των αγαθών. Αντί των προαναφερθέντων, αναφερόμαστε σε 'ροές χρήματος' (money flows), 'στατιστικές κατανομές' (statistical distributions) και 'αυτόματες προσαρμογές των ροών' (automatic flow adjustments), υποθέσεις θεμελιώδεις στην προσέγγισή μας.

Οι δευτερεύουσας σημασίας υποθέσεις, όπως ότι ο νομισματικός τομέας πωλεί και αγοράζει μόνο εγγυημένα ομόλογα, ότι οι μονάδες, τομείς κ.λπ. είναι απόλυτα μυωπικοί και ότι υπάρχει τέλεια μετατροπή χρηματικών ροών σε κεφάλαιο, και αντίστροφα, χρησιμοποιούνται απλώς και μόνο διότι διευκολύνουν τη μαθηματική αποτύπωση και όχι διότι προσθέτουν οτιδήποτε στην ουσία του οικοδομήματος. Σε μεταγενέστερο στάδιο, ορισμένες αντικαθίστανται από άλλες υποθέσεις, ώστε να μελετηθούν οι διαφορές που θα ήθελαν προκύψει. Οι μαθηματικές συναρτήσεις που απορρέουν από τις 12 αξιωματικές προτάσεις περιγράφουν τη ζήτηση εισοδημάτων από τις εφικτές πηγές και την προσφορά δαπανών προς τους δυνητικούς προορισμούς εκ μέρους των τομέων, που συμμετέχουν στις αγοραπωλησίες υπηρεσιών, προϊόντων και χρεογράφων. Με απλούς συλλογισμούς

αποδεικνύουμε ότι από μόνη της η ορθολογική αριστοποίηση εσόδων και εξόδων οδηγεί σε ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων, το οποίο δεν έχει άλλη λύση από την τετριμμένη λύση, δηλαδή το μηδενικό διάνυσμα. Ουσιαστική λύση υπάρχει μόνο εάν υποτεθεί ότι οι μονάδες, τομείς κ.λπ., καθοδηγούνται, εκτός από την ορθολογική αριστοποίηση των χρηματικών ροών τους, και από το ένστικτο συντήρησης του μεριδίου τους στον καθαρό (εξωγενή) πλούτο. Η θέση ότι οι συναλλασσόμενοι, ορθολογικά, κατανέμουν τα έσοδα και τα έξοδά τους ενώ, ταυτόχρονα, συντηρούν τον καθαρό πλούτο τους, είναι αδιάσειστη. Οι εγωκεντρικοί τομείς δεν μπορούν:

- ούτε να υπολογίσουν τα μεγέθη και τις κατανομές των χρηματικών ροών, που οδηγούν στα βέλτιστα αποτελέσματα για το σύνολο των συναλλασσομένων,
- ούτε να δράσουν συλλογικά απαιτώντας από τις αρμόδιες αρχές να επιτύχουν το βέλτιστο μέγεθος και κατανομή του καθαρού πλούτου της οικονομίας.

Τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις έχουν την τάση να αυτοπαγιδεύονται σε ασήμαντους, ασταθείς ή αντιπαραγωγικούς συνδυασμούς εισοδημάτων και δαπανών (σε σχέση με τα διαθέσιμα αποθέματα των αγαθών) εξαιτίας της τυφλής επιδίωξης των δικών τους κινήτρων και συμφερόντων. Σε ένα τέτοιο μυωπικό περιβάλλον, μόνο ένας εξωστρεφής από μηχανής θεός είναι δυνατό να συλλάβει τη βέλτιστη κατανομή εσόδων και εξόδων και να επιδιώξει την πλήρη εκμετάλλευση των οικονομικών πόρων, νοουμένου ότι διαθέτει τα νομικά μέσα και θα απολαύσει τα πολιτικά οφέλη, για να το πράξει. Οι αγοραίες συναλλαγές δεν μπορούν να διαχωριστούν από την πολιτική ή το παιγνίδι των ζωτικών συμφερόντων. Η οικονομική συμπεριφορά είναι τόσο θέμα ορθολογικής αριστοποίησης όσο και ενστικτωδών αντιδράσεων και θέλησης για δύναμη. Για αυτόν το λόγο, σε όλα τα μοντέλα ή υποδείγματα συμπλεγμάτων συναλλαγών πρέπει να επεξηγούνται λεπτομερώς οι γνώσεις, τα κίνητρα, αλλά και οι τρόποι με τους οποίους οι αρμόδιες αρχές επιλέγουν και επιβάλλουν συγκεκριμένα διανύσματα τομεακών και αγοραίων ισορροπιών.

I.2 Μαθηματικές Πτυχές της Μεθοδολογίας

Στην Ευκλείδεια προσέγγιση, τα πρωταρχικά όργανα πολιτικής είναι η ετήσια μεταβολή και η ποσοστιαία κατανομή του ισολογισμού του νομισματικού συστήματος ανάμεσα στους τομείς που δανείζονται μέσω της έκδοσης εγγυημένων ομολόγων και σε εκείνους

που δανείζουν μέσω της αποδοχής εγγυημένων ομολόγων. Ο μόνος τομέας που απολαμβάνει το δικαίωμα να πληρώνει τις υποχρεώσεις του, αυξάνοντας το παθητικό του επ' άπειρον, είναι ο τραπεζικός και, όπου εμπλέκεται, η γενική κυβέρνηση. Οι υπόλοιποι τομείς είναι υπόχρεοι, αλλά και πρόθυμοι, να συσσωρεύουν τα εγγυημένα χρεόγραφα ως ενεργητικό. Η ετήσια μεταβολή του ισολογισμού του χρηματοπιστωτικού τομέα:

- προέρχεται από την έκδοση νέων εγγυημένων ομολόγων από τους τομείς που δικαιούνται να λειτουργούν με καθαρό παθητικό,
- καταλήγει ως αποδοχή τών επιπλέον εγγυημένων ομολόγων από τους τομείς που οφείλουν να λειτουργούν με καθαρό ενεργητικό.

Λόγω των θεσμικών διευθετήσεων που προαναφέραμε, τα μεν νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις είναι οι καθαροί πιστωτές, οι δε τραπεζίτες και, ενίοτε, οι κυβερνώντες, είναι οι καθαροί χρεώστες του νομισματικού συστήματος. Η κεντρική τράπεζα, με τις πράξεις νομισματικής πολιτικής, δηλαδή τις αγοραπωλησίες εγγυημένων ομολόγων, καθορίζει:

- άμεσα, την ετήσια αύξηση του παθητικού των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και
- έμμεσα, την κατανομή τού εν λόγω παθητικού ανάμεσα στους υπόλοιπους τομείς.

Η αρμόδια αρχή, μέσω (i) της οριακής χρηματοδότησης ή αγοράς εγγυημένων ομολόγων και (ii) της αποδοχής καταθέσεων ή πώλησης εγγυημένων ομολόγων, ανακατανέμει το ενεργητικό και το παθητικό του τραπεζικού ισολογισμού και, κατ' αυτόν τον τρόπο, επηρεάζει τα εισοδήματα και τις δαπάνες των θεσμικών τομέων. Παραδείγματος χάριν, κάθε φορά που το χρηματοπιστωτικό σύστημα:

- χορηγεί στα (αγοράζει από) νοικοκυριά περισσότερα δάνεια (ομόλογα) σε σχέση με τις επιχειρήσεις, το ποσοστό του καθαρού νομισματικού ενεργητικού, που οφείλεται από τους καταναλωτές, αυξάνεται.
- χορηγεί στις (αγοράζει από) επιχειρήσεις περισσότερα δάνεια (ομόλογα) σε σχέση με τα νοικοκυριά, το ποσοστό του καθαρού νομισματικού ενεργητικού, που οφείλεται από τους παραγωγούς, αυξάνεται.
- αποδέχεται περισσότερες καταθέσεις από (πωλεί περισσότερα ομόλογα προς) τους κρατικούς οργανισμούς, το ποσοστό του καθαρού νομισματικού παθητικού, που οφείλεται (ανήκει) στους κρατικούς οργανισμούς, αυξάνεται.

- αποδέχεται περισσότερες καταθέσεις από (πωλεί περισσότερα ομόλογα προς) κατοίκους εξωτερικού, το ποσοστό του καθαρού νομισματικού ενεργητικού, που οφείλεται από κατοίκους εξωτερικού, μειώνεται.

Κάθε οικονομική πράξη συνοδεύεται από αγορά και πώληση, δούναι και λαβείν, δανειοδότηση και δανειοληψία κ.λπ. Παρόλο που αναγνωρίζεται ότι δεν μπορεί να υπάρξει έσοδο (πίστωση) από μια μονάδα ή τομέα, χωρίς έξοδο (χρέωση) από άλλη μονάδα ή τομέα, εν τούτοις, τα πλείστα μοντέλα οικονομικών συστημάτων δεν περιλαμβάνουν αμφότερες τις επιπτώσεις κάθε συναλλαγής. Οι τρέχουσες χρεώσεις και πιστώσεις ουδέποτε ισοζυγούν ανά μονάδα ή τομέα ξεχωριστά, αλλά ισοζυγούν για το κάθε παζάρι αγαθού και το σύνολο του οικονομικού συστήματος. Με την υιοθέτηση και εφαρμογή των αξιωματικών προτάσεων, εξαλείφεται το ούτω καλούμενο συναθροιστικό πρόβλημα (aggregation problem), που ταλάνιζε τους κατασκευαστές και τους χρήστες όλων τών άλλου είδους μοντέλων, τόσο από θεωρητική όσο και από πρακτική σκοπιά.

Κάθε Ευκλείδειο υπόδειγμα αποτελείται από **n** ζεύγη μη-ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, με (μεσοπρόθεσμα) σταθερούς συντελεστές. Οι σταθεροί συντελεστές είναι οι ποσοστιαίες κατανομές των τομεακών εισοδημάτων από και των τομεακών δαπανών για αγοραία αγαθά, στη μονάδα του χρόνου. Τα εν λόγω ποσοστά επιμετρούνται μέσω στατιστικών ερευνών, που αφορούν:

- τις ετήσιες χρεώσεις και πιστώσεις των τομεακών τραπεζικών λογαριασμών ή
- τις πηγές και τους προορισμούς των τομεακών χρηματικών ροών κάθε χρόνο.

Οι τομεακές χρηματικές ροές, οι οποίες είναι οι ενδογενείς μεταβλητές οποιουδήποτε Ευκλείδειου μοντέλου, συνιστούν ένα διανυσματικό χώρο (vector space) $\mathbf{V_{2xn}}$, όπου το **n** είναι ο αριθμός των τομέων ή των παζαριών της συγκεκριμένης οικονομίας. Για αυτόν και για άλλους λόγους, κάθε Ευκλείδειο υπόδειγμα της οικονομικής πραγματικότητας μπορεί να αναπαρασταθεί είτε:

- ως ένα σύνολο πινάκων, οι οποίοι απεικονίζουν την κατάσταση των χρηματικών ροών των θεσμικών τομέων και των παζαριών αγαθών το συγκεκριμένο χρόνο,
- ως ένα κινούμενο ή σταθερό πολύγωνο, έκαστη αιχμή του οποίου αντιστοιχεί στο ετήσιο εισόδημα και την ετήσια δαπάνη ενός θεσμικού τομέα,

- ως ένα σύμπλεγμα κυκλωμάτων χρήματος, στο καθένα από τα οποία οι διαφορές δυναμικού δημιουργούνται από τις αντίστοιχες πράξεις νομισματικής πολιτικής,
- ως ένας δυναμικός χώρος, όπου τα τομεακά έσοδα και τα έξοδα μεταβάλλονται ανάλογα με την απόστασή τους από το διάνυσμα στατικής ισορροπίας.

Στο ανωτέρω πλαίσιο δράσης και αντίδρασης, τα Ευκλείδεια μοντέλα ανταλλαγών χρήματος για αγαθά, και αντίστροφα, μπορούν να ερμηνευτούν και ως κυκλώματα μετατροπής ενός είδους σε άλλου είδους ενέργεια. Τα κυκλώματα μετατροπής ενέργειας υπόκεινται τόσο στους νόμους των μαθηματικών όσο και στους νόμους της θερμοδυναμικής. Αναγνωρίζοντας ότι οι ομοιότητες ανάμεσα στις ροές χρήματος και τις ροές δυναμικού αξίζουν να διερευνηθούν από ειδικούς επιστήμονες, έχουμε συμπεριλάβει στο Κεφάλαιο **VIII** διάφορα απλά παραδείγματα, για να υποδείξουμε την ισχύ των νόμων του ενιαίου ενεργειακού πεδίου στις προσομοιώσεις της οικονομικής ζωής.

I.3 Ανάμειξη Θεωρίας και Πράξης

Η αναπαράσταση του συμπλέγματος συναλλαγών ως ένα σύνολο κυκλωμάτων μάς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι **κάθε πρόταση οικονομικής πολιτικής πρέπει πρώτιστα να τυγχάνει μελέτης ως μαθηματικό πρόβλημα, που καταπιάνεται με τον έλεγχο και τη ρύθμιση αλληλένδετων ροών.** Εξωγενείς παράγοντες, όπως οι πράξεις νομισματικής πολιτικής, διαφοροποιούν τα εισοδήματα και τις δαπάνες των θεσμικών τομέων και, επομένως, τις εισπράξεις και τις πληρωμές στα παζάρια αγαθών. Κατ' αυτόν τον τρόπο, δημιουργούνται νέοι κύκλοι αλληλεπιδράσεων, οι οποίοι μπορεί να συγκλίνουν ή να αποκλίνουν. Σε περίπτωση που συγκλίνουν, η στατική κυκλοφορία σε κάθε παζάρι αγαθού, διαιρούμενη με το μισθό, την τιμή ή την αξία που αντιστοιχεί, αποδίδει τα έτη υπηρεσιών, τα τεμάχια προϊόντων ή τα μοναδιαία ομόλογα, που ανταλλάσσονται εκεί με χρήματα.

Εάν οι οικονομικές μονάδες εισέρχονταν και εξέρχονταν αυτόματα στους τομείς και εάν οι μισθοί, οι τιμές και οι αξίες ανέβαιναν και κατέβαιναν ανεμπόδιστα στα παζάρια, θα εκμηδενίζονταν οι διαφορές ανάμεσα στις διαθέσιμες και τις ζητούμενες ποσότητες. Μεσοπρόθεσμα, οι αριθμοί των συναλλασσομένων και οι ποσότητες των αγαθών περιορίζονται από τη σπανιότητα, ενώ οι μισθοί, οι τιμές και οι αξίες δε μεταβάλλονται παρά με συντεχνιακή, εταιρική, γραφειοκρατική ή επίσημη αποδοχή, επικύρωση, έγκριση

ή άδεια. Επομένως, τα παζάρια δεν εκκαθαρίζονται χωρίς εξωγενή παρέμβαση αναφορικά με τη συνολική ζήτηση ή τους ισχύοντες μισθούς, τιμές και αξίες των αγαθών. Οι νομισματικές, δημοσιονομικές και άλλες αρχές των συναλλασσόμενων χωρών, όταν ενεργούν συντονισμένα, έχουν τη δυνατότητα να μετακινούν το διάνυσμα ισορροπίας του συμπλέγματος από τη μια θέση στην άλλη, νοουμένου ότι αυτό είναι **μοναδικό**, **σταθερό** και **δεξιόστροφο** (δηλαδή συνίσταται από θετικές χρηματικές ροές). Η πραγματοποίηση δημοσιονομικών και διεθνών συναλλαγών και η συμπερίληψή τους στο μαθηματικό υπόδειγμα αυξάνει τα παρεμβατικά εργαλεία, ώστε ο αριθμός τους να είναι **ίσος** με τον αριθμό των ενδογενών μεταβλητών. Σύμφωνα με τη θεωρία του δυναμικού ελέγχου συστημάτων (dynamic system control), τα διανύσματα ισορροπίας με τα προαναφερθέντα τέσσερα χαρακτηριστικά θεωρούνται τελείως πηδαλιουχούμενα (perfectly dirigible).

Συνεπώς, οι επιστήμονες οικονομολόγοι (λαμβάνοντας τις **πλείστες** παραμέτρους που αφορούν την αγοραία συμπεριφορά, την τρέχουσα πολιτική, τις ισχύουσες τιμές κ.λπ., ως μεσοπρόθεσμα σταθερές, δηλαδή όπως αυτές επιμετρήθηκαν στην τελευταία στατιστική έρευνα), μπορούν, μέσω του Ευκλείδειου μοντέλου του συμπλέγματος συναλλαγών, να προβλέψουν τις μεσοπρόθεσμες χρηματικές ροές και τα ποσοτικά χάσματα των αγαθών, που προκύπτουν από αναμενόμενες, επιθυμητές ή υποθετικές διαφοροποιήσεις των **υπόλοιπων** εξωγενών μεταβλητών. Οι 12 αξιωματικές προτάσεις, σε συνδυασμό με τη χρήση κατάλληλου λογισμικού και ηλεκτρονικού υπολογιστή, καθιστούν δυνατή τη μαθηματική προσομοίωση και τη μαθηματική διερεύνηση κάθε επιμέρους οικονομικού προβλήματος ως κομματιού τού ολικού πλέγματος συναλλαγών, χωρίς αναφορά σε άλλες θεωρίες ή βοηθήματα. Ενώ προηγουμένως κάθε οικονομικό και, ιδίως, οικονομετρικό μοντέλο εθεωρείτο ως ένα ξεχωριστό δημιούργημα ή είδος αφ' εαυτού (sui generis), σήμερα, χάρη στην Ευκλείδεια μεθοδολογία, όλα τα υποδείγματα συμπλεγμάτων συναλλαγών μπορούν να κτίζονται στο ίδιο πλαίσιο και σύμφωνα με τις ίδιες αρχές.

I.4 Σύγκριση με τα Οικονομετρικά Μοντέλα

Τα πλείστα οικονομετρικά μοντέλα δεν είναι δομημένα, εξ αρχής:

(1) ως πλήρως ολοκληρωμένα συμπλέγματα συναλλαγών,

(2) ως συστήματα εξισώσεων με αμετάβλητους συντελεστές,

(3) ως ελεγχόμενα γραμμικά δυναμικά συστήματα.

(1) Η συνήθης οικονομετρική προσέγγιση στην κατασκευή μοντέλων μπορεί να χαρακτηρισθεί ως επιλεκτική, αποσπασματική ή πειραματική αλλά καθόλου ολιστική. Σε αντίθεση με τα Ευκλείδεια μαθηματικά υποδείγματα, η κατασκευή των πλείστων οικονομετρικών μοντέλων δε βασίζεται στη μικροοικονομική θεωρία αλλά σε πειραματικές μεθόδους. Οι 'εξαρτημένες' (dependent) μεταβλητές ενός οικονομετρικού μοντέλου καθορίζονται ως συναρτήσεις τόσο ενδογενών όσο και εξωγενών μεταβλητών. Το σύνολο των 'ανεξάρτητων' (ενδογενών και εξωγενών) μεταβλητών που απαρτίζουν κάθε συνάρτηση επιλέγεται, συνήθως εκ των υστέρων, από ένα μεγαλύτερο αριθμό υποψηφίων ανάλογα με τις μετρήσεις της συγγραμμικότητας (collinearity) τών εν λόγω μεταβλητών. Ως γνωστό, όταν αποδειχθεί ότι δύο ή περισσότερες 'ανεξάρτητες' μεταβλητές είναι συγγραμμικές, μόνο μία από αυτές μπορεί να παραμείνει στην οικονομετρική συνάρτηση. Σε αυτές τις περιπτώσεις, κάθε φορά που προστίθεται ή αφαιρείται μια τέτοια μεταβλητή, οι συντελεστές παλινδρόμησης όλων των άλλων 'ανεξάρτητων' μεταβλητών αλλάζουν. Στο τέλος της πειραματικής διαδικασίας, οι συντελεστές παλινδρόμησης των 'ανεξάρτητων' μεταβλητών κρίνονται ως 'ικανοποιητικοί' από τα στατιστικά χαρακτηριστικά τους και όχι, κατ' ανάγκη, από την επιστημονική αιτιολόγηση της συνάρτησης. Πολλές φορές, εκεί που τα στατιστικά χαρακτηριστικά δεν είναι τα αναμενόμενα, οι συντελεστές παλινδρόμησης καθορίζονται με άλλου είδους υποκειμενικούς υπολογισμούς ή μεθόδους στάθμισης (π.χ. calibration). Σε όλες τις περιπτώσεις, η έμφαση είναι στην πρακτική - στατιστική σημασία (statistical significance) του αποτελέσματος και όχι στη θεωρητική - οικονομολογική ορθότητα (economic justification) της προσομοίωσης.

(2) Συνήθως, οι 'ανεξάρτητες' μεταβλητές μιας οικονομετρικής συνάρτησης δε μετρούνται με την ίδια ονομαστική μονάδα ούτε αναφέρονται στο ίδιο χρονικό διάστημα με την 'εξαρτημένη' μεταβλητή τής εν λόγω συνάρτησης. Το αποτέλεσμα είναι ότι οι συντελεστές παλινδρόμησης των 'ανεξάρτητων' μεταβλητών αποτελούν οι ίδιοι συναρτήσεις των μονάδων μέτρησης και των περιόδων υστέρησης των 'ανεξάρτητων' μεταβλητών. Οι ονομαστικές μονάδες μέτρησης, οι διάρκειες των χρονικών υστερήσεων, αλλά και οι αριθμοί των ανεξάρτητων μεταβλητών ενός οικονομετρικού μοντέλου τροποποιούνται ανάλογα με το αποτελέσματα διάφορων οικονομετρικών πειραμάτων και υποθέσεων. Ήδη, έχει γίνει ευρέως αντιληπτό ότι οι συντελεστές παλινδρόμησης των

'ανεξάρτητων' μεταβλητών των οικονομετρικών εξισώσεων, στις πλείστες περιπτώσεις, δεν έχουν καμία ιδιαίτερη επιστημονική σημασία ή προβλεπτική αξία, διότι:

- πηγάζουν από συναρτήσεις αυθαίρετων ή τυχαίων παραγόντων
- αποτελούν μέρος αποσπασματικών ή επί μέρους συστημάτων.

(3) Τα οικονομετρικά μοντέλα, τα οποία χαρακτηρίζονται από τις προαναφερθείσες αδυναμίες και ιδίως στο βαθμό που οι συναρτήσεις (εξισώσεις) τους περιλαμβάνουν ετεροχρονισμένες ενδογενείς μεταβλητές, δεν είναι γραμμικά δυναμικά συστήματα. Συνήθως, τα μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα τείνουν να καταλήγουν σε δύο ή περισσότερα (σταθερά ή / και ασταθή) διανύσματα ισορροπίας. Για να θεωρείται ένα δυναμικό σύστημα ως πηδαλιουχούμενο, προαπαιτείται όπως καταλήγει σε ένα μοναδικό και σταθερό διάνυσμα ισορροπίας. Επιπλέον, οι εξωγενείς παράμετροι (πολιτικής) πρέπει να είναι ίσες ή περισσότερες από τις ενδογενείς μεταβλητές (στοιχεία) του συστήματος. Τα πλείστα οικονομετρικά μοντέλα, όταν λύνονται ως μαθηματικά συστήματα, δεν καταλήγουν σε ένα σταθερό διάνυσμα ισορροπίας με τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά και, άρα, είναι ανώφελα για οικονομικές προβλέψεις και χάραξη πολιτικής, εφόσο δεν είναι πλήρως πηδαλιουχούμενα. Δηλαδή, το ίδιο σύνολο εξωγενών παραμέτρων (πολιτικής) μπορεί να οδηγήσει το (οικονομικό) σύστημα σε οποιαδήποτε από τις (πολλές ή πιθανές) λύσεις (σταθερής ή ασταθούς) ισορροπίας.

I.5 Άλλα Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα

Οι αρχικές υποθέσεις ενός οικονομικού υποδείγματος είναι τόσο σημαντικές όσο οι μαθηματικές ιδιότητες του τελικού μοντέλου. Τα Ευκλείδεια συμπλέγματα συναλλαγών δομούνται ως συστήματα μη-ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, πρώτου βαθμού με σταθερούς συντελεστές και, συνεπώς, είναι εύχρηστα για πολλούς και διάφορους σκοπούς, συμπεριλαμβανομένης της χάραξης πολιτικής και της πρόβλεψης των επιπτώσεών της σε έναν έκαστο τομέα και παζάρι της οικονομίας. Οι μεσοπρόθεσμα σταθεροί συντελεστές των συναρτήσεων αγοραίας συμπεριφοράς έχουν θεωρητική και πρακτική αξία, αφού αποτελούν τις στατιστικές κατανομές:

- των τομεακών εισοδημάτων ανάμεσα στις πηγές τους και
- των τομεακών δαπανών ανάμεσα στους προορισμούς τους.

Τα προαναφερθέντα ποσοστά δίνουν το ιδιαίτερο στίγμα κάθε οικονομίας, όπως τα δακτυλικά αποτυπώματα και η ίριδα του οφθαλμού είναι μοναδικά για το κάθε άτομο. Στα Ευκλείδεια μοντέλα, οι χρηματικές ροές των τομέων καθορίζουν τους κύκλους εργασιών των παζαριών. Η διαίρεση των αγοραπωλησιών κάθε αγαθού με το μισθό, τιμή ή αξία που αντιστοιχεί, αποδίδει την ποσοτική ζήτηση και προσφορά στο συγκεκριμένο παζάρι κατά τη διάρκεια του χρόνου. Υπό αυτήν τη σκοπιά, κάθε Ευκλείδεια προσομοίωση παράγει ενδογενώς τόσα διανύσματα, με τρία στοιχεία έκαστο, όσοι είναι οι τομείς ή τα αγαθά της απεικονιζόμενης οικονομίας. Δηλαδή, οι λύσεις αυτού του είδους του μαθηματικού μοντέλου συνιστούν ένα διανυσματικό χώρο $\mathbf{V_{3xn}}$, όπου **n** είναι ο αριθμός των τομέων ή των αγαθών. Αντίθετα, τα οικονομετρικά μοντέλα, εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο δομούνται, δεν είναι ούτε εκ των προτέρων ούτε εκ των υστέρων προσδιορισμένα σε διανυσματικούς χώρους. Οι κατασκευαστές και οι χρήστες τους θα ταλανίζονται από το συναθροιστικό πρόβλημα (aggregation problem) όσο καιρό τα οικονομετρικά μοντέλα δεν υπακούουν στους νόμους των μαθηματικών και, άρα, της γεωμετρίας.

Μία άλλη εξίσου σημαντική διαφορά ανάμεσα στα Ευκλείδεια και τα οικονομετρικά υποδείγματα της οικονομικής πραγματικότητας είναι τα στατιστικά στοιχεία, που απαιτούνται για την εφαρμογή της κάθε μεθοδολογίας. Στην περίπτωση ενός Ευκλείδειου μοντέλου, χρειάζονται μόνο οι τελευταίες ετήσιες στατιστικές, που αφορούν τις εξωγενείς μεταβλητές της οικονομίας. Στην περίπτωση ενός οικονομετρικού μοντέλου, απαιτούνται πλήρεις χρονοσειρές με πολλές παρατηρήσεις για όλες τις ενδογενείς και εξωγενείς μεταβλητές, ώστε οι συντελεστές παλινδρομήσεών τους να είναι, όσο γίνεται, πιο σημαντικοί από τη στατιστική σκοπιά. Παραδείγματος χάριν, μια ομάδα ειδικών μπορεί να κατασκευάσει αμέσως ένα Ευκλείδειο μοντέλο, ακόμη και της πιο υπανάπτυκτης χώρας, αφού το μόνο που χρειάζεται είναι οι στατιστικές των παραμέτρων συμπεριφοράς, πολιτικής κ.λπ., για τον τελευταίο χρόνο. Η κατασκευή του οικονομετρικού υποδείγματος της ίδιας υπανάπτυκτης χώρας θα καθυστερήσει μέχρι να συσσωρευτεί ικανοποιητικός αριθμός τριμηνιαίων, εξαμηνιαίων ή ετήσιων παρατηρήσεων για όλες τις χρονοσειρές των ενδογενών και των εξωγενών μεταβλητών ή / και να γίνουν οι αναγκαίοι υπολογισμοί των συντελεστών παλινδρόμησης με τη μέθοδο της στάθμισης (calibration).

Το μεγαλύτερο μειονέκτημα των Ευκλείδειων μαθηματικών μοντέλων είναι η πλήρης απουσία προϊστορίας. Προς το παρόν, δεν υπάρχει βιβλιογραφία ούτε για το βέλτιστο

αριθμό τομέων ή αγαθών ούτε για το βέλτιστο μέγεθος αυτού του είδους των μοντέλων. Το εν λόγω πρόβλημα πρέπει να λυθεί, από τη θεωρητική και την πρακτική του σκοπιά, το συντομότερο δυνατό, ώστε τα Ευκλείδεια μαθηματικά υποδείγματα να αρχίσουν να συμβάλλουν αποτελεσματικά:

- στην καταγραφή των οικονομικών δομών και τη σύγκριση των συμπλεγμάτων συναλλαγών των διαφόρων χωρών,
- στην ετοιμασία ετήσιων προβλέψεων βάσει προσυμφωνημένων διαφοροποιήσεων των εξωγενών μεταβλητών,
- στην κατανόηση και το διάλογο μεταξύ όλων όσων εμπλέκονται στη διαμόρφωση οικονομικής πολιτικής.

Από τη δεκαετία του 1930 μέχρι σήμερα, χιλιάδες οικονομετρικά μοντέλα έχουν δοκιμασθεί από επιστήμονες και οργανισμούς. Είναι εύλογο όλοι να διερωτηθούμε αν η τεράστια δαπάνη, σε χρόνο και χρήμα, έχει αποδώσει το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Όποια και αν είναι η απάντηση, οι επενδύσεις ανάλογων ποσών στην κατασκευή, εφαρμογή και τελειοποίηση των Ευκλείδειων οικονομικών μοντέλων, από πανεπιστήμια, επιχειρήσεις, τράπεζες και κυβερνήσεις ανά τον κόσμο, θα απέβαινε ιδιαίτερα επωφελής, αφού η νέα μεθοδολογία υπόσχεται πολλά και αξίζει υποστήριξης.

I.6 Χρήσεις των Ευκλείδειων Προσομοιώσεων

Στο ανά χείρας βιβλίο, η Ευκλείδεια μεθοδολογία εφαρμόζεται σε μικρό αριθμό πρακτικών και θεωρητικών προβλημάτων, ώστε να αξιολογηθεί η χρησιμότητά της. Ανάμεσα στα προαναφερθέντα προβλήματα περιλαμβάνονται:

- οι σχέσεις μεταξύ των χρηματικών ροών, των ονομαστικών τιμών και των πραγματικών ποσοτήτων,
- η μέτρηση της σύγκλισης διαφόρων οικονομιών προς έναν ενιαίο χώρο για σκοπούς υιοθέτησης κοινού νομίσματος,
- η επίδραση του προεξοφλητικού επιτοκίου στους χρηματοοικονομικούς ισολογισμούς των συμμετεχόντων τομέων,
- η διαχρονική αναπαράσταση των σταδίων της οικονομικής μεγέθυνσης μέσω αυτοματοποιημένων υπολογισμών,

- τα συγκριτικά μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα των μέτρων νομισματικής, δημοσιονομικής ή άλλου είδους πολιτικής,
- η τομεακή κατανομή των κερδοζημιών, οι οποίες προέρχονται από την παγκοσμιοποίηση των συναλλαγών.

Τα μαθηματικά υποδείγματα συμπλεγμάτων τομέων και παζαριών, που δομούνται σύμφωνα με τις 12 αξιωματικές προτάσεις, επιβεβαιώνουν τα πλείστα κλασικά και σύγχρονα συμπεράσματα. Τα Ευκλείδεια μοντέλα έχουν γεφυρώσει για πάντα το χάσμα θεωρίας και πράξης, που παραδοσιακά χώριζε τα μαθηματικά - μικροοικονομικά από τα στατιστικά - μακροοικονομικά υποδείγματα της οικονομικής πραγματικότητας. Τα δυναμικά συστήματα που αποτελούνται από μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, λύνονται και μελετούνται εύκολα, ιδίως με τη βοήθεια λογισμικών, όπως το *Mathematica* της εταιρείας Wolfram Research. Ένα Ευκλείδειο μοντέλο αποδίδει το διάνυσμα ισορροπίας και τις συνθήκες σταθερότητας, που αντιστοιχούν στο σύνολο των αυτόνομων παραγόντων ετησίως. Πιο μακροπρόθεσμες προβλέψεις επιτυγχάνονται με επανάληψη των υπολογισμών για κάθε χρόνο για τον οποίο υπάρχουν ή έχουν γίνει υποθέσεις ή προβολές για τις ισχύουσες εξωγενείς μεταβλητές. Εφόσο όλα τα Ευκλείδεια μοντέλα λειτουργούν με τις ίδιες αρχές, οι λύσεις ισορροπίας και οι συνθήκες σταθερότητάς τους διαφέρουν μόνο κατά τις αγοραίες συμπεριφορές, τις παρεμβατικές πολιτικές, τους φυσικούς πόρους κ.λπ., των απεικονιζόμενων συστημάτων. Η ιδιομορφία ή ο χαρακτήρας έκαστου συμπλέγματος συναλλαγών προέρχεται από τους μεσοπρόθεσμα δεδομένους αλλά μακροχρόνια αυτόνομους παράγοντες, οι οποίοι κατατάσσονται στις ακόλουθες έξι ενότητες:

1) Ο αριθμός των θεσμικών τομέων ή παζαριών αγαθών και, άρα, των εξισώσεων που απαρτίζουν το σύστημα.
2) Τα ποσοστά των τομεακών εισοδημάτων που πηγάζουν από και των δαπανών που προορίζονται για κάθε παζάρι.
3) Οι παράμετροι νομισματικής, δημοσιονομικής, συναλλαγματικής, τιμολογιακής και εισοδηματικής πολιτικής.
4) Οι ποσότητες των ετών εργασίας, τεμαχίων παραγωγής και μονάδων ρευστότητας, οι οποίες είναι διαθέσιμες.
5) Οι τρέχουσες τιμές των διαφόρων ειδών υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων.

6) Οι ετήσιοι ρυθμοί διαφοροποίησης των προαναφερθεισών εξωγενών μεταβλητών.

Οι ανωτέρω ενότητες είναι ιδιαίτερα χρήσιμες σε περιπτώσεις συστηματικών συγκρίσεων ανάμεσα σε εθνικές οικονομίες ή συμπλέγματα οικονομιών. Σε κάθε πρακτική εφαρμογή, το πρώτιστο μέλημα των αρχών πρέπει να είναι η επιβεβαίωση της μοναδικότητας, της σταθερότητας και του προσήμου των στοιχείων του διανύσματος ισορροπίας του συγκεκριμένου συστήματος, λαμβάνοντας τις εξωγενείς μεταβλητές όπως αυτές επιμετρήθηκαν στην πρόσφατη στατιστική έρευνα. Στη συνέχεια, εφόσο οι αρμόδιοι εκφράσουν τις λύσεις ισορροπίας και τις συνθήκες σταθερότητας του δυναμικού συστήματος ως μαθηματικές συναρτήσεις μικρού αριθμού αυτόνομων παραγόντων, μπορούν, με το *Mathematica*, να υπολογίσουν ή να κατευθύνουν τις απορρέουσες:

- εισπράξεις και πληρωμές των θεσμικών τομέων,
- πωλήσεις και τις αγορές των παζαριών αγαθών,

τον επόμενο χρόνο. Σε σχέση με τα προαναφερθέντα, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι μια οικονομία, όπως κάθε ζωντανός οργανισμός, δύσκολα πραγματοποιεί μεγάλα άλματα, διότι σπάνια εσωτερικεύει ριζοσπαστικές αλλαγές. Έχοντας υπόψη αυτόν τον περιορισμό, οι αρμόδιοι πρέπει να προβαίνουν μόνο σε μικρές διαφοροποιήσεις των παραμέτρων νομισματικής, δημοσιονομικής, συναλλαγματικής, τιμολογιακής ή εισοδηματικής πολιτικής, ανά έτος, για να είναι βέβαιοι ότι θα επιτύχουν αποδεκτές και εφικτές μεταβολές στα εισοδήματα και τις δαπάνες των τομέων, καθώς επίσης στα πλεονάσματα ή τα ελλείμματα των αγαθών. Χάρη στην Ευκλείδεια μεθοδολογία, οι αρχές έχουν τη δυνατότητα να διερευνήσουν λεπτομερώς τις επιπτώσεις της μεταπήδησης από το σημερινό σύνολο σε οποιοδήποτε νέο σύνολο παραμέτρων πολιτικής, το οποίο πιστεύουν ότι θα βελτιώσει τις χρηματικές ροές των τομέων και τα ποσοτικά χάσματα των αγαθών. Όποιος εισηγείται, συζητά ή προγραμματίζει την εφαρμογή μέτρων οικονομικής πολιτικής, χωρίς να διαθέτει το μαθηματικό υπόδειγμα του συγκεκριμένου συμπλέγματος συναλλαγών, μοιάζει:

- με έναν ποντοπόρο καπετάνιο, ο οποίος έχει το θράσος να ταξιδεύει με το πλοίο του σε απομεμακρυσμένα μέρη χωρίς χάρτη, πυξίδα και εξάντα ή
- με ένα διαστημικό οργανισμό, ο οποίος τολμά να εκτοξεύει επανδρωμένους δορυφόρους χωρίς να γνωρίζει την τροχιά τους κάθε δευτερόλεπτο.

Στο βιβλίο δίνουμε παραδείγματα Ευκλείδειων μοντέλων, τα οποία αποτελούνται από τρεις, από τέσσερις και από πέντε τομείς ή παζάρια και, επομένως, από έξι, από οκτώ και από δέκα μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, αντίστοιχα. Όπου χρειάζεται, οι μαθηματικές πράξεις που αφορούν κάθε κεφάλαιο, εκτελούνται με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica* και περιλαμβάνονται σε παραρτήματα στο τέλος του βιβλίου, για πληροφόρηση του αναγνώστη και έλεγχο του συγγραφέα. Ο απώτερος στόχος των παραδειγμάτων παραμένει η πρόβλεψη των ετήσιων επιπτώσεων στις χρηματικές ροές των τομέων και στα ποσοτικά χάσματα των αγαθών, οι οποίες προκαλούνται από διάφορα σενάρια πολιτικής ή υποθετικούς κλυδωνισμούς.

I.7 Οι Πηγές των Στατιστικών Δεδομένων

Το Ευρωπαϊκό Σύστημα Λογαριασμών (ΕΣΛ) και η Ευρωπαϊκή Κεντρική Τράπεζα (ΕΚΤ) υποδιαιρούν την οικονομία της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ) σε πέντε (1 - 5) τομείς, οι οποίοι κατατάσσονται σε δύο (A & B) κατηγορίες συναλλασσομένων:

A. **ΚΑΤΟΙΚΟΙ** θεωρούνται οι θεσμικές μονάδες, που έχουν το επίκεντρο του οικονομικού ενδιαφέροντός τους στην επικράτεια της χώρας.

1. Μη-Χρηματοοικονομικοί Οργανισμοί. Ο τομέας αυτός περιλαμβάνει νομικά πρόσωπα, που είναι παραγωγοί εμπορεύσιμου προϊόντος, των οποίων η κύρια δραστηριότητα είναι η παραγωγή αγαθών και μη-χρηματοοικονομικών υπηρεσιών.

2. Χρηματοοικονομικοί Οργανισμοί

(i) Νομισματικά Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα (ΝΧΙ)

α. Κεντρικές Τράπεζες

β. Λοιπά Νομισματικά Χρηματοπιστωτικά Ιδρύματα

(ii) Ενδιάμεσοι Χρηματοοικονομικοί Οργανισμοί

(iv) Επικουρικοί Χρηματοοικονομικοί Φορείς

(v) Ασφαλιστικά Εταιρικά και Συνταξιοδοτικά Ταμεία

3. Γενική Κυβέρνηση

(i) Κεντρική Διοίκηση

(ii) Πολιτειακή Διοίκηση

(iii) Τοπική Διοίκηση

(iv) Ταμεία Κοινωνικών Ασφαλίσεων

4. Νοικοκυριά. Ο τομέας περιλαμβάνει άτομα ή ομάδες ατόμων με την ιδιότητά τους ως καταναλωτών και, ενδεχομένως, ως επιχειρηματιών. Τα νοικοκυριά ως καταναλωτές ορίζονται ως μικρές ομάδες ατόμων, που ζουν κάτω από την ίδια στέγη, που συγχωνεύουν μέρος ή και το σύνολο του εισοδήματος και του πλούτου τους και που καταναλώνουν ορισμένα είδη αγαθών και υπηρεσιών συλλογικά, κυρίως στέγαση και διατροφή. Οι κύριοι πόροι αυτών των μονάδων προέρχονται από εισόδημα εξαρτημένης εργασίας, εισόδημα περιουσίας, μεταβιβάσεις από άλλους τομείς και έσοδα από τη διάθεση εμπορεύσιμων προϊόντων.

5. Μη-Κερδοσκοπικά Ιδρύματα που Εξυπηρετούν Νοικοκυριά. Ο τομέας αυτός αποτελείται από μη κερδοσκοπικά ιδρύματα, τα οποία είναι ξεχωριστά νομικά πρόσωπα, που εξυπηρετούν νοικοκυριά. Οι κύριοι πόροι τους, εκτός από αυτούς που προκύπτουν από περιστασιακές πωλήσεις, προέρχονται από προαιρετικές εισφορές, σε χρήμα ή σε είδος, νοικοκυριών, με την ιδιότητά τους ως καταναλωτών και από πληρωμές εκ μέρους του δημοσίου, καθώς και από εισόδημα περιουσίας.

Β. **ΜΗ-ΚΑΤΟΙΚΟΙ**. Η κατηγορία αυτή αποτελείται από μονάδες μη-κατοίκους, που διενεργούν συναλλαγές με μονάδες κατοίκους. Οι λογαριασμοί της κατηγορίας αυτής παρέχουν μια συνολική εικόνα των οικονομικών σχέσεων, που συνδέουν την εθνική οικονομία με την αλλοδαπή. Όλες οι θεσμικές μονάδες, που εκπληρώνουν τα κριτήρια για κατάταξη στην κατηγορία αυτήν, ταξινομούνται και **κατά χώρα**, με βάση το επίκεντρο του οικονομικού ενδιαφέροντός τους. Η ταξινόμηση επιτρέπει ανάλυση των δοσοληψιών μιας χώρας με διάφορες περιοχές του κόσμου και ιδιαίτερα με:

(α) τα κράτη-μέλη της Ευρωπαϊκή Ένωση και της Ευρωζώνης

(β) Τρίτες Χώρες και Διεθνείς Οργανισμούς.

Οι τομείς και οι κατηγορίες υποδιαιρούνται περαιτέρω σε υποτομείς και υποκατηγορίες. Κάθε τρίμηνο, οι κεντρικές τράπεζες των κρατών-μελών της ΕΕ αποστέλλουν ηλεκτρονικά στην ΕΚΤ τις εισπράξεις και τις πληρωμές των θεσμικών τομέων (Financial Accounts), τις οποίες παρέλαβαν από τα ΝΧΙ της χώρας τους. Μία ομάδα από επιστήμονες οικονομολόγους εύκολα μπορεί να κατασκευάσει τα Ευκλείδεια οικονομικά μοντέλα των

25 κρατών-μελών και της ίδιας της ΕΕ, ξεκινώντας από:

- τα ετήσια **έσοδα** των θεσμικών τομέων εκάστης χώρας-μέλους, που **προήλθαν** από τους θεσμικούς τομείς των άλλων μελών και του υπόλοιπου κόσμου,
- τα ετήσια **έξοδα** των θεσμικών τομέων εκάστης χώρας-μέλους, που **κατευθύνθηκαν** προς τους θεσμικούς τομείς των άλλων μελών και του υπόλοιπου κόσμου.

Εάν οι οικονομικές στατιστικές των χωρών μη-μελών της ΕΕ ακολουθούσαν το ΕΣΛ, το απλούστερο Ευκλείδειο υπόδειγμα του συμπλέγματος συναλλαγών κάθε κράτους-μέλους θα απαρτιζόταν από 30 μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, ως εξής:

- 5 ζεύγη για τις χρηματικές ροές των 5 τομέων του μέλους της ΕΕ,
- 5 ζεύγη για τις χρηματικές ροές των 5 τομέων της υπόλοιπης ΕΕ,
- 5 ζεύγη για τις χρηματικές ροές των 5 τομέων των τρίτων χωρών.

Δε χρειάζεται να διαβάσει κανείς το παρόν βιβλίο για να αντιληφθεί ότι, εάν τα οικονομικά μοντέλα των 25 κρατών-μελών, δομηθούν ως διανυσματικοί χώροι που έχουν τις ίδιες διαστάσεις, τότε το μαθηματικό υπόδειγμα της οικονομίας τής ΕΕ είναι το άθροισμα των οικονομικών μοντέλων των 25 κρατών-μελών. Σε αντίθεση, τα 25 οικονομετρικά υποδείγματα των χωρών-μελών της ΕΕ δεν μπορούν να υποβληθούν σε παρόμοιες μαθηματικές πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης κ.λπ., διότι, έστω και αν έχουν τις ίδιες βασικές διαστάσεις, δεν είναι δομημένα ως διανυσματικοί χώροι.

Η κατανόηση της προτεινόμενης μεθοδολογίας προϋποθέτει βαθιές γνώσεις τόσο των οικονομικών όσο και των μαθηματικών επιστημών. Για αυτόν το λόγο αποφεύγονται, ως περισσές, οι συγκρίσεις με προηγούμενες συμβολές στην κατασκευή και εφαρμογή μοντέλων συμπλεγμάτων συναλλαγών. Επιπλέον, τέτοιου είδους αναφορές θα ήταν άδικες για τους επιστήμονες, των οποίων τα έργα θα ετύγχανε, για οποιονδήποτε λόγο, να παραβλεφθούν ή να επικριθούν. Στη βιβλιογραφία περιλαμβάνονται οι συγγραφείς και τα συγγράμματα, που χρησίμευσαν άμεσα στην έμπνευση, την απόδειξη ή τη συμπλήρωση των διαφόρων σημείων, που εγείρονται σε αυτό το βιβλίο.

II. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ Ή ΑΞΙΩΜΑΤΑ;

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα στοιχειώδη γεγονότα, σχέσεις και θεσμούς, που θεωρούμε ότι χαρακτηρίζουν την τομεακή συμπεριφορά, το σύμπλεγμα αγοραπωλησιών και τις χρεοπιστωτικές (τραπεζικές) δοσοληψίες. Η υιοθέτηση κάποιων ελάχιστων, αυταπόδεικτων αρχών είναι αναγκαία, για να φέρουμε σε πέρας τη μικροοικονομική ανάλυση, τη μακροοικονομική σύνθεση και, επομένως, τη μαθηματική προσομοίωση των αγοραίων συναλλαγών με απλότητα, ομοιομορφία και γενικότητα. Οι ακόλουθες 12 αξιωματικές προτάσεις θεωρούνται ότι ισχύουν σε όλα τα νομισματικά οικονομικά συστήματα και, ως εκ τούτου, διέπουν όλα τα Ευκλείδεια μαθηματικά μοντέλα.

II.1 Οι Κανόνες των Συναλλαγών

1) Όσοι συμμετέχουν σε συμπλέγματα αγοραπωλησιών, τα οποία αποτελούν αντικείμενο της οικονομικής επιστήμης, μετρούν και συγκρίνουν τις διάφορες ροές και τα αποθέματα αγαθών με απλότητα, ομοιομορφία και γενικότητα μέσω χρεοπιστωτικών μονάδων ή ονομαστικού χρήματος.

Σε μια σύγχρονη αναπτυγμένη οικονομία είναι αδιανόητο να πραγματοποιούνται αγοραπωλησίες χωρίς αναφορά, άμεσα ή έμμεσα, σε ένα γενικό μέτρο συναλλαγών και αποταμίευσης, όπως είναι η λογιστική μονάδα του χρήματος και του κεφαλαίου. Ο γενικός αντιπραγματισμός (generalized barter) αποτελεί πρωτόγονη αγοραία συμπεριφορά, της οποίας οι 'εισπράξεις' και 'πληρωμές' ούτε καταγράφονται ούτε καταμετρούνται από το χρηματοοικονομικό σύμπλεγμα συναλλαγών. Οποιοδήποτε σύστημα γενικευμένης ανταλλαγής υπηρεσιών και προϊόντων δε χρησιμοποιεί το χρήμα ως μέτρο σύγκρισης δοσοληψιών και ως μέσο συσσώρευσης αποθεμάτων, είναι παράλογο, αντιπαραγωγικό και, επομένως, μη-ρεαλιστικό, διότι σε αυτό:

- η τιμή κάθε αγαθού πρέπει να εκφράζεται και να είναι κατανοητή σε όρους όλων των άλλων αγαθών, που είναι αντικείμενα αγοραπωλησιών.
- ο καθένας που συμμετέχει στα παζάρια πρέπει να υπολογίζει την αξία των εσόδων και εξόδων του σε όρους κάθε αγαθού, που αγοράζει ή πωλεί.
- οι ανταλλαγές υπηρεσιών δεν πρέπει να καταλήγουν σε πλεόνασμα ή έλλειμμα, εφόσον οι υπηρεσίες, εν αντιθέσει με το χρήμα και τα πραγματικά αγαθά, ούτε συσσωρεύονται ούτε αποθηκεύονται.

2) Μεσοπρόθεσμα, τα αντίτιμα όλων των αγαθών καθορίζονται εξωγενώς. Το ίδιο ισχύει για τη λογιστική μονάδα των χρεοπιστωτικών (τραπεζικών) ιδρυμάτων, που αποτελεί το μόνο ομοιόμορφα κατανοητό και αποδεκτό μέσο καταμέτρησης συναλλαγών και αποθεμάτων.

Στην οικονομική επιστήμη, το μόνο γενικά αποδεκτό κοινό μέτρο των διαφόρων μεταβλητών αποτελεί η λογιστική μονάδα, που υιοθετήθηκε από την κεντρική τράπεζα και τα λοιπά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα για τη μέτρηση του χρήματος (παθητικού) που δημιουργούν και των αγαθών (ενεργητικού) που αποκτούν, ως αποτέλεσμα του ειδικού ρόλου που διαδραματίζουν στο σύμπλεγμα συναλλαγών. Συνεπώς, οποιοδήποτε μαθηματικό υπόδειγμα (model) οικονομικού συστήματος ενσωματώνει διάφορες 'πραγματικές ποσότητες' (real quantities), δεν είναι ρεαλιστικό ή κατανοητό, αφού αυτές δεν είναι μετρήσιμες ή συγκρίσιμες με μια ομοιόμορφη μονάδα. Η συνεισφορά της λογιστικής μονάδας στην ανάπτυξη των αγοραίων συναλλαγών μπορεί να συγκριθεί με τη σημασία του τροχού, των ιστίων ή άλλων εφευρέσεων ή επινοήσεων στην ιστορική εξέλιξη της ανθρωπότητας.

Η επικράτηση του ορθολογισμού στην αγοραία συμπεριφορά έχει οδηγήσει στην έκφραση των αντιτίμων όλων των αγαθών, που προσφέρονται και ζητούνται στα παζάρια κάθε οικονομίας, σε όρους τής εξωγενώς καθοριζόμενης λογιστικής μονάδας (numeraire unit). Μεσοπρόθεσμα, οι αμοιβές των υπηρεσιών, οι τιμές των προϊόντων και οι αξίες των χρεογράφων καθορίζονται αυτόνομα (εκτός του δυναμικού συστήματος των χρηματικών ροών) από τους ιδιοκτήτες ή κατόχους έκαστου αγοραίου αγαθού. Το ίδιο ισχύει και για τη νομισματική μονάδα, η οποία τροποποιείται από τις οικονομικές, πολιτικές και άλλες αρχές κάθε χώρας, από καιρού εις καιρό. Είναι αδιαμφισβήτητο ότι, μακροχρόνια, τα αντίτιμα της εργασίας, της παραγωγής, της ρευστότητας αλλά και του συναλλάγματος προσαρμόζονται ενδογενώς, ώστε να εκμηδενίζονται απαράδεκτα ελλείμματα ή πλεονάσματα υπηρεσιών, προϊόντων, χρεογράφων τόσο εγχώρια όσο και διεθνώς.

3) Η αγοραία δραστηριότητα των οικονομικών μονάδων - δηλαδή η ανταλλαγή υπηρεσιών, προϊόντων και χρεογράφων με γενικευμένη συναλλακτική δύναμη ή ονομαστικό χρήμα και αντίστροφα - καταγράφεται από το τραπεζικό σύστημα.

Σκοπός της αγοραίας δραστηριότητας δεν είναι οι άμεσες ανταλλαγές υπηρεσιών και προϊόντων αλλά οι έμμεσες ανταλλαγές εργασίας και παραγωγής με γενικότερα αποδεκτά μέσα οικονομικών συναλλαγών και συσσώρευσης πλούτου. Οι φυσικοί πόροι, τα

ανθρώπινα προϊόντα, καθώς επίσης οι οικονομικές υποχρεώσεις και τα αντίστοιχα δικαιώματα, καταγράφονται από το τραπεζικό σύστημα, όταν αγοράζονται και πωλούνται σε χρηματοπιστωτικές μονάδες. Κάτω από αυτόν το φακό, κάθε 'παζάρι' αποτελεί έναν 'τόπο', όπου ζητούνται και προσφέρονται νομισματικές ροές και, άρα, τραπεζικά κεφάλαια μέσω ανταλλαγής με κάποιο είδος υπηρεσίας ή παραγωγής.

Οι εισπράξεις και πληρωμές προσαρμόζονται ανάλογα με την κίνηση του οικονομικού συστήματος προς την ισορροπία προσφοράς και ζήτησης σε όλα τα παζάρια. Η αξία κάθε συναλλαγής ισούται με το γινόμενο της ποσότητας επί το αντίστοιχο αντίτιμο, ενώ η χρηματική ροή ισούται με το άθροισμα των συναλλαγών στη μονάδα του χρόνου. Από τη σκοπιά τού κάθε συναλλασσομένου, αλλά και της οικονομίας ως συνόλου, αυτό που έχει σημασία είναι το ποσοστό τού (ετήσιου) εισοδήματος, το οποίο πηγάζει από την πώληση, και το ποσοστό τής (ετήσιας) δαπάνης που προορίζεται για την αγορά ενός αγαθού, και όχι η ποσότητα ή το αντίτιμο του αγαθού σε απομόνωση.

ΙΙ.2 Η Συμπεριφορά των Τομέων

4) Οι οικονομικές μονάδες διαφοροποιούνται και ομαδοποιούνται σε συγκεκριμένους θεσμικούς τομείς σύμφωνα με τις ποσοστιαίες κατανομές των εσόδων και των εξόδων τους στα παζάρια των αγαθών.

Οι κατανομές των εισοδημάτων ανάμεσα στις πηγές, και των δαπανών ανάμεσα στους προορισμούς καθορίζονται από βιολογικές, γεωγραφικές, τεχνολογικές και άλλες εξωγενείς αιτίες. Σε αυτό το πλαίσιο, η ροή:

- των εσόδων κάθε τομέα μεταβάλλεται ανάλογα με τις δαπάνες των άλλων τομέων για τα αγαθά που πωλεί στα παζάρια του συμπλέγματος συναλλαγών,
- των εξόδων κάθε τομέα μεταβάλλεται ανάλογα με το εισόδημά του, συν (πλην) την εξωγενώς καθοριζόμενη αύξηση του παθητικού (ενεργητικού) του.

Το μαθηματικό μοντέλο μιας στοιχειώδους νομισματικής οικονομίας απαιτεί την ύπαρξη τριών τουλάχιστο αγαθών, τα οποία προσφέρονται και ζητούνται από ίσο αριθμό τομέων. Με βάση τις μεσοπρόθεσμα σταθερές αναλογίες των πηγών των εισοδημάτων τους και των προορισμών των δαπανών τους, οι μονάδες που απαρτίζουν μια στοιχειώδη νομισματική οικονομία (όπου δεν υπάρχουν δημοσιονομικές και διεθνείς συναλλαγές) μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις θεσμικούς τομείς:

- **τα καταναλωτικά νοικοκυριά**, τα οποία κυρίως πωλούν την εργασία τους και διαθέτουν τα έσοδα για να αγοράζουν τα προϊόντα των επιχειρήσεων, δανείζοντας οποιοδήποτε πλεόνασμα ή δανειζόμενοι οποιοδήποτε έλλειμμα μέσω των (νομισματικών) χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων.
- **τις παραγωγικές επιχειρήσεις**, οι οποίες κυρίως πωλούν τα προϊόντα τους και διαθέτουν τα έσοδα για να αγοράζουν την εργασία των νοικοκυριών, δανείζοντας οποιοδήποτε πλεόνασμα ή δανειζόμενοι οποιοδήποτε έλλειμμα μέσω των (νομισματικών) χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων.
- **τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα**, τα οποία εκδίδουν και αποδέχονται εγγυημένα ομόλογα (δηλαδή δεσμευτικές συμφωνίες που καθορίζουν την ανταλλαγή εφάπαξ χρηματικού αποθέματος με ετήσιες χρηματικές ροές, και το αντίστροφο,) ενώ, ταυτόχρονα, αγοράζουν υπηρεσίες από τα νοικοκυριά και προϊόντα από τις επιχειρήσεις κατά το δοκούν.

Κατά κανόνα, οι τομεακές εισπράξεις και πληρωμές δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένες (linearly dependent) συναρτήσεις. Η ετήσια διαφορά μεταξύ των δύο χρηματικών ροών έκαστου τομέα αποφασίζεται εξωγενώς από τη νομισματική αρχή, η οποία είναι νομικά κατοχυρωμένη να πωλεί προς και να αγοράζει από τους υπόλοιπους τομείς (δηλαδή τα νοικοκυριά, τις επιχειρήσεις και τα λοιπά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα) εγγυημένα ομόλογα, σύμφωνα με τον επιδιωκόμενο στόχο ή την ακολουθούμενη πολιτική.

5) Τόσο τα ποσοστά των πηγών του εισοδήματος όσο και των προορισμών της δαπάνης κάθε συναλλασσομένου αθροίζονται στο 100%. Μεσοπρόθεσμα, οι ποσοστιαίες κατανομές των εσόδων και εξόδων των θεσμικών τομέων δεν εξαρτώνται από τα μεγέθη των χρηματικών ροών ή των κεφαλαιακών αποθεμάτων.

Τα ποσοστά που κάθε συναλλασσόμενος εισπράττει από τις πηγές των εισοδημάτων του και πληρώνει στους προορισμούς των δαπανών του συμποσούνται, αμφότερα, στο 100%. Έχει διαφανεί ότι τα πλείστα καταναλωτικά νοικοκυριά, παραγωγικές επιχειρήσεις κ.λπ., τείνουν να εθίζονται σε συνδυασμούς εσόδων και εξόδων, που εκφράζουν τον τρόπο με τον οποίο ζουν, λειτουργούν και σκέπτονται, και τους οποίους δε μεταβάλλουν παρά μόνο μακροχρόνια. Συνεπώς, οι προτιμήσεις των θεσμικών τομέων, αναφορικά με τις πηγές των εισοδημάτων τους και τους προορισμούς των δαπανών τους, μπορούν να θεωρούνται ως μεσοπρόθεσμα σταθερές, ιδίως για σκοπούς χάραξης οικονομικής πολιτικής.

6) Όσοι συμμετέχουν στο σύμπλεγμα συναλλαγών συνεχώς (i) μεγιστοποιούν τα έσοδά τους κατανέμοντάς τα ανάμεσα στις εφικτές πηγές, (ii) ελαχιστοποιούν τα έξοδά τους κατανέμοντάς τα ανάμεσα στους δυνητικούς προορισμούς και (iii) προσαρμόζουν τις δαπάνες τους ανάλογα με τα εισοδήματά τους.

Όλες οι οικονομικές μονάδες, θεσμικοί τομείς κ.λπ., υποκινούνται από τον ίδιο αντικειμενικό σκοπό, δηλαδή την αριστοποίηση του καθαρού τους πλούτου. Στη συνεχή προσπάθεια μεγιστοποίησης της παρούσας αξίας των εσόδων (ή του ενεργητικού) τους και ελαχιστοποίησης της παρούσας αξίας των εξόδων (ή του παθητικού) τους, οι συμμετέχοντες στις συναλλαγές:

- διατηρούν τις επιθυμητές αναλογίες ανάμεσα στις πηγές των εσόδων και τους προορισμούς των εξόδων, ενώ παραμένουν μέσα στα πλαίσια των περιορισμένων εισοδημάτων και δαπανών τους,
- πωλούν ή αγοράζουν, αποταμιεύουν ή επενδύουν, συνεργάζονται ή ανταγωνίζονται, δανείζουν ή δανείζονται, σύμφωνα με το ισοζύγιο των εισοδημάτων και δαπανών τους.

Σε ένα οικονομικό σύστημα, όπου πρωταρχικός σκοπός είναι η επιδίωξη του κέρδους ή η αποφυγή της ζημίας, οι τομείς οι οποίοι είναι υπόχρεοι να λειτουργούν με καθαρό ενεργητικό (όπως οι καταναλωτές και οι παραγωγοί), διακατέχονται αναπόφευκτα από το ένστικτο της επιβίωσης (survival instinct) και συμπεριφέρονται με τρόπο ώστε:

- τα έξοδά τους να είναι ίσα με τα έσοδά τους, μείον (συν) την εξωγενή, και, άρα, απρόβλεπτη αύξηση του ενεργητικού (παθητικού) τους από το νομισματικό τομέα,
- να μη χρεοκοπούν από δική τους πρόθεση αλλά λόγω εξωγενών και απρόβλεπτων παραγόντων, όπως οι φυσικές καταστροφές και οι λανθασμένες πολιτικές.

Η υπόθεση ότι οι τρέχουσες δαπάνες υπόκεινται σε ενστικτώδη έλεγχο, ώστε να μην υπερβαίνουν τα διαθέσιμα εισοδήματα, είναι θεμελιώδης, διότι τότε μόνο:

- οι συμμετέχοντες στα παζάρια συμπεριφέρονται ώστε να αποφεύγουν να οδηγούνται από μόνοι τους στην οικονομική καταστροφή,
- το απεικονιζόμενο οικονομικό σύστημα είναι δυνατό να θεωρείται ‘καπιταλιστικό’, ότι, δηλαδή, βασίζεται στη φειδωλή διαχείριση των πόρων.

Χωρίς τη βούληση για συντήρηση του καθαρού πλούτου, τα καταναλωτικά νοικοκυριά και οι παραγωγικές επιχειρήσεις θα προέβαιναν σε πράξεις που θα είχαν ως αναπόφευκτο τέλος τη χρεοκοπία και, επομένως, την αντιμετώπιση των σκληρών συνεπειών του νόμου κ.λπ., πράγμα που θα αντέβαινε σε κάθε έννοια λογικής συμπεριφοράς.

II.3 Οι Μαθηματικές Προδιαγραφές

7) Τα έσοδα και έξοδα των θεσμικών τομέων συνιστούν ένα διανυσματικό χώρο (vector space), αφού καθορίζονται, ταυτόχρονα, ως διατεταγμένα ζεύγη (διανύσματα) πραγματικών αριθμών κατά τη λειτουργία του οικονομικού συστήματος.

Το εισόδημα έκαστης οικονομικής μονάδας είναι το αποτέλεσμα δαπανών από όλες τις υπόλοιπες μονάδες, ενώ, κατά παρόμοιο τρόπο, οι πληρωμές ενός θεσμικού τομέα καταλήγουν να είναι μέρος των εισπράξεων των άλλων τομέων. Οι ροές των εσόδων και των εξόδων των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των τραπεζιτών κ.λπ., σχετίζονται, αλλά δεν ταυτίζονται. Οι αγοραίες συναλλαγές συνεπάγονται ταυτόχρονες χρεώσεις και πιστώσεις. Επομένως, τα εισοδήματα και οι δαπάνες διαμορφώνονται ενδογενώς ως διαταγμένα ζεύγη (ordered pairs) πραγματικών αριθμών, που αλληλεπηρεάζονται μέσω του οικονομικού συστήματος και αποτελούν ένα ενιαίο σύνολο (διανυσματικό χώρο), το οποίο υπόκειται στους νόμους των μαθηματικών. Από τη σκοπιά της μονάδας ή του τομέα, οι πληρωμές και οι εισπράξεις πάντοτε διαφέρουν, αλλά από τη σκοπιά έκαστου παζαριού ή του οικονομικού συστήματος τα έσοδα και τα έξοδα πάντοτε ισοζυγούν. Σε σχέση με τα πιο πάνω, αξίζει να σημειωθεί ότι:

- ένα σύμπλεγμα συναλλαγών προσεγγίζει ή απομακρύνεται από το διάνυσμα ισορροπίας ανάλογα με την αλληλεπίδραση των τομεακών χρηματικών ροών,
- σε ένα σταθερό (κλειστό) οικονομικό σύστημα, ο καθαρός νομισματικός πλούτος διακυμαίνεται γύρω από την αξία που καθορίζει η κεντρική τράπεζα.

8) Τα πεδία ορισμού (domain) των μαθηματικών συναρτήσεων που περιγράφουν τα έσοδα και έξοδα κάθε τομέα, καθώς επίσης τα πεδία τιμών (range) των ανεξάρτητων μεταβλητών που καθορίζουν τα έσοδα και έξοδα κάθε τομέα, μετρούνται με την ίδια μονάδα. Οι μαθηματικές συναρτήσεις οι οποίες προσομοιώνουν τις τομεακές οικονομικές συμπεριφορές, είναι γραμμικά ομογενείς, πρώτου βαθμού.

Η Ευκλείδεια προσέγγιση καθοδηγείται από την αδήριτη ανάγκη ομοιόμορφων μετρήσεων όλων των οικονομικών μεταβλητών ως διανυσματικών στοιχείων ενός δυναμικού συστήματος. Οι μονάδες μέτρησης αποτελούν αναπόσπαστο μέρος τόσο της εξαρτημένης μεταβλητής όσο και των ανεξάρτητων μεταβλητών οποιασδήποτε μαθηματικής συνάρτησης. Συγκεκριμένα, η κοινή λογική και η καθημερινή πρακτική απαιτούν όπως, τόσο τα πεδία τιμών (range) των τομεακών εισπράξεων και πληρωμών όσο και το πεδίο ορισμού (domain) κάθε τομεακής ζήτησης εισοδημάτων και προσφοράς δαπανών, μετρούνται στη γενικά αποδεκτή λογιστική μονάδα. Όσοι συμμετέχουν στις αγοραίες συναλλαγές δεν μπορούν να σκεφθούν ή να ενεργήσουν με άλλο τρόπο.

Οι μαθηματικές πράξεις με τις ανεξάρτητες μεταβλητές δεν πρέπει να μεταβάλλουν τη δεδομένη διάσταση και, άρα, τις μονάδες μέτρησης των εξαρτημένων μεταβλητών των μαθηματικών συναρτήσεων, που περιγράφουν είτε τις πωλήσεις είτε τις αγορές αγαθών, από τους εμπλεκόμενους τομείς μέσω χρήματος. Αυτό το αναγκαίο αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί αν, και μόνον αν, οι μαθηματικές συναρτήσεις που περιγράφουν τις αγοραίες συμπεριφορές των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των τραπεζιτών κ.λπ., είναι γραμμικά ομογενείς (linearly homogeneous). Ένα μοναδικό είδος μαθηματικής συνάρτησης, που μας επιτρέπει να επιτύχουμε τις προαναφερθείσες ιδιότητες, έχει τη μορφή του γενικού τύπου: $w = x^{\eta} \cdot y^{(1-\eta)\cdot\theta} \cdot z^{(1-\eta)\cdot(1-\theta)}$, όπου $\eta+\theta=1$. Η χρήση τής εν λόγω συνάρτησης είναι πολύ διαδεδομένη στα οικονομικά διότι, ανάμεσα σε άλλα πλεονεκτήματα, αποδίδει τα πιο κάτω επιθυμητά αποτελέσματα:

- ο ρυθμός αλλαγής της εξαρτημένης μεταβλητής ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των ρυθμών αλλαγής των ανεξαρτήτων μεταβλητών, χωρίς υπόλοιπο που θα έπρεπε να εξηγηθεί διαφορετικά,
- οι λόγοι οριακής υποκατάστασης ανάμεσα στις ανεξάρτητες μεταβλητές είναι φθίνοντες και, επομένως, η εξαρτημένη μεταβλητή χαρακτηρίζεται από κυρτότητα ως προς την αρχή των αξόνων.

9) Όλοι οι τομείς συναλλάσσονται με έλλειψη διορατικότητας, αντιμετωπίζοντας το μέλλον ως προβολή του παρόντος στον άπειρο χρονικό ορίζοντα και χρησιμοποιώντας το προεξοφλητικό επιτόκιο ως το μοναδικό παράγοντα (single factor) σύνδεσης της παρούσας αξίας με τις χρηματικές ροές οποιουδήποτε στοιχείου, ενεργητικού ή παθητικού.

Τα περισσότερα μοντέλα, τα οποία ισχυρίζονται ότι μπορούν να προδιαγράψουν τις οικονομικές εξελίξεις, λαμβάνουν υπόψη, εκτός από τις σημερινές συνθήκες, τα δεδομένα του παρελθόντος. Στην Ευκλείδεια μεθοδολογία υποθέτουμε ότι όλες οι μονάδες, τομείς κ.λπ., δρουν με πλήρη έλλειψη διορατικότητας, αφού δεν είναι προικισμένοι με τα χαρίσματα ή τα μέσα, που θα τους επέτρεπαν να προβλέπουν το μέλλον. Όλοι όσοι συμμετέχουν στις αγοραίες συναλλαγές, μπορούν να παρομοιαστούν με τους θεατές θεατρικών παραστάσεων, που νομίζουν ότι διαισθάνονται την πλοκή του έργου, ενώ δεν έχουν καν τον τρόπο να μαντέψουν τι κρύβεται πέραν από τα θεατρικά σκηνικά. Συνεπώς, οι καταναλωτές, οι παραγωγοί, οι τραπεζίτες κ.λπ., κυνηγώντας τους δίδυμους στόχους της μέγιστης συσσώρευσης ενεργητικού και της μέγιστης απαλλαγής παθητικού, δεν ενεργούν βάσει επιστημονικών προβλέψεων, αφού η μέθοδος με την οποία θα μπορούσαν να το πράξουν είτε δεν έχει ανακαλυφθεί είτε δεν τους είναι προσιτή. Όσοι συμμετέχουν σε αγοραίες συναλλαγές, δεν έχουν άλλες επιλογές από το:

- να υποθέτουν ότι οι παρούσες ροές επεκτείνονται στο βάθος του χρόνου και
- να χρησιμοποιούν το επιτόκιο για προεξόφληση των αναμενόμενων ροών.

Σε αυτό το πλαίσιο, η 'βέλτιστη συμπύκνωση' του παρελθόντος είναι το παρόν, το οποίο είναι επίσης η 'βέλτιστη συμπύκνωση' του μέλλοντος. Όσο και αν φαίνεται παράδοξο, οι παρούσες αξίες είναι εξορισμού ίσες με τις ανατοκισμένες (compounded) καθαρές ροές του παρελθόντος και τις προεξοφλημένες (discounted) καθαρές ροές του μέλλοντος.

ΙΙ.4 Οι Νομισματικές Διευθετήσεις

10) Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα (δηλαδή οι τράπεζες) εκδίδουν και αποδέχονται εγγυημένα ομόλογα στην τρέχουσα αξία. Η τελευταία καθορίζεται από την εξωγενή λογιστική μονάδα και το εξωγενές προεξοφλητικό επιτόκιο.

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα λειτουργούν ως μεσάζοντες για τη μετατροπή νομισματικών ροών σε κεφαλαιακό απόθεμα, και αντίστροφα, σύμφωνα με τις ανάγκες των θεσμικών τομέων και του οικονομικού συστήματος. Ως αντάλλαγμα για κάθε λογιστική μονάδα που αποκτούν ως εκδότες, οι τραπεζικοί οργανισμοί εγγυώνται να πληρώνουν στους αποδέκτες των ομολόγων ποσοστό της λογιστικής μονάδας ίσο με το προεξοφλητικό επιτόκιο, στο διηνεκές. Συνεπώς, η παρούσα αξία του μοναδιαίου χρεογράφου, το οποίο αποδίδει τη λογιστική μονάδα ρευστότητας στο διηνεκές, ισούται με το αντίστροφο του προεξοφλητικού επιτοκίου. Το αντιστραμμένο προεξοφλητικό επιτόκιο

δίνει τον πολλαπλασιαστή, που συνδέει την ετήσια είσπραξη ή πληρωμή με την παρούσα αξία τού εν λόγω στοιχείου, ενεργητικού ή παθητικού. Τα εγγυημένα ομόλογα γίνονται αποδεκτά και χρησιμοποιούνται από όλους τους θεσμικούς τομείς για τη διενέργεια τρεχουσών πληρωμών και τη συσσώρευση κεφαλαιακών αποθεμάτων, δηλαδή ως χρήμα. Σε αυτό το πλαίσιο, όταν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα αγοράζουν (αποδέχονται) εγγυημένα ομόλογα από τους καταναλωτές και τους παραγωγούς:

- στιγμιαία (και απρόβλεπτα) αυξάνουν τη συνολική ρευστότητα των τομέων που δανείζονται, διότι τους προσφέρουν απόθεμα κεφαλαίου, ενώ
- κάθε χρόνο (και προβλεπτά) τη μειώνουν, αφού οι δανειζόμενοι τομείς είναι υπόχρεοι να πληρώνουν τόκους ή δόσεις έπ' αόριστον.

Όταν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα πωλούν (εκδίδουν) εγγυημένα ομόλογα στους καταναλωτές και τους παραγωγούς:

- στιγμιαία (και απρόβλεπτα) μειώνουν τη συνολική ρευστότητα των τομέων που επενδύουν, διότι τους αφαιρούν απόθεμα κεφαλαίου, ενώ
- κάθε χρόνο (και προβλεπτά) την αυξάνουν, διότι οφείλουν να πληρώνουν τόκους ή δόσεις στους επενδυτικούς τομείς, στο διηνεκές.

Όλες οι πράξεις που αφορούν τον ισολογισμό των τραπεζικών οργανισμών, σε αντίθεση με τις αγοραπωλησίες υπηρεσιών και προϊόντων, συνοδεύονται από διαχρονικά δικαιώματα και υποχρεώσεις, που απαιτούν την απόλυτη κάλυψη των εκτελεστικών, δικαστικών και κοινοβουλευτικών αρχών, ώστε να τυγχάνουν αδιαμφισβήτητης εφαρμογής από όλους τους εμπλεκομένους, επ' άπειρον. Η νομική κατοχύρωση του δικαιώματος είσπραξης και, άρα, της υποχρέωσης πληρωμής δόσεων ή τόκων στο διηνεκές, εξασφαλίζει εσαεί την ονομαστική αξία του ενεργητικού των αποδεκτών και του παθητικού των εκδοτών των κατ' εντολήν χρημάτων, αντίστοιχα. Η αδιάλειπτη ροή των προσυμφωνημένων (ετήσιων) τόκων ή δόσεων επηρεάζει τα (ετήσια) εισοδήματα και δαπάνες των θεσμικών τομέων και, άρα, τη λειτουργία του συστήματος.

11) Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα (και οι κυβερνητικοί οργανισμοί) δικαιούνται να εξοφλούν τις υποχρεώσεις τους εκδίδοντας εγγυημένα ομόλογα (κατ' εντολήν χρήματα) επ' άπειρον, τα οποία οφείλουν να αποδέχονται οι υπόλοιποι τομείς εσαεί.

Το χρηματικό πλεόνασμα (ενεργητικό) οποιουδήποτε τομέα αντιστοιχεί στο χρηματικό έλλειμμα (παθητικό) των υπόλοιπων τομέων, και αντίστροφα. Εάν είχαν επιλογή, όλοι οι θεσμικοί τομείς θα λειτουργούσαν με το μέγιστο ετήσιο πλεόνασμα, ώστε να συσσώρευαν το μέγιστο καθαρό πλούτο. Ωστόσο, είναι αδύνατο όλοι οι συμμετέχοντες στα παζάρια αγαθών να αποτελούν καθαρούς πιστωτές (net creditors), την ίδια στιγμή. Για να προλάβουν την ενδεχόμενη σύγκρουση μεταξύ των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των τραπεζιτών κ.λπ., ως προς το ποίοι θα είναι οι πιστωτές, οι αρμόδιες (εκτελεστικές, δικαστικές και κοινοβουλευτικές) αρχές έχουν αναθέσει στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα (και τους κυβερνητικούς οργανισμούς) της χώρας το δικαίωμα να λειτουργούν αυξάνοντας το παθητικό τους εσαεί και να το διαθέτουν αγοράζοντας υπηρεσίες, προϊόντα και ομόλογα από τους υπόλοιπους τομείς, με τρόπο ώστε να επιτυγχάνονται ευρύτεροι οικονομικοί, πολιτικοί και κοινωνικοί στόχοι.

Σε αυτό το νομικό πλαίσιο, το κυκλοφορούν χρήμα μπορεί να αυξηθεί ή να μειωθεί με μια κίνηση της πένας ή ένα χτύπημα στο πληκτρολόγιο. Η ετήσια προσφορά ρευστότητας είναι το αποτέλεσμα του ετήσιου ελλείμματος του τραπεζικού (και του κρατικού) τομέα, το οποίο καταλήγει ως νομισματικό ενεργητικό των υπόλοιπων (μη-εκδοτικών) τομέων του οικονομικού συστήματος. Η συνολική προσφορά χρήματος είναι ίση με το εγγυημένο παθητικό των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων (και των κυβερνητικών οργανισμών) και, επομένως, ίση με το αντίστοιχο ενεργητικό των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων κ.λπ.

12) Η αρμόδια αρχή, δηλαδή η κεντρική τράπεζα, διασφαλίζει ότι οι ετήσιες μεταβολές και οι ποσοστιαίες κατανομές του νομισματικού ισολογισμού (ανάμεσα στους χρεώστες και τους πιστωτές) δεν είναι τυχαίες, αλλά ικανοποιούν συγκεκριμένα οικονομικά, πολιτικά και κοινωνικά συμφέροντα ή κριτήρια.

Μετά την αναγωγή σε καθαρή αξία (netting), η μεταβολή της συνολικής ρευστότητας παρουσιάζεται ως **παθητικό** των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων (και ενίοτε των κυβερνητικών οργανισμών), που δικαιούνται να λειτουργούν ως εκδότες του χρήματος, και ως **ενεργητικό** των καταναλωτικών νοικοκυριών, των παραγωγικών επιχειρήσεων κ.λπ., που υποχρεούνται να λειτουργούν ως αποδέκτες του χρήματος. Το νομικό πλαίσιο που διέπει τα τραπεζικά ιδρύματα προσδίδει στο οικονομικό σύστημα την αναγκαία ανομοιομορφία, με τρόπο ώστε το τελευταίο να παύει να είναι ομογενές και, συνεπώς, απροσδιόριστο. Οι πράξεις νομισματικής πολιτικής επηρεάζουν τα εισοδήματα και τις

δαπάνες των θεσμικών τομέων σε σχέση με τους μισθούς των εργαζομένων, τις τιμές των προϊόντων και τις αξίες των ομολόγων και, άρα, μεταβάλλουν τη μεσοπρόθεσμη ζήτηση για τους διαθέσιμους πόρους της οικονομίας. Η αρμόδια αρχή, μέσω του δικαιώματος έγκρισης, απόρριψης ή τροποποίησης των αγοραπωλησιών εγγυημένων ομολόγων από και προς τους θεσμικούς τομείς, δύναται να ελέγχει την ετήσια αύξηση και την ποσοστιαία κατανομή του τραπεζικού ισολογισμού και, άρα, το παθητικό των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων (και των κρατικών οργανισμών) και το ενεργητικό των καταναλωτών, των παραγωγών κ.λπ.

Με σταθερή τη μεταβολή του τραπεζικού ισολογισμού, το ποσοστό της προσφοράς ρευστότητας που προορίζεται για έναν τομέα, μπορεί να αυξηθεί μόνο εάν μειωθεί το ποσοστό που προορίζεται για τους άλλους τομείς, και αντίστροφα. Η δομή κάθε συμπλέγματος συναλλαγών καθορίζει το κατά πόσο η μεγέθυνση (μείωση) του μεριδίου του νέου χρήματος, που προορίζεται για τα νοικοκυριά, τις επιχειρήσεις ή τους κυβερνώντες, μέσω σμίκρυνσης (αύξησης) αντίστοιχου ποσοστού που προορίζεται για άλλους θεσμικούς τομείς, επιδρά θετικά ή αρνητικά στα έσοδα και έξοδα των καταναλωτών, των παραγωγών και των κυβερνώντων, εγχώρια και διεθνώς. Συνεπώς, οι αντιπαραθέσεις, οι αντιπαλότητες, οι αντιζηλίες και οι ανταγωνισμοί, που σχετίζονται με την κατανομή της πιστωτικής επέκτασης ανάμεσα στους μη-εκδοτικούς τομείς, είναι αναπόφευκτες. Μέτρο της αποτελεσματικότητας μιας κεντρικής τράπεζας αποτελεί η άνεση με την οποία γίνεται κατανοητή και αποδεκτή η νομισματική πολιτική της από τους επηρεαζόμενους τομείς.

Οι πιο πάνω 12 αξιωματικές προτάσεις, σε συνδυασμό με τις άλλες, δευτερεύουσας σημασίας, που θα υποτεθούν σε σχέση με τα δημόσια εισοδήματα και τις κρατικές δαπάνες, καθώς επίσης το παγκόσμιο εμπόριο και τις διεθνείς πληρωμές, μας παρέχουν τα αναγκαία εφόδια για την κατασκευή δυναμικών μαθηματικών μοντέλων, τα οποία:

- αποτυπώνουν τις αγοραίες συναλλαγές σύμφωνα με τις αρχές της λογιστικής,
- χρησιμεύουν στην ακριβή απεικόνιση και πρόβλεψη της πραγματικότητας και
- ενοποιούν τη μικροοικονομική με τη μακροοικονομική θεωρία, διαπαντός.

Πίνακας $\boldsymbol{\Pi_1}$
Τα Κομμάτια του Αινίγματος

Το Ευκλείδεια μαθηματικά μοντέλα βασίζονται στις πιο κάτω 12 αξιωματικές προτάσεις:

Οι Κανόνες των Συναλλαγών

1) Όσοι συμμετέχουν σε συμπλέγματα αγοραπωλησιών, τα οποία αποτελούν αντικείμενο της οικονομικής επιστήμης, μετρούν και συγκρίνουν τις διάφορες ροές και τα αποθέματα αγαθών με απλότητα, ομοιομορφία και γενικότητα, μέσω χρεοπιστωτικών μονάδων ή ονομαστικού χρήματος.

2) Μεσοπρόθεσμα, τα αντίτιμα όλων των αγαθών καθορίζονται εξωγενώς. Το ίδιο ισχύει για τη λογιστική μονάδα των χρεοπιστωτικών (τραπεζικών) ιδρυμάτων, που αποτελεί το μόνο ομοιόμορφα κατανοητό και αποδεκτό μέσο καταμέτρησης συναλλαγών και αποθεμάτων.

3) Η αγοραία δραστηριότητα των οικονομικών μονάδων, δηλαδή η ανταλλαγή υπηρεσιών, προϊόντων και χρεογράφων με γενικευμένη συναλλακτική δύναμη ή ονομαστικό χρήμα, και αντίστροφα, καταγράφεται από το τραπεζικό σύστημα.

Η Συμπεριφορά των Τομέων

4) Οι οικονομικές μονάδες διαφοροποιούνται και ομαδοποιούνται σε συγκεκριμένους θεσμικούς τομείς σύμφωνα με τις ποσοστιαίες κατανομές των εσόδων και των εξόδων τους στα παζάρια των αγαθών.

5) Τόσο τα ποσοστά των πηγών του εισοδήματος όσο και των προορισμών της δαπάνης κάθε συναλλασσομένου αθροίζονται στο 100%. Μεσοπρόθεσμα, οι ποσοστιαίες κατανομές των εσόδων και εξόδων των θεσμικών τομέων δεν εξαρτώνται από τα μεγέθη των χρηματικών ροών και των κεφαλαιακών αποθεμάτων.

6) Όσοι συμμετέχουν στο σύμπλεγμα συναλλαγών συνεχώς (i) μεγιστοποιούν τα έσοδά τους κατανέμοντάς τα ανάμεσα στις εφικτές πηγές, (ii) ελαχιστοποιούν τα έξοδά τους κατανέμοντάς τα ανάμεσα στους δυνητικούς προορισμούς και (iii) προσαρμόζουν τις δαπάνες τους ανάλογα με τα εισοδήματά τους.

Οι Μαθηματικές Προδιαγραφές

7) Τα έσοδα και έξοδα των θεσμικών τομέων συνιστούν ένα διανυσματικό χώρο (vector space), αφού καθορίζονται, ταυτόχρονα, ως διατεταγμένα ζεύγη (διανύσματα) πραγματικών αριθμών κατά τη λειτουργία του οικονομικού συστήματος.

8) Τα πεδία ορισμού (domain) των μαθηματικών συναρτήσεων που περιγράφουν τα έσοδα και τα έξοδα κάθε τομέα, καθώς επίσης τα πεδία τιμών (range) των ανεξάρτητων μεταβλητών που καθορίζουν τα έσοδα και τα έξοδα κάθε τομέα, μετρούνται με την ίδια μονάδα. Οι μαθηματικές συναρτήσεις, οι οποίες προσομοιώνουν τις τομεακές οικονομικές συμπεριφορές, είναι γραμμικά ομογενείς, πρώτου βαθμού.

9) Όλοι οι τομείς συναλλάσσονται με έλλειψη διορατικότητας, αντιμετωπίζοντας το μέλλον ως προβολή του παρόντος στον άπειρο χρονικό ορίζοντα και χρησιμοποιώντας το προεξοφλητικό επιτόκιο ως το μοναδικό παράγοντα (single factor) σύνδεσης της παρούσας αξίας με τις χρηματικές ροές οποιουδήποτε στοιχείου, ενεργητικού ή παθητικού.

Οι Νομισματικές Διευθετήσεις

10) Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα (δηλαδή οι τράπεζες) εκδίδουν και αποδέχονται εγγυημένα ομόλογα στην τρέχουσα αξία. Η τελευταία καθορίζεται από την επίσημη λογιστική μονάδα και το εξωγενές προεξοφλητικό επιτόκιο.

11) Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα (και οι κυβερνητικοί οργανισμοί) δικαιούνται να εξοφλούν τις υποχρεώσεις τους εκδίδοντας εγγυημένα ομόλογα (κατ' εντολήν χρήματα) επ' άπειρον, τα οποία οφείλουν να αποδέχονται οι υπόλοιποι τομείς εσαεί.

12) Η αρμόδια αρχή, δηλαδή η κεντρική τράπεζα, διασφαλίζει ότι οι ετήσιες μεταβολές και οι ποσοστιαίες κατανομές του νομισματικού ισολογισμού (ανάμεσα στους χρεώστες και τους πιστωτές) δεν είναι τυχαίες, αλλά ικανοποιούν συγκεκριμένα οικονομικά, πολιτικά και κοινωνικά συμφέροντα ή κριτήρια.

III. ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΗ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ

Η υιοθέτηση μιας ξεκάθαρης ορολογίας υποβοηθά τη μαθηματική διατύπωση της αγοραίας συμπεριφοράς, όπως αυτή διαμορφώνεται από την ορθολογική αριστοποίηση, το ένστικτο αυτοσυντήρησης και τον κυβερνητικό εξαναγκασμό των μη-κρατικών τομέων. Στον ακόλουθο πίνακα, παραθέτουμε τις ενδογενείς μεταβλητές και τις εξωγενείς παραμέτρους της στοιχειώδους νομισματικής οικονομίας, καθώς επίσης το λατινικό ή ελληνικό σύμβολο της καθεμιάς, ώστε να διευκολύνουμε την επίτευξη του στόχου μας:

Πίνακας ***III₁***
Ορολογία και Συμβολισμοί

	ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΙΚΟ ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΟ h		**ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ** b		**ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ** f	
Μαθηματική Συνάρτηση: Ζήτηση Εισοδημάτων	$y_h = (y_{hw})^{\beta} \cdot (y_{hs})^{1-\beta}$		$y_b = (y_{bu})^{\delta} \cdot (y_{bs})^{1-\delta}$		$y_f = (y_{fs})^{\zeta} \cdot (y_{fo})^{1-\zeta}$	
Προϋπολογισμός Εσόδων	$y_h = y_{hw} + y_{hs}$		$y_b = y_{bu} + y_{bs}$		$y_f = y_{fs} + y_{fo}$	
Ροή Εσόδων y **από:**	**Επιθυμητό Ποσοστό**	**Συνολικό Ποσό**	**Επιθυμητό Ποσοστό**	**Συνολικό Ποσό**	**Επιθυμητό Ποσοστό**	**Συνολικό Ποσό**
Όλες τις Πήγες	100%	y_h	100%	y_b	100%	y_f
Υπηρεσίες Εργασίας w	β	y_{hw}	0	0	0	0
Προϊόντα Παραγωγής u	0	0	δ	y_{bu}	0	0
Μοναδιαία Ομόλογα s	$(1-\beta)$	y_{hs}	$(1-\delta)$	y_{bs}	ζ	y_{fs}
Μεσιτική Αμοιβή $\varnothing$	0	0	0	0	$(1-\zeta)$	y_{fo}
Μαθηματική Συνάρτηση: Προσφορά Δαπανών	$e_h = (e_{hu})^{\gamma} \cdot (e_{hs})^{1-\gamma}$		$e_b = (e_{bw})^{\varepsilon} \cdot (e_{bs})^{1-\varepsilon}$		$e_f = e_{fw}^{(1-\eta)\cdot(1-\theta)} \cdot e_{fu}^{(1-\eta)\cdot\theta} \cdot e_{fs}^{\eta}$	
Προϋπολογισμός Εξόδων	$e_h = e_{hu} + e_{hs}$		$e_b = e_{bw} + e_{bs}$		$e_f = e_{fw} + e_{fu} + e_{fs}$	
Ροή Εξόδων e **προς:**	**Επιθυμητό Ποσοστό**	**Συνολικό Ποσό**	**Επιθυμητό Ποσοστό**	**Συνολικό Ποσό**	**Επιθυμητό Ποσοστό**	**Συνολικό Ποσό**
Όλους τους Προορισμούς	100%	e_h	100%	e_b	100%	e_f
Υπηρεσίες Εργασίας w	0	0	ε	e_{bw}	$(1-\eta)\cdot(1-\theta)$	e_{fw}
Προϊόντα Παραγωγής u	γ	e_{hu}	0	0	$(1-\eta)\cdot\theta$	e_{fu}
Μοναδιαία Ομόλογα s	$(1-\gamma)$	e_{hs}	$(1-\varepsilon)$	e_{bs}	η	e_{fs}
Μεσιτική Αμοιβή $\varnothing$	0	0	0	0	0	0

Οι κάτω δείκτες των χρηματικών ροών y_{ij} και e_{ij} αναφέρονται, ο μεν πρώτος $i = h, b, f$ στον **τομέα** που πωλεί ή αγοράζει, ο δε δεύτερος $j = w, u, s, o$ στο **αγαθό** που προσφέρεται ή ζητείται. Στον Πίνακα ***III*$_1$**, επιβεβαιώνεται ότι στο στοιχειώδες νομισματικό μοντέλο:

- τα νοικοκυριά (h) δεν εκταμιεύουν για τις υπηρεσίες (w) που παράγουν τα ίδια,
- οι επιχειρήσεις (b) δεν εκταμιεύουν για τα προϊόντα (u) που παράγουν οι ίδιες,
- οι τραπεζίτες (f) εκταμιεύουν τόσο για τόκους και δόσεις των ομολόγων (s) που έχουν εκδώσει όσο και για τις υπηρεσίες (w) και τα προϊόντα (u) που αγοράζουν,
- οι τραπεζίτες (f) επιθυμούν να εισπράττουν 'μεσιτική αμοιβή (o), ενώ οι υπόλοιποι, μη-εκδοτικοί, τομείς (h και b) δεν επιθυμούν να την πληρώνουν.

Οι πιο πάνω απλουστεύσεις μάς βοηθούν να εκμαιεύσουμε και να φανερώσουμε τις ιδιότητες και συνέπειες της Ευκλείδειας μεθοδολογίας. Οτιδήποτε διαφορετικό θα περιέπλεκε τη μορφή του μοντέλου, χωρίς να προσθέτει στην ουσία του. Σημειώνεται ότι οι **ελαστικότητες αντικατάστασης** των πηγών εισοδήματος και των προορισμών δαπάνης:

- των **νοικοκυριών** καθορίζουν τις ποσοστιαίες κατανομές των εσόδων (y_h) και των εξόδων (e_h) τους, αντίστοιχα. Οι εν λόγω αναλογίες, οι οποίες αντικατοπτρίζουν τον τρόπο ζωής των νοικοκυριών, είναι το αποτέλεσμα βιολογικών αναγκών, κλιματικών συνθηκών και άλλων εξωγενών παραγόντων.
- των **επιχειρήσεων** καθορίζουν τις ποσοστιαίες κατανομές των εισπράξεων (y_b) και των πληρωμών τους (e_b), αντίστοιχα. Οι προαναφερθείσες αναλογίες μεταβάλλονται πολύ βραδέως, διότι αντανακλούν καθιερωμένες διευθυντικές πρακτικές, όπως μεθόδους παραγωγής και διανομής προϊόντων, επενδύσεις σε ανθρώπινο και τεχνολογικό δυναμικό, καθώς επίσης ερμηνείες των τάσεων και των αποκλίσεων των παζαριών.
- των **τραπεζιτών** καθορίζουν τις αναλογίες των εσόδων (y_f) και των εξόδων (e_f) τους, αντίστοιχα. Οι συγκεκριμένες κατανομές, οι οποίες πηγάζουν από χαρακτηριστικά όπως είναι η φειδώ, η σύνεση αλλά και η θέληση για δύναμη, απεικονίζουν τους στόχους που επιδιώκει ο νομισματικός τομέας.

Στη μεθοδολογία που αναπτύσσουμε, οι ελαστικότητες αντικατάστασης θεωρούνται ότι, μεσοπρόθεσμα, παραμένουν σταθερές. Όταν κάποιος καταναλωτής, παραγωγός ή τραπεζίτης αλλάξει τις συνήθεις αναλογίες των εσόδων ή των εξόδων του εξαιτίας κάποιου

εξωγενούς γεγονότος, τότε μεταβάλλονται όλες οι ενδογενείς χρηματικές ροές του συμπλέγματος συναλλαγών. Οι μακροχρόνιες προβολές ή προβλέψεις οικονομικών μεγεθών πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τις αναμενόμενες διαφοροποιήσεις των κατανομών των τομεακών εισπράξεων και πληρωμών. Οι αλγεβρικές και άλλες πράξεις που αφορούν το παρόν κεφάλαιο, εκτελούνται με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica* και παρατίθενται στο Παράρτημα **III** για γνώση των αναγνωστών και έλεγχο του συγγραφέα.

Πέραν του στοιχειώδους νομισματικού μοντέλου που μας απασχολεί, τα Ευκλείδεια οικονομικά υποδείγματα μπορούν να αποτελούνται από οποιονδήποτε αριθμό **n** τομέων ή παζαριών, νοουμένου ότι τόσο τα ποσοστά των εισοδημάτων που απολαμβάνει όσο και τα ποσοστά των δαπανών που ξοδεύει κάθε τομέας συναθροίζονται στο 100%. Στο διεθνές μαθηματικό μοντέλο που αναπτύσσουμε στο Κεφάλαιο **XI**, υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο κυρίαρχα κράτη, τα οποία είναι συνδεδεμένα μέσω ενός παγκόσμιου συστήματος εμπορίου και πληρωμών. Τα νοικοκυριά, οι επιχειρήσεις και οι τραπεζίτες προσφέρουν και ζητούν δύο διαφορετικά είδη υπηρεσιών και προϊόντων και δύο ταυτόσημα είδη ομολόγων σε αμφότερες τις χώρες. Αυτό το οικονομικό υπόδειγμα δείχνει το δρόμο για την εφαρμογή της Ευκλείδειας μεθοδολογίας στην κατασκευή διεθνών μοντέλων οποιουδήποτε μεγέθους.

III.1 Οι Πίνακες με τους Αλγόριθμους

Βάσει των συμβολισμών που υιοθετήσαμε στον Πίνακα ***III*$_1$**, προκύπτουν οι λογιστικές ταυτότητες, που παρατίθενται στον πιο κάτω πίνακα. Το ετήσιο προεξοφλητικό επιτόκιο συμβολίζεται με **r**.

Πίνακας ***III*$_2$**.
Λογιστικές Ταυτότητες

ΡΟΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΑ	ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΙΚΟ ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΟ	ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ	ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
Συνολικό Εισόδημα	$y_h = y_{hw} + y_{hs}$	$y_b = y_{bu} + y_{bs}$	$y_f = y_{fs} + y_{f\emptyset}$
Συνολικό Ενεργητικό	$y_{hw}/\mathrm{r} + y_{hs}/\mathrm{r} = y_h/\mathrm{r}$	$y_{bu}/\mathrm{r} + y_{bs}/r = y_b/\mathrm{r}$	$y_{fs}/\mathrm{r} + y_{f\emptyset}/\mathrm{r} = y_f/\mathrm{r}$
Συνολικές Δαπάνες	$e_h = e_{hu} + e_{hs}$	$e_b = e_{bw} + e_{bs}$	$e_f = e_{fw} + e_{fu} + e_{fs}$
Συνολικό Παθητικό	$e_{hu}/\mathrm{r} + e_{hs}/\mathrm{r} = e_h/\mathrm{r}$	$e_{bw}/\mathrm{r} + e_{bs}/\mathrm{r} = e_b/\mathrm{r}$	$(e_{fw} + e_{fu} + e_{fs})/\mathrm{r} = e_f/\mathrm{r}$
Καθαρός Πλούτος	$\Omega_\mathrm{h} = (y_h - e_h)/\mathrm{r}$	$\Omega_\mathrm{b} = (y_b - e_b)/\mathrm{r}$	$\Omega_\mathrm{f} = (e_f - y_f)/\mathrm{r}$

Στο πρώτο στάδιο κατασκευής του μαθηματικού υποδείγματος μιας στοιχειώδους

νομισματικής οικονομίας, επικεντρωνόμαστε στο μέρος της συμπεριφοράς των μονάδων ή τομέων που αφορά τη μεγιστοποίηση του ενεργητικού και την ελαχιστοποίηση του παθητικού τους. Σύμφωνα με την έκτη αξιωματική πρόταση, κάθε καταναλωτής, παραγωγός και τραπεζίτης αποζητά:

- το μέγιστο συνδυασμό (πηγών) εισπράξεων, που είναι συμβατός με το περιορισμένο (ετήσιο) εισόδημά του,
- τον ελάχιστο συνδυασμό (προορισμών) πληρωμών, που είναι συμβατός με την περιορισμένη (ετήσια) δαπάνη του.

Όσοι συμμετέχουν σε αγοραπωλησίες έχουν και άλλα κίνητρα εκτός από την ορθολογική αριστοποίηση των εισπράξεων και των πληρωμών τους. Το ένστικτο αυτοσυντήρησης και η θέληση για δύναμη περιλαμβάνονται στους κανόνες συμπεριφοράς των θεσμικών τομέων, που θα ληφθούν υπόψη στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου. Οι μέχρι τώρα υποθέσεις και συμβολισμοί αποδίδουν τις ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις:

Πίνακας ***ΙΙΙ₃***
Αριστοποίηση Συνάρτησης Υπό Περιορισμό

ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΙΚΟ ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΟ	
Μεγιστοποίηση Ενεργητικού	$H = (1/r)\cdot\{(y_{hw}^{\beta}\cdot y_{hs}^{1-\beta}) - \lambda\cdot(y_{hw}+y_{hs}-y_h)\}$
Ελαχιστοποίηση Παθητικού	$\Theta = -(1/r)\cdot\{(e_{hu}^{\gamma}\cdot e_{hs}^{1-\gamma}) - \lambda\cdot(e_{hu}+e_{hs}-e_h)\}$
ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΗ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΗ	
Μεγιστοποίηση Ενεργητικού	$\Pi = (1/r)\cdot\{(y_{bu}^{\delta}\cdot y_{bs}^{1-\delta}) - \lambda\cdot(y_{bu}+y_{bs}-y_b)\}$
Ελαχιστοποίηση Παθητικού	$P = -(1/r)\cdot\{(e_{bw}^{\varepsilon}\cdot e_{bs}^{1-\varepsilon}) - \lambda\cdot(e_{bw}+e_{bs}-e_b)\}$
ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ	
Μεγιστοποίηση Ενεργητικού	$\Phi = (1/r)\cdot\{(y_{fs}^{\zeta}\cdot y_{fo}^{1-\zeta}) - \lambda\cdot(y_{fs}+y_{fo}-y_f)\}$
Ελαχιστοποίηση Παθητικού	$\Psi = -(1/r)\cdot\{e_{fs}^{\eta}\cdot e_{fu}^{(1-\eta)\cdot\theta}\cdot e_{fw}^{(1-\eta)\cdot(1-\theta)} - \lambda\cdot(e_{fs}+e_{fu}+e_{fw}-e_f)\}$

Τα μαθηματικά προβλήματα που καταγράφονται στον Πίνακα ***ΙΙΙ₃*** αφορούν την εξεύρεση των ακρότατων τιμών (extreme values) των συναρτήσεων, οι οποίες περιγράφουν τους επιθυμητούς συνδυασμούς εσόδων και εξόδων των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών, δεδομένων των αντίστοιχων ετήσιων προϋπολογισμών. Σύμφωνα με τη γνωστή μέθοδο αριστοποίησης υπό περιορισμούς του Lagrange, η Συνθήκη Πρώτης

Τάξης, την οποία πρέπει να ικανοποιεί έκαστη (ακρότατη) λύση, είναι ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της συγκεκριμένης συνάρτησης πρέπει, ταυτόχρονα, να είναι ίσες με το μηδέν.

Πίνακας ***III*****4**
Οι Συνθήκες Πρώτης Τάξης - Οι Μερικές Παράγωγοι των Συναρτήσεων

ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟΥ	**ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΘΗΤΙΚΟΥ**
Καταναλωτικό Νοικοκυριό	
$\partial H/\partial y_{hw} = \{\beta\cdot(y_{hw}^{\beta-1}\cdot y_{hs}^{1-\beta}) - \lambda\} = 0$	$\partial\Theta/\partial e_{hu} = -\{\gamma\cdot(e_{hu}^{\gamma-1}\cdot e_{hs}^{1-\gamma}) - \lambda\} = 0$
$\Rightarrow \beta\cdot y_{hw}^{\beta}\cdot y_{hs}^{1-\beta} = \lambda\cdot y_{hw}$	$\Rightarrow -\gamma\cdot e_{hu}^{\gamma}\cdot e_{hs}^{1-\gamma} = \lambda\cdot e_{hu}$
$\partial H/\partial y_{hs} = \{(1-\beta)\cdot(y_{hw}^{\beta}\cdot y_{hs}^{-\beta}) - \lambda\} = 0$	$\partial\Theta/\partial e_{hs} = -\{(1-\gamma)\cdot(e_{hu}^{\gamma}\cdot e_{hs}^{-\gamma}) - \lambda\} = 0$
$\Rightarrow (1-\beta)\cdot y_{hw}^{\beta}\cdot y_{hs}^{1-\beta} = \lambda\cdot y_{hs}$	$\Rightarrow -(1-\gamma)\cdot e_{hu}^{\gamma}\cdot e_{hs}^{1-\gamma} = \lambda\cdot e_{hs}$
$\partial H/\partial\lambda = (y_{hw} + y_{hs} - y_h) = 0$	$\partial\Theta/\partial\lambda = -(e_{hu} + e_{hs} - e_h) = 0$
$\Rightarrow y_{hw}/y_{hs} = \beta/(1-\beta)$ και $y_{hw} + y_{hs} = y_h$	$\Rightarrow e_{hu}/e_{hs} = \gamma/(1-\gamma)$ και $e_{hu} + e_{hs} = e_h$
Παραγωγική Επιχείρηση	
$\partial\Pi/\partial y_{bu} = \{\delta\,(y_{bu}^{\delta-1}\cdot y_{bs}^{1-\delta}) - \lambda\} = 0$	$\partial P/\partial e_{bw} = -\varepsilon\cdot(e_{bw}^{\varepsilon-1}\cdot e_{bs}^{1-\varepsilon}) - \lambda\} = 0$
$\Rightarrow \delta\cdot y_{bu}^{\delta}\cdot y_{bs}^{1-\delta} = \lambda\cdot y_{bu}$	$\Rightarrow -\varepsilon\cdot e_{bw}^{\varepsilon}\cdot e_{bs}^{1-\varepsilon} = \lambda\cdot e_{bw}$
$\partial\Pi/\partial y_{bs} = \{(1-\delta)\cdot(y_{bu}^{\delta}\cdot y_{bs}^{-\delta}) - \lambda\} = 0$	$\partial P/\partial e_{bf} = -\{(1-\varepsilon)\cdot(e_{bw}^{\varepsilon}\cdot e_{bs}^{-\varepsilon}) - \lambda\} = 0$
$\Rightarrow (1-\delta)\, y_{bu}^{\delta}\cdot y_{bs}^{1-\delta} = \lambda\cdot y_{bs}$	$\Rightarrow -(1-\varepsilon)\cdot e_{bw}^{\varepsilon}\cdot e_{bs}^{1-\varepsilon} = \lambda\cdot e_{bs}$
$\partial\Pi/\partial\lambda = (y_{bu} + y_{bs} - y_b) = 0$	$\partial P/\partial\lambda = -(e_{bw} + e_{bs} - e_b) = 0$
$\Rightarrow y_{bu}/y_{bs} = \delta/(1-\delta)$ και $y_{bu} + y_{bs} = y_b$	$\Rightarrow e_{bw}/e_{bs} = \varepsilon/(1-\varepsilon)$ και $e_{bw} + e_{bs} = e_b$
Χρηματοπιστωτικό Ίδρυμα	
$\partial\Phi/\partial y_{fs} = \zeta\cdot(y_{fs}^{\zeta-1}\cdot y_{fo}^{1-\zeta}) - \lambda\} = 0$	$\partial\Psi/\partial e_{fs} = -\eta\cdot e_{fs}^{\eta-1}\cdot e_{fu}^{(1-\eta)\cdot\theta}\cdot e_{fw}^{(1-\eta)(1-\theta)} = \lambda$
$\Rightarrow \zeta\cdot y_{fs}^{\zeta}\cdot y_{fo}^{1-\zeta} = \lambda\cdot y_{fs}$	$\Rightarrow -\eta\cdot e_{fs}^{\eta}\cdot e_{fu}^{(1-\eta)\cdot\theta}\cdot e_{fw}^{(1-\eta)\cdot(1-\theta)} = \lambda\cdot e_{fs}$
$\partial\Phi/\partial y_{fo} = \{(1-\zeta)\cdot(y_{fs}^{\zeta}\cdot y_{fo}^{-\zeta}) - \lambda\} = 0$	$\partial\Psi/\partial e_{fu} = -(1-\eta)\cdot\theta\cdot e_{fs}^{\eta}\cdot e_{fu}^{(1-\eta)\cdot\theta-1}\cdot e_{fw}^{(1-\eta)\cdot(1-\theta)} = \lambda$
$\Rightarrow (1-\zeta)\cdot y_{fs}^{\zeta}\cdot y_{fo}^{1-\zeta} = \lambda\cdot y_{ft}$	$\Rightarrow -(1-\eta)\cdot\theta\, e_{fs}^{\eta}\, e_{fu}^{(1-\eta)\,\theta}\cdot e_{fw}^{(1-\eta)(1-\theta)} = \lambda\cdot e_{fu}$
$\partial\Phi/\partial\lambda = (y_{fs} + y_{fo} - y_f) = 0$	$\partial\Psi/\partial e_{fw} = -(1-\eta)(1-\theta)\cdot e_{ff}^{\eta}\cdot e_{fu}^{(1-\eta)\,\theta}\cdot e_{fw}^{(1-\eta)(1-\theta)-1} = \lambda$
$\Rightarrow y_{fs}/y_{fo} = \zeta/(1-\zeta)$ και $y_{fs} + y_{fo} = y_f$	$\Rightarrow -(1-\eta)(1-\theta)\, e_{fs}^{\eta}\cdot e_{fu}^{(1-\eta)\cdot\theta}\cdot e_{fw}^{(1-\eta)(1-\theta)} = \lambda\cdot e_{fw}$
	$\partial\Psi/\partial\lambda = (e_{fs} + e_{fu} + e_{fw} - e_f) = 0$
	$\Rightarrow e_{fs}/e_{fu} = \eta/(1-\eta)\cdot\theta$, $e_{fs}/e_{fw} = \eta/(1-\eta)(1-\theta)$ και $e_{fu}/e_{fw} = \theta/(1-\theta)$

Από τον Πίνακα ***III₄***, συμπεραίνεται ότι:

- κάθε Συνθήκη Πρώτης Τάξης αποτελείται από αριθμό εξισώσεων, που είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών, των οποίων επιδιώκεται η αριστοποίηση.
- οι κατανομές των τομεακών εισοδημάτων και δαπανών καθορίζονται από τις ελαστικότητες αντικατάστασης των πηγών και των προορισμών, αντίστοιχα.

Πίνακας ***III₅***
Οι Μαθηματικές Συναρτήσεις της Τομεακής Συμπεριφοράς

ΜΟΝΑΔΑ Ή ΤΟΜΕΑΣ	**ΖΗΤΗΣΗ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΩΝ ΜΕΣΩ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ**	**ΠΡΟΣΦΟΡΑ ΔΑΠΑΝΩΝ ΜΕΣΩ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ**
Καταναλωτικά Νοικοκυριά	$y_{hw} = \beta \cdot y_h$ και $y_{hs} = (1-\beta) \cdot y_h$	$e_{hu} = \gamma \cdot e_h$ και $e_{hs} = (1-\gamma) \cdot e_h$
Παραγωγικές Επιχειρήσεις	$y_{bu} = \delta \cdot y_b$ και $y_{bs} = (1-\delta) \cdot y_b$	$e_{bu} = \varepsilon \cdot e_b$ και $e_{bs} = (1-\varepsilon) \cdot e_b$
Τραπεζικά Ιδρύματα	$y_{fs} = \zeta \cdot y_f$ και $y_{fo} = (1-\zeta) \cdot y_f$	$e_{fs} = \eta \cdot e_f = \varphi \cdot e_f$ $e_{fu} = (1-\eta) \cdot \theta \cdot e_f = \upsilon \cdot e_f$ $e_{fw} = (1-\eta) \cdot (1-\theta) \cdot e_f = \omega \cdot e_f$ Π.χ. εάν $\varphi = {}^{439}/_{3168}$, $\upsilon = {}^{1145}/_{3168}$, $\omega = ½$ $\Rightarrow \eta = {}^{439}/_{3168}$ και $\theta = {}^{1145}/_{2729}$

Ο Πίνακας ***III₅*** καταγράφει τις μαθηματικές συναρτήσεις των οικονομικών συμπεριφορών των θεσμικών τομέων στα παζάρια αγαθών, οι οποίες ικανοποιούν τις Συνθήκες Πρώτης Τάξης. Κάθε ακρότατο, που περιγράφει την κατανομή είτε των εσόδων είτε των εξόδων των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών ανάμεσα στα παζάρια εργασίας ή υπηρεσιών, παραγωγής ή προϊόντων και ρευστότητας ή ομολόγων, μπορεί να είναι το 'μέγιστο σημείο' (maximum), το 'ελάχιστο σημείο' (minimum) ή το 'σημείο καμπής' (saddle point) της συγκεκριμένης συνάρτησης. Οι Συνθήκες Δεύτερης Τάξης προσδιορίζουν τη λύση ως:

- το 'μέγιστο σημείο', όταν αυτή επιφέρει εναλλασσόμενα πρόσημα στις ελάσσονες ορίζουσες (principle minors) τού εκάστοτε πίνακα Bordered Hessian, με την πρώτη ορίζουσα να έχει θετικό πρόσημο,
- το 'ελάχιστο σημείο', όταν αυτή επιφέρει αρνητικό πρόσημο σε όλες τις ελάσσονες ορίζουσες (principle minors) τού εκάστοτε πίνακα Bordered Hessian.

Πίνακας ***ΙΙΙ*****6**

Συνθήκες Δεύτερης Τάξης - Bordered Hessians

Καταναλωτικό Νοικοκυριό

Μεγιστοποίηση Ενεργητικού: $HH = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & \beta\cdot(\beta-1)\cdot y_{hw}^{(\beta-2)}\cdot y_{hs}^{(1-\beta)} & \beta\cdot(1-\beta)\cdot y_{hw}^{(\beta-1)}\cdot y_{hs}^{-\beta} \\ -\lambda & \beta\cdot(1-\beta)\cdot y_{hw}^{(\beta-1)}\cdot y_{hs}^{-\beta} & -\beta\cdot(1-\beta)\cdot y_{hw}^{\beta}\cdot y_{hs}^{-1-\beta} \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^2\cdot\beta\cdot(\beta-1)\cdot(y_{hw}+y_{hs})^2\cdot y_{hw}^{(\beta-2)}\cdot y_{hs}^{-1-\beta} > 0$

Ελαχιστοποίηση Παθητικού: $\Theta\Theta = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\gamma\cdot(\gamma-1)\cdot e_{hu}^{(\gamma-2)}\cdot e_{hs}^{(1-\gamma)} & -\gamma\cdot(1-\gamma)\cdot e_{hu}^{(\gamma-1)}\cdot e_{hs}^{-\gamma} \\ -\lambda & -\gamma\cdot(1-\gamma)\cdot e_{hu}^{(\gamma-1)}\cdot e_{hs}^{-\gamma} & \gamma\cdot(1-\gamma)\cdot e_{hw}^{\gamma}\cdot e_{hs}^{-1-\gamma} \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^2\cdot\gamma\cdot(\gamma-1)\cdot(e_{hu}+e_{hs})^2\cdot e_{hu}^{(\gamma-2)}\cdot e_{hs}^{-1-\gamma} < 0$

Παραγωγική Επιχείρηση

Μεγιστοποίηση Ενεργητικού: $\Pi\Pi = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & \delta\cdot(\delta-1)\cdot y_{bu}^{(\delta-2)}\cdot y_{bs}^{(1-\delta)} & \delta\cdot(1-\delta)\cdot y_{bu}^{(\delta-1)}\cdot y_{bs}^{-\delta} \\ -\lambda & \delta\cdot(\delta-1)\cdot y_{bu}^{(\delta-1)}\cdot y_{bs}^{-\delta} & -\delta\cdot(\delta-1)\cdot y_{bu}^{\delta}\cdot y_{bs}^{-1-\delta} \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^2\cdot\delta\cdot(\delta-1)\cdot(y_{bu}+y_{bs})^2\cdot y_{bu}^{(\delta-2)}\cdot y_{bs}^{-1-\delta} > 0$

Ελαχιστοποίηση Παθητικού: $PP = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\varepsilon\cdot(\varepsilon-1)\cdot e_{bw}^{(\varepsilon-2)}\cdot e_{bs}^{(1-\varepsilon)} & -\varepsilon\cdot(1-\varepsilon)\cdot e_{bw}^{(\varepsilon-1)}\cdot e_{bs}^{-\varepsilon} \\ -\lambda & -\varepsilon\cdot(1-\varepsilon)\cdot e_{bw}^{(\varepsilon-1)}\cdot e_{bs}^{-\varepsilon} & \varepsilon\cdot(1-\varepsilon)\cdot e_{bw}^{\varepsilon}\cdot e_{bs}^{-1-\varepsilon} \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^2\cdot\varepsilon\cdot(\varepsilon-1)\cdot(e_{bw}+e_{bs})^2\cdot e_{bw}^{(\varepsilon-2)}\cdot e_{bs}^{-1-\varepsilon} < 0$

Χρηματοπιστωτικό Ίδρυμα

Μεγιστοποίηση Ενεργητικού: $\Phi\Phi = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & \zeta\cdot(\zeta-1)\cdot y_{fs}^{(\zeta-2)}\cdot y_{f\varnothing}^{(1-\zeta)} & \zeta\cdot(1-\zeta)\cdot y_{fs}^{(\zeta-1)}\cdot y_{f\varnothing}^{-\zeta} \\ -\lambda & \zeta\cdot(1-\zeta)\cdot y_{fs}^{(\zeta-1)}\cdot y_{f\varnothing}^{-\zeta} & -\zeta\cdot(1-\zeta)\cdot y_{fs}^{\zeta}\cdot y_{f\varnothing}^{-1-\zeta} \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^2\cdot\zeta\cdot(\zeta-1)\cdot(y_{ff}+y_{f\varnothing})^2\cdot y_{fs}^{(\zeta-2)}\cdot y_{f\varnothing}^{-1-\zeta} > 0$

Υπενθυμίζεται ότι οι τραπεζίτες, σε αντίθεση με τους καταναλωτές και τους παραγωγούς, κατανέμουν τις δαπάνες τους ανάμεσα σε **τρεις** προορισμούς. Συνεπώς, ο Bordered Hessian που προκύπτει από τη Συνθήκη Δεύτερης Τάξης για την ελαχιστοποίηση του παθητικού Ψ των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, έχει διαστάσεις 4×4. Εξαιτίας του μεγάλου μεγέθους του, ο εν λόγω Bordered Hessian δεν παρατίθεται στον Πίνακα ***III₆*** αλλά στο Παράρτημα **III** όπου, με το λογισμικό *Mathematica*, υπολογίσαμε τις δύο ελάσσονες ορίζουσές του, ακριβώς όπως καταγράφονται στον Πίνακα ***III₇***.

Πίνακας ***III₇***
Συνθήκες Δεύτερης Τάξης - Bordered Hessian
Ελαχιστοποίηση Παθητικού των Χρηματοπιστωτικών Ιδρυμάτων

Τρίτη Ελάσσων Ορίζουσα όπου $x = e_{fw}$, $y = e_{fu}$, $z = e_{fs}$

$$\Psi\Psi_1 = x^{(\eta-1)\cdot(\theta-1)-\theta}\cdot y^{(\theta-2-\eta\theta)}\cdot z^{\eta}\cdot(\eta-1)\cdot\{y^2\cdot\eta + (x+y)\cdot(x+y-2\cdot y\cdot\eta)\cdot\theta + (x+y)^2\cdot(\eta-1)\cdot\theta^2\}\cdot\lambda^2 < 0$$

Τέταρτη Ελάσσων Ορίζουσα όπου $x = e_{fw}$, $y = e_{fu}$, $z = e_{fs}$

$$\Psi\Psi_2 = x^{-2\cdot(\eta+\theta-\eta\theta)}\, y^{-2-2\cdot(\eta-1)\cdot\theta}\, z^{2\cdot(\eta-1)}\cdot(x+y+z)^2\cdot(\eta-1)^2\,\eta\cdot(\theta-1)\cdot\theta\cdot\lambda^2 < 0$$

Αντικαθιστώντας στις Συνθήκες Δεύτερης Τάξης (***III₆*** και ***III₇***) τις κατανομές των τομεακών χρηματικών ροών ανάμεσα στις πηγές και τους προορισμούς, που λήφθηκαν από τις Συνθήκες Πρώτης Τάξης (***III₄*** και ***III₅***), επιβεβαιώνουμε ότι κάθε μονάδα ή τομέας που συμμετέχει στο σύμπλεγμα συναλλαγών, επιλέγει πάντοτε:

- το συνδυασμό (διάνυσμα) **εσόδων** που προκύπτει από τη Συνθήκη Πρώτης Τάξης, με αποτέλεσμα το συνολικό εισόδημα να λαμβάνει τη **μέγιστη** του αξία, αφού στο προαναφερθέν διάνυσμα ικανοποιείται η αντίστοιχη Συνθήκη Δεύτερης Τάξης.
- το συνδυασμό (διάνυσμα) **εξόδων** που προκύπτει από τη Συνθήκη Πρώτης Τάξης, με αποτέλεσμα η συνολική δαπάνη να λαμβάνει την **ελάχιστη** της αξία, αφού στο προαναφερθέν διάνυσμα ικανοποιείται η αντίστοιχη Συνθήκη Δεύτερης Τάξης.

III.2 Οι Κατανομές Εσόδων και Εξόδων

Στον Πίνακα ***III₅*** φαίνεται ότι τα τραπεζικά ιδρύματα επιζητούν όπως ποσοστό (1-ζ) του εισοδήματός τους προέρχεται από 'αμοιβή μεσάζοντος', η οποία όμως δεν προσφέρεται ως ποσοστό της δαπάνης κανενός από τους άλλους δύο τομείς. Εφόσο δεν είναι δυνατό να υπάρξει είσπραξη χωρίς πληρωμή, συμπεραίνεται ότι οι χρηματοπιστωτές απολαμβάνουν το εκατό τοις εκατό του εισοδήματός τους από τόκους ή δόσεις στα ομόλογα, που έχουν

αγοράσει από τους υπόλοιπους τομείς, δηλαδή (ζ=1=100%). Συναφώς, αξίζει να αναφερθεί ότι η φύση της 'μεσιτικής αμοιβής' είναι παρόμοια με τη φύση της 'κρατικής φορολογίας'. Σε ένα σύστημα ελεύθερων συναλλαγών, κανένας δεν πληρώνει φόρους εκούσια, αφού πρόκειται για μια κατηγορία δαπάνης, η οποία δεν αποφέρει κανένα ιδιωτικό αντάλλαγμα ή αγοραίο αγαθό. Σε μια ελεύθερη οικονομία, τα μεσιτικά, όπως και οι φόροι, μπορεί να συλλεχθούν, μόνο αν τύχουν 'μεταμφίεσης' ως ποσοστά άλλων κατηγοριών δαπανών, οι οποίες ξοδεύονται εκούσια από τους συμμετέχοντες στα διάφορα παζάρια για την απόκτηση συγκεκριμένων αγαθών. Το συμπέρασμα είναι σημαντικό και χρησιμοποιείται στο Κεφάλαιο **X** σε σχέση με την ενσωμάτωση του δημοσιονομικού τομέα στο μαθηματικό μοντέλο της οικονομίας.

Στο στοιχειώδες σύμπλεγμα συναλλαγών που έχουμε περιγράψει, υπάρχουν τρεις τομείς (οι καταναλωτές, οι παραγωγοί και οι τραπεζίτες) και τρία αγαθά (έτη εργασίας, τεμάχια παραγωγής και μονάδες ρευστότητας). Όλες οι χρηματικές ροές, οι οποίες ξεκινούν από και καταλήγουν σε θεσμικούς τομείς και παζάρια αγαθών, συνδέονται και απαρτίζουν το κυκλοφοριακό δίκτυο της οικονομίας. Τα μαθηματικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι στην Ευκλείδεια αρχιτεκτονική δεν υφίσταται αθροιστικό πρόβλημα (aggregation problem), διότι η μακροοικονομική συμπεριφορά του συστήματος αναλύεται στις μικροοικονομικές συμπεριφορές των συναλλασσομένων, και αντίστροφα.

Πίνακας ***III₈***
Πηγές Εισοδημάτων και Προορισμοί Δαπανών
της Στοιχειώδους Νομισματικής Οικονομίας

	ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΙΚΑ ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ		**ΠΑΡΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ**		**ΤΡΑΠΕΖΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ**		**Συνθήκη Ισορροπίας Ζήτηση = Προσφορά**
ΑΓΑΘΟ	**Έσοδα**	**Έξοδα**	**Έσοδα**	**Έξοδα**	**Έσοδα**	**Έξοδα**	
Υπηρεσίες	$\beta \cdot y_h$			$\varepsilon \cdot e_b$		$\omega \cdot e_f$	$\beta \cdot y_h = \varepsilon \cdot e_b + \omega \cdot e_f$
Προϊόντα		$\gamma \cdot e_h$	$\delta \cdot y_b$			$\upsilon \cdot e_f$	$\delta \cdot y_b = \gamma \cdot e_h + \upsilon \cdot e_f$
Ομόλογα	$(1-\beta) \cdot y_h$	$(1-\gamma) \cdot e_h$	$(1-\delta) \cdot y_b$	$(1-\varepsilon) \cdot e_b$	y_f	$\varphi \cdot e_f$	$(1-\beta) \cdot y_h + (1-\delta) \cdot y_b = \varphi \cdot e_f$ $y_f = (1-\gamma) \cdot e_h + (1-\varepsilon) \cdot e_b$
ΣΥΝΟΛΟ	y_h	e_h	y_b	e_b	y_f	e_f	$(y_h + y_b + y_f) =$ $= (e_h + e_b + e_f)$

Όπως φαίνεται στους Πίνακες ***III₅*** και ***III₈***, οι τομεακές χρηματικές ροές κατανέμονται

ανάλογα με τις ελαστικότητες αντικατάστασης των πηγών των εσόδων και των προορισμών των εξόδων των νοικοκυριών (β, γ), των επιχειρήσεων (δ, ε) και των τραπεζιτών (φ, υ, ω). Οι έξι ενδογενείς μεταβλητές του στοιχειώδους νομισματικού συστήματος είναι τα τομεακά έσοδα και έξοδα $\{(y_h, e_h), (y_b, e_b), (y_f, e_f)\}$, τα οποία αθροιζόμενα συνθέτουν το ακαθάριστο εισόδημα και δαπάνη ολόκληρης της οικονομίας $\{(y_h + y_b + y_f), (e_h + e_b + e_f)\} = \{Y, E\}$. Η πεμπτουσία της Ευκλείδειας μεθόδου έγκειται στο ότι η κυκλοφορία του χρήματος κατανέμεται ανάμεσα στους τρεις τομείς (ως έσοδα και έξοδα), καθώς επίσης ανάμεσα στα τρία παζάρια (ως εισπράξεις και πληρωμές) χωρίς οποιοδήποτε υπόλοιπο. Στον Πίνακα ***III₈*** συνοψίζονται, επίσης, τα κυκλώματα (ή πλέγματα) των χρηματικών ροών, που προκύπτουν από τη συναλλακτική δραστηριότητα των θεσμικών τομέων σε σχέση με τα αγοραία αγαθά. Ο προαναφερθείς πίνακας αποδίδει, εκτός από την ισότητα Y = E, τρία υποσυστήματα με τρεις εξισώσεις το καθένα, ως εξής:

Τα τομεακά έξοδα ($\boldsymbol{e_i}$, $i = h, b, f$) προς κάθε προορισμό, αναλυτικά:

	Νοικοκυριά	$e_h = \gamma \cdot e_h + (1-\gamma) \cdot e_h$
1	**Επιχειρήσεις**	$e_b = \varepsilon \cdot e_b + (1-\varepsilon) \cdot e_b$
	Χρηματοπιστωτές	$e_f = \varphi \cdot e_f + \upsilon \cdot e_f + \omega \cdot e_f$ όπου $\varphi + \upsilon + \omega = 1$

Το ισοζύγιο προσφοράς και ζήτησης ($\boldsymbol{y_j} = \boldsymbol{e_j}$) σε κάθε παζάρι αγαθού ($j = w, u, s$):

	Εργασία	$\beta \cdot \boldsymbol{y_h} = \varepsilon \cdot e_b + \omega \cdot e_f$
2	**Παραγωγή**	$\delta \cdot \boldsymbol{y_b} = \gamma \cdot e_h + \upsilon \cdot e_f$
	Ρευστότητα	$(1-\beta) \cdot \boldsymbol{y_h} + (1-\delta) \cdot \boldsymbol{y_b} + \boldsymbol{y_f} = (1-\gamma) \cdot e_h + (1-\varepsilon) \cdot e_b + \varphi \cdot e_f$

Τα τομεακά έσοδα ($\boldsymbol{y_i}$, $i = h, b, f$) από τρίτες πηγές, αναλυτικά:

	Νοικοκυριά	$\boldsymbol{y_h} = \varepsilon \cdot e_b + \varphi \cdot e_f - (1-\delta) \cdot y_b$
3	**Επιχειρήσεις**	$\boldsymbol{y_b} = \gamma \cdot e_h + \varphi \cdot e_f - (1-\beta) \cdot y_h$
	Χρηματοπιστωτές	$\boldsymbol{y_f} = (1-\gamma) \cdot e_h + (1-\varepsilon) \cdot e_b$

Το κάθε υποσύνολο εξισώσεων έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά και, άρα, ανόμοια χρήση. Το υποσύνολο **1** αποτελείται από ορισμούς ή ταυτολογίες και, άρα, δεν εξυπηρετεί άλλο σκοπό. Το υποσύνολο **2** δείχνει τις σχέσεις ισορροπίας ανάμεσα στις εισπράξεις από πωλήσεις και τις πληρωμές για αγορές στα παζάρια των υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων. Το υποσύνολο **3** περιγράφει το εισόδημα κάθε τομέα ως συνάρτηση των

δαπανών των άλλων τομέων. Τα υποσύνολα **2** και **3** θα μπορούσαν να αποτελέσουν ένα σύστημα με έξι εξισώσεις και έξι αγνώστους (y_h, e_h, y_b, e_b, y_f, e_f). Όμως, τα προαναφερθέντα υποσύνολα είναι γραμμικώς εξαρτημένα, επειδή το ένα προκύπτει από στοιχειώδεις διακανονισμούς των γραμμών (elementary operations on the rows) του άλλου. Σύμφωνα με τους νόμους της γραμμικής άλγεβρας, τα υποσύνολα **2** και **3** δε συνιστούν σύστημα, το οποίο έχει μια και μοναδική λύση. Το σύστημα που προέρχεται από τα υποσύνολα **2** και **3** επιδέχεται άπειρο αριθμό λύσεων, εφόσο σε οποιεσδήποτε τρεις από τις έξι μεταβλητές του μπορεί να δοθούν πολλές τιμές, που ικανοποιούν τις εξισώσεις του. Ανάμεσα στις προαναφερθείσες λύσεις περιλαμβάνεται και το διάνυσμα, όπου οι θεσμικοί τομείς ούτε δανείζουν ούτε δανείζονται, δηλαδή τα ετήσια έσοδα και τα έξοδα κάθε καταναλωτή (y_h, e_h), παραγωγού (y_b, e_b) και τραπεζίτη (y_f, e_f) είναι ίσα μεταξύ τους. Όταν δεν υπάρχουν τουλάχιστο δύο τομείς, εκ των οποίων:

- ο ένας να απολαμβάνει το δικαίωμα να αγοράζει αγαθά εκδίδοντας εγγυημένα χρεόγραφα ή χρήμα έπ' άπειρον και
- ο άλλος να υπόκειται στην υποχρέωση να πωλεί αγαθά αποδεχόμενος τα εγγυημένα χρεόγραφα ή το χρήμα στο διηνεκές,

τότε το σύστημα εξισώσεων, που αναπαριστάνει το εν λόγω σύμπλεγμα συναλλαγών, είναι ομογενές (homogeneous). Συνεπώς, τα οικονομικά μοντέλα χωρίς κατ' εντολήν χρήμα (ή εγγυημένα χρεόγραφα) δεν έχουν μαθηματική ή ουσιαστική λύση εκτός από το τετριμμένο διάνυσμα. Στα εν λόγω ομογενή ή αναρχικά συμπλέγματα συναλλαγών απουσιάζει το εκτελεστικό, νομοθετικό και δικαστικό υπόβαθρο, το οποίο διασφαλίζει:

- τα διαχρονικά δικαιώματα και υποχρεώσεις όσων δανείζουν και δανείζονται,
- τη διαχρονική χρηματοδότηση ελλειμμάτων και επένδυση πλεονασμάτων.

III.3 Το Αναγκαίο Νομικό Υπόβαθρο

Τα σύγχρονα οικονομικά συστήματα έχουν κατορθώσει να εξοστρακίσουν τις αόριστες ισορροπίες των ροών και να ελέγξουν τα ποσοτικά χάσματα των αγαθών μέσω νομικών ρυθμίσεων που αφορούν, μεταξύ άλλων, τον επίσημο καθορισμό της λογιστικής μονάδας, του προεξοφλητικού επιτοκίου και του δικαιώματος είσπραξης και, άρα, της υποχρέωσης πληρωμής δόσεων ή τόκων. Οι εν λόγω νομικές ρυθμίσεις έχουν διασφαλίσει τη μόνιμη

χρηματοδότηση των ετήσιων ελλειμμάτων των τραπεζικών (και των κυβερνητικών) οργανισμών και τη μόνιμη επένδυση των αντίστοιχων πλεονασμάτων των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων. Τα τομεακά ελλείμματα και πλεονάσματα καταλήγουν ως ταυτόχρονες εκδόσεις (πωλήσεις) και αποδοχές (αγορές) εγγυημένων ομολόγων μέσω των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων. Συγκεκριμένα:

- ένα ετήσιο έλλειμμα των εκδοτών της τάξης τού $k = k_f + k_g$ συνεπάγεται ότι οι πλεονασματικοί τομείς, που αγοράζουν τα εγγυημένα χρεόγραφα, αυξάνουν το ενεργητικό τους κατά το ισόποσο στη διάρκεια του χρόνου.
- ένα ετήσιο πλεόνασμα των αποδεκτών της τάξης τού $k = k_h + k_b$ συνεπάγεται ότι οι ελλειμματικοί τομείς, που πωλούν τα εγγυημένα χρεόγραφα, αυξάνουν το παθητικό τους κατά το ισόποσο στη διάρκεια του χρόνου.

Στο απλούστατο οικονομικό υπόδειγμα που μας απασχολεί δεν υπάρχει κρατικός τομέας και, άρα, $k_g = 0$. Σύμφωνα με τη δωδέκατη αξιωματική πρόταση, η κεντρική τράπεζα, ως η αρμόδια αρχή, δύναται να καθορίζει, άμεσα ή έμμεσα, το μέγεθος του ετήσιου ελλείμματος k_f του νομισματικού τομέα και την κατανομή της αντίστοιχης ρευστότητας ανάμεσα στους καταναλωτές, $k_h = h \cdot k_f$, και τους παραγωγούς, $k_b = (1-h) \cdot k_f$, κάθε χρόνο. Οι μαθηματικές σχέσεις ανάμεσα στα k_f, k_h και k_b, είναι ως εξής:

(a) $e_f - y_f = k_f = (y_h - e_h) + (y_b - e_b) = k_h + k_b > 0$

4

(b) $k_f / k_f = (k_h + k_b)/k_f \Rightarrow 1 = \{h + (1-h)\} \; ; \; 0 < h < 1$

Στον Πίνακα ***III₉***, φαίνονται όλοι οι συνδυασμοί ελλειμμάτων και πλεονασμάτων των εκδοτικών και των μη-εκδοτικών τομέων της στοιχειώδους νομισματικής οικονομίας:

Πίνακας ***III₉***
Οι Συνδυασμοί Τομεακών Ελλειμμάτων και Πλεονασμάτων

ΤΟΜΕΙΣ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ	*Έλλειμμα*	*Έλλειμμα*	Πλεόνασμα	Πλεόνασμα	*Έλλειμμα*	Πλεόνασμα
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ	*Έλλειμμα*	Πλεόνασμα	*Έλλειμμα*	Πλεόνασμα	Πλεόνασμα	*Έλλειμμα*
ΤΡΑΠΕΖΙΤΕΣ	Πλεόνασμα	Πλεόνασμα	Πλεόνασμα	*Έλλειμμα*	*Έλλειμμα*	*Έλλειμμα*

Ήδη έχει τονισθεί ότι, χωρίς τομεακά ελλείμματα και πλεονάσματα και, άρα, χωρίς τις

μόνιμες ροές δόσεων ή τόκων που τα συνοδεύουν, οι συναλλαγές των καταναλωτών, των παραγωγών, τραπεζιτών κ.λπ., θα κατέληγαν σε επουσιώδη διανύσματα ισορροπίας για όλους τους τομείς. Συνεπακόλουθο της ύπαρξης μόνιμων ελλειμμάτων και πλεονασμάτων είναι η δυνατότητα κατανομής του καθαρού (εξωγενούς) πλούτου ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς. Η οποιαδήποτε αναδιανομή νομισματικών κεφαλαίων και, άρα, χρηματικών ροών ευνοεί κάποιους, ενώ επιβαρύνει τους υπόλοιπους τομείς. Συνεπώς, κάθε κεντρική τράπεζα δημιουργεί συμμάχους και αντιμάχους ανάμεσα σε όσους επηρεάζονται από τις επιλογές της. Η αντίσταση στην αναδιανομή του χρηματοπιστωτικού πλούτου είναι μια αναπόφευκτη πρόκληση που αντιμετωπίζει η νομισματική αρχή. Αυτή η αντίσταση καθιστά αναγκαία τη νομική θωράκιση της κεντρικής τράπεζας, ώστε να μπορεί να φέρει σε πέρας το δύσκολο έργο της. Επιπλέον, η ομαλή λειτουργία ενός συμπλέγματος συναλλαγών απαιτεί όπως η νομισματική αρχή είναι προικισμένη με διπλωματικές και άλλες ικανότητες, ώστε να επιβάλλει τη βούλησή της με την ελάχιστη δυνατή αντίσταση. Λυδία λίθος της αποτελεσματικότητας της κεντρικής τράπεζας είναι η άνεση με την οποία γίνονται κατανοητοί και, επομένως, αποδεκτοί οι οικονομικοί στόχοι της από όλους τους επηρεαζόμενους τομείς.

III.4 Η Συναρμολόγηση των Κομματιών

Η διατύπωση του συμπλέγματος συναλλαγών ως ένα δυναμικό σύστημα βασίζεται στο γεγονός ότι οι δύο χρηματικές ροές (δηλαδή τα έσοδα και τα έξοδα) των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των χρηματοπιστωτών κ.λπ., καθορίζονται από διαφορετικές οικονομικές ή μαθηματικές διεργασίες και, άρα, ως συναρτήσεις ανόμοιων παραγόντων:

- Αφ' ενός, κάθε τομέας γνωρίζει ότι το εισόδημά του (εισπράξεις) εξαρτάται από το μερίδιό του στις δαπάνες (πληρωμές) όλων των άλλων συναλλασσομένων ανάμεσα στα παζάρια των αγαθών.
- Αφ' ετέρου, όλοι οι τομείς γνωρίζουν ότι τα έξοδά τους εξαρτώνται από τα έσοδά τους, καθώς επίσης από τα μερίδιά τους στην αύξηση και κατανομή του τραπεζικού ισολογισμού στη μονάδα χρόνου.

Οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις αναπαριστάνουν τις προσαρμογές των **εσόδων** των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών στα έξοδα που πραγματοποιούν οι άλλοι δύο εκ των τριών τομέων στα παζάρια υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων:

(a) $dy_h/dt = \{ \varepsilon \cdot e_b + \omega \cdot e_f + \varphi \cdot e_f - (1-\delta) \cdot y_b - y_h \}$

5 (b) $dy_b/dt = \{ \gamma \cdot e_h + \upsilon \cdot e_f + \varphi \cdot e_f - (1-\beta) \cdot y_h - y_b \}$

(c) $dy_f/dt = \{(1-\gamma) \cdot e_h + (1-\varepsilon) \cdot e_b - y_f \}$

Ταυτόχρονα, κάθε τομέας μεταβάλλει τα **έξοδά** του, ώστε να είναι ίσα με τα ενδογενή έσοδά του συν την αύξηση του παθητικού του (ή μείον την αύξηση του ενεργητικού του) υπό τη μορφή εγγυημένων χρεογράφων, ως εξής:

(a) $de_h/dt = \{ y_h - k_h - e_h \}$

6 (b) $de_b/dt = \{ y_b - k_b - e_b \}$

(c) $de_f/dt = \{ y_f + k_f - e_f \}$

Οι ανωτέρω διαφορικές εξισώσεις αποδίδουν στη γλώσσα των μαθηματικών τον κλειστό βρόγχο (closed loop), σύμφωνα με τον οποίο τα νοικοκυριά, οι επιχειρήσεις και οι τραπεζίτες προσαρμόζουν τις ετήσιες δαπάνες τους στα ετήσια εισοδήματά τους, καθώς η διαφορά ανάμεσα στις δύο τομεακές ροές τροποποιείται από τις πράξεις νομισματικής πολιτικής. Η κεντρική τράπεζα και τα λοιπά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα καθορίζουν, μέσω των κεφαλαιακών συναλλαγών τους με τα νοικοκυριά, τις επιχειρήσεις και τους άλλους μη-εκδοτικούς τομείς, τις διαφορές ανάμεσα στα ετήσια έσοδα και τα ετήσια έξοδα (δηλαδή k_h, k_b, κ.λπ.) τού καθενός από αυτούς. Συμπεραίνουμε ότι με την ενσωμάτωση τού κατ' εντολή χρήματος και των συνακόλουθών του (όπως εγγυημένες ροές τόκων ή δόσεων, μόνιμα τομεακά ελλείμματα και πλεονάσματα, ανακατανομή του τραπεζικού ενεργητικού και παθητικού κ.λπ.) στο πρότυπο οικονομικό μοντέλο, έχουμε κατορθώσει:

- την πλήρη ανεξαρτητοποίηση της δαπάνης από το εισόδημα κάθε τομέα,
- την απάλειψη των απροσδιόριστων (free) μεταβλητών από το σύστημα,
- την εισαγωγή του απαραίτητου αριθμού σταθερών όρων στο σύστημα,
- το μαθηματικό προσδιορισμό του συστήματος στο διανυσματικό χώρο $(\boldsymbol{R}^6, t)$.

Τα υποσύνολα **5** και **6**, λαμβανόμενα μαζί, απεικονίζουν την κυκλοφορία των ροών εισπράξεων και πληρωμών (ανάμεσα στους τομείς και τα παζάρια της οικονομίας) ως ένα σύστημα έξι διαφορικών εξισώσεων με έξι ενδογενείς μεταβλητές (y_h, e_h, y_b, e_b, y_f, e_f). Στο Ευκλείδειο μαθηματικό υπόδειγμα της στοιχειώδους νομισματικής οικονομίας, οι συναλλαγές των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών πραγματοποιούνται

και καταγράφονται ως ζεύγη χρηματικών ροών και αποθεμάτων, σύμφωνα με τις γενικά αποδεκτές λογιστικές αρχές (generally accepted accounting principles), ως ακολούθως:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad dy_h/dt = \{ \varepsilon \cdot e_b + \omega \cdot e_f + \varphi \cdot e_f - (1-\delta) \cdot y_b - y_h \} \\
&\text{(b)} \quad de_h/dt = \{ y_h - k_h - e_h \} \\
&\text{(c)} \quad dy_b/dt = \{ \gamma \cdot e_h + \upsilon \cdot e_f + \varphi \cdot e_f - (1-\beta) \cdot y_h - y_b \} \\
&\text{(d)} \quad de_b/dt = \{ y_b - k_b - e_b \} \\
&\text{(e)} \quad dy_f/dt = \{ (1-\gamma) \cdot e_h + (1-\varepsilon) \cdot e_b - y_f \} \\
&\text{(f)} \quad de_f/dt = \{ y_f + k_f - e_f \}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Το οικονομικό μοντέλο που έχουμε κτίσει είναι της γενικής μορφής **dX/dt=A·X-K**, όπου:

- **X** και **dX/dt** είναι στήλες (της τάξεως 2**n**x1), οι οποίες αφορούν τις τομεακές ροές και τις διαφοροποιήσεις τους στη μονάδα του χρόνου, αντίστοιχα,
- **A** είναι πίνακας (της τάξεως 2**n**x2**n**), στον οποίο κατατάσσονται οι ποσοστιαίες αλληλεπιδράσεις των τομεακών εσόδων και εξόδων, καθώς αυτά πηγάζουν από και προορίζονται προς τα διάφορα παζάρια αγαθών,
- **K** είναι στήλη (της τάξεως 2**n**x1), η οποία αντιπροσωπεύει την ετήσια μεταβολή και την τομεακή κατανομή του τραπεζικού ισολογισμού και, τέλος,
- **n** είναι ο αριθμός των θεσμικών τομέων και, άρα, των παζαριών αγαθών.

Στα επόμενα κεφάλαια διαφαίνεται ότι τα μαθηματικά οικονομικά μοντέλα του τύπου 7 ή **dX/dt=A·X-K** αποδίδουν:

- συνθήκες δυναμικής σταθερότητας (Ορίζουσες των Routh-Hurwitz), οι οποίες είναι συναρτήσεις των συντελεστών τομεακής συμπεριφοράς (π.χ. β, γ; δ, ε; φ, ω).
- λύσεις στατικής ισορροπίας (μέσω του Κανόνα του Cramer), οι οποίες είναι συναρτήσεις τόσο των συντελεστών τομεακής συμπεριφοράς (π.χ. β, γ; δ, ε; φ, ω) όσο και των παραμέτρων νομισματικής πολιτικής (π.χ. k_f, h).

Από τα ανωτέρω, συνάγεται ότι η κεντρική τράπεζα κάθε χώρας έχει τη δυνατότητα:

- να καθοδηγεί τις αγοραπωλησίες των αγαθών σύμφωνα με το δημόσιο συμφέρον,
- να ελαχιστοποιεί τις συγκρούσεις ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς της οικονομίας,
- να μεγιστοποιεί την εμπιστοσύνη όσων συμμετέχουν στο σύστημα πληρωμών.

IV. ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, από τις οριακές αριστοποιήσεις των τομεακών εσόδων και εξόδων συμπεράναμε ότι, εάν δεν υπήρχε το νομικό δικαίωμα των τραπεζιτών να λειτουργούν με έλλειμμα αυξάνοντας το παθητικό τους, καθώς επίσης η αντίστοιχη υποχρέωση των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων να λειτουργούν με πλεόνασμα αυξάνοντας το ενεργητικό τους εσαεί, οι χρηματικές ροές και, άρα, οι αγοραπωλησίες αγαθών, θα κατέληγαν σε ένα τετριμμένο διάνυσμα ισορροπίας. Συνδυάζοντας την τάση των συναλλασσομένων να μεγιστοποιούν και να συντηρούν τον πλούτο τους με τη θέληση των κυβερνώντων να ελέγχουν τις εξελίξεις, κατασκευάσαμε τη μαθηματική διατύπωση ενός απλούστατου συμπλέγματος συναλλαγών, την οποία επαναλαμβάνουμε πιο κάτω:

7

$$(a)\quad dy_h/dt = \{\, \varepsilon\cdot e_b + \omega\cdot e_f + \varphi\cdot e_f - (1-\delta)\cdot y_b - y_h \,\}$$

$$(b)\quad de_h/dt = \{\, y_h - k_h - e_h \,\}$$

$$(c)\quad dy_b/dt = \{\, \gamma\cdot e_h + \upsilon\cdot e_f + \varphi\cdot e_f - (1-\beta)\cdot y_h - y_b \,\}$$

$$(d)\quad de_b/dt = \{\, y_b - k_b - e_b \,\}$$

$$(e)\quad dy_f/dt = \{(1-\gamma)\cdot e_h + (1-\varepsilon)\cdot e_b - y_f\}$$

$$(f)\quad de_f/dt = \{\, y_f + k_f - e_f \,\}$$

Το πρότυπο νομισματικό μοντέλο **7** είναι ένα σύστημα μη-ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (πρώτης τάξης με αμετάβλητους συντελεστές) του γενικού τύπου **dX/dt=A·X-K**. Το εν λόγω υπόδειγμα απεικονίζει την κυκλοφορία των χρηματικών ροών ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς και, άρα, στα παζάρια αγαθών της οικονομίας. Όταν τα έσοδα ή έξοδα κάποιου τομέα διαφέρουν από εκείνα που αντιστοιχούν στην ισορροπία ολόκληρου του συστήματος, τότε αυτά επιδρούν θετικά ή αρνητικά στις υπόλοιπες ροές που, με τη σειρά τους, προκαλούν νέες συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες αντιδράσεις. Το στοιχειώδες σύμπλεγμα συναλλαγών αποδίδει, ανά μονάδα μέτρησης του χρόνου, ένα διάνυσμα $\mathbf{X} = (y_h, e_h, y_b, e_b, y_f, e_f)$, το οποίο αποτελείται από έξι συντεταγμένες. Σε σχέση με τη μελέτη των μαθηματικών και οικονομικών ιδιοτήτων του συστήματος, είναι αναγκαίο να επιβεβαιωθεί κατά πόσο το **7** διαθέτει μια μοναδική και σταθερή λύση ισορροπίας $\mathbf{X}^*$, που αποτελείται από θετικές ροές $(y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*)$, οι οποίες πηδαλιουχούνται ανάλογα με τις (εξωγενείς) πράξεις νομισματικής πολιτικής.

IV.1 Η Μοναδικότητα της Στατικής Ισορροπίας

Το διάνυσμα στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ του πρότυπου δυναμικού μοντέλου **7** υπολογίζεται από τη λύση του αντίστοιχου, χρονικά αμετάβλητου, συστήματος $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^* = \mathbf{K}$, το οποίο παραθέτουμε σε μορφή πινάκων:

8

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & \delta-1 & \varepsilon & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-1 & \gamma & -1 & 0 & 0 & \upsilon+\varphi \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\varepsilon & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_h^* \\ e_h^* \\ y_b^* \\ e_b^* \\ y_f^* \\ e_f^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ k_h \\ 0 \\ k_b \\ 0 \\ -k_f \end{vmatrix} = k_f \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ 1-h \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^* = \mathbf{K}$$

Η επιβεβαίωση της ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης $\mathbf{X}^*$ τού **8** είναι μια απλή μαθηματική διαδικασία. Σύμφωνα με τον Κανόνα του Cramer, το $\mathbf{X}^*$ μπορεί να εκφρασθεί σε όρους τού **A** (δηλαδή της κατανομής των τομεακών εισοδημάτων και δαπανών) και τού **K** (δηλαδή της κατανομής της αύξησης των υποχρεώσεων των τραπεζιτών ανάμεσα στους μη-νομισματικούς τομείς), νοουμένου ότι η ορίζουσα $|\mathbf{A}| \neq 0$. Στο Παράρτημα **IV**, χρησιμοποιώντας το λογισμικό *Mathematica* και υ =1-φ-ω, μπορούμε να δούμε ότι:

9

$$|\mathbf{A}| = \{\beta+\varepsilon+\gamma\varepsilon\varphi+(\gamma+\delta)\cdot\omega+\beta\varepsilon\cdot(\varphi+\omega)\}-\{\gamma\delta\omega+\varepsilon\cdot(\varphi+\omega)+\beta\cdot(\delta+\varepsilon+\varphi+\omega)\} \gtrless 0$$

Κατά πόσο η ορίζουσα $|\mathbf{A}|$ είναι αρνητική, θετική ή ίση με το μηδέν, εξαρτάται από τις αγοραίες συμπεριφορές των καταναλωτών (β, γ), των παραγωγών (δ, ε) και των τραπεζιτών (ω, φ). Οι δοσοληψίες ανάμεσα στους τρεις θεσμικούς τομείς οδηγούν το σύμπλεγμα συναλλαγών **7** σε μια:

10

(α) μοναδική λύση, εάν: $|\mathbf{A}| \neq 0$

(β) αόριστη λύση, εάν: $|\mathbf{A}| = 0$

Οι πιθανότητες η ορίζουσα $|\mathbf{A}|$ να ισούται ακριβώς με μηδέν, είναι απειροελάχιστες. Αν οι πιθανότητες τέτοιας σύμπτωσης δεν ήταν απειροελάχιστες, τότε πολλές οικονομίες θα περνούσαν μακρές περιόδους αβεβαιότητας και κατάρρευσης (indeterminacy and breakdown), φάσεις που σπανίως συμβαίνουν. Σε σχέση με τον απώτερο στόχο τού ανά χείρας βιβλίου, που είναι η κατασκευή και η χρήση μαθηματικών μοντέλων για ετήσιες προβλέψεις, επαναλαμβάνεται ότι, με ελάχιστες εξαιρέσεις, οι ελαστικότητες

αντικατάστασης και, άρα, οι κατανομές των τομεακών εσόδων και εξόδων, θεωρούνται **μεσοπρόθεσμα** σταθερές. Είναι αδιαμφισβήτητο ότι, **μακροχρόνια**, οι κατανομές των χρηματικών ροών των καταναλωτών, των παραγωγών, των τραπεζιτών κ.λπ. επηρεάζονται από εξωγενείς παράγοντες, όπως οι κλιματολογικές συνθήκες, οι θρησκευτικές πεποιθήσεις, οι πολιτισμικές επιδράσεις και οι επιστημονικές εφευρέσεις. Σε αυτό το πρωταρχικό στάδιο, τυχόν υιοθέτηση άλλων υποθέσεων (π.χ. ότι οι κατανομές των εσόδων και εξόδων κάποιων εύπλαστων συναλλασσομένων είναι συναρτήσεις των δαπανών κάποιων άκαμπτων υποκινητών, οι οποίοι έχουν επάρκεια εισοδημάτων, ώστε να επηρεάζουν τα στοχευόμενα ποσοστά) απλώς θα περιέπλεκε το πρότυπο μοντέλο, χωρίς να προσθέτει οτιδήποτε στη θεωρητική ή πρακτική του αξία.

IV.2 Οι Συνθήκες Δυναμικής Σταθερότητας

Η οικονομία **7** χαρακτηρίζεται από σφαιρική σταθερότητα αν, και μόνο αν, όλες οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz, οι οποίες προκύπτουν από τη χαρακτηριστική εξίσωση τού αντίστοιχου ομογενούς δυναμικού συστήματος **11**, έχουν θετικά πρόσημα.

$$\mathbf{11}\qquad \begin{vmatrix} dy_h/dt \\ de_h/dt \\ dy_b/dt \\ de_b/dt \\ dy_f/dt \\ de_f/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \delta-1 & \varepsilon & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-1 & \gamma & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\varepsilon & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_h \\ e_h \\ y_b \\ e_b \\ y_f \\ e_f \end{vmatrix} = \mathbf{A\cdot X}$$

Το πιο πάνω ομογενές σύστημα έχει τη γενική μορφή $\mathbf{dX/dt = A\cdot X = \lambda\cdot I\cdot X}$. Συνεπώς, το **11** έχει μια, μη-τετριμμένη λύση **X**, αν, και μόνον αν, η χαρακτηριστική εξίσωση $|\mathbf{A-\lambda\cdot I}|$ είναι ίση με το μηδέν:

$$\mathbf{12}\qquad |\mathbf{A-\lambda\cdot I}| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & \delta-1 & \varepsilon & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-1 & \gamma & -1-\lambda & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\varepsilon & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Τονίζεται ότι η στήλη $\mathbf{K} = (0,\ k_h,\ 0,\ k_b,\ 0,\ -k_f) = (0,\ h{\cdot}k_f,\ 0,\ b{\cdot}k_f,\ 0,\ -k_f)$, η οποία αποτυπώνει τις πράξεις νομισματικής πολιτικής, δεν υπεισέρχεται στην ορίζουσα $\left|\mathbf{A}-\lambda{\cdot}\mathbf{I}\right| = 0$ και, άρα, δεν επηρεάζει τη δυναμική σταθερότητα του συστήματος. Με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica*, βλέπουμε ότι η ορίζουσα $\left|\mathbf{A}-\lambda{\cdot}\mathbf{I}\right|$ είναι ένα πολυώνυμο έκτου βαθμού στο λ, $\mathbf{a_0}{\cdot}\lambda^6 + \mathbf{a_1}{\cdot}\lambda^5 + \mathbf{a_2}{\cdot}\lambda^4 + \mathbf{a_3}{\cdot}\lambda^3 + \mathbf{a_4}{\cdot}\lambda^2 + \mathbf{a_5}{\cdot}\lambda + \mathbf{a_6} = 0$, όπου:

$\mathbf{a_0} = 1 > 0$; $\mathbf{a_1} = 6 > 0$; $\mathbf{a_2} = \{14+\beta+\delta-\beta\delta\} > 0$; $\mathbf{a_3} = \{16+4\beta+\gamma+4\delta+\varepsilon-\beta\varepsilon-4\beta\delta-\gamma\delta\} > 0$;

$\mathbf{a_4} = \{8+6\beta+6\delta+4\varepsilon+\gamma(3+\varphi+\omega)\} - \{6\beta\delta+3\gamma\delta+3\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon+\varphi+\varepsilon\varphi)\} > 0$;

$\mathbf{a_5} = \{1+3\delta+5\varepsilon+\delta\omega+\gamma(2+2\varphi+3\omega)+\beta(4+\varepsilon(\varphi+\omega)\} - \{4\beta\delta+2\gamma\delta+3\beta\varepsilon+2\gamma\varepsilon+\varphi+\beta\varphi+\varepsilon\varphi+\beta\omega+\gamma\delta\omega+3\varepsilon\omega\} \gtrless 0$;

$\mathbf{a_6} = \{\varepsilon+\gamma\varepsilon\varphi+(\gamma+\delta)\omega+\beta(1+\varepsilon(\varphi+\omega)\} - \{\gamma\delta\omega+\varepsilon(\varphi+\omega)+\beta(\delta+\varepsilon+\varphi+\omega)\} \gtrless 0$.

Το πολυώνυμο **12** έχει έξι πραγματικές ή μιγαδικές συζυγείς ρίζες λ_i, $i = 1,\ldots,\ 6$. Σε καθεμιά από αυτές αντιστοιχεί μια λύση x_i, η οποία είναι σφαιρικά σταθερή αν, και μόνον αν, τα πραγματικά μέρη των έξι χαρακτηριστικών ριζών, λ_i, είναι αρνητικά. Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη σφαιρική σταθερότητα του **11** και, άρα, τού **7**, απαιτεί όπως οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz, $\mathbf{rh_n}$, $\mathbf{n} = 1,\ldots,\ 6$, οι οποίες προέρχονται από τον πίνακα **13** των συντελεστών του πολυωνύμου **12**, είναι όλες μεγαλύτερες από το μηδέν:

13

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{a_2} & \mathbf{a_1} & \mathbf{a_0} & 0 & 0 \\ \mathbf{a_5} & \mathbf{a_4} & \mathbf{a_3} & \mathbf{a_2} & \mathbf{a_1} & \mathbf{a_0} \\ 0 & \mathbf{a_6} & \mathbf{a_5} & \mathbf{a_4} & \mathbf{a_3} & \mathbf{a_2} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_6} & \mathbf{a_5} & \mathbf{a_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_6} \end{vmatrix}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, οι προαναφερθείσες ελάσσονες $\mathbf{rh_n}$ είναι:

14

$$\mathbf{rh_1 = a_1 > 0} \quad ; \quad \mathbf{rh_2 = (a_1{\cdot}a_2 - a_0{\cdot}a_3) \gtrless 0} \quad ; \quad \mathbf{rh_3 = a_3{\cdot}(rh_2) - a_4{\cdot}a_1^2 + a_5{\cdot}a_0{\cdot}a_1 \gtrless 0} \ ;$$

$$\mathbf{rh_4 = a_4{\cdot}(rh_3) - a_5{\cdot}\{-a_0{\cdot}(a_1{\cdot}a_4 - a_0{\cdot}a_5) + a_2{\cdot}(rh_2)\} + a_6{\cdot}\{a_1{\cdot}(rh_2)\} \gtrless 0} \ ;$$

$$\mathbf{rh_5 = a_5{\cdot}(rh_4) - a_6{\cdot}\{a_3{\cdot}(rh_3) - a_1{\cdot}a_5{\cdot}(rh_2) - a_6{\cdot}a_1^2\} \gtrless 0} \quad ; \quad \mathbf{rh_6 = a_6{\cdot}(rh_5) \gtrless 0} \ .$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι υπάρχουν συνδυασμοί κατανομών των εισοδημάτων και των δαπανών των νοικοκυριών (β, γ), των επιχειρήσεων (δ, ε) και των χρηματοπιστωτών (φ, ω), όπου μερικές από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz είναι μηδενικές ή αρνητικές. Παραδείγματος χάριν, ας υποθέσουμε ότι σε μία **Άλφα** οικονομία, τα έσοδα και έξοδα των

καταναλωτών (β, γ) και των παραγωγών (δ, ε) κατανέμονται όπως φαίνεται πιο κάτω:

Πίνακας ***IV₁***
Η Δυναμική Σταθερότητα των Χρηματικών Ροών της Οικονομίας Άλφα

Κατανομές των εσόδων και εξόδων των μη-νομισματικών τομέων					Όρια των κατανομών ($0<\omega+\varphi<1$) των εξόδων e_f του τραπεζικού τομέα, εντός των οποίων η ισορροπία τής Άλφα είναι σταθερή
	β	γ	δ	ε	
Οικονομία Άλφα	8/9	7/8	6/7	5/6	$0<\omega<1$, $0<\varphi<0{,}870249$

Σε αυτήν την περίπτωση, οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz $\mathbf{rh_n}$, $\mathbf{n} = 1,\ldots, 6$, συνιστούν ένα σύστημα έξι ανισοτήτων ως προς ω και φ. Στον Πίνακα ***IV₁*** καταγράφονται τα όρια των συντελεστών ω και φ (όπως αυτά υπολογίσθηκαν με το *Mathematica* στο Παράρτημα **IV**), μέσα στα οποία η **Άλφα** παραμένει σταθερή. Συνεπώς, η εν λόγω οικονομία αποσταθεροποιείται, όταν ο νομισματικός τομέας κατανέμει:

- περισσότερο από 87% των ετήσιων εξόδων του για τόκους ή δόσεις (φ) και, άρα,
- ολιγότερο από 13% των ετήσιων εξόδων του για υπηρεσίες (ω) και προϊόντα (υ).

Αν όλες οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz είναι μεγαλύτερες από το μηδέν, τότε τα εισοδήματα και οι δαπάνες των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών συγκλίνουν προς το $\mathbf{X}^*$, ανεξάρτητα από τις αρχικές ροές $\mathbf{X^0} = (y_h^\circ, e_h^\circ, y_b^\circ, e_b^\circ, y_f^\circ, e_f^\circ)$, οι οποίες, πιθανό, να προέκυψαν από κάποιο κλονισμό (shock).

IV.3 Οι Χρηματικές Ροές των Θεσμικών Τομέων

Από τις εξισώσεις **15** που ακολουθούν βλέπουμε ότι τα πρόσημα των χρηματικών ροών εξαρτώνται από τους συντελεστές συμπεριφοράς (β, γ; δ, ε; φ, ω) των θεσμικών τομέων, καθώς επίσης από την ετήσια αύξηση (k_f) και την ποσοστιαία κατανομή (h, 1-h) του τραπεζικού παθητικού ανάμεσα στους καταναλωτές και τους παραγωγούς. Το διάνυσμα στατικής ισορροπίας (y_h^*, e_h^*; y_b^*, e_b^*; y_f^*, e_f^*) δεν πηδαλιουχείται από τις πράξεις νομισματικής πολιτικής, εκτός εάν τα τομεακά εισοδήματα και δαπάνες, που το απαρτίζουν, είναι όλα θετικά. Στη γλώσσα της μηχανικής επιστήμης (engineering science) αυτό σημαίνει ότι έκαστο κύκλωμα τομεακών ροών πρέπει να είναι δεξιόστροφο, ούτως ώστε όλα μαζί να συνιστούν ένα δεξιόστροφο σύστημα (right handed skrew system). Όταν ικανοποιείται ο προαναφερθείς όρος, τα έσοδα και τα έξοδα των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών μεταβάλλονται στην ίδια κατεύθυνση με την ετήσια αύξηση ή μείωση της συνολικής ρευστότητας k_f. Σε τέτοια περίπτωση, η νομισματική

αρχή επηρεάζει τις στατικές ροές των θεσμικών τομέων, ώστε να είναι ανάλογες με τα ισχύοντα αντίτιμα και τις διαθέσιμες ποσότητες των αγαθών. Όταν ικανοποιούνται οι Συνθήκες των Routh-Hurwitz, το πρότυπο νομισματικό μοντέλο **7**, που διαμορφώνεται στο χώρο ($\boldsymbol{R}^6$, t), έχει μία μοναδική και σταθερή λύση $\mathbf{X}^*$. Νοουμένου ότι $|\mathbf{A}| \neq 0$, το διάνυσμα στατικής ισορροπίας (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*) υπολογίζεται με τον Κανόνα τού Cramer και το λογισμικό *Mathematica*, ως ακολούθως:

$$\textbf{15(a)} \qquad y_h^* = k_f \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \delta-1 & \varepsilon & 0 & \omega+\varphi \\ h & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 1-h & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\varepsilon & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} / |\mathbf{A}| \gtrless \mathbf{0}$$

$$\textbf{15(b)} \qquad e_h^* = k_f \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \delta-1 & \varepsilon & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 1-h & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\varepsilon & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} / |\mathbf{A}| \gtrless \mathbf{0}$$

$$\textbf{15(c)} \qquad y_b^* = k_f \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & -1 & h & 0 & 0 & 0 \\ \beta-1 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1-h & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\varepsilon & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} / |\mathbf{A}| \gtrless \mathbf{0}$$

$$\textbf{15(d)} \qquad e_b^* = k_f \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \delta-1 & 0 & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & -1 & 0 & h & 0 & 0 \\ \beta-1 & \gamma & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & 1-h & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} / |\mathbf{A}| \gtrless \mathbf{0}$$

$$\textbf{15(e)} \qquad y_f^* = k_f \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \delta-1 & \varepsilon & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & -1 & 0 & 0 & h & 0 \\ \beta-1 & \gamma & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-h & 0 \\ 0 & 1-\gamma 1 & 0 & 1-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} / \left| \mathbf{A} \right| >^{<} \mathbf{0}$$

$$\textbf{15(f)} \qquad e_f^* = k_f \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \delta-1 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & h \\ \beta-1 & \gamma & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1-h \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\varepsilon & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} / \left| \mathbf{A} \right| >^{<} \mathbf{0}$$

Δεδομένων των συντελεστών συμπεριφοράς **A**(β, γ; δ, ε; ω, φ) και των παραμέτρων πολιτικής **K**(k_f, h), μπορούμε να υπολογίσουμε τα έσοδα και έσοδα, καθώς επίσης τις ελαστικότητες ανταπόκρισης των τομεακών ροών ως προς οποιαδήποτε εξωγενή μεταβλητή, κάθε χρόνο. Πιο κάτω παρατίθενται τα εισοδήματα και οι δαπάνες των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών ως συναρτήσεις τών h και k_f, καθώς επίσης οι μεταβολές των τομεακών ροών που προκύπτουν από την ανακατανομή της προσφοράς ρευστότητας, όταν $\beta = {}^{8}/_{9}$, $\gamma = {}^{7}/_{8}$, $\delta = {}^{6}/_{7}$, $\varepsilon = {}^{5}/_{6}$, $\omega = {}^{1}/_{2}$ και $\varphi = {}^{439}/_{3168}$ **:**

16

$$y_h^* = 9\cdot(59560+114523\cdot h)\cdot k_f/1771763 \Rightarrow \partial y_h^*/\partial h = 0{,}581741\cdot k_f$$

$$e_h^* = 8\cdot(67005-92632\cdot h)\cdot k_f/1771763 \Rightarrow \partial e_h^*/\partial h = -0{,}418259\cdot k_f$$

$$y_b^* = (184085-103109\cdot h)\cdot k_f/253109 \Rightarrow \partial y_b^*/\partial h = -0{,}40737\cdot k_f$$

$$e_b^* = 48\cdot(1438-3125\cdot h)\cdot k_f/253109 \Rightarrow \partial e_b^*/\partial h = 0{,}59263\cdot k_f$$

$$y_f^* = (-13523+82368\cdot h)\cdot k_f/1771763 \Rightarrow \partial y_f^*/\partial h = 0{,}0464893\cdot k_f$$

$$e_f^* = 3168\cdot(555+26\cdot h)\cdot k_f/1771763 \Rightarrow \partial e_f^*/\partial h = 0{,}0464893\cdot k_f$$

Η επίδραση της παραμέτρου h στις τομεακές χρηματικές ροές εξαρτάται από το σύνολο (β, γ; δ, ε; ω, φ) των συντελεστών αγοραίας συμπεριφοράς, καθώς επίσης από την ετήσια αύξηση (k_f) του τραπεζικού ισολογισμού. Όλοι οι ανωτέρω υπολογισμοί έγιναν με το λογισμικό *Mathematica* και παρουσιάζονται στο Παράρτημα αυτού του κεφαλαίου.

IV.4 Προϋποθέσεις ενός Κατευθυνόμενου Συστήματος

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $0<\beta<1$, $0<\gamma<1$, $0<\delta<1$, $0<\varepsilon<1$, $0<\omega<1$, $0<\varphi<1$, $0<h<1$, τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{X}^*=(y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*)$ μπορεί να είναι μεγαλύτερα ή μικρότερα από το μηδέν, ανάλογα με τους συντελεστές αγοραίας συμπεριφοράς (β, γ; δ, ε; ω, φ) και τις παραμέτρους νομισματικής πολιτικής (k_f και h). Οι πολιτικές και οικονομικές αρχές κάθε χώρας πανικοβάλλονται με την απειροελάχιστη πιθανότητα ανεπαρκών εισπράξεων και πληρωμών από τους καταναλωτές, τους παραγωγούς ή τους τραπεζίτες. Συνεπώς, θεωρούν την ικανότητα μετακίνησης του διανύσματος στατικής ισορροπίας από τη μια θέση στην άλλη ως εκ των ων ουκ άνευ. Αναγκαίες αλλά μη επαρκείς συνθήκες, για να απολαμβάνουν οι αρχές αυτήν τη δυνατότητα, είναι όπως κάθε διάνυσμα ισορροπίας του οικονομικού συστήματος αποτελείται από (i) **μοναδικές**, (ii) **σταθερές** και (iii) **θετικές** χρηματικές ροές ($y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*$). Εάν, επιπλέον, οι αρχές διαθέτουν (iv) **αριθμό** εργαλείων ίσο με τον **αριθμό** των στόχων της πολιτικής τους, τότε το σύμπλεγμα συναλλαγών καθίσταται **τελείως** πηδαλιουχούμενο. Όταν τα προαναφερθέντα τέσσερα χαρακτηριστικά συνυπάρχουν, οι αρμόδιοι μπορούν, εντός συγκεκριμένων πλαισίων, να αυξομειώνουν τις ροές των τομέων ($y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*$) και, άρα, τις δαπάνες για αγαθά ($e_w^* = \rho_w^*$, $e_u^* = \rho_u^*$, $e_s^* = \rho_s^*$), ώστε να αποκτούν μέγεθος ανάλογο με τα διαθέσιμα έτη εργασίας, τεμάχια παραγωγής ή μοναδιαία ομόλογα (q_w^f, q_u^f, q_s^f), καθώς επίσης με τους ισχύοντες μισθούς, τιμές ή αξίες (p_w, p_u, p_s). Η ανάγκη όπως η λύση $\mathbf{X}^*$ κάθε δυναμικού οικονομικού συστήματος χαρακτηρίζεται από τις τέσσερεις ιδιότητες, εξηγείται πιο κάτω:

(i) Εάν το μαθηματικό μοντέλο κάποιου πλέγματος συναλλαγών έχει πέραν τής μιας λύσης, σημαίνει ότι το σύνολο των εξωγενών παραμέτρων αποδίδει ταυτόχρονα δύο ή περισσότερα (εξίσου πιθανά) διανύσματα (σταθερής ή / και ασταθούς) ισορροπίας. Η κατάληξη των ενδογενών μεταβλητών σε μια από τις πιθανές λύσεις εξαρτάται περισσότερο από το αρχικό διάνυσμα $\mathbf{X}^0$ των ροών και ολιγότερο από τις εξωτερικές παρεμβάσεις των αρμοδίων. Είναι προφανές ότι δυναμικά συστήματα με πολλαπλές λύσεις ισορροπίας δεν είναι πηδαλιουχούμενα (dirigible). Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι αρχές ματαίως προσπαθούν να ασκήσουν νομισματική, δημοσιονομική ή άλλου είδους πολιτική, διότι η οικονομία, λόγω της δομής της, δεν υπακούει στα κελεύσματά τους. Στα Ευκλείδεια μαθηματικά μοντέλα, η μοναδικότητα εξασφαλίζεται ταυτόχρονα με τη σταθερότητα της λύσης ισορροπίας $\mathbf{X}^*$, αφού το θετικό πρόσημο των Οριζουσών Routh-Hurwitz, $\mathbf{rh}_i$, $i = 1,\ldots, \mathbf{n}$, συνεπάγεται ότι $|\mathbf{A}| > 0$.

(ii) Σε ένα ασταθές σύστημα, οι συγκρίσεις εναλλακτικών σχεδίων δράσης είναι άσκοπες, επειδή οποιαδήποτε ισορροπία είναι προσωρινή και μεταβαλλόμενη κατά απροσδόκητο τρόπο. Μία ασταθής οικονομία δεν επιστρέφει στο διάνυσμα στατικής ισορροπίας μετά από έναν, έστω τυχαίο ή μικρό, κλονισμό. Στις περιπτώσεις που ένα δυναμικό σύστημα έχει σταθερά και ασταθή διανύσματα ισορροπίας, μπορεί να μεταπηδά από το ένα στο άλλο με την ελάχιστη αφορμή. Φαίνεται ότι τέτοιου είδους οικονομικά συστήματα αποτελούν την εξαίρεση και όχι τον κανόνα. Στο πρότυπο μαθηματικό υπόδειγμα 7 μιας στοιχειώδους νομισματικής οικονομίας, η κεντρική τράπεζα έχει τη δυνατότητα να επηρεάζει τους συντελεστές ω και φ, οι οποίοι, με τη σειρά τους, επιδρούν στις Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz. Συνεπώς, η αρμόδια αρχή οφείλει, κάθε χρόνο:

- να συλλέγει στατιστικές αναφορικά με τις πηγές των τομεακών εισοδημάτων και τους προορισμούς των τομεακών δαπανών,
- να υπολογίζει τα όρια των παραμέτρων φ και ω έξω από τα οποία το σύστημα μεταλλάσσεται από σταθερό σε ασταθές, και
- να μεριμνά όπως οι παράμετροι φ και ω ευρίσκονται μέσα στα όρια, όπου το σύμπλεγμα συναλλαγών παραμένει πηδαλιουχούμενο.

Εάν οι αρχές πιστεύουν ότι δεν πρέπει να παρεμβαίνουν στην κατανομή των τραπεζικών εκταμιεύσεων, τότε έχουν την επιλογή να εκστρατεύσουν μακροχρόνια, για να πείσουν τα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις να κατανέμουν τις χρηματικές ροές τους σε αναλογίες που σταθεροποιούν το σύμπλεγμα συναλλαγών. Στην προσπάθειά τους αυτήν, οι αρμόδιοι πρέπει να έχουν υπόψη τους ότι 'οι κακές συνήθειες δύσκολα κόβονται'. Αν, σε αντίθεση προς κάθε σωφρονιστικό ή νομοθετικό μέτρο, οι καταναλωτές, οι παραγωγοί αλλά και οι χρηματοπιστωτές εξακολουθούν να συμπεριφέρονται με τρόπους που αποσταθεροποιούν το σύστημα, τότε, ένοχοι και αθώοι, θα πληρώσουν το τίμημα, το οποίο πιθανό να είναι ο σταδιακός αφανισμός τους. Αναμφίβολα, οι συνέπειες από την παράβαση των νόμων της οικονομίας είναι, κάποτε, τόσο σκληρές όσο είναι οι συνέπειες από την παράβαση των νόμων της βιολογίας.

(iii) Ας υποθέσουμε ότι το σύμπλεγμα συναλλαγών έχει ήδη μια μοναδική και σταθερή λύση ισορροπίας $\mathbf{X}^*$. Παρόλο που δύο από τα τέσσερα απαιτούμενα χαρακτηριστικά ικανοποιούνται, οι θεσμικοί τομείς δεν εφησυχάζουν, μέχρι να διασφαλισθεί ότι οι ετήσιες εισπράξεις και πληρωμές τους είναι, αμφότερες, θετικές. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για τη

νομισματική αρχή, η οποία αδυνατεί να ασκήσει είτε επεκτατική είτε περιοριστική πολιτική, εκτός εάν όλες οι τομεακές χρηματικές ροές (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*) έχουν το ίδιο πρόσημο. Ως επιστήμονες οικονομολόγοι, οφείλουμε να εξεύρουμε τη μέθοδο με την οποία διασφαλίζεται ότι οι μεταβολές του τραπεζικού ισολογισμού k_f επηρεάζουν τα έσοδα και τα έξοδα των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των χρηματοπιστωτών προς την ίδια κατεύθυνση. Από τις εξισώσεις **15**, λαμβάνοντας υπόψη ότι:

- $|\mathbf{A}| > 0$, αφού το δυάνυσμα $\mathbf{X}^*$ πρέπει να είναι μοναδικό και σταθερό,
- $k_f > 0$, αφού η ετήσια προσφορά χρήματος πρέπει να είναι θετική,

συμπεραίνεται ότι η αρμόδια αρχή οφείλει να διεξάγει τις πράξεις νομισματικής πολιτικής (k_f) με τρόπο ώστε η μεταβολή του τραπεζικού παθητικού να κατανέμεται ανάμεσα στους καταναλωτές (k_h) και τους παραγωγούς (k_b) σε αναλογίες (h) και (1-h), αντίστοιχα, οι οποίες καθιστούν τους αριθμητές των στατικών τομεακών ροών (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*) μεγαλύτερους από το μηδέν. Βάσει της δέκατης αξιωματικής πρότασης, τα ομόλογα του νομισματικού τομέα είναι διαχρονικώς εγγυημένα και, άρα, γίνονται αμέσως αποδεκτά ως μέσα πληρωμών και αποθεμάτων από τους μη-τραπεζικούς τομείς. Συναφώς, υπενθυμίζεται ότι τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις είναι ελεύθεροι να πωλούν και να αγοράζουν όλων των ειδών τα αξιόγραφα μεταξύ τους, αφού οι δοσοληψίες τους δεν επηρεάζουν τη συνολική ρευστότητα (M = k/r). Η τελευταία καθορίζεται εξωγενώς και έχει τεράστια οικονομική σημασία. Η κεντρική τράπεζα και τα λοιπά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα απολαμβάνουν το δικαίωμα να εκδίδουν και να αποδέχονται εγγυημένα ομόλογα απρόσκοπτα, νοουμένου ότι οι συναλλαγές τους με τους καταναλωτές, τους παραγωγούς κ.λπ., εξυπηρετούν ευρύτερα οικονομικά, πολιτικά και κοινωνικά συμφέροντα.

(iv) Για σκοπούς ανάλυσης του φάσματος των δυνητικών παρεμβάσεων αναφέρεται ότι το στοιχειώδες υπόδειγμα **7** εμπεριέχει έξι ενδογενείς μεταβλητές (y_h, e_h, y_b, e_b, y_f, e_f), έξι συντελεστές συμπεριφοράς (β, γ; δ, ε; ω, φ), τρία εργαλεία πολιτικής (k_f, h, p_s=1/r) και δύο αντίτιμα αγαθών (p_w, p_u). **Μεσοπρόθεσμα**, ούτε ο μισθός ανά έτος εργασίας (p_w), η τιμή ανά τεμάχιο παραγωγής (p_u) ή η αξία ανά μονάδα ρευστότητας (p_s) ούτε οι διαθέσιμες ποσότητες υπηρεσιών (q_w^f), προϊόντων (q_u^f) ή χρεογράφων (q_s^f) καθορίζονται από το δυναμικό σύστημα των τομεακών ροών. Αντικαθιστώντας το διάνυσμα στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ στις εξισώσεις **2**, λαμβάνουμε το ισοζύγιο εσόδων και εξόδων στα παζάρια για υπηρεσίες, προϊόντα και ομόλογα, ως ακολούθως:

$$\rho_w^* = \boldsymbol{y_w}^* = \beta \cdot y_h^* = \varepsilon \cdot e_b^* + \omega \cdot e_f^* = \boldsymbol{e_w}^*$$

17 $$\rho_u^* = \boldsymbol{y_u}^* = \delta \cdot y_b^* = \gamma \cdot e_h^* + \upsilon \cdot e_f^* = \boldsymbol{e_u}^*$$

$$\rho_s^* = \boldsymbol{y_s}^* = (1\text{-}\beta)\cdot y_h^* + (1\text{-}\delta)\cdot y_b^* + y_f^* = \boldsymbol{e_s}^* = (1\text{-}\gamma)\cdot e_h^* + (1\text{-}\varepsilon)\cdot e_b^* + \varphi \cdot e_f^*$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις **15**, **16** και **17**, συμπεραίνουμε ότι οι εισπράξεις (y_w^*, y_u^*, y_s^*) από πωλήσεις και οι πληρωμές (e_w^*, e_u^*, e_s^*) για αγορές αγαθών είναι γραμμικές συναρτήσεις της μεταβολής και της κατανομής του τραπεζικού ισολογισμού. **Διαιρώντας** τη ροή ισορροπίας του παζαριού για υπηρεσίες (ρ_w^*), προϊόντα (ρ_u^*) και χρεόγραφα (ρ_s^*):

- **με** τον τρέχοντα μισθό (p_w), τιμή (p_u) ή αξία (p_s), **υπολογίζουμε** τα έτη υπηρεσιών (q_w^*), τα τεμάχια προϊόντων (q_u^*) και τα μοναδιαία ομόλογα (q_s^*), που πωλούνται και αγοράζονται στο αντίστοιχο παζάρι, κάθε χρόνο.
- **με** τα διαθέσιμα έτη εργασίας (q_w^f), τεμάχια παραγωγής (q_u^f) και μοναδιαία ομόλογα (q_s^f), **υπολογίζουμε** το μισθό (p_w^f), την τιμή (p_u^f) και την αξία (p_s^f), που θα εκμηδένιζε το ποσοτικό χάσμα του αντίστοιχου αγαθού.

Οι ζητούμενες ποσότητες (q_w^*, q_u^*, q_s^*) μπορεί να είναι υπερβολικές ή ανεπαρκείς σε σχέση με τις διαθέσιμες ποσότητες των υπηρεσιών (q_w^f), των προϊόντων (q_u^f) και των χρεογράφων (q_s^f). Για να εκμηδενισθούν τα ελλείμματα ή πλεονάσματα στα παζάρια αγαθών, πιθανό να χρειάζεται να αλλάξουν:

- ο μισθός ανά έτος εργασίας (p_w), η τιμή ανά τεμάχιο προϊόντος (p_u) και η αξία ανά μοναδιαίο ομόλογο (p_s=1/r) ή, ακόμη,
- η ετήσια προσφορά χρήματος k_f και η κατανομή των εγγυημένων χρεογράφων μεταξύ των νοικοκυριών h και των επιχειρήσεων (1-h).

Εκ πρώτης όψεως, το στοιχειώδες οικονομικό μοντέλο δεν είναι πλήρως κατευθυνόμενο, διότι οι ενδογενείς μεταβλητές είναι περισσότερες από τις παραμέτρους πολιτικής. Η πηδαλιούχηση του συμπλέγματος διευκολύνεται εάν οι αρχές, μεσοπρόθεσμα, μπορέσουν:

- αδιαφορώντας για τις υπόλοιπες ενδογενείς μεταβλητές, να περιορίσουν τον αριθμό των οικονομικών στόχων, ώστε να ισούται με τον αριθμό των εργαλείων πολιτικής.
- να ελέγξουν τον μισθό της εργασίας και την τιμή της παραγωγής, όπως ελέγχουν το προεξοφλητικό επιτόκιο και τη μεταβολή και κατανομή της ρευστότητας.

IV.5 Η Διελκυστίνδα των Ιδιοκτητών των Αγαθών

Τα συμπλέγματα συναλλαγών, όπως τα Ευκλείδεια οικονομικά μοντέλα, στα οποία υπάρχουν περιορισμένοι αριθμοί:

- νοικοκυριών, επιχειρήσεων και χρηματοπιστωτών, καθώς επίσης
- ετών υπηρεσιών, τεμαχίων προϊόντων και μοναδιαίων ομολόγων,

χαρακτηρίζονται από σπανιότητα (scarcity). **Μεσοπρόθεσμα**, τέτοια συστήματα διακρίνονται από την απουσία αυτόματων μηχανισμών προσαρμογής των αντιτίμων και εκκαθάρισης των παζαριών. Παρόλο που οι αγοραπωλησίες σε κάθε παζάρι είναι το αποτέλεσμα της ισορροπίας ζήτησης εισοδημάτων και προσφοράς δαπανών, εν τούτοις ο μισθός, η τιμή ή η αξία που ισχύει καθ' οιαδήποτε στιγμή, μόνο τυχαίως συμπίπτει με το μέγεθος που εκμηδενίζει το παρατηρούμενο έλλειμμα ή πλεόνασμα του αντίστοιχου αγαθού. Η εμπειρική πραγματικότητα τείνει να μας πείσει ότι στα παζάρια που χαρακτηρίζονται από σπανιότητα, το ισχύον αντίτιμο καθορίζεται **κυρίως** από τη διελκυστίνδα μεταξύ δύο ομάδων ιδιοκτητών ή κατόχων έκαστου αγαθού. Δηλαδή, εκείνων που προτιμούν υψηλό αντίτιμο με υψηλό (ρευστοποιήσιμο) απόθεμα, και των υπολοίπων που προτιμούν χαμηλό αντίτιμο με χαμηλό (ρευστοποιήσιμο) απόθεμα. Αναλύοντας, με τη σειρά, τα νοικοκυριά που ελέγχουν την προσφορά εργασίας, τις επιχειρήσεις που ελέγχουν την προσφορά παραγωγής και τους τραπεζίτες που ελέγχουν την προσφορά χρήματος, παρατηρούμε ότι κάθε θεσμικός τομέας είναι ανομοιογενής, αφού αποτελείται, ταυτόχρονα:

- από μισθωτούς που απασχολούνται πλήρως και άλλους οι οποίοι είναι άνεργοι,
- από παραγωγούς που εμπορεύονται και άλλους που συσσωρεύουν τα προϊόντα τους,
- από τραπεζίτες που πωλούν και άλλους που αγοράζουν εγγυημένα ομόλογα.

Επομένως, κάθε αγαθό δύναται να φέρει ένα από πολλά, εξ ίσου, πιθανά αντίτιμα. Οι δύο ακραίες τιμές, εντός των οποίων συνήθως διαμορφώνεται το ισχύον αντίτιμο της εργασίας, της παραγωγής ή της ρευστότητας, είναι:

- η μέγιστη τιμή, στην οποία πωλείται και αγοράζεται ένα 'άτομο' του αγαθού,
- η τιμή εκκαθάρισης, στην οποία 'κυκλοφορούν' όλα τα 'άτομα' του αγαθού.

Συνήθως, το τρέχον αντίτιμο διακυμαίνεται μεταξύ των δύο ακραίων τιμών, σύμφωνα με τη διαπραγματευτική ισχύ των δύο αντιμαχόμενων ομάδων, που συνθέτουν τον τομέα των ιδιοκτητών ή κατόχων του αγαθού. Το τρέχον αντίτιμο μπορεί, επίσης, να διαμορφώνεται κάτω από την επίδραση της κυβέρνησης η οποία, σε τέτοια περίπτωση, θα εισπράξει είτε τους επαίνους είτε την κρητική για την εισοδηματική ή τιμολογιακή πολιτικής της.

Συμπεραίνεται ότι, σε κάθε σύμπλεγμα συναλλαγών, λειτουργούν παράλληλα δύο ξεχωριστά δυναμικά συστήματα. Το ένα αφορά τις **ενδογενείς αλληλεπιδράσεις** των χρηματικών ροών (y_h, e_h, y_b, e_b, y_f, e_f) και το άλλο αφορά τις **αυτόνομες μεταβολές** των εξωγενών παραμέτρων (β, γ, δ, ε; ω, φ; k_h, h; p_w, p_u, p_s; q_w, q_u, q_s). Συνεπώς, επιβάλλεται η σε βάθος μελέτη των αμοιβαίων επενεργειών των δύο δυναμικών συστημάτων, ιδίως μέσα στα πλαίσια της θεωρίας της μακροχρόνιας οικονομικής μεγέθυνσης (theory of economic growth). Το συγκεκριμένο θέμα θίγεται στο Κεφάλαιο **IX** τού ανά χείρας βιβλίου.

IV.6 Υπολογισμοί για τη Διαμόρφωση Πολιτικής

Ο προγραμματισμός των ενεργειών που απαιτούνται για τη διαμόρφωση πολιτικής σε ένα σύμπλεγμα συναλλαγών όπως το **7**, επιτυγχάνεται με το λογισμικό *Mathematica*, ως εξής:

Α. Στο πρώτο στάδιο, που αφορά τα στατικά και δυναμικά χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης οικονομίας, αντικαθιστούμε στο Ευκλείδειο μοντέλο τις εκατοστιαίες αναλογίες των εισοδημάτων και δαπανών των καταναλωτών (β, γ), των παραγωγών (δ, ε) και των τραπεζιτών (ω, φ), καθώς επίσης τη μεταβολή της συνολικής ρευστότητας (k_f) και την εκατοστιαία κατανομή της (h) ανάμεσα στους μη-νομισματικούς τομείς, όπως τα εν λόγω μεγέθη επιμετρήθηκαν κατά την ετήσια στατιστική έρευνα.

(1) Στη συνέχεια, υπολογίζουμε (i) τις συνθήκες δυναμικής σταθερότητάς ($\mathbf{rh_n}$) της οικονομίας σύμφωνα με τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz και (ii) τις ροές στατικής ισορροπίας ($\mathbf{X}^*$) των θεσμικών τομέων σύμφωνα με τον Κανόνα τού Cramer.

(2) Από τις ροές στατικής ισορροπίας των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των χρηματοπιστωτών (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*) υπολογίζουμε τις ροές στις οποίες ισορροπούν τα έσοδα και έξοδα (ρ_w^*, ρ_u^*, ρ_s^*) στα τρία παζάρια αγαθών.

(3) Διαιρώντας τις ροές, στις οποίες ισορροπούν η προσφορά και η ζήτηση για τις υπηρεσίες (ρ_w^*), τα προϊόντα (ρ_u^*) και τα ομόλογα (ρ_s^*), με το μισθό, τιμή ή αξία (p_w, p_u, p_s) που αντιστοιχεί, υπολογίζουμε τα έτη εργασίας (q_w^*), τα τεμάχια παραγωγής (q_u^*) και τις μονάδες ρευστότητας (q_s^*) που πωλούνται και αγοράζονται, ως αποτέλεσμα των στατιστικών δεδομένων της οικονομίας.

(4) Τώρα, είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τα έτη υπηρεσιών, τα τεμάχια προϊόντων και τα μοναδιαία ομόλογα που είναι διαθέσιμα (q_w^f, q_u^f, q_s^f) με τους αριθμούς των ιδίων αγαθών που εκκαθαρίζονται (q_w^*, q_u^*, q_s^*) στο αντίστοιχο παζάρι. Μεσοπρόθεσμα, οι αγοραπωλησίες (ρ_w^*, ρ_u^*, ρ_s^*) είναι ανεξάρτητες από τα αντίτιμα (p_w, p_u, p_s) των αγαθών, και αντίστροφα. Σύμφωνα με τις 12 αξιωματικές προτάσεις, οι μισθοί, οι τιμές και οι αξίες μεταβάλλονται αυτόνομα. Συνεπώς, τα χάσματα (gaps) μεταξύ των ποσοτήτων που διατίθενται και των ποσοτήτων που ζητούνται παραμένουν ανοικτά, όπως διαμορφώθηκαν από τα στατιστικά δεδομένα της οικονομίας.

(5) Διαιρώντας τις ετήσιες αγοραπωλησίες (ρ_w^*, ρ_u^*, ρ_s^*) με τις διαθέσιμες ποσότητες (q_w^f, q_u^f, q_s^f) εργασίας, παραγωγής και ρευστότητας υπολογίζουμε το μισθό, την τιμή και την αξία (p_w^f, p_u^f, p_s^f), που θεωρητικά θα εξίσωνε τη ζήτηση με την προσφορά στο αντίστοιχο παζάρι εκείνο το χρόνο. Σημειώνεται ότι, ανάμεσα στους παράγοντες που καθορίζουν το τρέχον αντίτιμο κάθε αγαθού, είναι η διελκυστίνδα μεταξύ της ομάδας των ιδιοκτητών που προτιμούν υψηλό μισθό, τιμή ή αξία με υψηλό (ρευστοποιήσιμο) απόθεμα και της ομάδας των υπόλοιπων ιδιοκτητών που προτιμούν χαμηλό μισθό, τιμή ή αξία με χαμηλό (ρευστοποιήσιμο) απόθεμα της υπηρεσίας, του προϊόντος ή του χρεογράφου που εμπορεύονται.

Β. Στο δεύτερο στάδιο, που αφορά το φάσμα των δυνητικών παρεμβάσεων στη συγκεκριμένη οικονομία, αντικαθιστούμε στο Ευκλείδειο μοντέλο 7 τις συμβολικές αναλογίες των εσόδων και των εξόδων των νοικοκυριών (β, γ) και των επιχειρήσεων (δ, ε) με τις αντίστοιχες στατιστικές, όπως αυτές επιμετρήθηκαν κατά την ετήσια έρευνα. Ταυτόχρονα, διατηρούμε τα αλγεβρικά σύμβολα:

- για τις εκατοστιαίες αναλογίες των τραπεζικών δαπανών ανάμεσα σε υπηρεσίες (ω), προϊόντα (υ) και ομόλογα (φ), καθώς επίσης

- για την ετήσια προσφορά ρευστότητας (k_f) και την κατανομή της ανάμεσα στα νοικοκυριά (h) και τις επιχειρήσεις (1-h).

Μετά τις πιο πάνω ενέργειες, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε:

(6) **τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz**, ως συναρτήσεις των συντελεστών ω και φ και, άρα, τα όρια των συντελεστών ω και φ, μέσα στα οποία όλες οι $\mathbf{rh_n}$, $\mathbf{n} = 1,\ldots, 6$ είναι θετικές, νοουμένου ότι το σύστημα των έξι πολυώνυμων ανισοτήτων $\mathbf{rh_n} > 0$ λύεται, ως προς ω και φ, με το λογισμικό *Mathematica*.

(7) **με τον Κανόνα του Cramer**, τα έσοδα και τα έξοδα των καταναλωτών (y_h^*, e_h^*), των παραγωγών (y_b^*, e_b^*) και των τραπεζιτών (y_f^*, e_f^*), καθώς επίσης τις ροές ισορροπίας στα παζάρια για υπηρεσίες (ρ_w^*), προϊόντα (ρ_u^*) και ομόλογα (ρ_s^*), ως συναρτήσεις των παραμέτρων νομισματικής πολιτικής (k_f, h).

Η αρμόδια αρχή επιτυγχάνει τα στοχευόμενα αποτελέσματα αν, και μόνο αν, το δυναμικό σύστημα χαρακτηρίζεται από μια μοναδική και σταθερή λύση ισορροπίας $\mathbf{X}^*$. Επομένως, η κεντρική τράπεζα οφείλει, έμμεσα, να καθοδηγεί τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα να κατανέμουν τις δαπάνες τους εντός των ορίων των ω και φ, όπου όλες οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz είναι μεγαλύτερες από το μηδέν. Σε τέτοια περίπτωση διασφαλίζεται, ταυτόχρονα, η ύπαρξη μιας και μοναδικής λύσης, αφού $\mathbf{rh_5} > 0$, $\mathbf{rh_6} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{rh_5} > 0$ και, άρα, $|\mathbf{A}| > 0$.

(8) Έχοντας επιτύχει τη σταθερότητα και, άρα, τη μοναδικότητα του διανύσματος ισορροπίας $\mathbf{X}^*$, μέσω των ω και φ, απομένει να εξασφαλισθεί ότι τα τομεακά έσοδα και έξοδα είναι μεγαλύτερα του μηδενός. Νοουμένου ότι $k_f > 0$, η χρηματοπιστωτική αρχή διαθέτει μόνο την παράμετρο h, για να καταστήσει τις στατικές ροές (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*) μεγαλύτερες από το μηδέν. Ο προαναφερθείς στόχος είναι εφικτός διότι, με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica*, υπολογίζονται τα όρια της κατανομής (h) του νομισματικού παθητικού εντός των οποίων λύνεται το σύστημα των έξι γραμμικών ανισοτήτων:

18 $y_h^*(h)>0,\ e_h^*(h)>0,\ y_b^*(h)>0,\ e_b^*(h)>0,\ y_f^*(h)>0,\ e_f^*(h)>0$

(9) Έχοντας εξασφαλίσει (i) τη μοναδικότητα και (ii) σταθερότητα του διανύσματος ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ μέσω των ω και φ, καθώς επίσης (iii) το θετικό πρόσημο των

συντεταγμένων (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*) μέσω του h, η κεντρική τράπεζα διαθέτει την ετήσια μεταβολή του νομισματικού ισολογισμού k_f για να μεταβάλει τις αγοραπωλησίες ($e_w^* = \rho_w^*$, $e_u^* = \rho_u^*$, $e_s^* = \rho_s^*$) στα παζάρια αγαθών, ώστε οι τελευταίες να συνάδουν με τα διαθέσιμα έτη εργασίας, τεμάχια παραγωγής ή μοναδιαία ομόλογα (q_w^f, q_u^f, q_s^f). Η αρμόδια αρχή μπορεί να επιλέξει να εκμηδενίσει με αυτόν τον τρόπο το χάσμα του αγαθού, στο οποίο προσδίδει προτεραιότητα λόγω πολιτικών, κοινωνικών ή άλλων σκοπιμοτήτων.

Χάριν απλούστευσης, θα υποθέσουμε ότι η ομάδα των μισθωτών περιλαμβάνει περισσότερους ψηφοφόρους από την ομάδα των παραγωγών και των χρηματοπιστωτών και, άρα, οι κυβερνώντες δίνουν περισσότερη σημασία στον πρώτο παρά στους άλλους τομείς. Από τις εξισώσεις **15**, **16** και **17**, βλέπουμε ότι ο τραπεζικός τομέας μπορεί να μεταβάλει την ετήσια προσφορά κατ' εντολήν χρήματος (k_f) μέχρι να καταστήσει τη ζήτηση στο παζάρι εργασίας ($e_w^* = \rho_w^*$) ίση με τον τρέχοντα ετήσιο μισθό (p_w) επί τα διαθέσιμα χρόνια υπηρεσιών (q_w^f), ως ακολούθως:

19

$$\rho_w^*(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \omega, \varphi, h, k_f) = \rho_w^*(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \omega, \varphi, h) \cdot k_f = p_w \cdot q_w^f$$

$$\Rightarrow k_f^f = p_w \cdot q_w^f / \rho_w^*(\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \omega, \varphi, h)$$

Το χάσμα μονάδων ρευστότητας ($q_s^* - q_s^f$) μπορεί να εκμηδενισθεί μέσω αποδεκτών αυξομειώσεων της ονομαστικής αξίας ($p_s = 1/r$) του εγγυημένου ομολόγου. Το προεξοφλητικό επιτόκιο επηρεάζει τη ζήτηση αλλά όχι την προσφορά χρήματος. Εφόσο οι τομεακές ροές (y_h^*, e_h^*; y_b^*, e_b^*; y_f^*, e_f^*) παραμένουν θετικές, το χάσμα τεμαχίων παραγωγής ($q_u^* - q_u^f$) μπορεί να εκμηδενισθεί μέσω αποδεκτών διαφοροποιήσεων των μεριδίων των καταναλωτών (h) και των παραγωγών (1-h) στις χρηματοπιστωτικές πράξεις. Μεσοπρόθεσμα, μόνο μικρές αυξομειώσεις του προεξοφλητικού επιτοκίου ($p_s = 1/r$) και της κατανομής του τραπεζικού παθητικού (h) είναι εφικτές. Συνήθως, η εκμηδένιση των ελλειμμάτων ή / και πλεονασμάτων ($q_w^* - q_w^f$, $q_u^* - q_u^f$, $q_s^* - q_s^f$) των αγαθών απαιτεί βάθος χρόνου, το οποίο είναι αντιστρόφως ανάλογο με την αυτόνομη προσαρμογή των υπόλοιπων παραμέτρων (β, γ; δ, ε; ω, φ; p_w, p_u) στην επίτευξη του ιδίου στόχου.

V. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο εφαρμόζουμε την Ευκλείδεια μεθοδολογία στην περίπτωση μιας στοιχειώδους νομισματικής οικονομίας με την επονομασία **Άλφα**. Υποτίθεται ότι από την ετήσια έρευνα έχουν προκύψει τα ακόλουθα αριθμητικά δεδομένα:

V.1 Τα Στατιστικά Στοιχεία

Τα **καταναλωτικά νοικοκυριά**, λόγω βιολογικών και άλλων εξωγενών παραγόντων, κατανέμουν τα (ετήσια) έσοδα και έξοδά τους ανάμεσα στις εφικτές πηγές και τους δυνητικούς προορισμούς, ως εξής:

Ποσοστό Εισοδήματος από:	Υπηρεσίες $\beta=8/9$	Χρεόγραφα $(1-\beta)=1/9$
Ποσοστό Δαπάνης για:	Προϊόντα $\gamma=7/8$	Χρεόγραφα $(1-\gamma)=1/8$

Οι **παραγωγικές επιχειρήσεις**, εξαιτίας διευθυντικών επιλογών σχετικά με την τεχνολογία, τη ρευστότητα κ.λπ., κατανέμουν τα (ετήσια) έσοδα και έξοδά τους ανάμεσα στις εφικτές πηγές και τους δυνητικούς προορισμούς, ως ακολούθως:

Ποσοστό Εισοδήματος από:	Προϊόντα $\delta=6/7$	Χρεόγραφα $(1-\delta)=1/7$
Ποσοστό Δαπάνης για:	Υπηρεσίες $\varepsilon=5/6$	Χρεόγραφα $(1-\varepsilon)=1/6$

Τα **χρηματοπιστωτικά ιδρύματα**, λόγω θεσμικών προνομίων, απολαμβάνουν το 100% των εσόδων τους από εγγυημένα ομόλογα ενώ, για εξυπηρέτηση πραγματικών αναγκών και διαφόρων συμφερόντων, κατανέμουν τα (ετήσια) έξοδά τους, ως εξής:

Ποσοστό Δαπάνης για: Χρεόγραφα $\varphi={}^{439}/_{3168}$ Υπηρεσίες $\omega=1/2$ Προϊόντα $\upsilon={}^{1145}/_{3168}$

Η **κεντρική και οι λοιπές τράπεζες**, μέσω των αγοραπωλησιών εγγυημένων χρεογράφων, κατανέμουν την ετήσια αύξηση του νομισματικού παθητικού ανάμεσα στους καταναλωτές και τους παραγωγούς, ως ακολούθως:

Ποσοστιαία Αναλογία:	Νοικοκυριά $h=1/2$	Επιχειρήσεις $(1-h)=1/2$

Επιπλέον, στην οικονομία **Άλφα**:

- το δολάριο (\$) αποτελεί τη μονάδα μέτρησης χρηματικών ροών και αποθεμάτων,
- η ετήσια αύξηση του τραπεζικού ισολογισμού είναι $k_f = \$171\,360 \cdot 10^3$ και
- οι ισχύουσες τιμές και οι διαθέσιμες ποσότητες των αγαθών δίδονται στον Πίνακα V_1

Πίνακας V_1
Εξωγενείς Τιμές και Ποσότητες των Αγαθών

ΑΓΑΘΟ	Ισχύουσα Τιμή	Διαθέσιμη Ποσότητα
Έτος Εργατικών Υπηρεσιών	p_w = \$11 700	q_w^f = 6 012 έτη
Τεμάχιο Παραγόμενου Προϊόντος	p_u = \$41,00	q_u^f = 409 836 τεμάχια
Μονάδα Ρευστότητας Ετησίως	p_s = \$11,00	q_s^f = 444 312 ομόλογα

Με τις πιο πάνω πληροφορίες, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα στατικά μεγέθη των τομεακών ροών, τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συμπλέγματος συναλλαγών, καθώς επίσης τα όρια και τις επιπτώσεις της νομισματικής πολιτικής. Αντικαθιστώντας στο μοντέλο **7** τα σύμβολα β, γ, δ και ε με τα αντίστοιχα ποσοστά, προκύπτει το σύστημα:

$$
\begin{aligned}
dy_h/dt &= \{- y_h - (1/7)\cdot y_b + (5/6)\cdot e_b + (\omega+\varphi)\cdot e_f\} \\
de_h/dt &= \{ y_h - k_h - e_h \} \\
dy_b/dt &= \{ - (1/9)\cdot y_h + (7/8)\cdot e_h - y_b + (1-\omega)\cdot e_f\} \\
de_b/dt &= \{ y_b - k_b - e_b \} \\
dy_f/dt &= \{(1/8)\cdot e_h + (1/6)\cdot e_b - y_f\} \\
de_f/dt &= \{ y_f + k_f - e_f \}
\end{aligned}
\qquad \textbf{20}
$$

V.2 Οι Συνθήκες Σταθερότητας

Το **20** αποτελείται από έξι μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές) και, γι' αυτόν το λόγο, μεταβάλλεται στο δυναμικό χώρο ($\boldsymbol{R}^6$, t). Οι συγκρίσεις εναλλακτικών ισορροπιών έχουν νόημα, μόνο όταν το σύμπλεγμα των συναλλαγών είναι σφαιρικά σταθερό. Οι πιο κάτω πίνακες αποδίδουν το ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων, που αντιστοιχεί στο **20**:

$$
\begin{vmatrix} dy_h/dt \\ de_h/dt \\ dy_b/dt \\ de_b/dt \\ dy_f/dt \\ de_f/dt \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1/7 & 5/6 & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 7/8 & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 1/6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix} y_h \\ e_h \\ y_b \\ e_b \\ y_f \\ e_f \end{vmatrix}
= \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{X}
\qquad \textbf{21}
$$

Το μη-ομογενές σύστημα **20** είναι σφαιρικά σταθερό (δηλαδή $\mathbf{dX/dt = 0}$) αν, και μόνον αν, οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz, που αποτελούνται από τους συντελεστές $\mathbf{a_i}$, i=1,.., 6 της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\left| \mathbf{A - \lambda \cdot I} \right|$ του ομογενούς συστήματος **21**, είναι όλες θετικές:

$$\mathbf{22} \qquad \left| \mathbf{A - \lambda \cdot I} \right| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -{}^{1}/_{7} & {}^{5}/_{6} & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^{1}/_{9} & {}^{7}/_{8} & -1-\lambda & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{8} & 0 & {}^{1}/_{6} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \mathbf{\lambda^6}+6\cdot\mathbf{\lambda^5}+({}^{944}/_{63})\cdot\mathbf{\lambda^4}+({}^{30473}/_{1512})\cdot\mathbf{\lambda^3}+({}^{1}/_{1008})\cdot(14779-126\varphi+42\omega)\cdot\mathbf{\lambda^2}+({}^{1}/_{1512})\cdot(7281-350\varphi+$$

$$+127\omega)\cdot\lambda+ (1/_{3024})\cdot(664-763\varphi+2\omega) = \mathbf{a_0}\cdot\lambda^6 + \mathbf{a_1}\cdot\lambda^5 + \mathbf{a_2}\cdot\lambda^4 + \mathbf{a_3}\cdot\lambda^3 + \mathbf{a_4}\cdot\lambda^2 + \mathbf{a_5}\cdot\lambda + \mathbf{a_6} = 0$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών $\mathbf{a_i}$, i = 0,…, 6 του πολυωνύμου **22** στις ελάσσονες του πίνακα **13**, υπολογίζουμε, με τη βοήθεια του *Mathematica*, τις Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz. Στο Παράρτημα **V** μπορούμε, επίσης, να δούμε ότι οι Ορίζουσες $\mathbf{rh_1}$, $\mathbf{rh_2}$ είναι θετικοί αριθμοί, ενώ οι Ορίζουσες $\mathbf{rh_3}$, $\mathbf{rh_4}$, $\mathbf{rh_5}$ και $\mathbf{rh_6}$ είναι συναρτήσεις της κατανομής (ω+υ+φ = 1) των τραπεζικών δαπανών ανάμεσα στους τρεις θεσμικούς τομείς. Επειδή το σύστημα ανισοτήτων $\mathbf{rh_3 > 0}$, $\mathbf{rh_4 > 0}$, $\mathbf{rh_5 > 0}$ και $\mathbf{rh_6 > 0}$ περιλαμβάνει πολυώνυμα τρίτου βαθμού, λύνεται με το λογισμικό *Mathematica* ως προς μία από τις παραμέτρους ω ή φ (εφόσον υ = 1-ω-φ) δεδομένης της άλλης παραμέτρου. Συναφώς, αποδεικνύεται ότι οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz είναι μεγαλύτερες από το μηδέν, όταν:

- $0 < \omega < 1$, δεδομένου ότι $\varphi = {}^{439}/_{3168}$ και
- $0 < \varphi < 0{,}87156$, δεδομένου ότι $\omega = ½$.

Στην περίπτωση της οικονομίας **Άλφα**, όπου $\omega = ½$ και $\varphi = {}^{439}/_{3168}$, αυτές είναι ίσες με: $\mathbf{rh_1} = 6$, $\mathbf{rh_2} = 69{,}751$, $\mathbf{rh_3} = 906{,}766$, $\mathbf{rh_4} = 8733{,}36$, $\mathbf{rh_5} = 42141{,}9$ και $\mathbf{rh_6} = 0{,}184943$. Εξαιτίας τού ότι όλες οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz είναι μεγαλύτερες από το μηδέν, τα έσοδα και έξοδα των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών συγκλίνουν προς το $\mathbf{X^*} = (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*)$, ανεξάρτητα από τις αρχικές τους τιμές. Συνεπώς, οι εισπράξεις και οι πληρωμές στα παζάρια για εργασία, παραγωγή και ρευστότητα τείνουν προς τους στατικούς κύκλους εργασιών $\mathbf{R^*} = \{\rho_w^*, \rho_u^*, \rho_s^*\}$ που αντιστοιχούν στο $\mathbf{X^*}$, από οποιονδήποτε συνδυασμό τομεακών ροών και αν αρχίσουν οι αγοραπωλησίες στην **Άλφα**.

V.3 Οι Λύσεις Ισορροπίας

Το διάνυσμα στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ τής **Άλφα** είναι η λύση του σύγχρονου (χρονικά αμετάβλητου) μη-ομογενούς γραμμικού συστήματος εξισώσεων:

23

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -{}^{1}/_{7} & {}^{5}/_{6} & 0 & \omega+\varphi \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^{1}/_{9} & {}^{7}/_{8} & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{8} & 0 & {}^{1}/_{6} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_h^* \\ e_h^* \\ y_b^* \\ e_b^* \\ y_f^* \\ e_f^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ k_h \\ 0 \\ k_b \\ 0 \\ -k_f \end{vmatrix} = k_f \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ (1-h) \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}^* = \mathbf{K}$$

Σύμφωνα με τον Κανόνα τού Cramer, το $\mathbf{X}^*$ μπορεί να λυθεί σε όρους τών **A** και **K**, νοουμένου ότι η ορίζουσα $|\mathbf{A}| \neq 0$. Τα τομεακά έσοδα και έξοδα, τα οποία απορρέουν από το **23** (υπολογίσθηκαν με το *Mathematica* στο Παράρτημα **V** ως συναρτήσεις των εξωγενών μεταβλητών ω, φ, k_f και h), παρατίθενται ως ακολούθως:

24

$$\begin{aligned}
y_h^* &= (9\cdot k_f)\cdot[40\cdot(-1+7\varphi+\omega)+h\cdot(40-35\varphi+2\omega)] / (664-763\varphi+2\omega) \\
e_h^* &= (8\cdot k_f)\cdot[45\cdot(-1+7\varphi+\omega)+2\cdot h\cdot(-19+28\varphi+\omega)] / (664-763\varphi+2\omega) \\
y_b^* &= (7\cdot k_f)\cdot[5\cdot(8+55\varphi-8\omega)+h\cdot(61\varphi-2\cdot(20+\omega)] / (664-763\varphi+2\omega) \\
e_b^* &= (6\cdot k_f)\cdot[-64+448\varphi-47\omega-2h\cdot(-32+28\varphi+\omega)] / (664-763\varphi+2\omega) \\
y_f^* &= (k_f)\cdot(-109+26h+763\varphi-2\omega) / (664-763\varphi+2\omega) \\
e_f^* &= (k_f)\cdot(555+26h) / (664-763\varphi+2\omega)
\end{aligned}$$

Εύκολα μπορεί να ελεγχθεί ότι $Y^* = (y_h^* + y_b^* + y_f^*) = E^* = (e_h^* + e_b^* + e_f^*)$. Αντικαθιστώντας $\omega = {}^{1}/_{2}$, $\varphi = {}^{439}/_{3168}$, $h = ½$ και $k_f = \$171\ 360\cdot10^3$ στις εξισώσεις **24**, υπολογίζουμε τα εισοδήματα και τις δαπάνες των καταναλωτών ($\$101\ 688\cdot10^3$, $\$16\ 008\cdot10^3$), των παραγωγών ($\$89\ 725\cdot10^3$, $\$4\ 045\cdot10^3$) και των τραπεζιτών ($\$2\ 675\cdot10^3$, $\$174\ 035\cdot10^3$), όταν η **Άλφα** είναι σε στατική ισορροπία. Συνεπώς, $Y^* = E^* = \$194\ 088\cdot10^3$. Από τις εξισώσεις **24**, συμπεραίνεται επίσης ότι στην οικονομία **Άλφα**:

- ο λόγος οποιωνδήποτε δύο ροών στατικής ισορροπίας ($y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*$) είναι αμετάβλητος ως προς την ετήσια μεταβολή του τραπεζικού ισολογισμού k_f,
- οι τομεακές χρηματικές ροές (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*) μεταβάλλονται ευθέως ανάλογα με την ετήσια μεταβολή του τραπεζικού ισολογισμού k_f,

- το έλλειμμα του νομισματικού τομέα (e_f^*-y_f^*) και, άρα, το πλεόνασμα των μη-τραπεζικών τομέων ($y_h^*+y_b^*$)-($e_h^*+e_b^*$) είναι, αμφότερα, αμετάβλητα ως προς το h.

Έπεται ότι πρέπει να καθορισθούν τα όρια της παραμέτρου h, εντός των οποίων οι στατικές ροές των θεσμικών τομέων είναι όλες θετικές. Με τις αντικαταστάσεις $\omega = {}^1/_2$ και $\varphi = {}^{439}/_{3168}$ στις εξισώσεις **24**, λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$
\begin{array}{ll}
y_h^* = (9\ k_f/_{1771763})\cdot(59560+114523\cdot h) & e_h^* = (8\ k_f/_{1771763})\cdot(67005-92632\cdot h) \\
y_b^* = (k_f/_{253109})\cdot(184085-103109\cdot h) & e_b^* = (48\ k_f/_{253109})\cdot(-1438+3125\cdot h) \\
y_f^* = (k_f/_{1771763})\cdot(-13523+82368\cdot h) & e_f^* = (3168\ k_f/_{1771763})\cdot(555+26\cdot h)
\end{array} \qquad \textbf{25}
$$

Νοουμένου ότι $k_f > 0$, το σύστημα έξι ανισοτήτων ($y_h^*>0$, $e_h^*>0$, $y_b^*>0$, $e_b^*>0$, $y_f^*>0$, $e_f^*>0$) λύνεται ως προς την h με το λογισμικό *Mathematica*. Στο Παράρτημα **V** αποδεικνύεται ότι, όταν οι πωλήσεις και οι αγορές χρεογράφων κατανέμονται μεταξύ των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων με τρόπο ώστε $0{,}46016 < h < 0{,}723346$, οι εισπράξεις και οι πληρωμές τόσο των θεσμικών τομέων όσο και των παζαριών αγαθών είναι μεγαλύτερες από το μηδέν. Λαμβάνοντας τις παραγώγους των εξισώσεων **25** ως προς την h, υπολογίζουμε τις ποσοστιαίες μεταβολές των τομεακών ροών, οι οποίες προκαλούνται από ένα τοις εκατό αύξηση (μείωση) του μεριδίου των νοικοκυριών (επιχειρήσεων) στο τραπεζικό παθητικό:

$$
\begin{array}{lll}
\partial y_h^*/y_h^* \,/\, \partial h/h = +1{,}96 & \partial y_b^*/y_b^* \,/\, \partial h/h = -1{,}56 & \partial y_f^*/y_f^* \,/\, \partial h/h = +5{,}95 \\
\partial e_h^*/e_h^* \,/\, \partial h/h = -8{,}95 & \partial e_b^*/e_b^* \,/\, \partial h/h = +50{,}20 & \partial e_f^*/e_f^* \,/\, \partial h/h = +0{,}09
\end{array} \qquad \textbf{26}
$$

Γενικά, οι ελαστικότητες ανταπόκρισης των ($y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*$) σε μικρές αλλαγές των εξωγενών παραμέτρων διευκολύνουν τόσο την κατανόηση του συμπλέγματος συναλλαγών όσο και το σχεδιασμό των κυβερνητικών παρεμβάσεων.

V.4 Η Επαναλαμβανόμενη Κυκλοφορία

Τοποθετώντας τις εξισώσεις **25** στις εξισώσεις **17**, υπολογίζουμε τις ροές ισορροπίας στα παζάρια για εργασία, παραγωγή και ρευστότητα ως συναρτήσεις των k_f και h:

$$
\begin{array}{lll}
\rho_w^* = (8/_{1771763})\cdot(59560+114523\cdot h)\cdot k_f & = \rho_w \cdot k_f = 0{,}52748\cdot k_f = \$90\ 389{,}3\cdot 10^3 \\
\rho_u^* = (6/_{1771763})\cdot(184085-103109\cdot h)\cdot k_f & = \rho_u \cdot k_f = 0{,}44880\cdot k_f = \$76\ 907{,}1\cdot 10^3 \\
\rho_s^* = (2/_{1771763})\cdot(115061+46891\cdot h)\cdot k_f & = \rho_s \cdot k_f = 0{,}15635\cdot k_f = \$26\ 791{,}5\cdot 10^3
\end{array} \qquad \textbf{27}
$$

Στην περίπτωση που h = ½ και k_f = \$171 360·10^3, η ετήσια κυκλοφορία στα τρία παζάρια είναι $\mathbf{R}^* = (\rho_w^*, \rho_u^*, \rho_s^*)$ = (\$90 389,3·10^3, \$76 907,1·10^3, \$26 791,5·10^3). Συνεπώς, ο **ακαθάριστος κύκλος εργασιών** (ΑΚΕ) της οικονομίας ισούται με $R^* = (\rho_w^* + \rho_u^* + \rho_s^*) = Y^* = E^*$ = \$194 088·10^3. Οι ακόλουθοι πίνακες παρουσιάζουν ομαδοποιημένα τα αποτελέσματα που αποδίδει το μοντέλο **20**, σύμφωνα με τα στατιστικά δεδομένα τής **Άλφα**. Στον Πίνακα V_2 παρατηρούμε ότι ο ΑΚΕ της οικονομίας προέρχεται από τις υπηρεσίες κατά 46,6%, τα προϊόντα κατά 39,6% και τα χρεόγραφα κατά 13,8%. Οι καταναλωτές, οι παραγωγοί και οι τραπεζίτες εισπράττουν το 52,4%, το 46,2% και το 1,4% του ετήσιου εισοδήματος, ενώ εκταμιεύουν το 8,3%, το 2,1% και το 89,7% της ετήσιας δαπάνης τής **Άλφα**, αντίστοιχα.

Πίνακας V_2
Χρηματικές Ροές Ισορροπίας Τομέων και Παζαριών

ΤΟΜΕΙΣ→ / ΑΓΑΘΑ↓	ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ		ΤΡΑΠΕΖΕΣ		ΑΚΕ Παζαριού	
ΕΙΣΟΔΗΜΑ ΑΠΟ:	**%**	**S·10^3**	**%**	**S·10^3**	**%**	**S·10^3**	**%**	**S·10^3**
Εργασία	88,9	90 389	-	-	-	-	46,6	90 389
Παραγωγή	-	-	85,7	76 907	-	-	39,6	76 907
Ρευστότητα	11,1	11 299	14,3	12 818	100	2 675	13,8	26 792
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΜΕΡΙΑΙΟ	*52,4*	*101 688*	*46,2*	*89 725*	*1,4*		*100,0*	*194 088*
ΔΑΠΑΝΗ ΣΕ:	**%**	**S·10^3**	**%**	**S·10^3**	**%**	**S·10^3**	**%**	**S·10^3**
Εργασία	-		83,3	3 371	50,0	87 018	46,6	90 389
Παραγωγή	87,5	14 007	-	-	36,1	62 900	39,6	76 907
Ρευστότητα	12,5	2 001	16,7	674	13,9	24 117	13,8	26 792
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΜΕΡΙΑΙΟ	*8,3*	*16 008*	*2,1*	*4 045*	*89,7*	*174 035*	*100,0*	*194 088*
Ετήσιο Πλεόνασμα (Έλλειμμα) Τομέα		**+85 680**		**+85 680**		**-171 360**		-

Τα έσοδα και τα έξοδα κάθε θεσμικού τομέα διαφέρουν κατά το μερίδιό του στις πράξεις νομισματικής πολιτικής k_f. Σύμφωνα με τις θεμελιώδεις υποθέσεις μας, τα τραπεζικά ιδρύματα αγοράζουν και πωλούν τα εγγυημένα ομόλογα, τα οποία εκδίδουν τα ίδια, και, άρα, ο κύκλος εργασιών τους δε συμπίπτει με την προστιθέμενη αξία του νομισματικού τομέα. Για να υπολογίσουμε την **καθαρή προστιθέμενη αξία** $ΚΠΑ_f$ του τραπεζικού τομέα,

πρέπει να λάβουμε υπόψη μόνο τις εισπράξεις του από τρίτους, δηλαδή:

28 $\text{ΚΠΑ}_f = y_f^* - \varphi \cdot e_f^*$

Στους ακόλουθους πίνακες φαίνεται ότι ο ΑΚΕ = R^* ισούται με \$194 088·10^3, ενώ η ΚΠΑ = V^* της οικονομίας ισούται με \$169 971·10^3. Συναφώς, βλέπουμε ότι οι αγοραπωλησίες:

- υπηρεσιών δημιουργούν το 46,6% τού ΑΚΕ σε σύγκριση με το 53,2% τής ΚΠΑ,
- προϊόντων δημιουργούν το 39,6% τού ΑΚΕ σε σχέση με το 45,2% τής ΚΠΑ,
- ομολόγων δημιουργούν το 13,8% τού ΑΚΕ σε αντίθεση με το 1,6% τής ΚΠΑ.

Πίνακας V_3
Καθαρή Προστιθέμενη Αξία κατά Τομέα και Παζάρι

ΤΟΜΕΙΣ→ / ΑΓΑΘΑ↓	ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ		ΤΡΑΠΕΖΕΣ		ΚΠΑ Παζαριού	
ΕΙΣΟΔΗΜΑ ΑΠΟ:	**%**	**\$·10^3**	**%**	**\$·10^3**	**%**	**\$·10^3**	**%**	**\$·10^3**
Εργασία	88,9	90 389	-	-	-	-	53,2	90 389
Παραγωγή	-	-	85,7	76 907	-	-	45,2	76 907
Ρευστότητα	11,1	11 299	14,3	12 818	100,0	2 675		
μείον ίδια έξοδα						-24 117	1,6	2 675
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΜΕΡΙΔΙΟ	*59,8*	*101 688*	*52,8*	*89 725*	*-12,6*	*-21 442*	*100,0*	*169 971*
ΔΑΠΑΝΗ ΣΕ:	**%**	**\$·10^3**	**%**	**\$·10^3**	**%**	**\$·10^3**	**%**	**\$·10^3**
Εργασία	-		83,3	3 371	50,0	87 018	53,2	90 389
Παραγωγή	87,5	14 007	-	-	36,1	62 900	45,2	76 907
Ρευστότητα	12,5	2 001	16,7	674	13,9	24 117		
μείον ίδια έσοδα						-24 117	1,6	2 675
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΜΕΡΙΔΙΟ	*9,4*	*16 008*	*2,4*	*4 045*	*88,2*	*149 918*	*100,0*	*169 971*
Ετήσιο Πλεόνασμα (Έλλειμμα) Τομέα		**+85 680**		**+85 680**		**-171 360**		-

Διαιρώντας τις χρηματικές ροές, στις οποίες ισορροπούν προσφορά και ζήτηση για εργασία, παραγωγή και ρευστότητα, με το μισθό, την τιμή ή την αξία που αντιστοιχεί, υπολογίζουμε τα έτη υπηρεσιών, τα τεμάχια προϊόντων και τα μοναδιαία ομόλογα, που

τείνουν να πωλούνται και να αγοράζονται στη διάρκεια του χρόνου:

$$q_w^* = \rho_w^* / p_w = \$90\,389{,}3 \cdot 10^3 / \$11\,700 = 7\,725{,}6 \text{ έτη υπηρεσιών},$$

29 $$q_u^* = \rho_u^* / p_u = \$76\,907{,}1 \cdot 10^3 / \$41 = 1\,875{,}8 \cdot 10^3 \text{ τεμάχια προϊόντων}$$

$$q_s^* = \rho_s^* / p_s = \$26\,791{,}5 \cdot 10^3 / \$11 = 2\,435{,}6 \cdot 10^3 \text{ μονάδες ομολόγων}$$

V.5 Ελλείμματα και Πλεονάσματα

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται τα χάσματα των ετών εργασίας, τεμαχίων παραγωγής και μονάδων ρευστότητας που, μεσοπρόθεσμα, επικρατούν στην **Άλφα**:

Πίνακας V_4
Συνολική Ζήτηση και Διαθέσιμη Ποσότητα των Αγαθών

	ΕΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑΣ		ΤΕΜΑΧΙΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ		ΜΟΝΑΔΕΣ ΡΕΥΣΤΟΤΗΤΑΣ	
Συνολική Ζήτηση		7 725,6		$1\,875{,}8 \cdot 10^3$		$2\,435{,}6 \cdot 10^3$
Διαθέσιμη Ποσότητα	6 012,0		$409{,}8 \cdot 10^3$		$444.3 \cdot 10^3$	
Πλεόνασμα (Έλλειμμα)		- 1 713,6		$-\,1\,466 \cdot 10^3$		$-\,1\,991{,}3 \cdot 10^3$

Αφαιρώντας από τις διαθέσιμες ποσότητες τις ζητούμενες ποσότητες υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων λαμβάνουμε το πλεόνασμα (+) ή έλλειμμα (-) του αντίστοιχου αγαθού, στη διάρκεια του χρόνου:

$$q_w^f - q_w^* = 6\,012 - 7\,725{,}6 = -\,1\,713{,}6 \text{ έτη υπηρεσιών}$$

30 $$q_u^f - q_u^* = 409{,}8 \cdot 10^3 - 1\,875{,}8 \cdot 10^3 = -\,1\,466 \cdot 10^3 \text{ τεμάχια προϊόντων}$$

$$q_s^f - q_s^* = 444{,}3 \cdot 10^3 - 2\,435{,}6 \cdot 10^3 = -\,1\,991{,}3 \cdot 10^3 \text{ μονάδες ομολόγων}$$

Η **Άλφα** χαρακτηρίζεται από υπερβάλλουσα ζήτηση σε κάθε παζάρι. Συνεπώς, υπό τις περιστάσεις, δεν υπάρχουν αντικρουόμενα συμφέροντα μεταξύ αμειβομένων και μη-αμειβομένων ιδιοκτητών, αφού το έλλειμμα στο παζάρι:

- των υπηρεσιών ανέρχεται στο 28,5% του διαθέσιμου εργατικού δυναμικού,
- των προϊόντων είναι 3,6 φορές μεγαλύτερο από τα διαθέσιμα τεμάχια, και
- των ομολόγων είναι 4,5 φορές μεγαλύτερο από το διαθέσιμο αριθμό τους.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις **25, 29** και **30**, βλέπουμε ότι τα χάσματα των αγαθών συνιστούν ένα σύστημα τριών ενδογενών μεταβλητών, που είναι συναρτήσεις των τριών παραμέτρων πολιτικής (k_F, h, p_s=1/r), του μισθού ανά έτος εργασίας (p_w) και της τιμής ανά

τεμάχιο παραγωγής (p_u), ως εξής:

$$
\begin{aligned}
& q_w^f - q_w^* = q_w^f - (\rho_w^* / p_w) = 6012 - (8k_f /_{1771763})\cdot(59560+114523\cdot h) / p_w \\
\mathbf{31} \qquad & q_u^f - q_u^* = q_u^f - (\rho_u^* / p_u) = 409{,}8\cdot 10^3 - (6k_f /_{1771763})\cdot(184085-103109\cdot h) / p_u \\
& q_s^f - q_s^* = q_s^f - (\rho_s^* / p_s) = 444{,}3\cdot 10^3 - (2k_f /_{1771763})\cdot(115061+46891\cdot h) / p_s
\end{aligned}
$$

Με δεδομένες τις στατιστικές οποιωνδήποτε δύο από τις πέντε (k_f, h, p_s=1/r; p_w, p_u) εξωγενείς μεταβλητές, μπορούμε να λύσουμε το σύστημα **31** για τα μεγέθη των άλλων τριών, τα οποία εκμηδενίζουν τα ποσοτικά χάσματα των αγαθών, ταυτόχρονα. Συγκεκριμένα, η κεντρική τράπεζα μπορεί να εκκαθαρίσει ένα από τα τρία παζάρια, μεταβάλλοντας την ετήσια αύξηση της συνολικής ρευστότητας k_f. Για να εκμηδενισθούν τα ελλείμματα των άλλων δύο αγαθών, πιθανό να χρειάζεται (i) να ανακατανεμηθούν οι (καθαρές) τραπεζικές πιστώσεις μεταξύ νοικοκυριών h και επιχειρήσεων 1-h, (ii) να μεταβληθεί το προεξοφλητικό επιτόκιο ή η αξία των χρεογράφων p_s=1/r, καθώς επίσης (iii) να αυξηθούν ο μισθός των εργαζομένων p_w και η τιμή των προϊόντων p_u. Όταν οι αρμόδιοι δε διαθέτουν το επακριβές υπόδειγμα του συμπλέγματος συναλλαγών, τότε αδυνατούν να υπολογίσουν τις παραμέτρους νομισματικής πολιτικής που απαιτούνται για εξάλειψη των ποσοτικών χασμάτων και, άρα, βασίζονται στην ευκαμψία των μισθών και των τιμών, για να επιτύχουν τον προαναφερθέντα στόχο.

Στην οικονομία **Άλφα**, τα αντίτιμα εργασίας, παραγωγής και ρευστότητας $\mathbf{P^f} = (p_w^f, p_u^f, p_s^f)$ που θεωρητικά θα εξίσωναν τις ποσότητες που ζητούνται $\mathbf{Q^*} = (q_w^*, q_u^*, q_s^*)$ με τις ποσότητες που διατίθενται $\mathbf{Q^f} = (q_w^f, q_u^f, q_s^f)$, υπολογίζονται, μέσω των **31**, ως ακολούθως:

$$\mathbf{32} \qquad \rho_w^* / q_w^f = p_w^f = \$15\,034{,}8 \qquad \rho_u^* / q_u^f = p_u^f = \$187{,}7 \qquad \rho_s^* / q_s^f = p_s^f = \$60{,}3$$

V.6 Η Πολυμορφία του Πληθωρισμού

Εάν οι ιθύνοντες τής **Άλφα** αφήσουν τα πράγματα να εξελιχθούν από μόνα τους, τότε οι μισθοί των εργαζομένων, οι τιμές των προϊόντων και οι αξίες των χρεογράφων θα ανεβαίνουν, μέχρις ότου εξαλειφθεί η υπερβάλλουσα ζήτηση σε όλα τα παζάρια σε ένα χρόνο, σύμφωνα με τις εξισώσεις **32**. Όμως, σε όλα τα οικονομικά, κοινωνικά και πολιτικά συστήματα υπάρχουν αποδεκτά όρια ετήσιας μεταβολής των μισθών, τιμών και αξιών και, άρα, είναι απίθανο οι αρχές να αφήσουν τα αντίτιμα της εργασίας, της παραγωγής και της ρευστότητας να αυξηθούν κατά 39,9%, 357,7% και 448,2%, αντίστοιχα, για να εκκαθαρισθούν όλα τα παζάρια σε ένα χρόνο. Στην περίπτωση της

οικονομίας **Άλφα**, ο ετήσιος ρυθμός πληθωρισμού (δηλαδή η εκατοστιαία μεταβολή του δείκτη της αξίας του αρχικού καλαθιού υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων) τείνει να ανέλθει στο 110,9% και υπολογίζεται ως εξής:

Πίνακας V_5
Υπολογισμός του Δυνητικού Ρυθμού Πληθωρισμού

	Μισθός x Έτη Υπηρεσιών = S x 10^3	Τιμή x Τεμάχια Προϊόντων = S x 10^3	Αξία x Μονάδες Ομολόγων = S x 10^3	Συνολικό Καλάθι = S x 10^3
Έτος 0	11700,0x6012 = 70340	41,0x409836 = 16803	11,0x444312 = 4887	92030
Έτος 1	15034,8x6012 = 90389	187,6x409836 = 76907	60,3x444312 = 26792	194088
Δείκτης 1 - Δείκτης 0 ÷ Δείκτης 0	(139,9 – 100) ÷100 = 39,9%	(457,7 – 100) ÷100 = 357,7%	(548,9 – 100) ÷ 100 = 448,9%	(210,9 – 100) ÷ 100 = 110,9%

Από τον Πίνακα V_5 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε αγαθό υπάρχει ξεχωριστός ρυθμός πληθωρισμού, τον οποίο ο κάθε τομέας αντιμετωπίζει διαφορετικά, ανάλογα με το αν ενεργεί ως πωλητής ή αγοραστής του συγκεκριμένου αγαθού. Η μεταβολή της αξίας ενός καλαθιού, το οποίο περιλαμβάνει έτη υπηρεσιών, τεμάχια προϊόντων και μονάδες ομολόγων, μπορεί να σταθμισθεί με πολλούς επιστημονικούς τρόπους ή στατιστικούς δείκτες. Στο στοιχειώδες σύμπλεγμα συναλλαγών, εύκολα μπορούν να υπολογισθούν:

- τέσσερεις δείκτες πληθωρισμού, οι οποίοι αφορούν τα τρία αγαθά που πωλούνται και αγοράζονται από τους θεσμικούς τομείς και το σύνολο της οικονομίας.
- έξι δείκτες συναλλακτικής δύναμης (purchasing power indices) οι οποίοι αφορούν τα εισοδήματα και τις δαπάνες των τριών θεσμικών τομέων.

V.7 Η Στρατηγική και η Τακτική

Οι δυνητικοί ρυθμοί μεταβολής των μισθών, των τιμών και των αξιών είναι συναρτήσεις διαφόρων παραγόντων, μεταξύ των οποίων είναι και ο ρυθμός αύξησης του τραπεζικού ισολογισμού. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε ένα σενάριο σταδιακού αποπληθωρισμού της οικονομίας **Άλφα** χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια μεθοδολογία. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι οι αρμόδιοι, μετά από εμπειρικούς υπολογισμούς, αποφάσισαν:

- κατά τη διάρκεια του πρώτου έτους, να μειώσουν την ετήσια αύξηση της συνολικής ρευστότητας μέχρι πλήρους εξισορρόπησης του παζαριού εργασίας και να επιτρέψουν το διπλασιασμό της τιμής του προϊόντος και του χρεογράφου.

- κατά τη διάρκεια του δεύτερου έτους, να επιτρέψουν την περαιτέρω άνοδο της τιμής του προϊόντος και του χρεογράφου μέχρι πλήρους εξισορρόπησης των ποσοτήτων που ζητούνται και προσφέρονται στα αντίστοιχα παζάρια.

Στο τέλος του πρώτου χρόνου, μετά τη μείωση της ετήσιας αύξησης της συνολικής ρευστότητας κατά 22,2% (από \$171 360·10^3 σε \$133 318·10^3), το διπλασιασμό της τιμής του προϊόντος (από \$41 σε \$82) και τη μείωση του επιτοκίου στο μισό (από 9,09% σε 4,54%), το σύμπλεγμα συναλλαγών θα συγκλίνει νομοτελειακά προς τα ακόλουθα μεγέθη:

Πίνακας V_6
Επιπτώσεις στην Ισορροπία από τη Μείωση των k_f, r και την Αύξηση της p_u

	1	2	1 ÷ 2	3	3 – (1 ÷ 2)
ΠΑΖΑΡΙ	**Κυκλοφορούσα Χρηματική Ροή S·10^3**	**Ισχύουσα Μοναδιαία Τιμή S**	**Σταθερά Ζητούμενη Ποσότητα**	**Συνολική Διαθέσιμη Ποσότητα**	**Πλεονάζουσα (Ελλείπουσα) Ποσότητα**
Υπηρεσιών	70 340,4	11 700	6 012 έτη	6 012 έτη	-
Προϊόντων	59 796,5	82,0	729 226 τεμ.	409 836 τεμ.	(319 390) τεμ.
Ομολόγων	20 838,4	22,0	947 200 μον.	444 312 μον.	(502 888) μον.

Πίνακας V_7
Υπολογισμός του Ρυθμού Πληθωρισμού κατά το Έτος **1**

	Μισθός x Έτη Υπηρεσιών = S x 10^3	**Τιμή x Τεμάχια Προϊόντων = S x 10^3**	**Αξία x Μονάδες Ομολόγων = S x 10^3**	**Συνολικό Καλάθι = S x 10^3**
Έτος 0	11700x6012=70340	41x409836=16803	11x444312=4887	92030
Έτος 1	11700x6012=70340	82x409836=33606	22x444312=9774	113720
Δείκτης 1 - Δείκτης 0 ÷ Δείκτης 0	(100 – 100) ÷100 = 0,0%	(200 – 100) ÷100 = 100,0%	(200 – 100) ÷ 100 = 100,0%	(123,6 – 100) ÷ 100 = 23,6%

Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι αρμόδιες αρχές έχουν επιτύχει:

- την εξισορρόπηση της προσφοράς και της ζήτησης των ετών εργασίας,
- τη μείωση του ελλείμματος προϊόντων από 1 465 944 σε 319 390 τεμάχια,
- τη μείωση του ελλείμματος ομολόγων από 1 991 324 σε 502 888 μονάδες,
- τη μείωση του ρυθμού πληθωρισμού από 110,9% στο 23,6%.

Στο τέλος του δεύτερου χρόνου, με την πλήρη εφαρμογή της προγραμματισθείσας πολιτικής, η εικόνα της οικονομίας **Άλφα** δίνεται από τους Πίνακες V_8 και V_9:

Πίνακας V_8
Επιπτώσεις από την Αύξηση της p_u και τη Μείωση του r

	1	2	1 ÷ 2	3	3 – (1 ÷ 2)
ΠΑΖΑΡΙ	**Κυκλοφορούσα Χρηματική Ροή $S \cdot 10^3$**	**Ισχύουσα Μοναδιαία Τιμή S**	**Σταθερά Ζητούμενη Ποσότητα**	**Συνολική Διαθέσιμη Ποσότητα**	**Πλεονάζουσα (Ελλείπουσα) Ποσότητα**
Υπηρεσιών	70 340,4	11 700	6 012 έτη	6 012 έτη	-
Προϊόντων	59 796,5	145,9	409 836 τεμ.	409 836 τεμ.	-
Ομολόγων	20 838,1	46,9	444 312 μον.	444 312 μον.	-

Πίνακας V_9
Υπολογισμός του Ρυθμού Πληθωρισμού κατά το Έτος **2**

	Μισθός x Έτη Υπηρεσιών = S x 10^3	**Τιμή x Τεμάχια Προϊόντων = S x 10^3**	**Αξία x Μονάδες Ομολόγων = S x 10^3**	**Συνολικό Καλάθι = S x 10^3**
Έτος 1	11700x6012 = 70340	82x409836 = 33606	22x444312 = 9774	113720
Έτος 2	11700x6012 = 70340	145,9x409836 = 59795	46,9x444312 = 20838	150973
Δείκτης 2 - Δείκτης 1 ÷ Δείκτης 1	(100 – 100) ÷100 = 0,0%	(177,9 – 100) ÷100 = 77,9%	(213,2 – 100) ÷ 100 = 113,2%	(132,7 – 100) ÷ 100 = 32,7%

Με τη στρατηγική που υιοθέτησαν, οι αρμόδιοι πέτυχαν να εκμηδενίσουν όλα τα ποσοτικά ελλείμματα της οικονομίας **Άλφα**, ανεβάζοντας την αξία του σταθμισμένου καλαθιού υπηρεσιών, προϊόντων και χρεογράφων κατά 23,6% τον πρώτο χρόνο και 32,7% το δεύτερο χρόνο, δηλαδή από τις 100 στις 164 μονάδες. Αν οι αρχές δεν παρενέβαιναν, τα ποσοτικά ελλείμματα θα εξαφανίζονταν από μόνα τους μέσω της ανόδου του δείκτη της αξίας του καλαθιού των αγαθών κατά 110,9%, δηλαδή από τις 100 στις 210,9 μονάδες, σε ένα έτος. Η διαφορά των 210,9 - 164,0 = 46,9 εκατοστιαίων μονάδων οφείλεται κυρίως στη μείωση των καθαρών εκταμιεύσεων του νομισματικού τομέα και, άρα, των καθαρών αποταμιεύσεων των μη-τραπεζικών τομέων, από $\$171\ 360 \cdot 10^3$ ετησίως σε $\$133\ 318 \cdot 10^3$ για δύο συνεχή χρόνια. Νοουμένου ότι, μεσοπρόθεσμα, το προεξοφλητικό επιτόκιο δεν επηρεάζει την προσφορά χρήματος και, άρα, τις τομεακές ροές, στο Κεφάλαιο **IX** θα μελετήσουμε, με περισσότερη λεπτομέρεια, την επίδραση του προεξοφλητικού επιτοκίου στο χάσμα ρευστότητας και στο ρευστοποιήσιμο πλούτο του συμπλέγματος συναλλαγών.

Αναμφίβολα, κατά τη διάρκεια του οικονομικού κύκλου, μερικά αγαθά υπόκεινται σε υπερβάλλουσα ζήτηση, ενώ για κάποια άλλα υπάρχει υπερβάλλουσα προσφορά. Όταν οι

αρμόδιες αρχές δε διαθέτουν ένα αξιόπιστο οικονομικό μοντέλο, όπως το **20**, αδυνατούν να υπολογίσουν, μεταξύ άλλων, την **αύξηση** του τραπεζικού παθητικού και την **κατανομή** του ανάμεσα στους μη-εκδοτικούς τομείς, ώστε να εκκαθαρισθούν τα παζάρια εργασίας και παραγωγής του συγκεκριμένου συμπλέγματος συναλλαγών. Συνεπώς, οι ίδιοι:

- ασκούν ηθική πίεση στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις όπως διαπραγματεύονται με ελαστικότητα τους μισθούς p_w και τις τιμές p_u που τους αφορούν,
- προβάλλουν την ευκαμψία μισθών και τιμών ως το καλύτερο μέσο εξισορρόπησης των ζητούμενων με τις διαθέσιμες ποσότητες υπηρεσιών και προϊόντων.

Οι σύγχρονες κυβερνήσεις, πιεζόμενες από τους ενδιαφερομένους, παρακολουθούν τις αγοραίες εξελίξεις και δεν επιτρέπουν, κυρίως, στα χάσματα των ετών εργασίας και των τεμαχίων παραγωγής να ξεπεράσουν κάποια πολιτικά ή κοινωνικά αποδεκτά όρια. Υπό τις προαναφερθείσες περιστάσεις, δηλαδή όταν δεν υπάρχουν υπολογίσιμα ελλείμματα ή πλεονάσματα στα παζάρια υπηρεσιών και προϊόντων, κάθε κεντρική τράπεζα επικεντρώνεται στο χάσμα ζήτησης και προσφοράς ετήσιας ρευστότητας στο εθνικό νόμισμα, το οποίο ρυθμίζει μέσω αυξομειώσεων του προεξοφλητικού επιτοκίου.

V.8 Οι Χρηματοοικονομικοί Λογαριασμοί

Στο Κεφάλαιο **IX** θα εξηγήσουμε περισσότερο το ρόλο που διαδραματίζει το προεξοφλητικό επιτόκιο στο σύμπλεγμα συναλλαγών και στη νομισματική πολιτική. Οι καταναλωτές, οι παραγωγοί και οι τραπεζίτες ενδιαφέρονται για το προεξοφλητικό επιτόκιο, διότι είναι απολύτως αναγκαίο για την αξιολόγηση του χρηματοοικονομικού ισολογισμού τους και, άρα, του μεριδίου τους στον καθαρό πλούτο του συστήματος. Ανάμεσα σε άλλα, το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι ο συνδετικός κρίκος ανάμεσα στις ετήσιες χρηματικές ροές και τις παρούσες αξίες των στοιχείων ενεργητικού και παθητικού. Το αντίστροφο του προεξοφλητικού επιτοκίου ($p_s = 1/r$) επί τα ετήσια έσοδα και έξοδα έκαστου θεσμικού τομέα αποδίδει τις παρούσες αξίες των αντίστοιχων ροών. Π.χ., εάν υποτεθεί ότι η αύξηση του τραπεζικού ισολογισμού k_f είναι $171 360·10^3 ετησίως και ότι το προεξοφλητικό επιτόκιο r είναι 10% το χρόνο, τότε οι κατανομές των εισοδημάτων και των δαπανών της οικονομίας **Άλφα**, που αναλύθηκαν στον Πίνακα ***V2***, είναι πανομοιότυπες με τις κατανομές των στοιχείων ενεργητικού και παθητικού, που παρατίθενται πιο κάτω:

Πίνακας V_{10}
Οι Χρηματοοικονομικές Καταστάσεις των Θεσμικών Τομέων

Θεσμικοί Τομείς→ / Παζάρια Αγαθών↓	ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ		ΤΡΑΠΕΖΕΣ		ΣΥΝΟΛΟ	
ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟ ΑΠΟ:	%	$S \cdot 10^4$	%	$S \cdot 10^4$	%	$S \cdot 10^4$	%	$S \cdot 10^4$
Εργασία	88,9	90 389	-	-	-	-	46,6	90 389
Παραγωγή	-	-	85,7	76 907	-	-	39,6	76 907
Ρευστότητα	11,1	11 299	14,3	12 818	100	2 675	13,8	26 792
ΜΕΡΙΑΙΟ ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟΥ	*52,4*	*101 688*	*46,2*	*89 725*	*1,4*		*100,0*	*194 088*
ΠΑΘΗΤΙΚΟ ΑΠΟ:	%	$S \cdot 10^4$	%	$S \cdot 10^4$	%	$S \cdot 10^4$	%	$S \cdot 10^4$
Εργασία	-		83,3	3 371	50,0	87 018	46,6	90 389
Παραγωγή	87,5	14 007	-	-	36,1	62 900	39,6	76 907
Ρευστότητα	12,5	2 001	16,7	674	13,9	24 117	13,8	26 792
ΜΕΡΙΑΙΟ ΠΑΘΗΤΙΚΟΥ	*8,3*	*16 008*	*2,1*	*4 045*	*89,7*	*174 035*	*100,0*	*194 088*
Καθαρός Πλούτος		**+85 680**		**+85 680**		**-171 360**		-
Ποσοστιαίο Μερίδιο	50,0		50,0		-100,0			

Ο Πίνακας V_{10} δείχνει ότι οι καταναλωτές, οι παραγωγοί και οι τραπεζίτες απολαμβάνουν το 52,4%, το 46,2% και το 1,4% των οικονομικών δικαιωμάτων, ενώ επιβαρύνονται με το 8,3%, το 2,1% και το 89,7% των οικονομικών υποχρεώσεων, αντίστοιχα. Ο καθαρός (νομισματικός) πλούτος ανήκει εξίσου στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις, ενώ οι συνακόλουθες πληρωμές επιβαρύνουν μόνο τον τραπεζικό τομέα, εξαιτίας των γνωστών θεσμικών διευθετήσεων που αποτελούν την κινητήρια δύναμη της οικονομίας **Άλφα**.

Μεσοπρόθεσμα, το σύμπλεγμα συναλλαγών χαρακτηρίζεται από μοναδικά, σταθερά και θετικά στοιχεία ενεργητικού και παθητικού, τα μεγέθη των οποίων μεταβάλλονται ανάλογα με τις κατανομές των τομεακών εσόδων και εξόδων, καθώς επίσης ανάλογα με τις χρηματοπιστωτικές πράξεις του νομισματικού συστήματος. **Μακροχρόνια**, οι ετήσιες ροές από και προς τους καταναλωτές (y_h, e_h), τους παραγωγούς (y_b, e_b) και τους τραπεζίτες (y_f, e_f) αλληλεπηρεάζονται και διαμορφώνονται στο ίδιο δυναμικό σύστημα με τις αγοραίες συμπεριφορές (β, γ, δ, ε, ω, φ), τις παραμέτρους πολιτικής (k_f, h), καθώς επίσης τα αντίτιμα (p_w, p_u, p_s) και τις ποσότητες (q_w^f, q_u^f, q_s^f) των αγαθών.

V.9 Το Ενδιάμεσο Συμπέρασμα

Αρχίζοντας από οποιαδήποτε κατανομή του καθαρού πλούτου $\mathbf{\Omega^0} = \{(y_h^0 - e_h^0)/r, (y_b^0 - e_b^0)/r, (y_f^0 - e_f^0)/r)\}$, λαμβάνοντας τις εξωγενείς στατιστικές από τις σχετικές έρευνες και τροποποιώντας τις παραμέτρους πολιτικής όπως δικαιολογείται, η Ευκλείδεια μεθοδολογία μάς επιτρέπει να πραγματοποιούμε ετήσιες προβλέψεις, αλλά και πολυετείς προβολές, αναφορικά με ενδογενείς μεταβλητές, όπως:

- οι χρηματικές ροές των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών,
- τα ποσοτικά χάσματα των υπηρεσιών, των προϊόντων και των ομολόγων,
- οι δυνητικοί ρυθμοί αύξησης ή μείωσης των μισθών, των τιμών και των αξιών.

Το διάνυσμα $\mathbf{\Omega^0} = \{(y_h^0 - e_h^0)/r, (y_b^0 - e_b^0)/r, (y_f^0 - e_f^0)/r)\}$ της αρχικής κατανομής του καθαρού πλούτου ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς, μπορεί να είναι το αποτέλεσμα μιας γεωγραφικής ή επιστημονικής ανακάλυψης, μιας φυσικής ή πολεμικής καταστροφής ή άλλου είδους πραγματικού ή υποθετικού κλονισμού των στοιχείων ενεργητικού και παθητικού των θεσμικών τομέων τής υπό μελέτην οικονομίας.

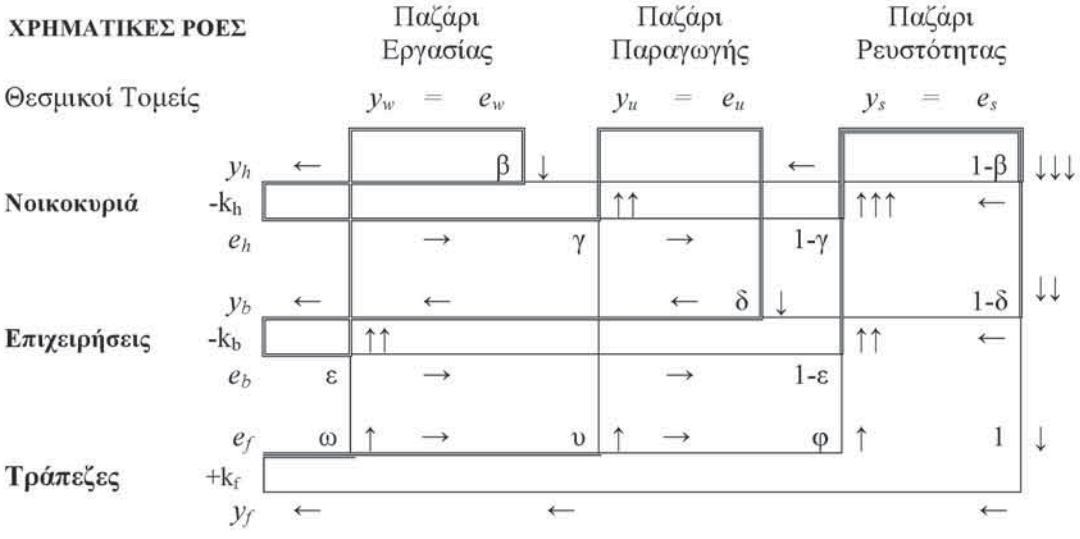
Οι Πίνακες V_2 μέχρι V_{10}, επιβεβαιώνουν ότι, ανάλογα με το βαθμό υποδιαίρεσης του συμπλέγματος συναλλαγών σε θεσμικούς τομείς και παζάρια αγαθών, τα μαθηματικά οικονομικά μοντέλα του γενικού τύπου $\mathbf{dX/dt = A \cdot X - K}$, μπορούν να αναπαραγάγουν και να απεικονίσουν με ρεαλισμό οποιοδήποτε σύμπλεγμα συναλλαγών, όπως την **Άλφα**.

VI. ΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΧΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΓΑΘΩΝ

Τα υποδείγματα τα οποία κτίζονται βάσει των 12 αξιωματικών προτάσεων, αποτελούνται από μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές). Εξαιτίας των κοινών χαρακτηριστικών τους, αυτά μπορούν να μελετηθούν διεξοδικά με την εφαρμογή της ίδιας μαθηματικής μεθοδολογίας. Συγκεκριμένα:

- το διάνυσμα στατικής ισορροπίας (steady state) του καθενός από αυτά αποτελεί τη λύση του συστήματος των σύγχρονων εξισώσεων, που αντιστοιχεί στο σύστημα μη-ομογενών διαφορικών εξισώσεων,
- οι συνθήκες δυναμικής σταθερότητας του καθενός από αυτά καθορίζονται από τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυώνυμου του αντίστοιχου συστήματος ομογενών διαφορικών εξισώσεων.

Σχεδιάγραμμα 1
Τα Κυκλώματα Ροών της Στοιχειώδους Νομισματικής Οικονομίας



Ταυτόχρονα, κάθε οικονομία μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σύνολο κυκλωμάτων υπηρεσιών, προϊόντων και χρεογράφων, ο αριθμός των οποίων εξαρτάται από τον αριθμό:

- των τομέων που ζητούν ρευστότητα πωλώντας, και προσφέρουν ρευστότητα για να αγοράσουν εργασία και παραγωγή,
- των διαφόρων ειδών αγαθών, καθένα από τα οποία αγοράζεται και πωλείται από τους τομείς σε ιδιαίτερο παζάρι.

Συναφώς, υπενθυμίζεται ότι η ετήσια μεταβολή του νομισματικού ισολογισμού (k_f) κατανέμεται ως παθητικό των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων (k_f) και ως ενεργητικό των νοικοκυριών (k_h) και των επιχειρήσεων (k_b), σύμφωνα με τις ακόλουθες εξισώσεις:

(a) $e_f - y_f = k_f = (y_h - e_h) + (y_b - e_b) = k_h + k_b > 0$

33

(b) $k_f / k_f = (k_h + k_b)/k_f \Rightarrow 1 = (h+b) = \{h+(1-h)\}$; $0 < h < 1$

Η κεντρική τράπεζα, καθορίζοντας την αύξηση του τραπεζικού παθητικού και συμμετέχοντας στις αγοραπωλησίες εγγυημένων ομολόγων, επηρεάζει άμεσα το ετήσιο διάνυσμα ισορροπίας $\mathbf{X}^* = (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*)$ του συμπλέγματος συναλλαγών. Τα Ευκλείδεια υποδείγματα καταγράφουν τις τομεακές πιστώσεις και χρεώσεις, που αποτελούν την πεμπτουσία οποιασδήποτε νομισματικής οικονομίας. Τα ξεχωριστά αθροίσματα τών δούναι και λαβείν διαφέρουν όταν αφορούν οποιονδήποτε τομέα, αλλά ισοζυγούν όταν αφορούν οποιοδήποτε παζάρι. Ο κύκλος δοσοληψιών κάθε παζαριού, διαιρούμενος με το αντίτιμο του αντίστοιχου αγαθού, αποδίδει την ποσότητα εργασίας, παραγωγής ή ρευστότητας, που ανταλλάσσεται στη μονάδα του χρόνου. Οποιοδήποτε μαθηματικό, οικονομετρικό ή άλλου είδους μοντέλο δεν αναπαριστάνει το πλέγμα των συναλλαγών ως ένα σύνολο αλληλένδετων ροών χρήματος και αγαθών, τότε ίσως δεν αξίζει το μελάνι με το οποίο έχει γραφεί. Οι διαφορικές εξισώσεις του στοιχειώδους Ευκλείδειου υποδείγματος **7** συμπλέκουν επτά συνδυασμούς κυκλωμάτων χρήματος (και, άρα, αγαθών) ανάμεσα στους τρεις τομείς και τα τρία παζάρια της οικονομίας. Δύο από τα προαναφερθέντα κυκλώματα, δηλαδή εκείνο που αφορά τα έσοδα και έξοδα των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων:

(a) $dy_f/dt = \{(1-\gamma)\cdot\bar{e}_h + (1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b - y_f\}$

34

(b) $de_f/dt = \{y_f + k_f - e_f\}$

και εκείνο που αφορά τα έσοδα και έξοδα των υπόλοιπων (μη-εκδοτικών) τομέων:

(a) $dy_h/dt = \{\varepsilon\cdot e_b + \omega\cdot\bar{e}_f + \varphi\cdot\bar{e}_f - (1-\delta)\cdot y_b - y_h\}$

(b) $de_h/dt = \{y_h - k_h - e_h\}$

35

(c) $dy_b/dt = \{\gamma\cdot e_h + \upsilon\cdot\bar{e}_f + \varphi\cdot\bar{e}_f - (1-\beta)\cdot y_h - y_b\}$

(d) $de_b/dt = \{y_b - k_b - e_b\}$

χρήζουν ιδιαίτερης προσοχής λόγω της διδακτικής τους αξίας.

VI.1 Οι Ροές του Νομισματικού (Εκδοτικού) Τομέα

Το παράγωγο σύστημα **34** προσομοιώνει την αλληλεπίδραση των εισοδημάτων και των δαπανών των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, μεμονωμένα από τους υπόλοιπους τομείς. Η στατική ισορροπία τού **34** (δηλαδή, $dy_f/dt = 0$, $de_f/dt = 0$) αποδίδεται από το ακόλουθο μη-ομογενές γραμμικό σύστημα δύο σύγχρονων εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\mathbf{36} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_f \\ e_f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\{(1-\gamma)\cdot\bar{e}_h + (1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b\} \\ -k_f \end{vmatrix} = \mathbf{A}_F \cdot \mathbf{X}_F = \mathbf{K}_F$$

Τα έξοδα των νοικοκυριών $\bar{e}_h$ και των επιχειρήσεων $\bar{e}_b$ λαμβάνονται ως δεδομένα. Εξαιτίας της μαθηματικής του μορφής, και επειδή $|\mathbf{A}_F| = 1 \neq 0$, το χρονικά αμετάβλητο σύστημα **36** μπορεί να λυθεί με τον Κανόνα τού Cramer:

$$\mathbf{37} \qquad \begin{aligned} &(a) \quad y^{\#}_f = \{(1-\gamma)\cdot\bar{e}_h + (1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b\} \\ &(b) \quad e^{\#}_f = \{(1-\gamma)\cdot\bar{e}_h + (1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b\} + k_f \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι το διάνυσμα μερικής ισορροπίας $\mathbf{X}_F^{\#} = \mathbf{A}_F^{-1} \cdot \mathbf{K}_F = (y^{\#}_f, e^{\#}_f) = \{(1-\gamma)\cdot\bar{e}_h+(1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b, (1-\gamma)\cdot\bar{e}_h+(1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b+k_f\}$ του νομισματικού τομέα. Οι κάθετες ευθείες **37**(a) και **37**(b) περιγράφουν τη χρονικά αμετάβλητη κατάσταση, όπου:

(a) το εισόδημα των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων είναι ίσο με τις δαπάνες για τα εγγυημένα ομόλογα, που έχουν εκδώσει οι καταναλωτές και οι παραγωγοί,

(b) οι εκταμιεύσεις των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων είναι ίσες με τις ενδογενείς εισπράξεις τους συν την εγκεκριμένη (ετήσια) αύξηση του παθητικού τους.

Οι δύο ευθείες τέμνονται μεταξύ τους στο $(y^{\#}_f, e^{\#}_f)$. Σύμφωνα με τα πιο πάνω:

(a) η ευθεία $y^{\#}_f$ είναι κάθετη στον άξονα των τεταγμένων, επειδή έχει μία μοναδική τιμή, η οποία δημιουργείται από τις δαπάνες των μη-τραπεζικών τομέων,

(b) η ευθεία $e^{\#}_f$ είναι πάντοτε ίση με το $y^{\#}_f$ συν μια σταθερά k_f, που αντιπροσωπεύει το εξωγενώς εγκεκριμένο (ετήσιο) έλλειμμα των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων.

Παρόλο που στο διάνυσμα $(y^{\#}_f, e^{\#}_f) = \{(1-\gamma)\cdot\bar{e}_h+(1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b, (1-\gamma)\cdot\bar{e}_h+(1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b+k_f\}$ δεν υπάρχει τάση διαφυγής, ωστόσο απαιτείται να επιβεβαιωθεί κατά πόσο, αρχίζοντας από οποιονδήποτε συνδυασμό ροών (y^0_f, e^0_f), οι ενδογενείς μεταβλητές τού (μη-ομογενούς) παράγωγου συστήματος **34** τείνουν να προσεγγίσουν ή να επιστρέψουν στο διάνυσμα

στατικής ισορροπίας ($y^{\#}_f$, $e^{\#}_f$). Η σφαιρική σταθερότητα της λύσης $\mathbf{X}_F^{\#}$ εξαρτάται από τις ιδιοτιμές (eigenvalues) του συστήματος ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, που αντιστοιχεί στο **34**, ήτοι:

$$\mathbf{38} \qquad \begin{vmatrix} dy_f/dt \\ de_f/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_f \\ e_f \end{vmatrix} = \mathbf{A}_F \cdot \mathbf{X}_F$$

Το σύστημα **38** έχει τη γενική μορφή $d\mathbf{X}_F/dt = \mathbf{A}_F \cdot \mathbf{X}_F = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{X}_F$, όπου $\mathbf{A}_F$ είναι ένας τετράγωνος πίνακας, $\mathbf{X}_F$ ένα χαρακτηριστικό διάνυσμα και $\boldsymbol{\lambda}$ το διάνυσμα ιδιοτιμών (eigenvector) τού $\mathbf{A}_F$. Εφόσο το $\left| \mathbf{A}_F - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \right| \cdot \mathbf{X}_F = \mathbf{0}$ αντιστοιχεί σε ένα σύστημα ομογενών γραμμικών εξισώσεων, η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη μη-τετριμμένης λύσης $\mathbf{X}_F$ είναι όπως η χαρακτηριστική εξίσωση $\left| \mathbf{A}_F - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \right|$ ισούται με το μηδέν:

$$\mathbf{39} \qquad \text{(a)} \left| \mathbf{A}_F - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \right| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22}) \cdot \boldsymbol{\lambda} + (\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}) = 0$$

$$\text{(b)} \left| \mathbf{A}_F - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \right| = \mathbf{a_0} \cdot \lambda^2 + \mathbf{a_1} \cdot \lambda + \mathbf{a_2} = 0$$

Ένα μη-ομογενές σύστημα, όπως το **34**, είναι σφαιρικά σταθερό, όταν το αντίστοιχο ομογενές σύστημα **38** έχει ιδιοτιμές $\boldsymbol{\lambda}$ (eigenvalues) με αρνητικά πραγματικά μέρη. Για να ισχύει η αναγκαία και ικανή αυτή συνθήκη, όλες οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz $\mathbf{rh_n}$, $\mathbf{n} = 1, 2$, οι οποίες σε αυτήν την περίπτωση συμπίπτουν με τους συντελεστές $\mathbf{a_1}$ και $\mathbf{a_2}$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης **39**, πρέπει να είναι θετικές. Από τις αντικαταστάσεις τών $\alpha_{11} = -1$, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{21} = 1$ και $\alpha_{22} = -1$ συμπεραίνεται ότι το (μη-ομογενές) παράγωγο σύστημα **34**, το οποίο απεικονίζει μόνο την αλληλεπίδραση των χρηματικών ροών των τραπεζικών οργανισμών, είναι σφαιρικά σταθερό, διότι:

$$\mathbf{40} \qquad \mathbf{rh_1} = \mathbf{a_1} = 2 > 0 \; ; \quad \mathbf{rh_2} = \mathbf{a_2} = 1 > 0 \; .$$

Από τις αξιωματικές προτάσεις που έχουμε υιοθετήσει, είναι σαφές ότι τα έσοδα και έξοδα οποιουδήποτε τομέα, καθώς επίσης οι εισπράξεις και πληρωμές οποιουδήποτε παζαριού, ρέουν ως λογιστικές μονάδες (αντί υλικές μάζες) και, άρα, μετρούνται και τυγχάνουν μελέτης ως τέτοιες. Στο Ευκλείδειο θεωρητικό πλαίσιο, κάθε συνδυασμός τομεακών εσόδων και εξόδων (y_i, e_i) αποδίδει (i) ένα διάνυσμα, το οποίο μετρά την επιτάχυνση ή/και επιβράδυνση, καθώς επίσης (ii) έναν αριθμό που μετρά το λόγο (γωνία) τών δύο χρηματικών ροών στο συγκεκριμένο σημείο.

Οι συνδυασμοί ταχυτήτων και κλίσεων των τομεακών εισοδημάτων και δαπανών ταξινομούνται ανάλογα με τα τεταρτημόρια στα οποία οι κάθετες ευθείες $y_i = y^{\#}{}_i$, $e_i = e^{\#}{}_i$ υποδιαιρούν έκαστο Ευκλείδειο πεδίο (y_i, e_i). Παραδείγματος χάριν, στην περίπτωση της οικονομίας **΄Αλφα** στο Κεφάλαιο **V**, στην οποία ισχύουν $\gamma = {}^7/_8$, $\varepsilon = {}^5/_6$, $h = ½$ και $k_f = \$171\ 360{\cdot}10^3$, οι διαφορικές εξισώσεις **34** που αφορούν τα έσοδα και τα έξοδα των τραπεζικών ιδρυμάτων, αποδίδουν τις κάθετες γραμμές $\mathbf{X}_F{}^{\#} = (y_f^{\#}, e_f^{\#}) = \{{}^1/_8 \cdot \bar{e}_h + {}^1/_6 \cdot \bar{e}_b,\ {}^1/_8 \cdot \bar{e}_h + {}^1/_6 \cdot \bar{e}_b + \$171\ 360{\cdot}10^3\}$ για οποιεσδήποτε ροές $\bar{e}_h$ και $\bar{e}_b$.

Το διάνυσμα επιτάχυνσης ή/και επιβράδυνσης των μεμονωμένων ροών των τραπεζικών ιδρυμάτων συνίσταται από το διατεταγμένο ζεύγος των εξισώσεων **34**, ως εξής:

41 $$(dy_f/dt,\ de_f/dt) = \{(1-\gamma)\cdot\bar{e}_h + (1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b - y_f,\ y_f + k_f - e_f\} = \{{}^1/_8\cdot\bar{e}_h + {}^1/_6\cdot\bar{e}_b - y_f,\ y_f + k_f - e_f\}$$

Στο νεκρό σημείο $(y^{\#}{}_f,\ e^{\#}{}_f)$ του κυκλοφοριακού συστήματος, οι χρηματικές ροές παραμένουν αμετάβλητες. Η τάση των μεμονωμένων τραπεζικών εισπράξεων και πληρωμών να επιταχύνονται ή/και να επιβραδύνονται, εξαρτάται από το τεταρτημόριο από το οποίο αυτές ορμώνται:

Πίνακας ***VI₁***
Αύξηση (+) ή Μείωση (-) των Τραπεζικών Ροών

ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ	$y_f < y_f^{\#}$	$y_f^{\#} < y_f$
$e_f < e_f^{\#}$	$(dy_f/dt\ ,\ de_f/dt) = (+, +)$	$(dy_f/dt\ ,\ de_f/dt) = (-, +)$
$e_f^{\#} < e_f$	$(dy_f/dt\ ,\ de_f/dt) = (+, -)$	$(dy_f/dt\ ,\ de_f/dt) = (-, -)$

Εύκολα μπορεί να επιβεβαιωθεί ότι το διάνυσμα στατικής ισορροπίας $(y^{\#}{}_f,\ e^{\#}{}_f)$ του παράγωγου συστήματος **34**, αποτελεί έναν κόμβο απόλυτης σταθερότητας (stable node), επειδή όλες οι τροχιές (trajectories) των ενδογενών μεταβλητών, από όπου και αν αρχίζουν, κινούνται με συνεχώς μικρότερη ταχύτητα ελκυόμενες προς αυτόν. Γενικά:

- για κάθε $y_f < y^{\#}{}_f$, το y_f τείνει να αυξάνεται, ενώ για κάθε $y_f > y^{\#}{}_f$, το y_f τείνει να μειώνεται,
- για κάθε $e_f < e^{\#}{}_f$, το e_f τείνει να αυξάνεται, ενώ για κάθε $e_f > e^{\#}{}_f$, το e_f τείνει να μειώνεται.

Ο αριθμός που αποδίδει τη γωνία (dy_f/de_f) ισούται με το λόγο των διαφορικών εξισώσεων **34**, πράξη η οποία καθιστά την κλίση ή αναλογία των τραπεζικών εσόδων και εξόδων σε κάθε σημείο του δυναμικού πεδίου $(y_f\ ,\ e_f)$ ανεξάρτητη από τον παράγοντα χρόνο t:

42 $dy_f/dt \,/\, de_f/dt = dy_f/de_f = \{(1-\gamma)\cdot\bar{e}_h + (1-\varepsilon)\cdot\bar{e}_b - y_f\} / \{y_f + k_f - e_f\} =$

$$= \{^1/_8\cdot\bar{e}_h + {}^1/_6\cdot\bar{e}_b - y_f\} \,/\, \{y_f + k_f - e_f\}$$

Ο Πίνακας ***VI₂*** συνοψίζει τους συνδυασμούς των προσήμων των dy_f και de_f, από τους οποίους προκύπτουν οι γωνίες κλίσης των εσόδων και εξόδων του νομισματικού τομέα. Η γωνία αποτελεί έναν αριθμό που περιγράφει την αναλογία των δύο τομεακών ροών, χωρίς να αποκαλύπτει την αυξομείωσή τους στη μονάδα του χρόνου αλλά ούτε την κατεύθυνσή τους προς το διάνυσμα ισορροπίας.

Πίνακας ***VI₂***
Το Πρόσημο της Γωνίας Κλίσης

ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ	$y_f < y^{\#}_f$	$y^{\#}_f < y_f$
$e_f < e^{\#}_f$	(+)/(+) = (+) θετικό	(+)/(-)= (-) αρνητικό
$e^{\#}_f < e_f$	(-)/(+) = (-) αρνητικό	(-)/(-)= (+) θετικό

Εάν κριθεί σκόπιμο, η επιστημονική ανάλυση που μόλις έχουμε εφαρμόσει στον μεμονωμένο τραπεζικό τομέα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διερεύνηση οποιουδήποτε μικρού ή μεγάλου υποσυστήματος κυκλωμάτων του Ευκλείδειου οικονομικού μοντέλου.

VI.2 Η Αλληλεπίδραση των Πραγματικών (Μη-Εκδοτικών) Τομέων

Στο πρότυπο νομισματικό μοντέλο, οι καταναλωτές και οι παραγωγοί συνιστούν μαζί τον πραγματικό (μη-εκδοτικό) τομέα, σε αντίθεση με τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, που συνιστούν το νομισματικό (εκδοτικό) τομέα της οικονομίας. Το παράγωγο σύστημα **35**, που απεικονίζει τα κυκλώματα των εισπράξεων και πληρωμών, τα οποία δημιουργούνται ανάμεσα στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις αναφορικά με τις υπηρεσίες και τα προϊόντα που πωλούν και αγοράζουν μεταξύ τους, επαναλαμβάνεται πιο κάτω:

43

(a) $dy_h/dt = \{- y_h - (1-\delta)\cdot y_b + \varepsilon\cdot e_b + (\omega+\varphi)\cdot\bar{e}_f\}$

(b) $de_h/dt = \{ y_h - e_h - k_h\}$

(c) $dy_b/dt = \{- (1-\beta)\cdot y_h - y_b + \gamma\cdot e_h + (\upsilon+\varphi)\cdot\bar{e}_f\}$

(d) $de_b/dt = \{ y_b - e_b - k_b\}$

Νοείται ότι, στο ανωτέρω υποσύστημα, οι δαπάνες του νομισματικού τομέα $\bar{e}_f$ λαμβάνονται ως δεδομένες. Σύμφωνα με τη μεθοδολογία που εφαρμόζεται σε όλα τα

Ευκλείδεια οικονομικά μοντέλα, ενδείκνυται να εξετάσουμε αν το **43** έχει λύση (μερικής) ισορροπίας και αν τείνει να επιστρέφει σε αυτή μετά από κάποιο εξωγενή κλονισμό (shock). Σε μορφή πινάκων, το χρονικά αμετάβλητο σύστημα ($dy_h/dt = 0$, $de_h/dt = 0$, $dy_b/dt = 0$, $de_b/dt = 0$) που αντιστοιχεί στο **43**, είναι:

$$\mathbf{44} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -(1-\delta) & \varepsilon \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -(1-\beta) & \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_h \\ e_h \\ y_b \\ e_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(\omega+\varphi)\cdot\bar{e}_f \\ k_h \\ -(\upsilon+\varphi)\cdot\bar{e}_f \\ k_b \end{vmatrix} = \mathbf{A_R}\cdot\mathbf{X_R} = \mathbf{K_R}$$

Η επιβεβαίωση της ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του συστήματος **44** είναι θέμα μιας απλής μαθηματικής διαδικασίας. Σύμφωνα με τον Κανόνα τού Cramer, η λύση $\mathbf{X_R}^{\#}$ ενός γραμμικού συστήματος της μορφής $\mathbf{A_R}\cdot\mathbf{X_R} = \mathbf{K_R}$, μπορεί να εκφραστεί σε όρους των σταθερών συντελεστών $\mathbf{A_R}$ και $\mathbf{K_R}$, νοουμένου ότι η ορίζουσα $|\mathbf{A_R}| \neq 0$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση:

$$\mathbf{45} \qquad |\mathbf{A_R}| = \beta\cdot(1-\delta)+ \gamma\cdot(1-\varepsilon)+ \delta\cdot(1-\gamma)+\varepsilon\cdot(1-\beta) \neq 0,$$

διότι οι ποσοστιαίες κατανομές των τομεακών εσόδων (β, δ) και εξόδων (γ, ε) κυμαίνονται μεταξύ τού μηδέν και της μονάδας. Επομένως, οι αγοραπωλησίες μεταξύ των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων, σε απομόνωση από τη συμπεριφορά των τραπεζών, καταλήγουν σε ένα μη-τετριμμένο διάνυσμα στατικής ισορροπίας ($y^{\#}_h$, $e^{\#}_h$, $y^{\#}_b$, $e^{\#}_b$), τα στοιχεία του οποίου μπορούν να υπολογιστούν με τον Κανόνα τού Cramer. Έχοντας επιβεβαιώσει την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης, σκοπεύουμε να διερευνήσουμε κατά πόσο το παράγωγο σύστημα **35 (ή 43)** τείνει να επιστρέφει στο διάνυσμα ($y^{\#}_h$, $e^{\#}_h$, $y^{\#}_b$, $e^{\#}_b$) αρχίζοντας από οποιονδήποτε άλλο συνδυασμό καταναλωτικών και παραγωγικών εσόδων και εξόδων. Νοείται ότι στο **43** τα έσοδα και έξοδα των τραπεζιτών λαμβάνονται ως δεδομένα. Η δυναμική σταθερότητα της λύσης $\mathbf{X_R}^{\#}$ τού μη-ομογενούς συστήματος **43** εξαρτάται από τις ιδιοτιμές (eigenvalues) του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο αποδίδεται πιο κάτω:

$$\mathbf{46} \qquad \begin{vmatrix} dy_h/dt \\ de_h/dt \\ dy_b/dt \\ de_b/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -(1-\delta) & \varepsilon \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -(1-\beta) & \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_h \\ e_h \\ y_b \\ e_b \end{vmatrix} = \mathbf{A_R}\cdot\mathbf{X_R}$$

Το ομογενές σύστημα **46** έχει τη γενική μορφή $d\mathbf{X}_R/dt = \mathbf{A}_R \cdot \mathbf{X}_R = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{X}_R$ και απεικονίζει τις μεταβολές των εισπράξεων και των πληρωμών των καταναλωτών και των παραγωγών ως αποτέλεσμα τών μεταξύ τους αγοραπωλησιών, υπηρεσιών και προϊόντων. Το μη-ομογενές σύστημα **43** τείνει να επιστρέφει στο διάνυσμα μερικής ισορροπίας $\mathbf{X}_R^{\#}$ αν, και μόνον αν, οι ιδιοτιμές (eigenvalues) $\boldsymbol{\lambda}$ της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\left| \mathbf{A}_R - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \right| = 0$ του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος **46** έχουν πραγματικά μέρη με αρνητικά πρόσημα:

47

$$(a)\ \left| \mathbf{A}_R - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \right| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 & -(1-\delta) & \varepsilon \\ 1 & -1 - \lambda & 0 & 0 \\ -(1-\beta) & \gamma & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$(b)\ \left| \mathbf{A}_R - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \right| = \lambda^4 + 4 \cdot \lambda^3 + (5+\beta+\delta-\beta \cdot \delta) \cdot \lambda^2 + (2+2 \cdot \beta+\gamma+2 \cdot \delta-2 \cdot \beta \cdot \delta-\gamma \cdot \delta+\varepsilon-\beta \cdot \varepsilon) \cdot \lambda +$$
$$+(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon-\beta \cdot \delta-\gamma \cdot \delta-\beta \cdot \varepsilon-\gamma \cdot \varepsilon) = \mathbf{a_0} \cdot \lambda^4 + \mathbf{a_1} \cdot \lambda^3 + \mathbf{a_2} \cdot \lambda^2 + \mathbf{a_3} \cdot \lambda + \mathbf{a_4} = 0$$

Έστω ότι οι $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ και $\mathbf{a_4}$ είναι οι συντελεστές τού πιο πάνω πολυώνυμου τέταρτου βαθμού τού λ. Η χαρακτηριστική εξίσωση $\left| \mathbf{A}_R - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{I} \right|$ έχει 4 πραγματικές ή μιγαδικές ρίζες (ιδιοτιμές) αναφορικά με το λ, στην καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί μια λύση x_i τού **46**. Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχουν αρνητικό πρόσημο τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών λ_i είναι όπως οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz ($\mathbf{rh_n}$), οι οποίες προκύπτουν από τον πιο κάτω πίνακα των συντελεστών του πολυωνύμου **47**, είναι θετικές:

48

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_0} & 0 & 0 \\ \mathbf{a_3} & \mathbf{a_2} & \mathbf{a_1} & \mathbf{a_0} \\ 0 & \mathbf{a_4} & \mathbf{a_3} & \mathbf{a_2} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{a_4} \end{vmatrix}$$

Στην περίπτωση του συστήματος **43**, οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz είναι:

$\mathbf{rh_1} = \mathbf{a_1}$;

$\mathbf{rh_2} = (\mathbf{a_1} \cdot \mathbf{a_2} - \mathbf{a_0} \cdot \mathbf{a_3})$;

$\mathbf{rh_3} = \mathbf{a_3} \cdot (\mathbf{rh_2}) - \mathbf{a_4} \cdot \mathbf{a_1}^2$;

$\mathbf{rh_4} = \mathbf{a_4} \cdot (\mathbf{rh_3})$.

Στο Παράρτημα **VI** φαίνεται ότι μετά τις αντικαταστάσεις λαμβάνουμε:

$$\mathbf{rh_1} = a_1 = 4 > 0 \qquad \mathbf{rh_2} = (a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3) = 18+2\beta-\gamma+2\delta-2\beta\delta+\gamma\delta-\varepsilon+\beta\varepsilon =$$

$$= \{18+(2+\gamma)\cdot\delta+\beta\cdot(2+\varepsilon)\}-\{2\beta\delta+\gamma+\varepsilon\} > 0$$

$$\mathbf{rh_3} = a_3 \cdot \mathbf{rh_2} - a_4 \cdot a_1^{\,2} = 2\cdot\{18+2\delta^2+2\beta^2(1+\delta^2)+7\gamma\varepsilon+\delta(12+\gamma^2+\gamma\varepsilon)+\beta(12+\gamma\varepsilon+\varepsilon^2)\} -$$

$$-\{8\beta\delta(2+\delta)-\gamma^2(1+\delta^2)+2\beta\gamma\delta\varepsilon+\varepsilon^2+\beta^2(8\delta+\varepsilon^2) > 0$$

$$\mathbf{rh_4} = a_4 \cdot \mathbf{rh_3} = \{(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)-(\beta\delta+\gamma\varepsilon+\gamma\delta+\beta\varepsilon)\}\cdot\mathbf{rh_3} > 0$$

Εφόσο $0<\beta<1$, $0<\gamma<1$, $0<\delta<1$, $0<\varepsilon<1$, συνάγεται ότι όλες οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz είναι θετικές και, άρα, το παράγωγο σύστημα **35** ή **43** είναι σφαιρικά σταθερό. Π.χ. στην περίπτωση τής **Άλφα**, όπου $\beta = {}^{8}/_{9}$, $\gamma = {}^{7}/_{8}$, $\delta = {}^{6}/_{7}$ και $\varepsilon = {}^{5}/_{6}$, το λογισμικό *Mathematica* αποδίδει $\mathbf{rh_2} \approx 19{,}75$, $\mathbf{rh_3} \approx 75{,}11$ και $\mathbf{rh_4} \approx 35{,}48$. Τα εισοδήματα και οι δαπάνες των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων, όταν αλληλεπιδρούν μεμονωμένα από τις εισπράξεις και τις πληρωμές των τραπεζιτών, τείνουν πάντοτε προς τη λύση μερικής ισορροπίας ($y^{\#}_h$, $e^{\#}_h$, $y^{\#}_b$, $e^{\#}_b$). Το προαναφερθέν διάνυσμα αποτελεί έναν κόμβο απόλυτης σταθερότητας, διότι οι τομεακές ροές (y_h, e_h, y_b, e_b) του **43** κινούνται προς ($y^{\#}_h$, $e^{\#}_h$, $y^{\#}_b$, $e^{\#}_b$) από οποιονδήποτε αρχικό συνδυασμό και αν ξεκινήσουν. Δηλαδή:

- για κάθε $y_h<y^{\#}_h$ το y_h τείνει να αυξάνεται, ενώ για κάθε $y_h>y^{\#}_h$ το y_h τείνει να μειώνεται,
- για κάθε $e_h<e^{\#}_h$ το e_h τείνει να αυξάνεται, ενώ για κάθε $e_h>e^{\#}_h$ το e_h τείνει να μειώνεται,
- για κάθε $y_b<y^{\#}_b$ το y_b τείνει να αυξάνεται, ενώ για κάθε $y_b>y^{\#}_b$ το y_b τείνει να μειώνεται,
- για κάθε $e_b<e^{\#}_b$ το e_b τείνει να αυξάνεται, ενώ για κάθε $e_b>e^{\#}_b$ το e_b τείνει να μειώνεται.

VI.3 Το Σύμπλεγμα Συναλλαγών ως Δυναμικός Χώρος

Το γενικό οικονομικό μοντέλο $\mathbf{dX/dt = A\cdot X - K}$ διαιρείται σε **n** συστήματα (dy_i/dt, de_i/dt), καθένα από τα οποία αφορά έναν τομέα. Έκαστο υποσύστημα αποτελείται από δύο μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και, επομένως, χαρακτηρίζεται από τις δικές του μερικές (partial) στατικές και δυναμικές ιδιότητες. Τα έσοδα και έξοδα (y_i, e_i) των καταναλωτών, των παραγωγών, των χρηματοπιστωτών κ.λπ., καθορίζονται από τις μεσοπρόθεσμες συμπεριφορές (**A**) των θεσμικών τομέων και από τις νομισματικές πράξεις (**K**) του τραπεζικού συστήματος. Οι εξωγενείς κλονισμοί των αγοραίων συμπεριφορών (**A**) και των παραμέτρων πολιτικής (**K**) αποτελούν τις κινητήριες δυνάμεις, που διαφοροποιούν τα στιγμιαία εισοδήματα και δαπάνες ($\mathbf{X^0}$) των θεσμικών τομέων από τις αντίστοιχες ροές ισορροπίας ($\mathbf{X^*}$) του συμπλέγματος συναλλαγών.

Κάθε ζεύγος διαφορικών εξισώσεων (dy_i/dt, de_i/dt) καθορίζει ένα δυναμικό πεδίο (y_i, e_i), όπου τα έσοδα και τα έξοδα επιταχύνονται ή επιβραδύνονται, εκτός και εάν συμπίπτουν με το ($y_i^{\#}$, $e_i^{\#}$). Οι ταχύτητες (dy_i/dt, de_i/dt) με τις οποίες μεταβάλλονται οι στιγμιαίες χρηματικές ροές (y_i, e_i) είναι ευθέως ανάλογες με τις αποστάσεις τους από τις αντίστοιχες στατικές ροές ($y_i^{\#}$, $e_i^{\#}$). Εάν το υποσύστημα (dy_i/dt, de_i/dt) είναι από μόνο του σταθερό, τότε οι εισπράξεις και οι πληρωμές (y_i, e_i) τείνουν προς το διάνυσμα μερικής ισορροπίας ($y_i^{\#}$, $e_i^{\#}$), από οποιοδήποτε διάνυσμα (y_i^0, e_i^0) και αν αρχίσουν. Το σύνολο των δυναμικών πεδίων (y_i, e_i), δηλαδή τα **n** ζεύγη των διαφορικών εξισώσεων της γενικής προσομοίωσης $\mathbf{dX/dt = A \cdot X - K}$, συνθέτουν ένα δυναμικό χώρο με διαστάσεις ($\boldsymbol{R^{2n}}$, t). Εάν το σύμπλεγμα συναλλαγών $\mathbf{dX/dt = A \cdot X - K}$ είναι σφαιρικά σταθερό, τότε τα τομεακά έσοδα και έξοδα τείνουν προς το διάνυσμα $\mathbf{X}^*$, από οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{X}^0$ και αν αρχίσουν.

Η προσφερόμενη ροή χρήματος σε κάθε παζάρι (e_j), διαιρούμενη με το μισθό, τιμή ή αξία (p_j) που αντιστοιχεί, αποδίδει τα έτη των υπηρεσιών, τα τεμάχια των προϊόντων ή τον αριθμό των ομολόγων (q_j) που ζητούνται εκεί στη μονάδα του χρόνου. Υπό συνθήκες πλήρους ελευθερίας, το αντίτιμο (p_j) του αγαθού j θα έτεινε επίσης να μεταβάλλεται αδιαλείπτως στο δυναμικό διάστημα (p_j^f, p_j), όπως αποδίδεται από τον κλειστό βρόγχο:

49 $$dp_j/dt = (e_j/q_j^f) - p_j .$$

Μακροχρόνια, οι μισθοί, οι τιμές και οι αξίες (p_j) τείνουν να εξισώνονται με τα αντίτιμα $e_j^*/q_j^f = p_j^f = p_j^*$, που εκκαθαρίζουν τα παζάρια αγαθών και, άρα, δεν προσφέρονται ως εργαλεία πολιτικής για επίτευξη οικονομικών στόχων. Όμως, **μεσοπρόθεσμα**:

- η προαναφερθείσα τάση συνεχώς συγκρατείται από γραφειοκρατικές, συντεχνιακές και άλλες παρεμβάσεις ή διαδικασίες, ενώ
- οι άνθρωποι είναι εκ φύσεως μυωπικοί, δηλαδή αντικρίζουν το μέλλον ως ένα άθροισμα βραχυχρόνιων διαστημάτων.

Εφόσο οι οικονομικές μονάδες και οι θεσμικοί τομείς ενεργούν σύμφωνα με τις αξιωματικές προτάσεις της Ευκλείδειας μεθοδολογίας, συμπεραίνεται ότι οι αρχές έχουν τη δυνατότητα να παρεμβαίνουν, σε κάποιο βαθμό, όσον αφορά τα αντίτιμα των αγαθών και, με αυτόν τον τρόπο, να ελέγχουν τα ελλείμματα ή πλεονάσματα των ετών εργασίας, των τεμαχίων παραγωγής και των μονάδων ρευστότητας, κάθε χρόνο.

VII. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Οι 12 αξιωματικές προτάσεις ισχύουν για όλες τις νομισματικές οικονομίες, όσο απλές ή περίπλοκες και αν είναι. Χάρη σε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο, κάθε πλέγμα ανταλλαγών υπηρεσιών και προϊόντων έναντι χρημάτων (εγγυημένων ομολόγων), και αντίστροφα, είναι δυνατό να αναπαρασταθεί ως ένα σύστημα μη-ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές) της γενικής μορφής:

50 $\mathbf{dX/dt = A \cdot X - K}$, όπου:

- **X** και **dX/dt** είναι στήλες (της τάξεως 2**n**x1), που αφορούν τις ενδογενείς ροές και τις διαφοροποιήσεις τους, στη μονάδα του χρόνου, αντίστοιχα,
- **A** είναι τετραγωνικός πίνακας (της τάξεως 2**n**x2**n**), ο οποίος αποτυπώνει τις αλληλεπιδράσεις των χρηματικών ροών των τομέων και των παζαριών,
- **K** είναι στήλη (της τάξεως 2**n**x1), που αναπαριστάνει την ετήσια μεταβολή και τομεακή κατανομή του τραπεζικού ισολογισμού,
- **n** είναι ο αριθμός των τομέων και των αγαθών.

Όσοι διαμορφώνουν οικονομική πολιτική, ενδιατρίβουν στη μετακίνηση του διανύσματος ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ τού **50**, από τη μια θέση στην άλλη, μέσω αυξομειώσεων των παραμέτρων οι οποίες ευρίσκονται υπό τον έλεγχό τους. Οι αρμόδιες αρχές δεν επιτυγχάνουν τους στόχους τους, εάν το σύμπλεγμα συναλλαγών καταλήγει σε πολλαπλά ή / και ασταθή διανύσματα ισορροπίας. Οποιοδήποτε δυναμικό σύστημα καταλήγει σε ένα μοναδικό και σταθερό διάνυσμα ισορροπίας $\mathbf{X}^* = (y_1^*, e_1^*, \ldots, y_n^*, e_n^*)$, το οποίο συνίσταται από στοιχεία με το ίδιο πρόσημο, θεωρείται ως πηδαλιουχούμενο (dirigible). Τα στοιχεία του διανύσματος ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ πρέπει να έχουν όλα το ίδιο πρόσημο, ώστε να ανταποκρίνονται στις εξωτερικές παρεμβάσεις προς την ίδια κατεύθυνση, ταυτόχρονα. Κάθε Ευκλείδειο οικονομικό μοντέλο, λόγω εγγενούς γραμμικότητας και ανομοιογένειας των εξισώσεών του, έχει ένα και μοναδικό διάνυσμα ισορροπίας, $\mathbf{X}^* = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{K}$, όταν $|\mathbf{A}| \neq 0$. Η σταθερότητα τού $\mathbf{X}^*$ εξαρτάται από τα πρόσημα των Οριζουσών τών Routh-Hurwitz, οι οποίες προέρχονται από τους συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης $|\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}| = 0$. Οι στατικές ροές $\mathbf{X}^* = (y_1^*, e_1^*, \ldots, y_n^*, e_n^*)$ είναι θετικές ή / και αρνητικές ανάλογα με τις αγοραίες συμπεριφορές και τα χρηματοπιστωτικά μερίδια των θεσμικών τομέων. Από τη

μαθηματική σκοπιά, κάθε Ευκλείδεια οικονομία είναι, ταυτόχρονα:

- ένας **διανυσματικός χώρος** (vector space), ο οποίος συνίσταται από **n** ζεύγη άνισων χρηματικών ροών,
- ένα **δυναμικό σύστημα** (dynamic system), όπου οι χρηματικές ροές επηρεάζουν η μια την άλλη.

Τα στοιχεία του διανύσματος ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ τού **50** είναι τα ζεύγη των εισπράξεων και πληρωμών των θεσμικών τομέων (και, έμμεσα, των παζαριών αγαθών) στη μονάδα του χρόνου. Παρόλο που τα στοιχεία κάθε ζεύγους αντιπροσωπεύουν τις δύο αντίθετες αλλά ταυτόχρονες λογιστικές έννοιες, κατηγορίες ή πράξεις (δηλαδή χρέωση-πίστωση, ενεργητικό και παθητικό κ.λπ.), εν τούτοις δεν αναιρούν το ένα το άλλο, αφού έχουν διαφορετικές διαστάσεις και μετρούνται σε διαφορετικούς άξονες. Σε αυτό το πλαίσιο, κάθε Ευκλείδεια οικονομία μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας δυναμικός χώρος αποτελούμενος από **n** δυναμικά πεδία. Οι δυνάμεις που επενεργούν σε κάθε διάνυσμα τομεακών ροών $\mathbf{X} = (y_1, e_1, \ldots, y_n, e_n)$ είναι συναρτήσεις της απόστασης τού **X** από το διάνυσμα στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^* = (y_1^*, e_1^*, \ldots, y_n^*, e_n^*)$. Οποιαδήποτε παρέμβαση στο $\mathbf{X}^*$ μέσω στιγμιαίου κλονισμού των μεσοπρόθεσμων δεδομένων του δυναμικού συστήματος **50**, αλλάζει τις χρηματικές ροές ανάμεσα στους **n** τομείς και τα **n** παζάρια, προκαλώντας δίνες, στροβίλους ή παλινδρομήσεις, που τείνουν να μικραίνουν όταν το σύμπλεγμα των συναλλαγών είναι σταθερό ή να μεγαλώνουν όταν το σύμπλεγμα των συναλλαγών είναι ασταθές. Οι μαθηματικές ιδιότητες και οι πρακτικές εφαρμογές οποιουδήποτε Ευκλείδειου υποδείγματος διασαφηνίζονται εύκολα, χάρη σε εξειδικευμένα λογισμικά προγράμματα, όπως το *Mathematica*.

VII.1 Η Πυθαγόρεια Θεωρία των Αριθμών

Προς το παρόν, θα επικεντρωθούμε στο διάνυσμα ισορροπίας $\mathbf{X}^* = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{K}$ του γενικού μοντέλου **50**. Νοουμένου ότι $|\mathbf{A}| \neq 0$ και, άρα, $|\mathbf{A}^{-1}| \neq 0$, το διάνυσμα ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ (δηλαδή τα ετήσια εισοδήματα και οι δαπάνες των θεσμικών τομέων) είναι το αποτέλεσμα του γραμμικού μετασχηματισμού (linear tranformation) του εξωγενούς διανύσματος **K** (δηλαδή της τομεακής κατανομής των ετήσιων νομισματικών πράξεων) από τον τετραγωνικό πίνακα $\mathbf{A}^{-1}$ (δηλαδή τον αντίστροφο τού **A**, ο οποίος αποδίδει τις αλληλεπιδράσεις των τομεακών εσόδων και εξόδων). Ως γνωστό:

- οι πίνακες **A** και $\mathbf{A^{-1}}$ έχουν ορίζουσες $|\mathbf{A}|$ και $|\mathbf{A^{-1}}|$, αντίστοιχα
- οι όμοιοι πίνακες **A** και **B** έχουν όμοιες ορίζουσες $|\mathbf{A}|$ και $|\mathbf{B}|$.

Οι αρχές δεν καθορίζουν τον **A** ή τον $\mathbf{A^{-1}}$, διότι αμφότεροι αντανακλούν τον τρόπο ζωής των καταναλωτικών νοικοκυριών, τον τρόπο λειτουργίας των παραγωγικών επιχειρήσεων και τον τρόπο σκέψης των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων του συγκεκριμένου πλέγματος συναλλαγών. Οι οικονομίες διαφέρουν μεταξύ τους, διότι κάθε σύστημα χαρακτηρίζεται από μοναδικούς πίνακες **A** και $\mathbf{A^{-1}}$ και, άρα, μοναδικές ορίζουσες $|\mathbf{A}|$ και $|\mathbf{A^{-1}}|$, ακριβώς όπως ο κάθε άνθρωπος είναι προικισμένος με μοναδικά δαχτυλικά αποτυπώματα, μοναδικούς αμφιβληστροειδείς χιτώνες και μοναδικούς γενετικούς έλικες.

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Δόγμα, κάθε εγκόσμιο πράγμα αντιπροσωπεύεται από έναν ή περισσότερους αριθμούς. Ο Πυθαγόρας πρέσβευε ότι, κατά βάθος, η φύση του σύμπαντος είναι μαθηματική. Για τους Πυθαγόρειους, ακόμη και αφηρημένες έννοιες, όπως η αρμονία, η δικαιοσύνη, η ελευθερία κ.λπ., έχουν τους αντίστοιχους 'αριθμούς' τους. Ως ένα ακέραιο σύνολο, κάθε σύμπλεγμα συναλλαγών συνδέεται με κάποια ιδιαίτερα μεγέθη. Παραδείγματος χάριν, στο Κεφάλαιο **V** είδαμε ότι η οικονομία **Άλφα** αντιπροσωπεύεται είτε από τον αριθμό $|\mathbf{A}| = {}^{253109}/_{1368576}$ είτε από τον αντίστροφό του $|\mathbf{A^{-1}}| = {}^{1368576}/_{253109}$. Στη συνέχεια, θα υποδείξουμε ότι τα συμπλέγματα συναλλαγών εκπροσωπούνται και από άλλους αριθμούς εκτός από τις ορίζουσες $|\mathbf{A}|$ ή $|\mathbf{A^{-1}}|$.

VII.2 Μέτρηση του Βαθμού Σύγκλισης

Μία από τις επικρίσεις εναντίον της Θεωρίας των Ενιαίων Νομισματικών Χώρων (Theory of Common Currency Areas) είναι η αποτυχία της να μετρήσει το βαθμό στον οποίο δύο ή περισσότερες χώρες συγκλίνουν προς παρόμοιες δομές και, άρα, τον κατάλληλο χρόνο στον οποίο αυτές είναι έτοιμες να υιοθετήσουν κοινό νόμισμα. Σύμφωνα με την Ευκλείδεια μεθοδολογία, τα συμπλέγματα συναλλαγών τα οποία (για σκοπούς εθνικών και χρηματοοικονομικών λογαριασμών) υποδιαιρούνται στους ίδιους τομείς και ενσωματώνουν τα ίδια αγαθά (όπως οι χώρες που είναι ήδη μέλη ή υπό ένταξη στην Ευρωπαϊκή Ένωση) είναι εφικτό να χωρισθούν σε κατηγορίες ανάλογα με το χαρακτηριστικό αριθμό $|\mathbf{A}|$ ή $|\mathbf{A^{-1}}|$ τού καθενός από αυτά. Οι υπολογισμοί τών $|\mathbf{A}|$ ή $|\mathbf{A^{-1}}|$ μπορούν να χρησιμεύσουν στην εξαγωγή συμπερασμάτων κατά πόσο οι χώρες με

παραπλήσιες ορίζουσες και, άρα, στην ίδια διαβάθμιση, έχουν κοινά οικονομικά χαρακτηριστικά. Αν το προτεινόμενο πείραμα αποδείξει ότι χώρες με παραπλήσιους χαρακτηριστικούς αριθμούς $|\mathbf{A}|$ ή $|\mathbf{A}^{-1}|$ έχουν παρόμοιες διαρθρώσεις, και αντίστροφα, τότε, χάρη στην Ευκλείδεια μεθοδολογία, θα έχουμε ανακαλύψει μία μέθοδο μέτρησης του βαθμού στον οποίο δύο ή περισσότερες χώρες συγκλίνουν προς παρόμοιες δομές και, άρα, του εύθετου χρόνου στον οποίο αυτές είναι έτοιμες να υιοθετήσουν κοινό νόμισμα. Παραδείγματος χάριν, στο Κεφάλαιο **XI** αναφερόμαστε σε δύο συμπλέγματα συναλλαγών, το **Άλφα** και το **Γάμμα**, τα οποία έχουν ως ορίζουσες αλληλεπιδράσεων τομέων και παζαριών την $|\mathbf{A}| = {}^{253109}/_{1368576}$ και τη $|\mathbf{\Gamma}| = {}^{59}/_{864}$, αντίστοιχα. Εάν υποτεθεί ότι η δομική διαφορετικότητα (structural difference) των δύο οικονομιών μετριέται από τον τύπο $\big||\mathbf{A}| - |\mathbf{\Gamma}|\big| \;/\; \big||\mathbf{A}| + |\mathbf{\Gamma}|\big|$, συνάγεται ότι αυτή ήταν ίση με 46,07% εκείνο το συγκεκριμένο έτος. Ανάλογα με τη διαμόρφωση της χρονοσειράς $\big||\mathbf{A}|_t - |\mathbf{\Gamma}|_t\big| \;/\; \big||\mathbf{A}|_t + |\mathbf{\Gamma}|_t\big|$, διαφαίνεται κατά πόσο τα προαναφερθέντα συμπλέγματα συναλλαγών συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

VII.3 Το Πλατωνικό Δόγμα των Μορφών

Το Δόγμα των Μορφών του Πλάτωνα δεν είναι τελείως διαφορετικό από το Δόγμα των Αριθμών της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας. Εκεί που ο Πυθαγόρας πρέσβευε ότι τα πάντα στο σύμπαν είναι εκφάνσεις της μονάδας, δηλαδή του απλούστερου αριθμού, ο Πλάτωνας πίστευε ότι τα πάντα στο σύμπαν είναι δομημένα με τρίγωνα, δηλαδή το απλούστερο σχήμα. Όπου ο Πυθαγόρας είχε πει ότι τα πράγματα, σε τελευταία ανάλυση, είναι αριθμοί, ο Πλάτωνας είπε ότι τα πράγματα, σε τελευταία ανάλυση, είναι μορφές, και εισήγαγε τις τριγωνομετρικές σχέσεις μεταξύ των αριθμών και των μορφών. Με εξαίρεση το απόλυτο μέγεθός του, κάθε γεωμετρικό τρίγωνο είναι ένα αριθμητικό τρίδυμο (triplet of numbers), το οποίο καθορίζεται πλήρως από τις αναλογίες των πλευρών του. Έχοντας υπόψη τη θεωρία του Πλάτωνα ότι οι μορφές καθορίζονται από τρίγωνα, τα οποία με τη σειρά τους είναι αριθμητικά τρίδυμα, μπορούμε να κατανοήσουμε γιατί η φύση του σύμπαντος, σε τελευταία ανάλυση, συνίσταται από μαθηματικές ή τριγωνομετρικές σχέσεις. Μετά την ανωτέρω εισαγωγή, είναι ευκολότερο να καταλάβουμε τη διακαή επιθυμία του Πλάτωνα να απομακρυνθεί από τα δόγματα της Πυθαγόρειας φιλοσοφίας. Ο Πυθαγόρειος παραλληλισμός μεταξύ αριθμητικής και γεωμετρίας βασιζόταν στον κανόνα ότι η μονάδα (unit) είναι για τους αριθμούς (numbers) ό,τι είναι το σημείο (point) για το χώρο (space).

Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τα νούμερα και τα σχήματα ως συλλογές μονάδων ή σημείων (όπως βότσαλα ή άστρα). Μία τέτοια στενή και αβαθής σύλληψη του κόσμου απέβη μοιραία για την περαιτέρω ανάπτυξη της αριθμητικής και της γεωμετρίας από τους Πυθαγορείους, επειδή καθιστούσε εκ προοιμίου αδύνατη τη διερεύνηση της ακολουθίας των αριθμών και της συνέχειας των διαστημάτων. Ως αποτέλεσμα, ο Πλάτωνας απέρριψε την Πυθαγόρεια ταύτιση της μονάδας με το σημείο και προχώρησε να συσχετίσει τους άρρητους αριθμούς με τη γεωμετρική συνέχεια.

Στους *Διαλόγους* και ειδικά στον *Τιμαίο*, ο Πλάτωνας αναφέρει ότι οι αριθμοί θα πρέπει να θεωρούνται ότι δημιουργούνται με τέτοιο τρόπο, που να είναι δυνατό να περιλαμβάνονται οι ρητοί και οι άρρητοι στην ίδια ακολουθία. Διατράνωσε ότι οι άρρητοι είναι στον ίδιο βαθμό αριθμοί όσο είναι οι ακέραιοι και οι παράγωγοί τους. Εφόσο οι άρρητοι, όπως π.χ. οι πλείστες τετραγωνικές και κυβικές ρίζες, δεν μπορούν να προσεγγιστούν μέσω μιας αριθμητικής μονάδων και ακεραίων, οι μαθηματικοί οφείλουν να τους καθορίσουν μέσω άλλου τρόπου. Ο Πλάτωνας ασχολήθηκε με συγκεκριμένες εκφάνσεις του γενικού προβλήματος, όπως το διπλασιασμό του κύβου και την εξεύρεση του μέσου δύο αναλόγων. Έχοντας ανακαλύψει ότι το γεωμετρικό τρίγωνο και, άρα, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μπορούν να εισαχθούν ανάμεσα στις έννοιες και τις μορφές τους, ο Πλάτωνας θεμελίωσε τη μέθοδο ανάλυσης και σύνθεσης πολυδιάστατων ιδεών με γεωμετρικά σχήματα και, άρα, με πραγματικούς αριθμούς. Συναφώς, τονίζεται ότι τα Ευκλείδεια μαθηματικά μοντέλα:

- απεικονίζουν τα συμπλέγματα συναλλαγών ως κινούμενα ή σταθερά πολύγωνα,
- συμβαδίζουν τόσο με τη Θεωρία των Αριθμών όσο και το Δόγμα των Μορφών.

VII.4 Ο Δυαδικός Κόσμος των Αντιθέτων

Επιπλέον, η διπλή φύση των οικονομικών φαινομένων και η διττή υπόσταση των αγοραίων συναλλαγών καθιστούν δυνατή την αναπαράστασή τους ως συνόλων γεωμετρικών σημείων στο δυναμικό πεδίο $\boldsymbol{R^2}$. Οποιοδήποτε διάνυσμα $\mathbf{X}^*= (y_1^*, e_1^*,..., y_n^*, e_n^*)$ προέρχεται από το γενικό Ευκλείδειο υπόδειγμα **50**, αποτελείται από τόσα ζεύγη πραγματικών αριθμών όσοι είναι οι τομείς ή τα παζάρια της απεικονιζόμενης οικονομίας. Σύμφωνα με τη σύμβαση που έχουμε υιοθετήσει, τα εισοδήματα (στοιχεία ενεργητικού)

μετρούνται στον άξονα Χ των τετμημένων, ενώ οι δαπάνες (στοιχεία παθητικού) μετρούνται στον άξονα Υ των τεταγμένων. Σε κάθε ζεύγος αριθμών (y_i^*, e_i^*), $i = 1, \ldots, \mathbf{n}$ που αφορά ένα θεσμικό τομέα, αντιστοιχεί μια από τις **n** κορυφές του πολυγώνου, που συμβολίζει το σύμπλεγμα των συναλλαγών. Η **μορφή** του πολυγώνου εξαρτάται από τις ποσοστιαίες κατανομές των εισοδημάτων και των δαπανών των θεσμικών τομέων, καθώς επίσης από τις ποσοστιαίες κατανομές των νομισματικών πράξεων ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς. Το **μέγεθος** του πολυγώνου εξαρτάται από την ετήσια μεταβολή του τραπεζικού ισολογισμού (δηλαδή την αύξηση του παθητικού των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και την ισόποση αύξηση του ενεργητικού των καταναλωτικών νοικοκυριών και των παραγωγικών επιχειρήσεων). Κάθε χρόνο, η κεντρική τράπεζα πρέπει να κατευθύνει τις πωλήσεις και τις αγορές εγγυημένων ομολόγων ανάμεσα στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις εντός συγκεκριμένων ορίων, ώστε:

- όλοι οι θεσμικοί τομείς να απολαμβάνουν θετικά εισοδήματα και δαπάνες,
- οι τομεακές ροές να μεταβάλλονται στην κατεύθυνση των νομισματικών πράξεων.

Η μορφή μιας οικονομίας του τύπου **50**, όπως ακριβώς η μορφή ενός πολυγώνου, καθορίζεται από τις αναλογίες μεταξύ των μερών που την αποτελούν. Στα οικονομικά, όπως και στη γεωμετρία, η μορφή διαδραματίζει τον ουσιαστικό ή πρωταγωνιστικό ρόλο, αφού το μέγεθος προκύπτει από τη μέτρηση του ιδεατού συμπλέγματος συναλλαγών ή του ιδεατού γεωμετρικού σχήματος με μεγαλύτερη ή μικρότερη μονάδα. Το απόλυτο μέγεθος έχει σημασία στην πρακτική εφαρμογή και όχι στη θεωρητική ανάλυση. Κάθε πολύγωνο με **n** κορυφές αποτελείται από **n**!/3!·(**n**-3)! συνδυασμούς τριγώνων. Συνεπώς, το εμβαδόν του πολυγώνου (ή το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων που το απαρτίζουν) αποτελεί ακόμη έναν αντιπροσωπευτικό αριθμό έκαστου συμπλέγματος συναλλαγών. Το εμβαδόν οποιουδήποτε τριγώνου με κορυφές (y_1, e_1), (y_2, e_2), (y_3, e_3) υπολογίζεται με τον τύπο:

51 Εμβαδόν Τριγώνου $= \begin{vmatrix} y_1 & e_1 & 1 \\ y_2 & e_2 & 1 \\ y_3 & e_3 & 1 \end{vmatrix} = |(½)\cdot(y_1\cdot e_2 + e_1\cdot y_3 + y_2\cdot e_3 - y_1\cdot e_3 - e_1\cdot y_2 - y_3\cdot e_2)| > 0$

Για να δώσουμε ένα εύκολο παράδειγμα, θα επικεντρωθούμε στην κατάσταση στατικής ισορροπίας της οικονομίας **Άλφα**, η οποία περιγράφεται από το σύστημα σύγχρονων γραμμικών εξισώσεων **23**, ως ακολούθως:

$$\mathbf{52} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1/7 & 5/6 & 0 & 2023/3168 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/9 & 7/8 & -1 & 0 & 0 & 2729/3168 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 0 & 1/6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_h^* \\ e_h^* \\ y_b^* \\ e_b^* \\ y_f^* \\ e_f^* \end{vmatrix} = 171\,360 \cdot 10^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^* = \mathbf{K}$$

Όπως έχει αναφερθεί, ο χαρακτηριστικός πίνακας **A** μετασχηματίζει γραμμικά το διάνυσμα των νομισματικών πράξεων $\mathbf{K} = 171\,360 \cdot 10^3 \cdot (0,\ 1/2,\ 0,\ 1/2,\ 0,\ -1)$ στο διάνυσμα στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^* = 10^3 \cdot (101\,688,\ 16\,008;\ 89\,725,\ 4\,045;\ 2\,675,\ 174\,035)$, το οποίο συνίσταται από τα εισοδήματα και τις δαπάνες των θεσμικών τομέων. Αντικαθιστώντας τις συνισταμένες των κορυφών (y_h^*, e_h^*), (y_b^*, e_b^*), (y_f^*, e_f^*) στον τύπο **51** και με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica*, υπολογίζουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου, που αντιπροσωπεύει την οικονομία **Άλφα**, είναι $3{,}07532 \cdot 10^{15}$. Οι συγκρίσεις (των συντεταγμένων, των εμβαδών, των περιμέτρων κ.λπ.) των πολυγώνων που προκύπτουν από Ευκλείδεια μοντέλα, αποκτούν ιδιαίτερο επιστημονικό ενδιαφέρον όταν, για σκοπούς ομοιομορφίας, υποτίθεται ότι σε κάθε σύμπλεγμα συναλλαγών η προσφορά χρήματος αυξάνεται κατά το ίδιο ποσό (π.χ. χίλιες **διεθνείς λογιστικές μονάδες** ή k = $1 000) ετησίως.

VII.5 Η Τρίτη Διάσταση του Χώρου

Σε κάθε διάνυσμα **X** ενδογενών δοσοληψιών των θεσμικών τομέων αντιστοιχεί ένα διάνυσμα **R** ενδογενών αγοραπωλησιών στα παζάρια αγαθών. Οι χρηματικές ροές που σχετίζονται με κάθε αγαθό, διαιρούμενες με το τρέχον αντίτιμό του, αποδίδουν τις ποσότητες που προσφέρονται και ζητούνται. Στην κατάσταση στατικής ισορροπίας:

- οι εισπράξεις και οι πληρωμές, αναφορικά με κάθε αγαθό, είναι πάντοτε ίσες, ενώ
- τα έσοδα και έξοδα των τομέων διαφέρουν εξαιτίας των νομισματικών πράξεων.

Μεσοπρόθεσμα, οι τιμές των αγαθών καθορίζονται ανεξάρτητα από τις τομεακές ροές και, άρα, οι ζητούμενες και οι διαθέσιμες ποσότητες δε συμπίπτουν, παρά μόνο τυχαία. Τα χάσματα των ετών εργασίας, των τεμαχίων παραγωγής και των μονάδων ρευστότητας καθορίζονται ενδογενώς από το σύμπλεγμα των οικονομικών συναλλαγών, ταυτόχρονα με τα έσοδα και τα έξοδα των θεσμικών τομέων. Δεδομένων των εξωγενών μεταβλητών και των παραμέτρων πολιτικής, το Ευκλείδειο μαθηματικό σύστημα **50** αποδίδει τα εισοδήματα και τις δαπάνες έκαστου τομέα, καθώς επίσης το ποσοτικό πλεόνασμα ή έλλειμμα έκαστου παζαριού. Οι τομεακές χρηματικές ροές, χωρίς αναφορά στα ποσοτικά χάσματα των αγαθών, δεν περιγράφουν επαρκώς τα λειτουργικά αποτελέσματα του συμπλέγματος συναλλαγών.

Από την ανωτέρω οπτική γωνία, ο διανυσματικός χώρος στον οποίο προσδιορίζεται το οικονομικό σύστημα **50** (πρέπει να) συνίσταται από **n** διατεταγμένες διατάξεις με τρία στοιχεία (y_i, e_i, q_i) ή $(y_i, e_i, q_i - q_i^f)$, $i = 1, \ldots, \boldsymbol{n}$, το καθένα. Εφόσο έκαστος θεσμικός τομέας αντιπροσωπεύεται από ένα τρίδυμο πραγματικών αριθμών, συνάγεται ότι το σύμπλεγμα των συναλλαγών απεικονίζεται ως ένα σταθερό ή κινούμενο πολύεδρο με **n** κορυφές στο διανυσματικό χώρο $(\boldsymbol{R}^3, t)$. Κάθε χρόνο, οι διαθέσιμοι πόροι (q_i^f) αυξομειώνονται αυτόνομα, ανάλογα με το ρυθμό αναπαραγωγής ή φθοράς του καθενός ενώ, αντίθετα, οι παράμετροι της οικονομικής πολιτικής και τα αντίτιμα των αγοραίων αγαθών μεταβάλλονται ως αποτέλεσμα εξωγενών, ανθρώπινων παρεμβάσεων.

Η ποσότητα (q_i) κάθε αγαθού μετριέται σε όρους διαφορετικής μονάδας από αυτές στις οποίες μετρούνται είτε οι χρηματικές ροές είτε οι άλλες ποσότητες. Αφού αναγνωρίζεται ότι έκαστο αγαθό έχει ιδιαίτερη φύση, συνάγεται ότι οι ποσότητές του πρέπει να καταγράφονται σε διαφορετικό άξονα συντεταγμένων και, άρα, σε άλλη διάσταση του διανυσματικού χώρου. Για διευκόλυνση της ομοιόμορφης μέτρησης των αγοραίων αγαθών αλλά και του σχεδιασμού της οικονομικής πολιτικής, το μεσοπρόθεσμο χάσμα σε κάθε παζάρι ενδείκνυται όπως υπολογίζεται ως ποσοστό του διαθέσιμου αποθέματος κατά το συγκεκριμένο χρόνο, δηλαδή $(q_i^* - q_i^f)/q_i^f$. Από τα προαναφερθέντα, είναι φανερό ότι η επιστήμη των οικονομικών, ακριβώς όπως η γεωμετρία, δεν ενδιατρίβει σε υλικά αντικείμενα (ή μάζες) αλλά σε νοητές σχέσεις (ή αναλογίες).

VII.6 Η Θεωρία του Μισθολογικού Κεφαλαίου

Σύμφωνα με τις 12 αξιωματικές προτάσεις, οι ανταλλαγές υπηρεσιών και προϊόντων με ομόλογα και αντίστροφα, συμπίπτουν με χρηματικές ροές, οι οποίες:

- κατανέμονται ανάμεσα στους τομείς και τα παζάρια,
- προεξοφλούνται μέσω του εξωγενούς επιτοκίου.

Τα κυκλοφορούντα έσοδα και έξοδα αντιστοιχούν στην προσφορά και ζήτηση εργασίας, παραγωγής και ρευστότητας, καθώς επίσης σε στοιχεία ενεργητικού και παθητικού. Σε αντιδιαστολή προς το επιτόκιο, οι μισθοί και οι τιμές επηρεάζουν την αγοραστική δύναμη αλλά όχι την παρούσα αξία των χρηματικών ροών. Τόσο οι ετήσιες χρηματικές ροές όσο και οι αντίστοιχες παρούσες αξίες καθορίζονται από τις αγοραίες συμπεριφορές των θεσμικών τομέων και τις παραμέτρους πολιτικής της κεντρικής τράπεζας. Ανάλογα με το ύψος των μισθών, των τιμών και των αξιών, τα τομεακά **έσοδα** μπορούν να εισπράττονται από πωλήσεις, και τα τομεακά **έξοδα** μπορούν να δαπανώνται για αγορές:

- είτε μικρών ποσοτήτων ακριβών υπηρεσιών, προϊόντων και χρεογράφων,
- είτε μεγάλων ποσοτήτων φθηνών υπηρεσιών, προϊόντων και χρεογράφων.

Το προαναφερθέν αποτέλεσμα θυμίζει τη Θεωρία του Μισθολογικού Κεφαλαίου (Wage Fund Theory). Σύμφωνα με τη Θεωρία αυτήν, αλλά και την Ευκλείδεια Οικονομική Θεωρία, κάθε σύμπλεγμα συναλλαγών αποδίδει συγκεκριμένο ετήσιο ποσό και, άρα, συγκεκριμένο απόθεμα για την είσπραξη ή πληρωμή μισθών. Στο Κεφάλαιο **V** είδαμε ότι το παζάρι υπηρεσιών της οικονομίας **Άλφα** έχει κύκλο δοσοληψιών $\$90\ 389{,}3\cdot10^3$ και παρούσα αξία $\$90\ 389{,}3\cdot10^4$, όταν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι $r = {}^{10}/_{100}$, άσχετα αν ο ετήσιος μισθός των εργαζομένων είναι υψηλός ή χαμηλός. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε πώς το κατ' εντολήν χρήμα είναι η πηγή της δυναμικής ενέργειας, η οποία:

- εισπράττεται, δαπανάται και συσσωρεύεται σύμφωνα με τους νόμους των μαθηματικών αλλά και της φυσικής ενώ, ταυτόχρονα,
- εξισορροπείται από την αλληλεπίδραση των τομέων και των παζαριών του συστήματος σύμφωνα με τους νόμους της οικονομίας.

VIII. ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ Ή ΤΗΣ ΦΥΣΕΩΣ;

Τα Ευκλείδεια μαθηματικά μοντέλα ενσωματώνουν ιδιότητες, οι οποίες δεν παρουσιάζονται, όλες μαζί, σε άλλου είδους υποδείγματα της οικονομικής πραγματικότητας. Συγκεκριμένα, προσφέρουν στον ενδιαφερόμενο μελετητή δυνατότητες ανάλυσης και σύνθεσης, καθώς επίσης σύγκρισης και παρουσίασης, συμπλεγμάτων συναλλαγών με μεθοδολογικά ομοιόμορφους τρόπους, δηλαδή ως συστήματα:

- αλγεβρικών εξισώσεων ή πινάκων,
- γεωμετρικών πολυγώνων ή πολυέδρων,
- υδραυλικών κυκλωμάτων ή ροών και
- δυναμικών χώρων ή πεδίων.

Σε αυτό το κεφάλαιο ενδιατρίβουμε στις **ομοιότητες** ανάμεσα στα Ευκλείδεια οικονομικά μοντέλα, που αφορούν μεταβαλλόμενες ή στατικές χρηματικές ροές, και τα φυσικά δυναμικά συστήματα, που αφορούν υλικές μάζες ή μορφές ενέργειας.

VIII.1 Τα Ευκλείδεια Συμπλέγματα Συναλλαγών

Δεδομένων των συντελεστών αγοραίας συμπεριφοράς και των παραμέτρων νομισματικής πολιτικής, μία στοιχειώδης οικονομία, η οποία έχει τρεις θεσμικούς τομείς (ή παζάρια αγαθών), αντιπροσωπεύεται από τρία διανύσματα (ordered configurations of elements) στο Ευκλείδειο πεδίο $\boldsymbol{R}^2$. Οι εν λόγω διατεταγμένες διατάξεις αποτελούν τις κορυφές ενός τριγώνου. Στην κατάσταση ισορροπίας, οι συντεταγμένες κάθε αιχμής (y_i^*, e_i^*), $i = h, b, f$, αντιστοιχούν στα έσοδα και τα έξοδα ενός τομέα, ενώ η διαφορά τους $(y_i^* - e_i^* = k_i)$ αντιστοιχεί στις νομισματικές χρεώσεις ή πιστώσεις του τομέα στη μονάδα του χρόνου.

Στην περίπτωση της οικονομίας **Άλφα** (όπου $\beta = {}^{8}/_{9}$, $\gamma = {}^{7}/_{8}$, $\delta = {}^{6}/_{7}$, $\varepsilon = {}^{5}/_{6}$, $\omega = {}^{1}/_{2}$ και $\varphi = {}^{439}/_{3168}$), είδαμε ότι το διάνυσμα στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ αποτελείται από ροές μεγαλύτερες από το μηδέν, εάν $0{,}46016 < h < 0{,}723346143$. Αντικαθιστώντας $h = ½$ στις εξισώσεις **25**, λαμβάνουμε τα (ετήσια) εισοδήματα και τις δαπάνες των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών ως συναρτήσεων της μεταβολής του νομισματικού παθητικού και, άρα, του αντίστοιχου ενεργητικού τών μη-εκδοτικών τομέων:

53 $y_h^* = {}^{2102787}/_{3543526}\cdot k_f = y_h\cdot k$ $\quad y_b^* = {}^{265061}/_{506218}\cdot k_f = y_b\cdot k$ $\quad y_f^* = {}^{27661}/_{1771763}\cdot k_f = y_f\cdot k$

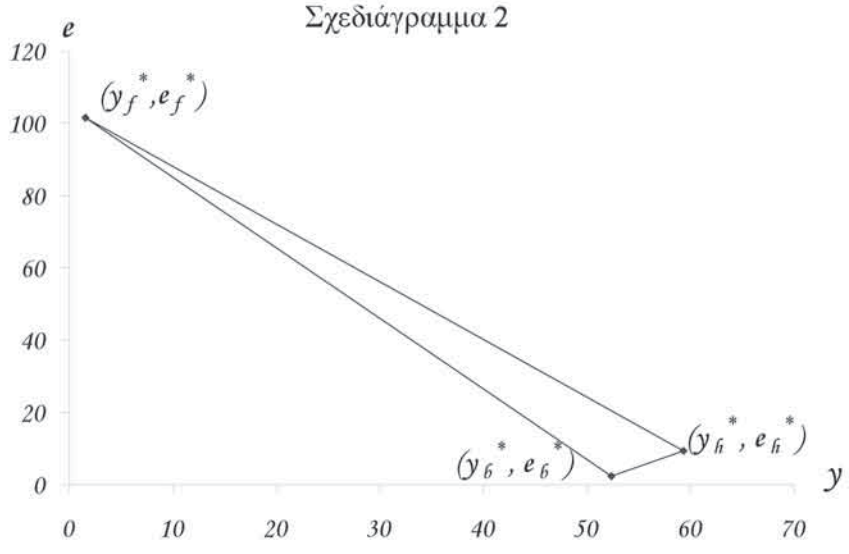
$e_h^* = {}^{165512}/_{1771763}\cdot k_f = e_h\cdot k$ $\quad e_b^* = {}^{5976}/_{253109}\cdot k_f = e_b\cdot k$ $\quad e_f^* = {}^{1799424}/_{1771763}\cdot k_f = e_f\cdot k$

Το Σχεδιάγραμμα **2**, που ακολουθεί, παρουσιάζει τη στατική ισορροπία τής **Άλφα** στο πεδίο (y, e) όταν $k_f = k = \$100$. Στο Παράρτημα **VIII**, υπολογίζεται ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται από τα σημεία (y_h^*, e_h^*), (y_b^*, e_b^*), (y_f^*, e_f^*) των εξισώσεων **53**, έχει:

- **περίμετρο** ίση με $1{,}13263\cdot k$ και
- **εμβαδόν** ίσο με $0{,}10473\cdot k^2$.

Η περίμετρος και το εμβαδόν κάθε Ευκλείδειου οικονομικού πολυγώνου είναι αμφότερα συναρτήσεις της ετήσιας προσφοράς κατ' εντολήν χρήματος k. Στο κατωτέρω σχεδιάγραμμα, κάθε αιχμή του τριγώνου καθορίζεται από το ζεύγος των κάθετων γραμμών $\{(y_i^*, 0), (0, e_i^*)\}$, $i = h, b, f$, που προσδιορίζουν τη στατική ισορροπία του συγκεκριμένου τομέα. Κάθε αιχμή (y_i^*, e_i^*) υποδιαιρεί το Ευκλείδειο πεδίο (y, e) σε τεταρτημόρια. Τα καταναλωτικά, τα παραγωγικά και τα τραπεζικά έσοδα και έξοδα τείνουν να αυξάνονται ή να μειώνονται, ανάλογα με το αν είναι μικρότερα ή μεγαλύτερα από εκείνα που αντιστοιχούν στο διάνυσμα στατικής ισορροπίας $X^* = (y_h^*, e_h^*; y_b^*, e_b^*; y_f^*, e_f^*)$.

Σχεδιάγραμμα 2



Στο διάνυσμα στατικής ισορροπίας X^* κάθε Ευκλείδειου συμπλέγματος συναλλαγών:

- το έλλειμμα των τραπεζιτών (k) ισούται με το πλεόνασμα το οποίο κατανέμεται ανάμεσα στους υπόλοιπους (**n**-1) μη-εκδοτικούς τομείς.
- οι τομεακές χρηματικές ροές (y_i^*, e_i^*), $i = 1, \ldots, \boldsymbol{n}$ είναι γραμμικές συναρτήσεις της μεταβολής του ισολογισμού των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων k.
- οι αποστάσεις κάθε αιχμής από τους άξονες των συντεταγμένων (y, e) ισούνται με το γινόμενο των γραμμικών συντελεστών (y_i, e_i) επί την έκδοση νέου χρήματος k.

Κάθε ενεργοποιημένος χώρος, είτε αυτός λέγεται σύμπλεγμα συναλλαγών είτε υλικό σώμα, αναλύεται σε δυναμικά πεδία, τα συνιστώντα στοιχεία των οποίων μετακινούνται ή μετατρέπονται ανάλογα με τις αντιθετικές δυνάμεις ή πιέσεις που επενεργούν στο σύνολο του χώρου. Στο γενικό οικονομικό μοντέλο $\mathbf{dX/dt = A \cdot X - K}$, ο διανυσματικός χώρος των τομεακών εισπράξεων και πληρωμών (y_1, e_1, y_2, $e_2, \ldots, y_n$, e_n) αναλύεται σε **n** δυναμικά πεδία (y_i, e_i), $i=1, \ldots, \boldsymbol{n}$, στα οποία αμφότερες οι ροές:

- των μη-εκδοτικών τομέων μεταβάλλονται μέχρις ότου τα έσοδα, μείον τα έξοδα έκαστου μη-εκδοτικού τομέα, είναι ίσα με το μερίδιό του στην αύξηση του τραπεζικού παθητικού.
- των εκδοτικών τομέων μεταβάλλονται μέχρις ότου η διαφορά της δαπάνης και του εισοδήματος κάθε εκδοτικού τομέα είναι ίση με το μερίδιό του στην αύξηση του τραπεζικού παθητικού.

Με κάθε επιπλέον έκδοση και αποδοχή εγγυημένων ομολόγων, δηλαδή αύξηση του $k_f = k$:

- ο νομισματικός τομέας συσσωρεύει παθητικό, οι εκταμιεύσεις του μεγαλώνουν περισσότερο από τα εισοδήματά του και, άρα, η κορυφή που τον συμβολίζει κινείται προς τα πάνω,
- οι μη-νομισματικοί τομείς συσσωρεύουν ενεργητικό, τα έσοδά τους μεγαλώνουν περισσότερο από τα έξοδά τους και, άρα, οι αιχμές που τους συμβολίζουν κινούνται προς τα δεξιά.

VIII.2 Οι Ομοιότητες Χρήματος και Ενέργειας

Οι πράξεις νομισματικής πολιτικής τροποποιούν τις χρηματικές ροές των θεσμικών τομέων, και, άρα, τις πραγματοποιούμενες αγοραπωλησίες στα παζάρια αγαθών. Στα Ευκλείδεια μαθηματικά μοντέλα, οι αποστάσεις ανάμεσα στις κορυφές του οικονομικού

πολυγώνου, που αντιπροσωπεύει το σύμπλεγμα συναλλαγών, είναι ευθέως ανάλογες με την ετήσια μεταβολή του τραπεζικού ισολογισμού. Οι κορυφές του οικονομικού πολυγώνου (y_1^*, e_1^*; y_2^*, e_2^*;...; y_n^*, e_n^*) μετακινούνται εξαιτίας των αυξομειώσεων τού κατ' εντολήν χρήματος k, ακριβώς όπως αλλάζει:

- το μήκος ενός ελατηρίου ανάλογα με το επικρεμμάμενο βάρος ή
- το σχήμα ενός σώματος ανάλογα με την επενεργούσα θερμότητα.

Κάθε μονάδα (unit) ρευστότητας που πιστώνεται (ή χρεώνεται) σε ένα οικονομικό σύστημα μοιάζει με μια μονάδα (quantum) ενέργειας, που προστίθεται (ή αφαιρείται) σε ένα φυσικό σύστημα. Στη φυσική επιστήμη, οι αποστάσεις μεταξύ των στοιχείων οποιασδήποτε διατεταγμένης διάταξης (ordered configuration of elements) είναι συναρτήσεις της ενέργειας που δαπανήθηκε ή του δυναμικού που συσσωρεύτηκε. Υπενθυμίζεται ότι στα φυσικά δυναμικά συστήματα:

- Ενέργεια προστίθεται και αφαιρείται. Η δυνατότητα παραγωγής έργου συνδέεται άμεσα με την ανομοιογενή διάταξη των στοιχείων του συστήματος στο χώρο. Η ενέργεια ενός συνόλου στοιχείων εξαρτάται από τη θέση του καθενός σε σχέση με το κέντρο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος.
- Όταν προστίθεται (αφαιρείται) ενέργεια, αριθμός στοιχείων απομακρύνεται από (προσεγγίζει προς) το κέντρο ισορροπίας του δυναμικού συστήματος. Η επιτελεσθείσα εργασία είναι η διαφορά μεταξύ της ενέργειας των συγκεκριμένων στοιχείων πριν και μετά τη μετακίνησή τους.
- Χωρίς εξωτερική παρέμβαση, η συνολική ενέργεια ενός συστήματος παραμένει σταθερή. Κάθε ποσότητα επιπρόσθετης ενέργειας προκαλεί διάφορες μορφές κίνησης ή αλλοίωσης στα συστατικά στοιχεία του συστήματος.
- Κάθε φυσικό δυναμικό σύστημα τείνει αυτόβουλα προς μια κατάσταση ισορροπίας ή ομοιογενούς κατανομής των στοιχείων του. Η ενέργεια ρέει από τα υποσυστήματα που έχουν πλεονάσματα, στα υποσυστήματα που έχουν ελλείμματα, αλλά το άθροισμα της ενέργειας των υποσυστημάτων παραμένει αναλλοίωτο.

Οι χρηματικές ροές των τομέων ή οι κορυφές του οικονομικού πολυγώνου (y_i^*, e_i^*), $i=1,...,$ $\boldsymbol{n}$ οποιουδήποτε συμπλέγματος συναλλαγών συνιστούν ένα διανυσματικό χώρο, που πηγάζει από το αντίστοιχο Ευκλείδειο μοντέλο και, άρα, συναποτελούν μια ενιαία

διάρθρωση στοιχείων (ordered configurations of elements). Οι ενιαίες διαρθρώσεις ή διατεταγμένες διατάξεις στοιχείων που υφίστανται εξωτερικές δυνάμεις, πιέσεις κ.λπ., υπακούουν σε συγκεκριμένους νόμους των μαθηματικών και της θερμοδυναμικής. Η θερμοδυναμική είναι ο κλάδος της φυσικής που μελετά τη μετατροπή ενός είδους σε άλλου είδους ενέργεια. Οι μετατροπές διέπονται από τρία αξιώματα, τα οποία ονομάζονται Νόμοι της Θερμοδυναμικής.

Πίνακας *VIII*$_1$
Οι Νόμοι της Θερμοδυναμικής

Ο **Πρώτος Νόμος** ρυθμίζει τις ποσοτικές σχέσεις μεταξύ των διαφόρων μορφών ενέργειας. Σύμφωνα με αυτόν το νόμο, σε ένα κλειστό σύστημα το ποσό της ενέργειας παραμένει σταθερό. Όλες οι μετατροπές ενέργειας παράγουν χρήσιμο - διατεταγμένο έργο και άχρηστη - διάχυτη εντροπία.

Ο **Δεύτερος Νόμος** είναι ποιοτικός, διότι αφορά την κατεύθυνση των μετατροπών από ένα σε άλλο είδος ενέργειας. Σύμφωνα με αυτόν το νόμο, χωρίς συνεχή πρόσθεση ενέργειας, κάθε κλειστό σύστημα τείνει προς σταθερή ισορροπία, δηλαδή μεγιστοποίηση της άχρηστης - διάχυτης εντροπίας.

Ο **Τρίτος Νόμος** αφορά την ανακατανομή της ενέργειας σε ένα κλειστό σύστημα. Ο νόμος αυτός δηλώνει ότι όσο καταναλίσκεται ενέργεια, με συνακόλουθο την αύξηση της εντροπίας, τόσο πιο δύσκολη γίνεται η περαιτέρω παραγωγή έργου.

Τα προαναφερθέντα διευκολύνουν τη διερεύνηση των ομοιοτήτων ανάμεσα στα οικονομικά και τα φυσικά συστήματα. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι:

- Η ετήσια προσφορά ρευστότητας σε ένα σύμπλεγμα συναλλαγών διανέμεται και συντηρείται, ακριβώς όπως χρησιμοποιείται και αποθηκεύεται η προσφορά ενέργειας σε ένα φυσικό σύστημα.
- Κάθε νομισματική οικονομία μοιάζει με μια θερμοδυναμική μηχανή στην οποία εισάγεται (προστίθεται) χρήμα – ενέργεια, που εξάγεται (μετατρέπεται) στις μορφές αξία - έργο και απώλεια - εντροπία.
- Το διάνυσμα στατικής ισορροπίας ενός συμπλέγματος συναλλαγών αντιστοιχεί στο σταθερό κέντρο μάζας ενός φυσικού συστήματος προς το οποίο, οι αντιθετικές δυνάμεις που επενεργούν, καθοδηγούν τα συνιστώντα στοιχεία του.

- Η διαφορά μεταξύ δύο καταστάσεων ισορροπίας ενός οικονομικού συστήματος οφείλεται στην ποσότητα της ρευστότητας που πιστώθηκε και χρεώθηκε, ακριβώς όπως η διαφορά μεταξύ δύο καταστάσεων ισορροπίας ενός φυσικού συστήματος οφείλεται στην ποσότητα της ενέργειας που προσετέθη και απωλέσθη.

Ως επιστήμονες οικονομολόγοι, θα επικεντρωθούμε στους τρόπους με τους οποίους κυκλοφορεί και συσσωρεύεται το χρήμα και θα αφήσουμε τους επιστήμονες φυσικούς να εξηγήσουν τους τρόπους με τους οποίους χρησιμοποιείται και συσσωρεύεται η ενέργεια.

VIII.3 Μετατροπή και Διατήρηση του Νομισματικού Πλούτου

Το διάνυσμα στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ ενός συμπλέγματος συναλλαγών του τύπου **50**, προέρχεται από το γραμμικό μετασχηματισμό (linear transformation) του διανύσματος **K** των ετήσιων πράξεων νομισματικής πολιτικής μέσω του Πίνακα **A**, που ενσωματώνει τις αλληλεπιδράσεις των τομεακών εσόδων και εξόδων, ως εξής:

54 $$\mathbf{X}^* = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{K} = (y_1^*, e_1^*, \ldots, y_n^*, e_n^*) = (y_1, e_1, \ldots, y_n, e_n) \cdot k$$

Η μεταβολή της συνολικής ρευστότητας k πολλαπλασιαζομένη επί τους σταθερούς συντελεστές y_i και e_i (καθένας από τους οποίους προέρχεται από διαφορετικό συνδυασμό των τομεακών αγοραίων συμπεριφορών και της κατανομής των τραπεζικών πιστώσεων) παράγει **n** δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα ζεύγη (y_i^*, e_i^*) χρηματικών ροών στη μονάδα του χρόνου. Οποιαδήποτε δύναμη, πίεση κ.λπ., επενεργεί στα στοιχεία μιας ενιαίας διάρθρωσης, προκαλεί κίνηση ή αλλαγή προς δύο αντίθετες κατευθύνσεις ταυτόχρονα. **Τόσο στα οικονομικά όσο και τα φυσικά συστήματα, σε κάθε δράση αντιστοιχεί μια ίση αντίδραση. Το εξωγενές χρήμα, όπως η εξωγενής ενέργεια, δρα σε δύο διαμετρικά αντίθετες κατευθύνσεις και κατανέμεται στις δύο πολικά αντίθετες μορφές την ίδια στιγμή.** Σε αυτό το πλαίσιο, οι χρεώσεις και πιστώσεις που αφορούν (i) τις πράξεις νομισματικής πολιτικής k και (ii) τις συνολικές χρηματικές ροές (Y^*, E^*), ισοζυγούν στην κατάσταση στατικής ισορροπίας. Παραδείγματος χάριν, στο στοιχειώδες σύμπλεγμα συναλλαγών **20** ή **Άλφα**:

(i) οι πράξεις νομισματικής πολιτικής κατανέμονται ως:

55 $$k_f = k_h + k_b \qquad k_f = (h)\cdot k_f + (1\text{-}h)\cdot k_f \qquad k_f = (\tfrac{1}{2})\cdot k_f + (\tfrac{1}{2})\cdot k_f$$

$$k_f = \$171\,360\cdot 10^3 = \{\$85\,680 + \$85\,680\}\cdot 10^3$$

(ii) οι τομεακές χρηματικές ροές κατανέμονται ως:

$$(y_h+y_b+y_f)\cdot k_f = (e_h+e_b+e_f)\cdot k_f = (\rho_w+\rho_u+\rho_s)\cdot k_f \quad ; \quad Y^* = E^* = R^*$$

55 $(0,59342+0,52360+0,01561)\cdot k_f = (0,09342+0,02360+1,01561)\cdot k_f =$

$$= (0,52748+0.44880+0.15635)\cdot k_f = (1.13263)\cdot \$171\ 360\cdot 10^3 = \mathbf{c}\cdot k_f$$

Το συνολικό εισόδημα Y^*, η συνολική δαπάνη E^* και η συνολική κυκλοφορία R^* ενός Ευκλείδειου οικονομικού συστήματος, σχετίζονται με την ετήσια αύξηση k_f της προσφοράς χρήματος μέσω του χαρακτηριστικού πολλαπλασιαστή $\mathbf{c} = (y_1 + y_2 +\ldots+ y_n) = (e_1 + e_2 +\ldots+ e_n) = (\rho_1 + \rho_2 +\ldots+ \rho_n)$. Εάν στην **Άλφα**, ο ισολογισμός των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων αυξηθεί κατά \$1 000, τότε ο (ετήσιος ακαθάριστος) κύκλος εργασιών ($Y^* = E^* = R^*$) της οικονομίας μεταβάλλεται κατά \$1 132,63, που κατανέμονται ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς και τα παζάρια αγαθών, ως εξής:

	$y_h^* = \$672,12$	$y_b^* = \$593,04$	$y_f^* = \$17,68$	$Y^* \approx \$1\ 132,63$
56	$e_h^* = \$105,81$	$e_b^* = \$26,73$	$e_f^* = \$1\ 150,31$	$E^* \approx \$1\ 132,63$
	$\rho_w^* = \$527,48$	$\rho_u^* = \$448,80$	$\rho_s^* = \$156,35$	$R^* \approx \$1\ 132,63$

Ο Ευκλείδειος πολλαπλασιαστής **c** ισούται με την **περίμετρο** του χαρακτηριστικού τριγώνου ή πολυγώνου (ανάλογα με τον αριθμό των τομέων ή αγαθών) και αντιπροσωπεύει την ικανότητα του συμπλέγματος συναλλαγών να μετατρέπει τραπεζικό παθητικό σε εισπράξεις και πληρωμές. Όσο μεγαλύτερος είναι ο πολλαπλασιαστής **c** τόσο πιο αποτελεσματικά αξιοποιούνται οι μεταβολές του νομισματικού ισολογισμού στο σύμπλεγμα συναλλαγών. Σε τέτοια περίπτωση, η εκμηδένιση του ποσοτικού χάσματος στο επιλεγμένο παζάρι επιτυγχάνεται με μικρότερη μεταβολή της ετήσιας προσφοράς χρήματος. Όμως, αργά ή γρήγορα, κάθε οικονομικό σύστημα έρχεται αντιμέτωπο με τη σπανιότητα των πραγματικών πόρων, όπου το προαναφερθέν πλεονέκτημα δεν ωφελεί. Οι εξισώσεις **55** και **56** επιβεβαιώνουν ότι το έλλειμμα (παθητικό) των (χρηματοδοτούμενων) εκδοτών ($k_f = k$) καταλήγει ως πλεόνασμα (ενεργητικό) των (χρηματοδοτούντων) αποδεκτών ($k_h + k_b$) και, στη συνέχεια, ως έσοδα και έξοδα όλων ανεξαιρέτως των θεσμικών τομέων. Γι' αυτό, εύλογα συμπεραίνεται ότι τόσο η εξωγενής ποσότητα του νέου χρήματος όσο και η πρόσθετη ενέργεια κατανέμονται ανάμεσα στις εναλλακτικές μορφές τους ανάλογα με τη μορφολογία του οικονομικού συστήματος ή της διατεταγμένης διάταξης, αντίστοιχα, σύμφωνα με τον Πρώτο Νόμο της Θερμοδυναμικής.

VIII.4 Η Ανυπαρξία Αυτοκίνητων Συμπλεγμάτων Συναλλαγών

Εάν η οικονομία **Άλφα** ήταν μια θερμοδυναμική μηχανή τότε, σύμφωνα με τις εξισώσεις **56**, η τροφοδότησή της με $1 000 επιπλέον ρευστότητα - ενέργεια θα παρήγαμε $1 132,63 σε αξία - έργο. Εάν αυτό ήταν το **καθαρό αποτέλεσμα**, τότε η οικονομία - μηχανή **Άλφα** θα είχε **συντελεστή απόδοσης** πάνω από 100%. Επειδή κάτι τέτοιο αντίκειται στο Δεύτερο Νόμο της Θερμοδυναμικής, έρχεται στο νου μας ότι τα $1 132,63 αξίας - έργου αντιστοιχούν στον Ακαθάριστο Κύκλο Εργασιών R^* και όχι στην Καθαρή Προστιθέμενη Αξία V^* τού εν λόγω συμπλέγματος συναλλαγών. Στην **Άλφα** οι κύκλοι δοσοληψιών στα παζάρια αγαθών συμπίπτουν με τις προστιθέμενες αξίες των αντίστοιχων τομέων μόνο στις περιπτώσεις των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων, αφού οι προαναφερθέντες τομείς δεν αγοράζουν από τους εαυτούς τους τις υπηρεσίες και τα προϊόντα που πωλούν οι ίδιοι. Αντίθετα, οι τραπεζίτες αγοράζουν και πωλούν εγγυημένα ομόλογα, μέρος τα οποίων εξέδωσαν οι ίδιοι. Για να εξευρεθεί η καθαρή προστιθέμενη αξία του νομισματικού τομέα, χρειάζεται να αφαιρεθούν από τις ετήσιες εισπράξεις οι τόκοι (ή / και δόσεις) που πλήρωσαν οι ίδιοι οι τραπεζίτες στον εαυτό τους στη μονάδα του χρόνου. Σύμφωνα με την εξίσωση **28**, η καθαρή προστιθέμενη αξία των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων είναι:

$$\text{ΚΠΑ}_f^* = y_f^* - \varphi \cdot e_f^* = (y_f - \varphi \cdot e_f) \cdot k = v_f^*$$

57

$$= \{{}^{27661}/_{1771763} - ({}^{439}/_{3168}) \cdot {}^{1799424}/_{1771763}\} \cdot k = - ({}^{221691}/_{1771763}) \cdot k$$

Λαμβανομένων υπόψη των ανωτέρω, συμπεραίνεται ότι η Καθαρή Προστιθέμενη Αξία της οικονομίας **Άλφα** είναι:

$$V^* = (v_h^* + v_b^* + v_f^*) = \{y_h^* + y_b^* + (y_f - \varphi \cdot e_f)\} \cdot k =$$

58

$$= \{({}^{2102787}/_{3543526}) + ({}^{265061}/_{506218}) - ({}^{221691}/_{1771763})\} \cdot k = ({}^{1757416}/_{1771763}) \cdot k = 0{,}99190 \cdot k$$

Υπό αυτήν την οπτική γωνία, για κάθε $1 000 πρόσθετου χρήματος - ενέργειας που εισάγεται στην οικονομία - μηχανή **Άλφα**, παράγεται μόνο $991,90 σε **καθαρή** αξία - έργο. Υπενθυμίζεται ότι ο Δεύτερος Νόμος της Θερμοδυναμικής αποκλείει τη μετατροπή χρήματος - ενέργειας σε αξία - έργο χωρίς απώλεια - εντροπία. Βάσει αυτού του νόμου, ένα σύμπλεγμα συναλλαγών, όπως ένα φυσικό σύστημα, τείνει προς το τετριμμένο διάνυσμα $\mathbf{X}^* = (0, 0, ..., 0)$, εκτός εάν συνεχώς λαμβάνει την ποσότητα χρήματος - ενέργειας k, που παράγει την επιθυμητή ομοιόσταση $\mathbf{X}^* = (y_1^*, e_1^*, \ldots, y_n^*, e_n^*) = (y_1, e_1, \ldots, y_n, e_n) \cdot k$.

VIII.5 Το Στατικό Σημείο μιας Ενεργοποιημένης Διάταξης

Κάθε χρονικά αμετάβλητο σύνολο στοιχείων διαθέτει ένα κέντρο (μάζας, ενέργειας κ.λπ.) όπου οι αντίθετες δυνάμεις εκμηδενίζουν η μία την άλλη. Παραδείγματος χάριν, το κέντρο βάρους ενός στατικού συνόλου μαζών υπολογίζεται, στο δισδιάστατο χώρο, μέσω του μαθηματικού τύπου:

59 $$\mathbf{M}\cdot\mathcal{L}' = [(m_1\cdot\ell_1) + \ldots + (m_n\cdot\ell_n)] - [(m_{n+1}\cdot\ell_{n+1}) + \ldots + (m_{2n}\cdot\ell_{2n})] = 0,$$ όπου το:

M συμβολίζει το διάνυσμα της κατανομής του βάρους των στοιχείων του συστήματος,

$\mathcal{L}'$ συμβολίζει το διάνυσμα της απόστασης κάθε στοιχείου από το κέντρο βάρους,

i $i = 1,\ldots, 2n$, συμβολίζει τον αριθμό των στοιχείων του συστήματος,

ℓ_i συμβολίζει την απόσταση κάθε στοιχείου από το κέντρο βάρους του συστήματος,

m_i συμβολίζει το βάρος έκαστου στοιχείου του συστήματος.

Ο γενικός τύπος **59**, όπου **M** και $\mathcal{L}'$ είναι πίνακες, ισχύει σε κάθε περίπτωση, έστω και αν τα συνιστώντα στοιχεία είναι τα άστρα ενός γαλαξία, το φορτίο ενός γερανού ή οποιασδήποτε άλλης μορφής ενέργεια ή ύλη. Είναι εκπληκτικό ότι ο ίδιος τύπος ισχύει και στην κατάσταση ισορροπίας ενός συμπλέγματος συναλλαγών. Η χρονικά αμετάβλητη λύση $\mathbf{X}^* = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{K}$, μπορεί να διατυπωθεί ως ένα δισδιάστατο σύστημα αμφίρροπων δυνάμεων, όπου το συνολικό βάρος k (ή νέο χρήμα) κατανέμεται σε σταθερές αποστάσεις (ή αναλογίες) ένθεν $(y_1,\ldots, y_n)$ και ένθεν $(e_1,\ldots, e_n)$ του κέντρου ισορροπίας, ώστε:

60
$$\mathbf{M}\cdot\mathcal{L}' = [(y_1\cdot k) + \ldots + (y_n\cdot k)] - [(e_1\cdot k) + \ldots + (e_n\cdot k)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\cdot k = (e_1 + e_2 + \ldots + e_n)\cdot k \Rightarrow Y^* - E^* = 0$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι τα εισοδήματα και οι δαπάνες των τομέων και των παζαριών του γενικού οικονομικού μοντέλου **50** ισορροπούν όπως οι αμφίρροπες δυνάμεις στον τύπο **59.** Στην κατάσταση ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ τα τομεακά έσοδα και έξοδα παραμένουν αμετάβλητα διότι, ταυτόχρονα, αυξάνονται από τις εκταμιεύσεις του εκδοτικού τομέα (ή συμπιέζονται από την εισροή ή διανομή κατ' εντολήν χρήματος) και μειώνονται από τις αποταμιεύσεις των μη-εκδοτικών τομέων (ή αποπιέζονται από την εκροή ή συσσώρευση τραπεζικού παθητικού). Στα φυσικά συστήματα, τα ενεργοποιημένα στοιχεία αναδιατάσσονται με τρόπο που η κίνησή τους προς το διάνυσμα ισορροπίας να είναι μη αναστρέψιμη, σύμφωνα με το Δεύτερο Νόμο της Θερμοδυναμικής.

Στα προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι, **μεσοπρόθεσμα**, οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz δεν είναι απαραιτήτως θετικές, αφού ούτε τα οικονομικά συστήματα και, άρα, ούτε τα Ευκλείδεια μοντέλα είναι, κατ' ανάγκη, σταθερά. Όμως, συνεχείς αβεβαιότητες και ασυνέπειες στα παζάρια αγαθών θα οδηγούσαν τους συναλλασσομένους στον αφανισμό. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα θα ήταν αντίθετο με το θεμελιώδη νόμο της συμπεριφοράς, δηλαδή την επιδίωξη της επιβίωσης, αλλά και τού ευ ζην, από τους ανθρώπους. **Μακροχρόνια**, λαμβάνοντας υπόψη την αδήριτη ανάγκη σταθερότητας και προβλεψιμότητας των αγοραπωλησιών, φαίνεται ότι οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz τείνουν να γίνουν θετικές μέσω αυτόματων προσαρμογών των τομεακών συμπεριφορών, όπως απαιτείται για την εύρυθμη λειτουργία του οικονομικού συστήματος. Στο Κεφάλαιο **X** θα δείξουμε ότι οι **πολιτικές**, βάσει των οποίων οι εκάστοτε κυβερνώντες κατανέμουν τους φόρους παρακράτησης και τις δημόσιες δαπάνες ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς, περιλαμβάνονται στις **διαγωγές** που καθοδηγούν το σύμπλεγμα συναλλαγών προς τη διαχρονική σταθερότητα. **Η τάση προς την εξισορρόπηση των αντίθετων ή αμφίρροπων δυνάμεων είναι εγγενής σε κάθε ενεργοποιημένο σύστημα ή σύμπλεγμα στοιχείων, σε βαθμό ώστε να θεωρείται ίσως ο καθολικός ρυθμιστικός νόμος όλων των δραστηριοτήτων που είναι γνωστές στον άνθρωπο.** Συναφώς, τονίζεται ότι μόνο οι τομεακές ροές και, άρα, οι καθαρές αξίες που ανήκουν στα διανύσματα ισορροπίας $\mathbf{X}^* = (y_i^*, e_i^*)$ και $\mathbf{\Omega}^* = \{y_i^* - e_i^*\}/r$, i= 1,.., **n**, επιτυγχάνονται μέσω πράξεων οικονομικής πολιτικής, διότι οι λοιποί συνδυασμοί εισπράξεων και πληρωμών και, άρα, ρευστοποιήσιμου πλούτου, δεν είναι διατηρήσιμοι. Εδώ αξίζει να επαναληφθεί ότι η οικονομική, σε σύγκριση με τη φυσική, επιστήμη ασχολείται με μαθηματικές (νοητές) σχέσεις και όχι με υλικές (πραγματικές) μάζες.

VIII.6 Διαφορές Μεταξύ Καταστάσεων Ισορροπίας

Κάθε στιγμή, τα ενδογενή στοιχεία ενός οικονομικού συστήματος, όπως το **50**, συνιστούν μια διατεταγμένη διάταξη $\mathbf{X} = (y_1, e_1; y_2, e_2; \ldots, y_n, e_n)$, η οποία μπορεί να αναπαρασταθεί είτε ως ένα πολύγωνο στο πεδίο $\boldsymbol{R}^2$ είτε ως ένα διάνυσμα στο χώρο $\boldsymbol{R}^{2n}$. Νοουμένου ότι το δυναμικό σύστημα είναι σταθερό, τα στοιχεία που συναποτελούν τη διατεταγμένη διάταξη **X** κινούνται μέχρις ότου συμπέσουν με τις κορυφές ή την αιχμή που ορίζονται από το διάνυσμα $\mathbf{X}^* = (y_1^*, e_1^*; y_2^*, e_2^*; \ldots, y_n^*, e_n^*)$. Σε κάθε Ευκλείδειο υπόδειγμα, το $\mathbf{X}^*$ ισούται με το γινόμενο της μεταβολής k του νομισματικού ισολογισμού και ενός διανύσματος **U**, που αποτελείται από σταθερούς συντελεστές (y_i, e_i), ως ακολούθως:

61 $\mathbf{X}^* = (y_1^*, \ldots, y_n, e_1^*, \ldots, e_n^*) = (y_1, \ldots, y_n, e_1, \ldots, e_n) \cdot k = \mathbf{U} \cdot k$

Όσον αφορά το πολύγωνο $\mathbf{X}^*$ στο πεδίο $\boldsymbol{R^2}$, το σχήμα και το μέγεθός του καθορίζονται από τους σταθερούς συντελεστές (y_i, e_i), $i=1,\ldots,$ $\boldsymbol{n}$ και τον παράγοντα (factor) k, αντίστοιχα. Όσον αφορά το διάνυσμα $\mathbf{X}^*$ στον Ευκλείδειο χώρο $\boldsymbol{R^{2n}}$:

62
$$\text{το μήκος του υπολογίζεται ως } \|\mathbf{X}^*\| = (\mathbf{X}^* \cdot \mathbf{X}^*)^{1/2} = (y_1^2 + e_1^2 + \ldots + y_n^2 + e_n^2)^{1/2} \cdot k_f, \text{ ενώ}$$
$$\text{το μέτρο (norm) του είναι } \|\mathbf{U}\| = (y_1^2 + e_1^2 + \ldots + y_n^2 + e_n^2)^{1/2}, \text{ όταν } k = 1.$$

Ας εξετάσουμε, λοιπόν, μία πολυδιάστατη οικονομία του τύπου **50** σε δύο καταστάσεις ισορροπίας, $\mathbf{X}^*$ και $\mathbf{Z}^*$, οι οποίες διαφέρουν ως προς την ετήσια μεταβολή της ποσότητας τού κατ' εντολήν χρήματος, δηλαδή k_f και k_z, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, τα διανύσματα $\mathbf{X}^*$ και $\mathbf{Z}^*$ ισούνται με:

63
$$\mathbf{X}^* = (y_1, e_1, \ldots, y_n, e_n) \cdot k_f = \mathbf{U} \cdot k_f = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$$
$$\mathbf{Z}^* = (y_1, e_1, \ldots, y_n, e_n) \cdot k_z = \mathbf{U} \cdot k_z = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n})$$

Η απόσταση μεταξύ των δύο διανυσμάτων $\mathbf{X}^*$ και $\mathbf{Z}^*$ δίδεται από τον τύπο:

64 $$d(\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*) = \{(x_1 - z_1)^2 + \ldots + (x_{2n} - z_{2n})^2\}^{1/2}$$

Αντικαθιστώντας τα βαθμωτά γινόμενα **61** στον τύπο **62**, βρίσκουμε ότι:

65
$$d(\mathbf{X}^*, \mathbf{Z}^*) = \{y_1^2 \cdot (k_f - k_z)^2 + e_1^2 \cdot (k_f - k_z)^2 + \ldots + y_n^2 \cdot (k_f - k_z)^2 + e_n^2 \cdot (k_f - k_z)^2\}^{1/2} =$$
$$= (y_1^2 + e_1^2 + \ldots + y_n^2 + e_n^2)^{1/2} \cdot |k_f - k_z| = \|\mathbf{X}^*\| - \|\mathbf{Z}^*\| = \|\mathbf{U}\| \cdot |k_f - k_z|$$

Ceteris paribus, η απόσταση μεταξύ των δύο καταστάσεων ισορροπίας ενός οικονομικού συστήματος είναι γραμμική συνάρτηση της διαφοράς του χρήματος που χρεώθηκε και πιστώθηκε, ακριβώς όπως η απόσταση μεταξύ των δύο καταστάσεων ισορροπίας ενός φυσικού συστήματος είναι γραμμική συνάρτηση της διαφοράς της ενέργειας που χρησιμοποιήθηκε ως έργο και συσσωρεύτηκε ως εντροπία. Όσο η εξωγενής ρευστότητα (ενέργεια) πλησιάζει το μηδέν, τόσο οι διατεταγμένες διατάξεις των οικονομικών (φυσικών) ροών (στοιχείων) τείνουν προς την ανυπαρξία (ακινησία). Κάθε σύμπλεγμα συναλλαγών προσεγγίζει το τετριμμένο διάνυσμα $\mathbf{X}^* = (0, \ldots, 0)$ με τη συνεχή μείωση της προσφοράς χρήματος, ακριβώς όπως ένα σύνολο αερίων πλησιάζει το απόλυτο κενό με τη συνεχή μείωση της θερμοκρασίας, σύμφωνα με τον Τρίτο Νόμο της Θερμοδυναμικής.

IX. ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Η ανάλυση και σύνθεση ενός στοιχειώδους συμπλέγματος συναλλαγών, που λειτουργεί σύμφωνα με τις 12 αξιωματικές προτάσεις, κατέληξε στο πρότυπο μαθηματικό υπόδειγμα 7 και τα παράγωγα συστήματά του. Χάρη στην Ευκλείδεια μεθοδολογία, έχει διανοιχτεί ο δρόμος για την κατασκευή μακροοικονομικών μοντέλων οποιουδήποτε μεγέθους, τα οποία βασίζονται απόλυτα σε μικροοικονομικές αρχές. Από τα προαναφερθέντα συμπεραίνεται ότι η συνένωση των δύο μερών της οικονομικής επιστήμης έχει επιτευχθεί πλήρως.

Κάθε σύμπλεγμα συναλλαγών αναπαριστάνεται ως ένα σύστημα μη-ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, με σταθερούς συντελεστές, όπως το **50**. Κατά τη διάρκεια των αγοραπωλησιών υπηρεσιών ή προϊόντων έναντι (εγγυημένων) ομολόγων, και αντίστροφα, ο ετήσιος νομισματικός ισολογισμός (**K**) μετατρέπεται γραμμικά, μέσω των διακλαδώσεων των χρηματικών ροών (**A**), στο διάνυσμα των εισοδημάτων και δαπανών (**X**) των θεσμικών τομέων της οικονομίας. Το ενεργητικό και το παθητικό και, άρα, η καθαρή χρηματοοικονομική θέση (net financial position) των καταναλωτών, των παραγωγών, των τραπεζιτών, των κυβερνώντων κ.λπ., υπολογίζονται μέσω της προεξόφλησης των εσόδων και των εξόδων έκαστου τομέα.

Διαιρώντας τη στατική κυκλοφορία του χρήματος σε κάθε παζάρι με το μισθό, τιμή ή αξία που αντιστοιχεί, λαμβάνουμε τα έτη εργασίας, τα τεμάχια παραγωγής ή τις μονάδες ρευστότητας που αγοράζονται και πωλούνται στη διάρκεια του χρόνου. Συγκρίνοντας την ποσότητα που τυγχάνει εμπορίας με την ποσότητα που είναι διαθέσιμη, υπολογίζουμε το έλλειμμα ή το πλεόνασμα έκαστου αγαθού για το έτος εκείνο. Μεσοπρόθεσμα, τα ποσοτικά χάσματα των αγαθών δεν εκμηδενίζονται από μόνα τους. Η δυνατότητα συγκερασμού των απαιτήσεων των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών καθορίζει το βαθμό στον οποίο οι αρχές τροποποιούν τις παραμέτρους νομισματικής πολιτικής ή επιτρέπουν στους ιδιοκτήτες να αλλάζουν τους μισθούς και τις τιμές. Κάθε χρόνο, με στατιστικά δεδομένα:

- τους συντελεστές αγοραίας συμπεριφοράς των θεσμικών τομέων,
- το μέγεθος και την κατανομή των χρηματοπιστωτικών πράξεων,

είμαστε σε θέση, ως επιστήμονες οικονομολόγοι, να επιβεβαιώσουμε την ύπαρξη,

μοναδικότητα, σταθερότητα αλλά και το περιεχόμενο του διανύσματος ισορροπίας $\mathbf{X}^*=(y_1^*, e_1^*, y_2^*, e_2^*,\ldots, y_n^*, e_n^*)$ και, άρα, να βοηθήσουμε τους αρμόδιους φορείς να προγραμματίσουν τα νομισματικά, δημοσιονομικά, εισοδηματικά, τιμολογιακά ή άλλου είδους μέτρα που ενδείκνυνται. Η λύση του μαθηματικού συστήματος **50** μάς επιτρέπει:

- να εκφράσουμε τις ροές των τομεακών εσόδων και εξόδων ως συναρτήσεις των εξωγενών παραμέτρων,
- να συγκρίνουμε τις παραγώγους των ενδογενών μεταβλητών ως προς έκαστη παράμετρο πολιτικής,
- να διαμορφώσουμε ολοκληρωμένη διαχείριση των πραγματικών πόρων τής υπό μελέτη οικονομίας.

Ένα σύμπλεγμα συναλλαγών, όπως κάθε ζωντανός οργανισμός, σπάνια πραγματοποιεί μεγάλα άλματα, διότι δύσκολα εσωτερικεύει ριζοσπαστικές αλλαγές. Σε αυτό το πλαίσιο, οι διαφοροποιήσεις των τομεακών χρηματικών ροών, που παράγονται από ελάχιστες μεταβολές των παραμέτρων πολιτικής, είναι ενδεικτικές της περιρρέουσας πραγματικότητας και, επομένως, χρήσιμες για τη διαμόρφωση πολιτικής.

Η Ευκλείδεια μεθοδολογία (συνδυάζοντας τα μαθηματικά, τη στατιστική με τη λογιστική και εκμεταλλευόμενη την τεχνολογία) καθιστά δυνατή την αναπαράσταση των αγοραίων δοσοληψιών και την επίλυση των συνακόλουθων προβλημάτων με απλότητα, ομοιομορφία και γενικότητα. Ωστόσο, για να διευκολυνθεί η καθολική αποδοχή της, είναι αναγκαίο να αποδειχθεί ότι με αυτήν τυγχάνει χειρισμού ένα μεγάλο φάσμα θεμάτων, που απασχολεί τους ειδικούς επιστήμονες, το συναλλασσόμενο κοινό και τους πολιτικούς ιθύνοντες. Σε αυτό και τα επόμενα δύο κεφάλαια, εφαρμόζουμε την Ευκλείδεια μεθοδολογία, για να απαντήσουμε διάφορα θεωρητικά και πρακτικά ερωτήματα, που εγείρονται σε σχέση με:

- τα είδη αξιογράφων που υπόκεινται σε διαπραγμάτευση στην ελεύθερη αγορά,
- τη διαχείριση των κινδύνων που απειλούν τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα,
- τη μαθηματική προσομοίωση της μακροχρόνιας οικονομικής ανάπτυξης,
- τις διάφορες κατηγορίες εισοδημάτων και δαπανών του κυβερνητικού τομέα,
- το παγκόσμιο σύστημα εμπορίου υπηρεσιών, προϊόντων, ομολόγων κ.λπ.

IX.1 Οι Ενδιάμεσες Χρηματοοικονομικές Υπηρεσίες

Σύμφωνα με τις αξιωματικές προτάσεις που αφορούν την τομεακή συμπεριφορά, σε κάθε παζάρι ένας ή περισσότεροι:

- πωλητές αποκομίζουν κάποιο (μεσοπρόθεσμα) προκαθορισμένο ποσοστό των ετήσιων εσόδων τους προσφέροντας τό υπό εμπορία αγαθό,
- αγοραστές διαθέτουν κάποιο (μεσοπρόθεσμα) προκαθορισμένο ποσοστό των ετήσιων εξόδων τους ζητώντας τό υπό εμπορία αγαθό.

Τα παζάρια που απαρτίζουν το οικονομικό σύστημα λειτουργούν χάριν της κατανάλωσης και ανταλλαγής υπηρεσιών και προϊόντων έναντι χρημάτων, καθώς επίσης χάριν της χρησιμοποίησης και συσσώρευσης χρημάτων έναντι αγαθών από τους θεσμικούς τομείς. Αμφίβολες (μη-εγγυημένες) ροές χρημάτων συνδέονται με αμφίβολες (μη-εγγυημένες) παρούσες αξίες. Τα μη-εγγυημένα αξιόγραφα δε γίνονται ευρέως αποδεκτά ως μέσα πραγματοποίησης εισπράξεων και πληρωμών ούτε ως μέσα συσσώρευσης ενεργητικού και παθητικού. Επομένως, η 'άμεσα διαθέσιμη ρευστότητα' που προσφέρουν τα εγγυημένα ομόλογα, αγοράζεται και πωλείται σε διαφορετικό παζάρι από την 'πιθανή χρηματοοικονομική διευκόλυνση' που προσφέρουν τα μη-εγγυημένα αξιόγραφα. Τα τυχερά παιγνίδια (lotteries), οι ασφαλιστικές πράξεις (insurance), οι μετοχές εταιρειών (shares), οι προθεσμιακές συναλλαγές (futures), οι προαιρετικές πράξεις (options) κ.λπ., εμπίπτουν στην τελευταία κατηγορία, αφού οι μελλοντικές ροές, καθώς επίσης οι παρούσες αξίες τους, υπόκεινται στους νόμους των πιθανοτήτων. Οι πλείστοι συναλλασσόμενοι είναι σε θέση να εκτιμήσουν τους επικρεμμάμενους κινδύνους, ενώ κάποιοι άλλοι δεν αντιλαμβάνονται τις πολύπλοκες πρόνοιες τών μη-εγγυημένων αξιογράφων, ούτε εμμένουν σε τεκμηριωμένες εκτιμήσεις. Παρόλον που:

- ούτε οι αποδέκτες (acceptors) έχουν πάντοτε όλες τις πληροφορίες που χρειάζονται για να υπολογίσουν, επακριβώς, τα ποσοστά των εισοδημάτων, που θα αποκομίζουν από τα προαναφερθέντα στοιχεία ενεργητικού, κάθε χρόνο,
- ούτε οι εκδότες (issuers) έχουν πάντοτε όλες τις πληροφορίες που χρειάζονται για να υπολογίσουν, επακριβώς, τα ποσοστά των δαπανών τους, που θα διαθέτουν για τα προαναφερθέντα στοιχεία παθητικού, κάθε χρόνο,

εν τούτοις, για διάφορους πρακτικούς, ψυχολογικούς και άλλους λόγους, οι καταναλωτές, οι παραγωγοί, οι τραπεζίτες, οι κυβερνώντες κ.λπ., πωλούν και αγοράζουν μη-εγγυημένα αξιόγραφα, αποκομίζοντας κάποιο μερίδιο των εσόδων τους και διαθέτοντας κάποιο μερίδιο των εξόδων, συναλλασσόμενοι, συνήθως, μέσω εξειδικευμένων μεσαζόντων (dealers). Εφόσο προσφορά και ζήτηση για μη-εγγυημένα αξιόγραφα συνυπάρχουν, συμπεραίνεται ότι οι εισπράξεις και οι πληρωμές των χρηματοοικονομικών διαμεσολαβητών αναπαριστάνονται ακριβώς όπως των άλλων θεσμικών τομέων, σύμφωνα με την Ευκλείδεια μεθοδολογία. Σε αυτό το απλό, ομοιόμορφο και γενικό πλαίσιο, οι εξειδικευμένοι μεσάζοντες απολαμβάνουν το σύνολο σχεδόν των εισπράξεών τους **από**, ενώ διαθέτουν μηδέν τοις εκατό των δαπανών τους **για** τις ενδιάμεσες χρηματοοικονομικές υπηρεσίες, τις οποίες προσφέρουν οι ίδιοι.

Βάσει των αξιωματικών προτάσεων που αφορούν τις νομισματικές διευθετήσεις, η ειδοποιός διαφορά ανάμεσα στα τραπεζικά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και τους ποικίλους εξειδικευμένους μεσάζοντες έγκειται στο ότι τα πρώτα, όπως και οι κυβερνητικοί οργανισμοί, δικαιούνται να λειτουργούν ως καθαροί χρεώστες και να αυξάνουν τα χρέη τους εσαεί, ενώ οι δεύτεροι, όπως οι λοιποί μη-εκδοτικοί τομείς, υποχρεούνται να λειτουργούν ως καθαροί πιστωτές και να αυξάνουν τα κεφάλαιά τους εσαεί. Στις ελεύθερες οικονομίες, τα νοικοκυριά, οι επιχειρήσεις, οι διαμεσολαβητές και οι άλλοι μη-τραπεζικοί τομείς δικαιούνται να εκδίδουν και να αποδέχονται κάθε είδους αξιόγραφα συναλλασσόμενοι μεταξύ τους, επειδή κατ' αυτόν τον τρόπο δεν επηρεάζουν τη συνολική ρευστότητα και, άρα, την υπόλοιπη οικονομία. Αντίθετα, οποιαδήποτε αγοραπωλησία αξιογράφων μεταξύ των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων από τη μια και των καταναλωτών, των παραγωγών, των διαμεσολαβητών κ.λπ. από την άλλη, μεταβάλλει τον ισολογισμό του νομισματικού τομέα και, επομένως, την ποσότητα χρήματος στο σύμπλεγμα συναλλαγών.

IX.2 Κίνδυνοι Αποσταθεροποίησης και η Αντιμετώπισή τους

Σε κάθε οικονομία υπάρχουν ποσοστιαίες κατανομές της ζήτησης εισοδημάτων και της προσφοράς δαπανών (εκ μέρους των θεσμικών τομέων), που αποσταθεροποιούν το δυναμικό σύστημα, διότι αλλάζουν τις Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz από θετικές σε αρνητικές. Δεδομένων των υπόλοιπων εξωγενών παραμέτρων, τα όρια έκαστου συντελεστή αγοραίας συμπεριφοράς, μέσα στα οποία το σύμπλεγμα συναλλαγών

παραμένει σταθερό, υπολογίζονται με το *Mathematica*. Τα τραπεζικά ιδρύματα πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τις προαναφερθείσες αναλογίες εισπράξεων και πληρωμών κατά τη διαχείριση των διαφόρων κινδύνων στους οποίους υπόκεινται.

Συνεπώς, η αρμόδια αρχή οφείλει να καθοδηγεί τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα της χώρας ώστε, αν πωλούν και αγοράζουν μη-εγγυημένα αξιόγραφα (ανταλλάσσοντάς τα με εγγυημένα ομόλογα ή κατ' εντολήν χρήμα), να το πράττουν σε ποσοστά των ετήσιων εσόδων (ενεργητικού) και εξόδων (παθητικού) τους, στα οποία το δυναμικό σύστημα παραμένει σταθερό. Όσοι τραπεζίτες υπερβαίνουν τα προαναφερθέντα όρια, θα πρέπει να προσάγονται ενώπιον της δικαιοσύνης για συμμετοχή σε 'οργανωμένο οικονομικό έγκλημα' ή σε 'στημένο τυχερό παιγνίδι' προς όφελος ορισμένων και σε βάρος των υπόλοιπων μονάδων ή τομέων του συμπλέγματος συναλλαγών.

Τα λοιπά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα (δηλαδή όλα, πλην της κεντρικής τράπεζας) εξαιτίας των πολλών και διαφόρων κινδύνων που αντιμετωπίζουν, υποχρεούνται να λειτουργούν διατηρώντας καθαρό ενεργητικό (ή κεφάλαιο) ώστε, μεταξύ άλλων:

- να αναγκάζονται να καλύπτουν, αν χρειασθεί, τα τρέχοντα ελλείμματα ή ζημίες τους,
- να ελέγχουν τις ποσότητες μη-εγγυημένων αξιογράφων που πωλούν και αγοράζουν,
- να συμπεριφέρονται χωρίς να προκαλούν ευρύτερες χρηματοοικονομικές κρίσεις.

Σε πιο ρεαλιστικά υποδείγματα συμπλεγμάτων συναλλαγών, η κεντρική τράπεζα πρέπει πάντοτε να διαχωρίζεται από τα λοιπά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, αφού η προαναφερθείσα δεν έχει άλλη αποστολή από το να ρυθμίζει την προσφορά (μέσω τού k) και τη ζήτηση (μέσω τού r) ετήσιας ρευστότητας από τους υπόλοιπους τομείς. Το ποσοστό (επάρκεια) ιδίων κεφαλαίων στο σύνολο του νομισματικού παθητικού της κεντρικής τράπεζας δε διαδραματίζει κανένα ιδιαίτερο ρόλο ούτε στο οικονομικό σύστημα ούτε στην Ευκλείδεια προσομοίωσή του.

IX.3 Ο Τετραπλός Ρόλος του Επιτοκίου

Από την ανάλυση και σύνθεση του στοιχειώδους νομισματικού μοντέλου **7** και του γενικού οικονομικού υποδείγματος **50**, συνάγεται ότι, εκτός από τους πολέμους, θεομηνίες, πανικούς κ.λπ., πλείστα σκαμπανεβάσματα στις αγοραπωλησίες υπηρεσιών, προϊόντων και αξιογράφων προκαλούνται από τα ίδια τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, μέσω πράξεων ή

παραλείψεών σε σχέση με:

- τις αναλογίες των εισοδημάτων και των δαπανών τους,
- τις μεταβολές του ισολογισμού του τραπεζικού συστήματος,
- το ετήσιο προεξοφλητικό επιτόκιο.

Συναφώς, υπενθυμίζεται ότι ο ισολογισμός του νομισματικού συστήματος παρουσιάζει:

- ως **καθαρούς χρεώστες** τα τραπεζικά ιδρύματα και, όπου ισχύει, τους κυβερνητικούς οργανισμούς, που δικαιούνται να λειτουργούν ως εκδότες του χρήματος.
- ως **καθαρούς πιστωτές** τα καταναλωτικά νοικοκυριά και τις παραγωγικές επιχειρήσεις, που υποχρεούνται να λειτουργούν ως αποδέκτες του χρήματος.

Ο ισολογισμός του νομισματικού συστήματος μεταβάλλεται, ταυτόχρονα, από την πλευρά:

- του **ενεργητικού**, σύμφωνα με το έλλειμμα των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων k_f και, ίσως, των κυβερνητικών οργανισμών k_g,
- του **παθητικού**, σύμφωνα με το πλεόνασμα των καταναλωτικών νοικοκυριών k_h και των παραγωγικών επιχειρήσεων k_b.

Το πλεόνασμα (+) ή έλλειμμα (-) ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ των ετήσιων εσόδων (y_i) και εξόδων (e_i) κάθε τομέα. Στην περίπτωση του στοιχειώδους οικονομικού μοντέλου **7**, όπου δεν υπάρχει κυβερνητικός τομέας, και άρα $(e_g - y_g) = k_g = 0$, έπεται ότι:

66 $$(e_f - y_f) = (y_h - e_h) + (y_b - e_b) = k_f = k_h + k_b = k = dM/dt$$

Τα εισοδήματα (y_i) και οι δαπάνες (e_i) των θεσμικών τομέων, οι κύκλοι εργασιών (ρ_i) των παζαριών, καθώς επίσης οι ζητούμενες ποσότητες (q_i) αγαθών, είναι γραμμικές συναρτήσεις της αύξησης ($k = dM/dt$) του τραπεζικού ισολογισμού (M) στη μονάδα του χρόνου. Η ετήσια προσφορά χρήματος (k) δεν εξαρτάται από το προεξοφλητικό επιτόκιο (r). Όμως, το τελευταίο επηρεάζει την παρούσα αξία ($M = k/r$) της νομισματικής επέκτασης, προβαλλόμενης, σύμφωνα με την ένατη αξιωματική πρόταση, στον άπειρο ορίζοντα. *Ceteris paribus,* οι μειώσεις (αυξήσεις) του προεξοφλητικού επιτοκίου αποφέρουν, ταυτόχρονα, στιγμιαία ή εφάπαξ:

- κεφαλαιακά κέρδη (ζημιές) στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις, που είναι οι τελικοί δανειστές (κάτοχοι) του νομισματικού πλούτου, και

- κεφαλαιακές ζημιές (κέρδη) στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, που είναι οι τελικοί δανειζόμενοι (εγγυητές) του νομισματικού πλούτου.

Δικαιολογημένα, τίθεται ξανά το ερώτημα: ''Πώς επιδρά το προεξοφλητικό επιτόκιο στο σύμπλεγμα συναλλαγών;'' Σύμφωνα με την Ευκλείδεια μεθοδολογία, το εν λόγω ποσοστό διαδραματίζει τέσσερεις αλληλένδετους ρόλους στο οικονομικό σύστημα:

Πρώτον, το ετήσιο προεξοφλητικό επιτόκιο αντιστοιχεί στα εκατοστά της χρεοπιστωτικής (λογιστικής) μονάδας που οφείλουν να πληρώνουν οι δανειζόμενοι για κάθε μονάδα παθητικού που εξέδωσαν και, αντίστοιχα, δικαιούνται να εισπράττουν οι δανείζοντες από κάθε μονάδα ενεργητικού που συσσώρευσαν. Συνεπώς, η αξία του μοναδιαίου ομολόγου (που κοστίζει στον εκδότη και αποφέρει στον αποδέκτη μία μονάδα ρευστότητας κάθε χρόνο στο διηνεκές) ισούται με το αντίστροφο του επιτοκίου, $p_s = 1/r$. Σε οποιαδήποτε οικονομία, όταν το ετήσιο προεξοφλητικό επιτόκιο ισούται:

- με 9,09 τοις εκατό, η αξία του μοναδιαίου ομολόγου είναι $p_s = 1/0{,}0909 \approx 11{,}00$
- με 4,54 τοις εκατό, η αξία του μοναδιαίου ομολόγου είναι $p_s = 1/0{,}0454 \approx 22{,}03$.

Δεύτερον, το προεξοφλητικό επιτόκιο αποτελεί τη μόνη αναγκαία και εξωγενή σύνδεση μεταξύ των χρηματικών ροών, των παρουσών αξιών και αντίστροφα. Ως βαθμωτός συντελεστής (scalar coefficient) χρησιμεύει στη μετατροπή των ετήσιων πληρωμών και εισπράξεων (monetary flows) στα αντίστοιχα στοιχεία ενεργητικού και παθητικού (financial stocks), και τανάπαλιν. Το εγγυημένο ομόλογο (πληρωμής και, άρα, είσπραξης) σταθερής δόσης (fixed coupon consol) και το εγγυημένο ομόλογο (πληρωμής και, άρα, είσπραξης) μεταβλητού τόκου (variable interest bond) αποτελούν τα δύο (ισοδύναμα και εναλλάξιμα) αρχέτυπα χρεόγραφα, εξαιτίας της βεβαιότητας όσον αφορά τις ετήσιες ροές και τις παρούσες αξίες αμφοτέρων. Τα δύο αρχέτυπα ομόλογα είναι συγκρίσιμα στο μικροοικονομικό επίπεδο (δηλαδή από τη σκοπιά του επακριβούς υπολογισμού του κεφαλαίου ή χρέους, που αντιστοιχεί στο καθένα) και έχουν παρόμοιες επιπτώσεις στο μακροοικονομικό επίπεδο. Ως αποτέλεσμα των ανωτέρω ιδιοτήτων, οι θεσμικοί τομείς χρησιμοποιούν πολλές παραλλαγές και διάφορα μείγματα τών εν λόγω ομολόγων στις μεταξύ τους συναλλαγές. Όπως και αν ονομάζονται, πλείστα στοιχεία ενεργητικού και παθητικού ανάγονται σε γραμμικούς συνδυασμούς των προαναφερθέντων ειδών χρεογράφων. Συναφώς, αναφέρεται ότι τα συμβόλαια που προβλέπουν:

- προκαθορισμένες χρηματικές ροές (όπως αυτές που απορρέουν από μηνιαία ενοίκια, ετήσιες μισθώσεις, συμβόλαια αγοραπωλησιών, αποσβέσεις επενδύσεων κ.λπ.) προσεγγίζουν το ομόλογο σταθερής δόσης,
- αυξομειούμενες χρηματικές ροές (όπως αυτές που σχετίζονται με μετοχές εταιρειών, ποσοστά επί των πωλήσεων, δικαιώματα ευρεσιτεχνίας, πνευματικά δικαιώματα κ.λπ.) προσεγγίζουν το ομόλογο μεταβλητού τόκου.

Τρίτον, όταν μια Ευκλείδεια οικονομία βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, η ζήτηση εισοδημάτων από τα εγγυημένα χρεόγραφα που αποδέχθηκαν οι καταναλωτές και οι παραγωγοί, ισούται με την προσφορά δαπανών για τα εγγυημένα χρεόγραφα που εξέδωσαν οι τραπεζίτες. Στην οικονομία **Άλφα** (όπου $\beta = {}^{8}/_{9}$, $\gamma = {}^{7}/_{8}$, $\delta = {}^{6}/_{7}$, $\varepsilon = {}^{5}/_{6}$, $\varphi = {}^{439}/_{3168}$ και, άρα, $y_h^* = 0{,}59342 \cdot k$, $e_h^* = 0{,}09342 \cdot k$, $y_b^* = 0{,}52360 \cdot k$, $e_b^* = 0{,}02360 \cdot k$, $y_f^* = 0{,}01561 \cdot k$, $e_f^* = 1{,}01561 \cdot k$), η μαθηματική σχέση εισπράξεων και πληρωμών στο παζάρι ρευστότητας ή ομολόγων (s = securities) καταλήγει ως ακολούθως:

67 $$\boldsymbol{e_s}^* = (1-\gamma)\cdot e_h^* + (1-\varepsilon)\cdot e_b^* + \varphi \cdot e_f^* = \boldsymbol{y_s}^* = (1-\beta)\cdot y_h^* + (1-\delta)\cdot y_b^* + y_f^* = \boldsymbol{\rho_s}^* = 0{,}15634 \cdot k$$

Ο αριθμός των εκκαθαριζόμενων μοναδιαίων ομολόγων (q_s^*) είναι **ευθέως** ανάλογος προς το προεξοφλητικό επιτόκιο r, μέσω της σχέσεως $q_s^* = \rho_s^* / p_s$, σε αντίθεση προς τα εκκαθαριζόμενα έτη εργασίας (q_w^*) και τεμάχια παραγωγής (q_u^*), τα οποία είναι **αντιστρόφως** ανάλογα προς τους μισθούς p_w και τις τιμές p_u, εξαιτίας των σχέσεων $q_w^* = \rho_w^* / p_w$ και $q_u^* = \rho_u^* / p_u$, αντίστοιχα. Ο αριθμός (q_s^*) των εγγυημένων χρεογράφων που αγοράζονται και πωλούνται στην **Άλφα** κάθε χρόνο, είναι ο λόγος του στατικού κύκλου δοσοληψιών για κατ' εντολήν χρήμα (ρ_s^*) προς την αξία μίας μονάδας ετήσιας ρευστότητας στο διηνεκές ($p_s = 1/r$):

68

(a) $$q_s^* = \rho_s^* \div p_s = 0{,}15634 \cdot k \div (1/r)$$

(b) $$q_s^* - q_s^f = 0{,}15634 \cdot (r \cdot k) - 444\,312$$

Η εξίσωση **68**(b) αποτυπώνει τη διαφορά μεταξύ της εκκαθαριζόμενης (q_s^*) και της διαθέσιμης ($q_s^f = 444\,312$) ποσότητας, δηλαδή το χάσμα των μοναδιαίων ομολόγων στην **Άλφα** κατά τη διάρκεια του χρόνου. Εφόσο η στατική ζήτηση για μοναδιαία ομόλογα είναι θετική συνάρτηση του προεξοφλητικού επιτοκίου και της ετήσιας προσφοράς χρήματος, έπεται ότι το έλλειμμα στο παζάρι ετήσιας ρευστότητας τής **Άλφα** (όταν $r = {}^{10}/_{100}$

και k = $171 360 000) γεφυρώνεται **είτε**:

- με μείωση του ετήσιου προεξοφλητικού επιτοκίου στο 1,6585 τοις εκατό,
- με μείωση της αύξησης του νομισματικού ισολογισμού στα $28 419 598,
- με οποιονδήποτε λογικό συνδυασμό των δύο προαναφερθεισών επιλογών.

Ο **τέταρτος** ρόλος που διαδραματίζει το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι αυτός του μοναδικού παράγοντα (single factor) σηματοδότησης των κεφαλαιακών κερδών ή ζημιών στο νομισματικό πλούτο τών μη-εκδοτικών τομέων. Σύμφωνα με την έναντη αξιωματική πρόταση, οι θεσμικοί τομείς συναλλάσσονται παρορμητικά με έλλειψη διορατικότητας, προβάλλοντας το πρόσκαιρο παρόν στο άπειρο μέλλον. Συνεπώς, τα νοικοκυριά, οι επιχειρήσεις κ.λπ., υπολογίζουν τη συνολική αξία της προσφοράς χρήματος ή του τραπεζικού ενεργητικού M προεξοφλώντας την ετήσια μεταβολή του ισολογισμού των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων k, ως εξής:

69 $M = (k/r)$

Η παρούσα αξία των δόσεων ή τόκων στα εγγυημένα ομόλογα που εξέδωσαν οι τραπεζικοί και οι κρατικοί οργανισμοί και, άρα, αποδέχθηκαν οι καταναλωτές και οι παραγωγοί, ανέρχεται ή κατέρχεται ανάλογα με τη μείωση ή αύξηση του προεξοφλητικού επιτοκίου. Τα κεφαλαιακά κέρδη ή ζημιές εξαρτώνται από τη διάρκεια των χρεογράφων, καθώς επίσης από τη συχνότητα και την κατεύθυνση της μεταβολής του επιτοκίου. Εάν τα εγγυημένα ομόλογα εκδίδονται ετησίως με ημερομηνία λήξης ένα χρόνο, στη διάρκεια του οποίου το προεξοφλητικό επιτόκιο παραμένει αναλλοίωτο, τότε η παρούσα αξία των προαναφερθέντων ομολόγων παραμένει επίσης αμετάβλητη. Όσο πιο μακρόχρονα είναι τα χρεόγραφα και όσο πιο τακτικά αυξομειώνεται το επιτόκιο τόσο πιο σημαντικά είναι τα κεφαλαιακά κέρδη ή ζημιές. Σύμφωνα με την Ευκλείδεια μεθοδολογία, οι στιγμιαίες και, άρα, απρόβλεπτες μεταβολές των αξιών των εγγυημένων ομολόγων αφήνουν ανεπηρέαστη τη μεσοπρόθεσμη συμπεριφορά των θεσμικών τομέων. Με δεδομένους τους συντελεστές αγοραίας διαγωγής (**A**), οι ετήσιες χρηματικές ροές (**X**) των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των χρηματοπιστωτών κ.λπ., είναι συναρτήσεις της μεταβολής και της κατανομής (**K**) του νομισματικού ισολογισμού, δηλαδή της αύξησης του παθητικού των τραπεζιτών και της μοιρασιάς του αντίστοιχου ενεργητικού ανάμεσα στους καταναλωτές,

τους παραγωγούς κ.λπ. Περιληπτικά, το προεξοφλητικό επιτόκιο καθορίζει:

- την αξία του μοναδιαίου ομολόγου και, άρα, τον αριθμό των μοναδιαίων ομολόγων που ζητούνται στη μονάδα του χρόνου,
- τον πολλαπλασιαστή που μετατρέπει τις ετήσιες τομεακές ροές σε ενεργητικό και παθητικό και, άρα, τον αντίστοιχο ρευστοποιήσιμο πλούτο.

IX.4 Υπάρχει Παγίδα Ρευστότητας;

Η ζήτηση και η προσφορά ετήσιας ρευστότητας ($e_s^* = y_s^*$) καθορίζονται από τους συντελεστές συμπεριφοράς των θεσμικών τομέων και από τη νομισματική πολιτική της κεντρικής τράπεζας, κάθε χρόνο. Αμφότερες οι χρηματικές ροές υπόκεινται σε εξωγενείς κλονισμούς και, ως εκ τούτου, δεν είναι απόλυτα συντονισμένες. Το τυχόν ετήσιο:

- **έλλειμμα** (υπερβάλλουσα ζήτηση) ασκεί ανοδική πίεση στην αξία του μοναδιαίου ομολόγου, εξέλιξη που τελικά οδηγεί σε μείωση του προεξοφλητικού επιτοκίου,
- **πλεόνασμα** (υπερβάλλουσα προσφορά) ασκεί καθοδική πίεση στην αξία του μοναδιαίου ομολόγου, εξέλιξη που οδηγεί σε αύξηση του προεξοφλητικού επιτοκίου.

Εάν, εξαιτίας διάφορων συγκυριών, το ετήσιο προεξοφλητικό επιτόκιο ευρίσκεται πολύ πλησίον τού μηδέν τοις εκατό, τότε είναι φανερό ότι περαιτέρω σημαντικές αυξήσεις στην αξία του μοναδιαίου ομολόγου γίνονται, εκ των πραγμάτων, όλο και δυσκολότερες. Σε τέτοια περίπτωση δεν υπάρχει άλλη μεσοπρόθεσμη επιλογή από την αύξηση του ελλείμματος ($k = k_f + k_g$) των τομέων που εκδίδουν και του πλεονάσματος ($k = k_h + k_b$) των τομέων που αποδέχονται τα εγγυημένα χρεόγραφα. Με αυτόν τον τρόπο, μεγεθύνονται οι κύκλοι εργασιών στα παζάρια αγαθών $R^* = (\rho_w^* + \rho_u^* + \rho_s^*) = (\rho_w + \rho_u + \rho_s) \cdot k$ και, όπως φαίνεται στην **68**(b), απορροφάται η πλεονάζουσα ρευστότητα. Τα προαναφερθέντα φέρνουν στη μνήμη μας τις ακαδημαϊκές συζητήσεις της δεκαετίας του 1930 σχετικά με την αποτελεσματικότητα μειώσεων του προεξοφλητικού επιτοκίου σε σύγκριση με αυξήσεις της ποσότητας χρήματος ως τρόπων βελτίωσης της οικονομικής κατάστασης των καταναλωτών, των παραγωγών, των τραπεζιτών κ.λπ. Οι 12 αξιωματικές προτάσεις μάς έχουν οδηγήσει σε οικονομικά συμπεράσματα παρόμοια με αυτά στα οποία κατέληξαν εκείνοι που ανακάλυψαν την παγίδα ρευστότητας (liquidity trap) μέσω εντελώς διαφορετικών συλλογισμών.

IX.5 Η Μακροχρόνια Οικονομική Μεγέθυνση

Ο συνδυασμός του **ετήσιου πίνακα** των αγοραίων συμπεριφορών $\mathbf{A_t}$ και του **ετήσιου διανύσματος** των χρηματοδοτικών παραμέτρων $\mathbf{K_t}$ παράγει το **ετήσιο διάνυσμα** της στατικής ισορροπίας $\mathbf{X_t}^*$ του συμπλέγματος συναλλαγών. Κάθε χρόνο, με δεδομένες τις διαθέσιμες ποσότητες των αγαθών q_i^f, i = 1,.., n, οποιοδήποτε οικονομικό σύστημα του τύπου **50** απεικονίζεται οπτικά και αριθμητικά ως ένας δυναμικός διανυσματικός χώρος $\mathbf{V}(\{\text{εισόδημα, δαπάνη, ποσοτικό χάσμα}\}_i, t)$ με τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Σε κάθε διάνυσμα $(y_i^*, e_i^*, q_i^* - q_i^f)_t$ το οποίο χαρακτηρίζει ένα θεσμικό τομέα i και, άρα, το συνδεδεμένο αγαθό, αντιστοιχεί μια από τις **n** κορυφές του πολυέδρου, που εκπροσωπεί το σύμπλεγμα συναλλαγών εκείνο το έτος. Το διατηρήσιμο ποσοτικό χάσμα $(q_i^* - q_i^f)/q_i^f$ ενδείκνυται να μετράται ως κλάσμα της διαθέσιμης ποσότητας q_i^f του αντίστοιχου αγαθού. Μακροχρόνια, $-\infty,\ldots, t-1 < t < t+1,\ldots, +\infty$, λαμβάνουμε τη σειρά πολυέδρων:

70 $$\mathbf{X}^*(t) = \{(y_1^*, e_1^*, (q_1^* - q_1^f)/q_1^f), (y_2^*, e_2^*, (q_2^* - q_2^f)/q_2^f), \ldots, (y_n^*, e_n^*, (q_n^* - q_n^f)/q_n^f)\}_t,$$

που αποδίδει τις διαδοχικές καταστάσεις ισορροπίας τής υπό μελέτην οικονομίας. Συνεπώς, η διαχρονική εξέλιξη ενός συμπλέγματος συναλλαγών αναπαριστάνεται από πολύεδρα, τα οποία συγκλίνουν εάν το εικονιζόμενο σύστημα είναι σταθερό ή αποκλίνουν εάν αυτό είναι ασταθές. Χάριν ευκολίας επαναλαμβάνεται ότι τα ετήσια εξωγενή δεδομένα κάθε Ευκλείδειου μαθηματικού υποδείγματος είναι:

1) Ο αριθμός των θεσμικών τομέων ή παζαριών αγαθών και, άρα, των εξισώσεων που απαρτίζουν το σύστημα.
2) Τα ποσοστά των τομεακών εισοδημάτων που πηγάζουν από και των δαπανών που προορίζονται για κάθε παζάρι.
3) Οι παράμετροι νομισματικής, δημοσιονομικής, συναλλαγματικής, τιμολογιακής και εισοδηματικής πολιτικής.
4) Οι ποσότητες των ετών εργασίας, τεμαχίων παραγωγής και μονάδων ρευστότητας, οι οποίες είναι διαθέσιμες.
5) Οι τρέχουσες τιμές των διαφόρων ειδών υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων.
6) Οι ετήσιοι ρυθμοί διαφοροποίησης των προαναφερθεισών αυτόνομων μεταβλητών.

Τα εξωγενή δεδομένα μεταβάλλονται σε αυτόνομα συστήματα, σύμφωνα με τους ιδιαίτερους νόμους δράσης και αντίδρασης του καθενός από αυτά. Συγκεκριμένα, η Ευκλείδεια μεθοδολογία θεωρεί ότι τα εξωγενή δεδομένα:

- μεσοπρόθεσμα, δηλαδή $t_o \leq t \leq t_o+1$, διαφοροποιούνται ξεχωριστά από τις χρηματικές ροές˙
- μακροχρόνια, δηλαδή $t_o+1 \leq t \leq +\infty$, αλληλεπηρεάζονται με τις χρηματικές ροές.

Με το κατάλληλο λογισμικό, οι επιστήμονες οικονομολόγοι μπορούν να διερευνήσουν τις διαδοχικές ισορροπίες τού υπό μελέτην συμπλέγματος συναλλαγών, νοουμένου ότι έχουν υποθέσει ή προβάλει τα μεγέθη των αυτόνομων μεταβλητών και των παραμέτρων πολιτικής για τη σειρά ετών που τους ενδιαφέρει. Η επιλογή των μονάδων μέτρησης είναι ουσιώδους σημασίας. Ο χρόνος t μετριέται σε μονάδες και εκατοστά ημερολογιακού έτους. Οι ροές εσόδων και εξόδων, καθώς επίσης τα στοιχεία ενεργητικού και παθητικού, μετριούνται σε μονάδες και εκατοστά ονομαστικού χρήματος. Οι ρυθμοί διαφοροποίησης των αυτόνομων μεταβλητών και των παραμέτρων πολιτικής μπορούν να υποτεθούν ή να προβληθούν στη διάρκεια τής υπό μελέτην χρονικής περιόδου μέσω κατάλληλων συλλογισμών ή δυναμικών συστημάτων. Όλοι οι ρυθμοί μεταβολής μετριούνται σε ποσοστά διαφοροποίησης ανά έτος. Το λογισμικό πρόγραμμα που θα χρησιμοποιηθεί, θα πρέπει, ετησίως, να υπολογίζει την ύπαρξη, μοναδικότητά και σταθερότητα της λύσης (μέσω των Οριζουσών τών Routh-Hurwitz), καθώς επίσης να καταγράφει αριθμητικά και να παρουσιάζει οπτικά (μέσω του Κανόνα τού Cramer):

- το εισόδημα και τη δαπάνη κάθε θεσμικού τομέα,
- τις ροές χρημάτων και ποσοτήτων σε κάθε παζάρι αγαθού,
- το τρέχον πολύεδρο του οικονομικού συστήματος,
- τα ποσοστά των (i) απασχολούμενων και άνεργων νοικοκυριών, (ii) των πωληθέντων και διαθέσιμων εμπορευμάτων, (iii) των κυκλοφορούντων και αποκοιμισμένων χρεογράφων κ.λπ.

Η θεωρία της οικονομικής μεγέθυνσης (economic growth theory) επικεντρώνεται στην πορεία που ακολουθεί το ετήσιο διάνυσμα στατικής ισορροπίας ενός συμπλέγματος συναλλαγών, ως αποτέλεσμα μιας σειράς υποθέσεων ή προβολών για τη διαφοροποίηση του συνόλου των εξωγενών δεδομένων, κάθε χρόνο. Η Ευκλείδεια μεθοδολογία, όταν συνδυάζεται με τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές και τα λογισμικά προγράμματα, προσφέρει ένα ιδεώδες πλαίσιο μελέτης εναλλακτικών σεναρίων και απάντησης σημαντικών ερωτημάτων, που σχετίζονται με την οικονομική μεγέθυνση, τόσο προς τα πίσω, στο παρελθόν, όσο και προς τα εμπρός, στο μέλλον. Για παράδειγμα:

- Υπάρχει μια χρονολογική σειρά αγοραίων συμπεριφορών, που υποβοηθάει την αναπαράσταση των ιστορικών σταδίων της οικονομικής ανάπτυξης;
- Τι συμβαίνει όταν συνεχώς αυξάνονται οι θεσμικοί τομείς και τα παζάρια αγαθών;
- Με ποιο τρόπο οι αυξανόμενοι αριθμοί πηγών εισοδήματος και προορισμών δαπανών σχετίζονται με την τεχνολογική πρόοδο και τις αγοραίες καινοτομίες;
- Πώς έχει αλλάξει η κατανομή των ετήσιων χρηματοπιστωτικών πράξεων ανάμεσα στους καταναλωτές, τους παραγωγούς, τους κυβερνώντες, αλλά και τις διάφορες χώρες, διά μέσου της ιστορίας;
- Ποιοι άλλοι εφικτοί συνδυασμοί πηγών εισοδημάτων και προορισμών δαπανών (των θεσμικών τομέων) θα κατέληγαν προς όφελος των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των τραπεζιτών, των κυβερνώντων, κ.λπ., κατ' έτος;
- Πώς επηρεάζεται η παγκόσμια οικονομική ανάπτυξη από το μεταβαλλόμενο μοίρασμα των τραπεζικών πιστώσεων ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς και τις διάφορες χώρες με την πάροδο του χρόνου;
- Υπάρχει μια διαχρονική σχέση ανάμεσα στο μερίδιο μιας χώρας στο παγκόσμιο ακαθάριστο προϊόν και στο μερίδιο της χώρας στη διεθνή νομισματική επέκταση;

Έκαστο οικονομικό σύστημα σχηματίζει ένα διανυσματικό χώρο με τον παράγοντα χρόνο ως μια από τις ανεξάρτητες συνιστώσες. Η οικονομική μεγέθυνση ενός συμπλέγματος συναλλαγών $\mathbf{X}^*(t)$, $-\infty,\ldots, t-1 < t < t+1,\ldots, +\infty$, αποτελείται από τα ετήσια σύνολα των ενδογενών μεταβλητών, τα οποία προκύπτουν από τα ετήσια σύνολα των αυτόνομων μεταβλητών και των παραμέτρων πολιτικής. Η Ευκλείδεια μεθοδολογία προσφέρει στους ενδιαφερόμενους ερευνητές τα θεωρητικά εργαλεία και τις πρακτικές βάσεις, ώστε να κατασκευάσουν μαθηματικά μοντέλα της οικονομικής πραγματικότητας και να απαντήσουν, ανάλογα με τις γνώσεις τους, ερωτήσεις που αφορούν είτε στο παρελθόν είτε στο μέλλον. Μία ομάδα ερευνητών, όσο περισσότερο επιτυγχάνει να αιτιολογεί υποθέσεις και να πραγματοποιεί προβολές για τις ετήσιες διαφοροποιήσεις των αυτόνομων μεταβλητών και των παραμέτρων πολιτικής τόσο πιο αποδοτικά μπορεί να εκμεταλλευθεί τις δυνατότητες που παρέχει η Ευκλείδεια μεθοδολογία στο κεφάλαιο της μακροχρόνιας μεγέθυνσης του οικονομικού συστήματος.

Χ. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Η κατασκευή του πρότυπου μοντέλου στηρίχτηκε στην υπόθεση ότι οι θεσμικοί τομείς υποκινούνται από τρεις ψυχολογικές δυνάμεις: την αριστοποίηση μέσω ορθολογισμού, το ένστικτο της αυτοσυντήρησης και τη θέληση για δύναμη. Οι οικονομικές συμπεριφορές των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων διαμορφώνονται, κυρίως, από τα πρώτα δύο κίνητρα, ενώ των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων διαμορφώνονται κυρίως από το τρίτο κίνητρο. Ο τραπεζικός τομέας, λόγω τού νομικά κατοχυρωμένου δικαιώματος να εξοφλά τις υποχρεώσεις του αυξάνοντας το παθητικό του, έχει τη δυνατότητα να αγοράζει και να πωλεί τα δικά του ομόλογα, τα οποία είναι, γενικά, αποδεκτά από τους υπόλοιπους τομείς ως μέσα τρεχουσών πληρωμών και ως μέσα συσσώρευσης αποθεμάτων στο νόμισμα της χώρας. Η ελευθερία δράσης των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων περιορίζεται από διάφορους παράγοντες, ο κυριότερος των οποίων είναι οι διαθέσιμοι πόροι. Παραδείγματος χάριν, εάν πρόκειται όλοι οι θεσμικοί τομείς να απολαμβάνουν:

- **σταθερές** ροές εσόδων και εξόδων, τότε οι τραπεζίτες θα πρέπει να κατανέμουν τις ετήσιες δαπάνες τους εντός ορισμένων ορίων, ούτως ώστε οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz να είναι μεγαλύτερες από το μηδέν.
- **θετικές** ροές εσόδων και εξόδων, τότε οι τραπεζίτες θα πρέπει να λειτουργούν με ετήσιο έλλειμμα, το οποίο να κατανέμουν εντός συγκεκριμένων αναλογιών, ως στοιχεία ενεργητικού, στους υπόλοιπους τομείς της οικονομίας.
- **ικανοποιητικούς** μισθούς, τιμές και αξίες για τις υπηρεσίες, τα προϊόντα και τα ομόλογα που πωλούν και αγοράζουν, τότε οι τραπεζίτες οφείλουν να μεταβάλλουν τον ισολογισμό τους ανάλογα με τις διαθέσιμες ποσότητες των αγαθών.

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, λόγω των προνομίων που τους παραχωρήθηκαν, οφείλουν να ενεργούν μέσα σε προκαθορισμένα πλαίσια τα οποία, πολλάκις, στοχεύουν στην ικανοποίηση πολιτικών, κοινωνικών και άλλων σκοπιμοτήτων. Σήμερα, όσοι κυβερνούν είναι αδύνατο να παραμείνουν στην εξουσία, εάν δεν ανταποκρίνονται στις επιθυμίες και τα συμφέροντα όσων τους εκλέγουν. Οι στόχοι των αρμοδίων επιτυγχάνονται, μόνο όταν η οικονομία είναι ένα πηδαλιουχούμενο σύστημα. Κάτι τέτοιο προϋποθέτει ότι οι αρχές επιλέγουν τις παραμέτρους πολιτικής εντός των ορίων που αποδίδουν ένα διάνυσμα στατικής ισορροπίας, το οποίο αποτελείται από σταθερές και θετικές χρηματικές ροές.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ενσωματώσουμε το δημόσιο τομέα στο πρότυπο μοντέλο, για να διερευνήσουμε τις επιπτώσεις των κυβερνητικών εσόδων και εξόδων στους υπόλοιπους τομείς και, άρα, σε ολόκληρο το σύμπλεγμα συναλλαγών. Νοείται ότι η κυβέρνηση καθορίζει την αύξηση και την κατανομή των κρατικού προϋπολογισμού λαμβάνοντας υπόψη τις οικονομικές απαιτήσεις και προσδοκίες των ψηφοφόρων. Η ετήσια διαμορφούμενη δημοσιονομική πολιτική αντανακλά το συνδυασμό ορθολογικής αριστοποίησης, ενστίκτου αυτοσυντήρησης και πολιτικής φιλοδοξίας, που χαρακτηρίζει το εκάστοτε κυβερνητικό σχήμα. Οι θεμελιώδεις υποθέσεις και οι αξιωματικές προτάσεις της Ευκλείδειας μεθοδολογίας που έχουμε αναπτύξει, ισχύουν και στην περίπτωση του δημόσιου τομέα. Παραδείγματος χάριν:

- Τα κυβερνητικά έσοδα και έξοδα κατανέμονται, ανάμεσα στα παζάρια αγαθών, σύμφωνα με τις ελαστικότητες υποκατάστασης των πηγών των κρατικών εισοδημάτων και των προορισμών των κρατικών δαπανών, αντίστοιχα.
- Η κυβέρνηση μπορεί να ζητά έσοδα μόνο από αγαθά για τα οποία κάποιοι μη-κρατικοί τομείς πραγματοποιούν δαπάνες και να προσφέρει έξοδα μόνο για αγαθά από τα οποία κάποιοι μη-κρατικοί τομείς αντλούν εισοδήματα.

Επιπλέον, θεωρούμε ως αυταπόδεικτο ότι:

- Μεσοπρόθεσμα, σε αντίθεση με τα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις που διατηρούν τις κατανομές των εσόδων και εξόδων τους σταθερές, οι ιθύνοντες μπορούν να αυξομειώνουν τις παραμέτρους πολιτικής με οποιονδήποτε ρυθμό.
- Τα δημόσια έσοδα πηγάζουν από ποσοστιαίες παρακρατήσεις στις αγοραπωλησίες υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων, αφού οι μη-κρατικοί τομείς επιτυγχάνουν να αποκρύπτουν τα εισοδήματά τους, ώστε να μην καταβάλλουν φόρους σε αυτά.

X.1 Η Συμπεριφορά των Κρατικών Εσόδων

Σύμφωνα με την Ευκλείδεια μεθοδολογία, η κατασκευή ενός μοντέλου ξεκινά πάντοτε από τις εκατοστιαίες κατανομές των τομεακών χρηματικών ροών, όπως αυτές υπολογίσθηκαν στην τελευταία στατιστική έρευνα. Τα εισοδήματα του κράτους (y_g) προέρχονται κατά ζ τοις εκατό από διάφορες φορολογίες που κατορθώνει να επιβάλλει και κατά (1-ζ) τοις εκατό από τραπεζικές καταθέσεις ή ρευστοποιήσιμα ομόλογα που, εξ ανάγκης, διατηρεί:

71 $y_g = \zeta \cdot y_g + (1-\zeta) \cdot y_g = y_{gt} + y_{gs}$

Με δεδομένες τις αναλογίες των εξόδων των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών, που προορίζονται για εργασία β_{iw}, παραγωγή β_{iu} και ρευστότητα β_{is}, το κράτος είναι σε θέση να προϋπολογίσει τα φορολογικά του έσοδα, καθορίζοντας τα ποσοστά παρακράτησης στις αγοραπωλησίες υπηρεσιών τ_w, προϊόντων τ_u και ομολόγων τ_s, ως εξής:

$$\zeta \cdot y_g = \tau_w \cdot [\beta_{bw} \cdot e_b + \beta_{fw} \cdot e_f] + \tau_u \cdot [\beta_{hu} \cdot e_h + \beta_{fu} \cdot e_f] + \tau_s \cdot [\beta_{hs} \cdot e_h + \beta_{bs} \cdot e_b + \beta_{fs} \cdot e_f] =$$

72
$$= \{\tau_u \cdot \beta_{hu} + \tau_s \cdot \beta_{hs}\} \cdot e_h + \{\tau_w \cdot \beta_{bw} + \tau_s \cdot \beta_{bs}\} \cdot e_b + \{\tau_w \cdot \beta_{fw} + \tau_u \cdot \beta_{fu} + \tau_s \cdot \beta_{fs}\} \cdot e_f =$$

$$= t_h \cdot e_h + t_b \cdot e_b + t_f \cdot e_f$$

Οι συντελεστές (τ_w, τ_u, τ_s) ανακοινώνονται και επιβάλλονται στους συναλλασσομένους οι οποίοι, εκούσια ή ακούσια, τους ενσωματώνουν στις αγοραίες συμπεριφορές τους. Η κυβέρνηση καθορίζοντας τα ποσοστά παρακράτησης (τ_w, τ_u, τ_s) καθορίζει, ταυτόχρονα, τα ποσοστά (t_h, t_b, t_f) τα οποία τα νοικοκυριά, οι επιχειρήσεις και οι χρηματοπιστωτές, αντίστοιχα, καταβάλλουν ως φόρους στις ετήσιες δαπάνες τους, εφόσο το ένα σύνολο συντελεστών απορρέει από το άλλο, ως ακολούθως:

(a) $\{\tau_u \cdot \beta_{hu} + \tau_s \cdot \beta_{hs}\} \cdot e_h = t_h \cdot e_h$

73 (b) $\{\tau_w \cdot \beta_{bw} + \tau_s \cdot \beta_{bs}\} \cdot e_b = t_b \cdot e_b$

(c) $\{\tau_w \cdot \beta_{fw} + \tau_u \cdot \beta_{fu} + \tau_s \cdot \beta_{fs}\} \cdot e_f = t_f \cdot e_f$

Όλα τα θέματα φορολογικής θεωρίας και πράξης μπορούν να προσεγγισθούν μέσω ενός εκ των δύο συνόλων (τ_w, τ_u, τ_s) και (t_h, t_b, t_f) των παραμέτρων φορολογικής πολιτικής. Με την ανακοίνωση των συντελεστών παρακράτησης τ_w, τ_u, τ_s, οι μη-κρατικοί τομείς πληρώνουν, μέσω των εξόδων τους β_{ij}, $i = h, b, f$ και $j = w, u, s$, τους νενομισμένους φόρους. Για να παραμείνει το πρότυπο δημοσιονομικό μοντέλο όσο απλό γίνεται, υποθέτουμε ότι οι ετήσιες ροές τόκων, καθώς επίσης οι αγοραπωλησίες εγγυημένων χρεογράφων, δεν υπόκεινται σε φορολογία. Αντικαθιστώντας $\tau_s = 0$ στις εξισώσεις **73**, λαμβάνουμε:

(a) $t_h = \{\tau_u \cdot \beta_{hu}\}$

74 (b) $t_b = \{\tau_w \cdot \beta_{bw}\}$

(c) $t_f = \{\tau_w \cdot \beta_{fw} + \tau_u \cdot \beta_{fu}\}$

Παρά την προαναφερθείσα πολιτική, οι ετήσιες δαπάνες των τραπεζικών ιδρυμάτων φορολογούνται σύμφωνα με το ποσοστό $t_f = (\tau_w \cdot \beta_{fw} + \tau_u \cdot \beta_{fu})$.

Χ.2 Η Συμπεριφορά των Κρατικών Εξόδων

Η πραγματοποίηση δημόσιων εξόδων για κάποιο αγαθό είναι ρεαλιστική, εάν υπάρχει ζήτηση για το αντίστοιχο έσοδο μέσω της προσφοράς του αγαθού από τα νοικοκυριά, τις επιχειρήσεις ή τους χρηματοπιστωτές. Με δεδομένες τις αναλογίες των εισοδημάτων των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών, που προέρχονται από υπηρεσίες α_{iw}, προϊόντα α_{iu} και ομόλογα α_{is}, $i = h, b, f$, η κυβέρνηση κατανέμει τις δαπάνες της ανάμεσα στα αγαθά σύμφωνα με τις πολιτικές, κοινωνικές και άλλες προτεραιότητές της:

75 $$e_g = (\sigma_w + \sigma_u + \sigma_s) \cdot e_g \quad ; \quad \sigma_w + \sigma_u + \sigma_s = 1$$

Συναφώς, αναφέρεται ότι ο συντελεστής σ_s ισούται με το ποσοστό των κρατικών δαπανών που αναλώνεται στην εξυπηρέτηση του δημόσιου χρέους. Στα Ευκλείδεια οικονομικά μοντέλα, τα κρατικά έξοδα εμφανίζονται ως πληρωμές με αντάλλαγμα εργασία, παραγωγή ή ρευστότητα και, άρα, ως επιδοτήσεις ή ενισχύσεις των τομέων που προσφέρουν τα εν λόγω αγαθά. Εάν το δημόσιο χρέος (Δ) αποτελείται από ομόλογα μεταβλητού τόκου, το ποσό που απαιτείται για την ετήσια εξυπηρέτησή του είναι ίσο με:

76 $$\sigma_s \cdot e_g = r \cdot \Delta$$

Κάθε χρόνο, όλες οι κυβερνήσεις προϋπολογίζουν τα κρατικά έσοδα και προγραμματίζουν τα κρατικά έξοδα με τρόπο που προκαθορίζει το δημοσιονομικό χάσμα:

77 $$d\Delta/dt = k_g = (y_g - e_g) \gtrless 0,$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι θεσμικοί τομείς δεν μπορούν να είναι όλοι δανειζόμενοι ή όλοι δανειστές ταυτόχρονα και ότι τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα είναι ο μόνος τομέας που δικαιούται να αυξάνει τις δαπάνες του πέραν των εισοδημάτων του εκδίδοντας εγγυημένα ομόλογα εσαεί, συμπεραίνεται ότι η αύξηση του ρευστού ενεργητικού των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των κυβερνώντων $k = k_h + k_b + k_g$, σχετίζεται με την αύξηση του τραπεζικού παθητικού $k = k_f$, ως ακολούθως:

(a) $(e_f - y_f) = (y_h - e_h) + (y_b - e_b) + (y_g - e_g) > 0$

78

(b) $k_f = k_h + k_b + k_g = h \cdot k + b \cdot k + g \cdot k > 0 \quad ; \quad h + b + g = 1.$

Ο περιορισμός h + b + g = 1 ισχύει κάτω από οποιεσδήποτε συνθήκες, αναφορικά με την κατανομή των ετήσιων χρηματοπιστωτικών πράξεων (k) ανάμεσα στους καταναλωτές (*h*), τους παραγωγούς (*b*) και τους κυβερνώντες (*g*).

Χ.3 Η Κατασκευή του Συμπλέγματος Συναλλαγών

Ο Πίνακας ***X1***, που ακολουθεί, συνοψίζει την κυκλοφορία του χρήματος, λόγω εισπράξεων και πληρωμών, σχετικά με την κατανάλωση, την παραγωγή, τη ρευστότητα αλλά και τη διακυβέρνηση στη χώρα. Η πείρα αιώνων έχει αποδείξει ότι όλες οι αγοραπωλησίες καταγράφονται στο δισδιάστατο Ευκλείδειο πεδίο ως δούναι και λαβείν, χρεώσεις και πιστώσεις, μεταξύ των συναλλασσομένων. Συνεπώς, τα μαθηματικά και άλλου είδους υποδείγματα της οικονομικής πραγματικότητας θα πρέπει, τουλάχιστο, να ενσωματώνουν και να αναπαράγουν αυτήν την επιστημονική και λογιστική αλήθεια, για να αξίζουν, έστω, το μελάνι με το οποίο έχουν γραφεί.

Πίνακας ***X1***
Ζήτηση Εσόδων και Προσφορά Εξόδων

ΤΟΜΕΑΣ	**Νοικοκυριά**		**Επιχειρήσεις**		**Τραπεζίτες**		**Κυβέρνηση**	
ΑΓΑΘΟ %	**Έσοδα**	**Έξοδα**	**Έσοδα**	**Έξοδα**	**Έσοδα**	**Έξοδα**	**Έσοδα**	**Έξοδα**
Εργατικές Υπηρεσίες	α_{hw}	0	0	$(1-\tau_w)\cdot\beta_{bw}$	0	$(1-\tau_w)\cdot\beta_{fw}$		σ_w
Παραγόμενα Προϊόντα	0	$(1-\tau_u)\cdot\beta_{hu}$	α_{bu}	0	0	$(1-\tau_u)\cdot\beta_{fu}$		σ_u
Εγγυημένα Χρεόγραφα	α_{hs}	β_{hs}	α_{bs}	β_{bs}	1	β_{fs}	$(1-\zeta)$	σ_s
Φόροι Παρακράτησης	0	$\tau_u\cdot\beta_{hu}$	0	$\tau_w\cdot\beta_{bw}$	0	$(\tau_w\cdot\beta_{fw} + \tau_u\cdot\beta_{fu})$	ζ	-
Σύνολο	y_h	e_h	y_b	e_b	y_f	e_f	y_g	e_g

Ο ανωτέρω Πίνακας μάς διευκολύνει να εκφράσουμε με μαθηματικές εξισώσεις τις ισορροπίες των χρηματικών ροών, οι οποίες ζητούνται και προσφέρονται από τους θεσμικούς τομείς μέσω συναλλαγών, που αφορούν (a) τις εργατικές υπηρεσίες, (b) τα παραγόμενα προϊόντα, (c) τα εγγυημένα ομόλογα και (d) τους φόρους παρακράτησης:

79

$$\text{(a)} \quad \alpha_{hw} \cdot y_h = \beta_{bw} \cdot e_b + \beta_{fw} \cdot e_f + \sigma_w \cdot e_g - \{ \tau_w \cdot \beta_{bw} \cdot e_b + \tau_w \cdot \beta_{fw} \cdot e_f \}$$

$$\text{(b)} \quad \alpha_{bu} \cdot y_b = \beta_{hu} \cdot e_h + \beta_{fu} \cdot e_f + \sigma_u \cdot e_g - \{ \tau_u \cdot \beta_{hu} \cdot e_h + \tau_u \cdot \beta_{fu} \cdot e_f \}$$

$$\text{(c)} \quad \alpha_{hs} \cdot y_h + \alpha_{bs} \cdot y_b + y_f + (1-\zeta) \cdot y_g = \beta_{hs} \cdot e_h + \beta_{bs} \cdot e_b + \beta_{fs} \cdot e_f + \sigma_s \cdot e_g$$

$$\text{(d)} \quad \zeta \cdot y_g = \tau_u \cdot \beta_{hu} \cdot e_h + \tau_w \cdot \beta_{bw} \cdot e_b + (\tau_w \cdot \beta_{fw} + \tau_u \cdot \beta_{fu}) \cdot e_f$$

Με τους κατάλληλους χειρισμούς, θα μετατρέψουμε το στατικό σύστημα δοσοληψιών **79** σε ένα Ευκλείδειο δυναμικό μοντέλο, το οποίο ενσωματώνει τόσο τη νομισματική όσο και τη δημοσιονομική πολιτική. Με τη βοήθεια του *Mathematica*, συνδυάζοντας ή / και ανακατατάσσοντας τις εξισώσεις **79**(a)(b)(c)(d), υπολογίζουμε τα εισοδήματα των καταναλωτών, των παραγωγών, των χρηματοπιστωτών και της κυβέρνησης ως συναρτήσεις των υπόλοιπων χρηματικών ροών, όπως επεξηγείται πιο κάτω:

Η πρόσθεση των **79** (a)+(c) αποδίδει τα έσοδα των νοικοκυριών ως**:**

80(a) $$y_h = + \beta_{hs} \cdot e_h - \alpha_{bs} \cdot y_b + (1-\tau_w) \cdot \beta_{bw} \cdot e_b + \beta_{bs} \cdot e_b - y_f + (1-\tau_w) \cdot \beta_{fw} \cdot e_f + \beta_{fs} \cdot e_f + \sigma_w \cdot e_g$$

Η πρόσθεση των **79** (b)+(c) αποδίδει τα έσοδα των επιχειρήσεων ως**:**

80(b) $$y_b = - \alpha_{hs} \cdot y_h + (1-\tau_u) \cdot \beta_{hu} \cdot e_h + \beta_{hs} \cdot e_h + \beta_{bs} \cdot e_b - y_f + (1-\tau_u) \cdot \beta_{fu} \cdot e_f + \beta_{fs} \cdot e_f + \sigma_u \cdot e_g$$

Η ανακατάταξη της **79** (c) αποδίδει τα έσοδα των τραπεζιτών ως**:**

80(c) $$y_f = - \alpha_{hs} \cdot y_h + \beta_{hs} \cdot e_h - \alpha_{bs} \cdot y_b + \beta_{bs} \cdot e_b + \beta_{fs} \cdot e_f - (1-\zeta) \cdot y_g + \sigma_s \cdot e_g$$

Η πρόσθεση των **79** (c)+(d) και η ανακατάταξη του αθροίσματος αποδίδει το εισόδημα των κυβερνώντων ως**:**

80(d) $$y_g = - \alpha_{hs} \cdot y_h + (\tau_u \cdot \beta_{hu} + \beta_{hs}) \cdot e_h - \alpha_{bs} \cdot y_b + (\tau_w \cdot \beta_{bw} + \beta_{bs}) \cdot e_b - y_f + (\tau_w \cdot \beta_{fw} + \tau_u \cdot \beta_{fu} + \beta_{fs}) \cdot e_f + \sigma_s \cdot e_g$$

Οι εισπράξεις έκαστου τομέα είναι ίσες με το μερίδιό του στις δαπάνες των υπόλοιπων τομέων για υπηρεσίες, προϊόντα, χρεόγραφα, επιδοτήσεις ή φόρους. Ταυτόχρονα, οι

καταναλωτές, οι παραγωγοί, οι χρηματοπιστωτές και οι κυβερνώντες ρυθμίζουν τις πληρωμές τους, ώστε να είναι ίσες με το εισόδημά τους συν (**πλην**) το μερίδιό τους στην έκδοση (**αποδοχή**) εγγυημένων ομολόγων κατά τη διάρκεια του έτους. Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων **81**, το οποίο καταγράφει διαχρονικά τα τομεακά έσοδα και έξοδα, συνάγεται από τους ανωτέρω συλλογισμούς και τους νόμους των μαθηματικών:

81(a)

$$dy_h/dt = -y_h + \beta_{hs}\cdot e_h - \alpha_{bs}\cdot y_b + \{(1-\tau_w)\cdot\beta_{bw} + \beta_{bs}\}\cdot e_b - y_f + \{(1-\tau_w)\cdot\beta_{fw} + \beta_{fs}\}\cdot e_f + \sigma_w\cdot e_g$$

81(b)

$$de_h/dt = +y_h - k_h - e_h = y_h - h\cdot k - e_h$$

81(c)

$$dy_b/dt = -\alpha_{hs}\cdot y_h + \{(1-\tau_u)\cdot\beta_{hu} + \beta_{hs}\}\cdot e_h - y_b + \beta_{bs}\cdot e_b - y_f + \{(1-\tau_u)\cdot\beta_{fu} + \beta_{fs}\}\cdot e_f + \sigma_u\cdot e_g$$

81(d)

$$de_b/dt = +y_b - k_b - e_b = y_b - b\cdot k - e_b$$

81(e)

$$dy_f/dt = -\alpha_{hs}\cdot y_h + \beta_{hs}\cdot e_h - \alpha_{bs}\cdot y_b + \beta_{bs}\cdot e_b - y_f + \beta_{fs}\cdot e_f - (1-\zeta)\cdot y_g + \sigma_s\cdot e_g$$

81(f)

$$de_f/dt = +y_f + k_f - e_f = y_f + k - e_f$$

81(g)

$$dy_g/dt = -\alpha_{hs}\cdot y_h + (\tau_u\cdot\beta_{hu} + \beta_{hs})\cdot e_h - \alpha_{bs}\cdot y_b + (\tau_w\cdot\beta_{bw} + \beta_{bs})\cdot e_b - y_f + (\tau_w\cdot\beta_{fw} + \tau_u\cdot\beta_{fu} + \beta_{fs})\cdot e_f - y_g + \sigma_s\cdot e_g$$

81(h)

$$de_g/dt = +y_g - k_g - e_g = y_g - g\cdot k - e_g$$

Το στοιχειώδες δημοσιονομικό μοντέλο **81**, όπως τα άλλα Ευκλείδεια υποδείγματα που βασίζονται στις 12 αξιωματικές προτάσεις, έχει τη γενική μορφή **dX/dt =A·X-K**. Η στήλη **X** συνίσταται από τις οκτώ ενδογενείς μεταβλητές (y_h, e_h, y_b, e_b, y_f, e_f, y_g, e_g). Ο **A** τού **81** ισούται με τον Πίνακα X_2, στον οποίο παρατάσσονται οι εκατοστιαίες διαφοροποιήσεις στα εισοδήματα και τις δαπάνες κάθε τομέα, που προκαλούνται, με τη σειρά, από εκατοστιαίες μεταβολές στις προαναφερθείσες χρηματικές ροές των καταναλωτών, των παραγωγών, των τραπεζιτών και των κυβερνώντων. Η στήλη **K**(0, k_h, 0, k_b, 0, -k, 0, k_g) απαρτίζεται από τα μερίδια των νοικοκυριών (h), των επιχειρήσεων (b=1-h-g) και των κυβερνώντων (g) στην αύξηση (k) της συνολικής ρευστότητας. Το υπόδειγμα **81**, όπως το **50**, μπορεί να απεικονισθεί ως ένα σύνολο από πίνακες, ως ένα κινούμενο πολύγωνο, ως ένα κύκλωμα ροών ή ως ένας δυναμικός χώρος.

Πίνακας $\boldsymbol{X_2}$
Η Αλληλεπίδραση των Χρηματικών Ροών

-1	β_{hs}	$-\alpha_{bs}$	$\{(1-\tau_w)\cdot\beta_{bw}+\beta_{bs}\}$	-1	$\{(1-\tau_w)\cdot\beta_{fw}+\beta_{fs}\}$	0	σ_w
1	-1	0	0	0	0	0	0
$-\alpha_{hs}$	$\{(1-\tau_u)\cdot\beta_{hu}+\beta_{hs}\}$	-1	β_{bs}	-1	$\{(1-\tau_u)\cdot\beta_{fu}+\beta_{fs}\}$	0	σ_u
0	0	1	-1	0	0	0	0
$-\alpha_{hs}$	β_{hs}	$-\alpha_{bs}$	β_{bs}	-1	β_{fs}	$\zeta-1$	σ_s
0	0	0	0	1	-1	0	0
$-\alpha_{hs}$	$\{\tau_u\cdot\beta_{hu}+\beta_{hs}\}$	$-\alpha_{bs}$	$\{\tau_w\cdot\beta_{bw}+\beta_{bs}\}$	-1	$(\tau_w\cdot\beta_{fw}+\tau_u\cdot\beta_{fu}+\beta_{fs}\}$	-1	σ_s
0	0	0	0	0	0	1	-1

Ενώ το πρότυπο μοντέλο **7** ενσωματώνει έξι ενδογενείς μεταβλητές (y_h, e_h, y_b, e_b, y_f, e_f) και δύο παραμέτρους νομισματικής πολιτικής (k_f = k; h), το στοιχειώδες υπόδειγμα **81** ενσωματώνει οκτώ ενδογενείς μεταβλητές (y_h, e_h, y_b, e_b, y_f, e_f, y_g, e_g), τρεις παραμέτρους νομισματικής (k; h, b ή g) και πέντε παραμέτρους δημοσιονομικής (ζ; τ_w και τ_u; σ_w, σ_u ή σ_s) πολιτικής. Η μία από αυτές τις παραμέτρους (k) καθορίζει το μέγεθος, ενώ οι υπόλοιπες επτά καθορίζουν τις αναλογίες των τομεακών χρηματικών ροών. Η ενσωμάτωση του κυβερνητικού τομέα έχει αυξήσει τις διαστάσεις του συμπλέγματος συναλλαγών από έξι σε οκτώ μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού με σταθερούς συντελεστές. Ταυτόχρονα, ο αριθμός των εργαλείων πολιτικής έχει γίνει ίσος με τον αριθμό των ενδογενών μεταβλητών, δηλαδή το οικονομικό μοντέλο έχει αποκτήσει ένα από τα τέσσερα χαρακτηριστικά τού τελείως πηδαλιουχούμενου συστήματος.

Οι ετήσιες εισπράξεις και πληρωμές διαφοροποιούνται συντονισμένα, στο μεν **7** στο διανυσματικό χώρο ($\boldsymbol{R}^6$, t) στο δε **81** στο διανυσματικό χώρο ($\boldsymbol{R}^8$, t) ως συναρτήσεις των εξωγενών μεταβλητών και του παράγοντα χρόνου. Συνεπώς, τα στατικά και δυναμικά χαρακτηριστικά αμφότερων των υποδειγμάτων μπορούν να διερευνηθούν με την ίδια μεθοδολογία. Με δεδομένους τους συντελεστές τομεακών συμπεριφορών α_{ij} και β_{ij}, i= *h, b, f, g* και j= *w, u, s, t*, το λογισμικό *Mathematica* μάς επιτρέπει να εκφράσουμε τις λύσεις στατικής ισορροπίας και τις συνθήκες δυναμικής σταθερότητας του μοντέλου **81** με μερικώς συμβολικό ή αλγεβρικό τρόπο, ώστε να εντοπίσουμε τις εξειδικευμένες θεραπείες από τη σκοπιά των φορολογιών, των ενισχύσεων αλλά και των νομισματικών πράξεων, που είναι οι καταλληλότερες για το σύμπλεγμα συναλλαγών που μάς απασχολεί.

X.4 Είναι Μαθηματικές ή Οικονομικές οι Συστημικές Ιδιότητες;

i) Σύμφωνα με τον Κανόνα τού Cramer, το χρονικά αμετάβλητο σύστημα $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}^{*}=\mathbf{K}$, το οποίο αντιστοιχεί στο υπόδειγμα **81**, μπορεί να λυθεί ως προς τον $\mathbf{X}^{*}$ σε όρους τών **A** και **K**, νοουμένου ότι ο πίνακας **A** είναι μη-ιδιάζων. Σε αυτήν την περίπτωση, το **διάνυσμα** της λύσης στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^{*}$ συνίσταται από τόσα **στοιχεία** όσες είναι οι χρηματικές **ροές** του συμπλέγματος συναλλαγών. Διευκρινίζεται ότι:

Ο αριθμητής κάθε στοιχείου είναι ένα πολυώνυμο, το οποίο αποτελείται από ιδιαίτερο συνδυασμό των συντελεστών αγοραίας συμπεριφοράς των νοικοκυριών (α_{hw}, α_{hs}, β_{hu}, β_{hs}), των επιχειρήσεων (α_{bu}, α_{bs}, β_{bw}, β_{bs}), των τραπεζιτών (β_{fw}, β_{fu}, β_{fs}), καθώς επίσης των παραμέτρων δημοσιονομικής (ζ; τ_w, τ_u; σ_w, σ_u ή σ_s) και νομισματικής (k; h, g) πολιτικής.

Ο παρονομαστής όλων των στοιχείων (y_i^{*}, e_i^{*}), $i = h, b, f, g$, είναι η ορίζουσα $|\mathbf{A}|$, η οποία απαρτίζεται από τους συντελεστές τομεακής συμπεριφοράς και τις παραμέτρους δημοσιονομικής πολιτικής. Οι παράμετροι της νομισματικής πολιτικής **δεν** υπεισέρχονται στην $|\mathbf{A}|$ ή την $|\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I}|$ και, άρα, **δεν** επηρεάζουν τη δυναμική σταθερότητα της οικονομίας.

ii) Σε κάθε σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων $\mathbf{dX/dt = A\cdot X - K}$, αντιστοιχεί ένα πολυώνυμο ιδιοτιμών (eigenvalues) $|\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I}|$. Ένα μοντέλο του γενικού τύπου **50** είναι σφαιρικά σταθερό, μόνο όταν οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz, οι οποίες απαρτίζονται από τους συντελεστές του πολυωνύμου $|\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{I}|$, είναι μεγαλύτερες από το μηδέν. Με δεδομένες τις στατιστικές κατανομές των χρηματικών ροών των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών, είναι δυνατό να εντοπίσουμε, με το *Mathematica*, τα όρια των δημοσιονομικών παραμέτρων (ζ; τ_w και τ_u; σ_w, σ_u ή σ_s) εντός των οποίων ικανοποιούνται όλες οι Συνθήκες τών Routh-Hurwitz. Τα προαναφερθέντα όρια πιθανό να περικλείουν ποσοστιαίους συντελεστές της δημοσιονομικής πολιτικής που δε θεωρούνται, εκ πρώτης όψεως, λογικοί, εφικτοί ή αποδεκτοί από τα επηρεαζόμενα μέρη.

iii) Στο δισδιάστατο χώρο του συμπλέγματος συναλλαγών **50**, έκαστος θεσμικός τομέας χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα του ετήσιου εισοδήματος (y_i, 0) και το διάνυσμα της ετήσιας δαπάνης (0, e_i) του. Τα y_i μετρούνται στον άξονα των τετμημένων και τα e_i μετρούνται στον άξονα των τεταγμένων. Τα αθροίσματα των τομεακών εισπράξεων $Y = (y_1 + \ldots + y_n, 0)$ και πληρωμών $E = (0, e_1 + \ldots + e_n)$ εκπροσωπούν το σύνολο της οικονομίας.

Σύμφωνα με τα εφαρμοσμένα μαθηματικά, τα διανύσματα εισοδήματος και δαπάνης έκαστου τομέα είναι κάθετα (perpendicular) και προσδεμένα (bound) μεταξύ τους. Το σταυροειδές γινόμενο δύο τέτοιων διανυσμάτων, π.χ. $\boldsymbol{\gamma} = (y_i, 0)$ και $\boldsymbol{\varepsilon} = (0, e_i)$, παράγει ένα νέο διάνυσμα **δ**, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο των **γ** και **ε**, και έχει μέγεθος:

82 $\quad |\boldsymbol{\delta}| = |\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\varepsilon}| = |\boldsymbol{\gamma}| \cdot |\boldsymbol{\varepsilon}| \cdot$ **ημίτονο** γωνίας $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon})$

Νοείται ότι $|\boldsymbol{\gamma}| = (y_i^2+0^2)^{½} = y_i$ είναι το μήκος τού **γ** και $|\boldsymbol{\varepsilon}| = (0^2+e_i^2)^{½} = e_i$ είναι το μήκος τού **ε**. Στα Ευκλείδεια συμπλέγματα συναλλαγών, η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων του εισοδήματος και της δαπάνης έκαστου τομέα ή συνόλου είναι πάντοτε $+90^0$ ή -90^0. Συνεπώς, η οικονομική επιφάνεια κάθε τομέα ή συνόλου απεικονίζεται από το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται με πλευρές τα διανύσματα $\boldsymbol{\gamma} = (y_i, 0)$ και $\boldsymbol{\varepsilon} = (0, e_i)$, δηλαδή με το μέγεθος του σταυροειδούς γινομένου **82**.

iv) Επιπλέον, εάν το ημίτονο της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων **γ** και **ε** είναι:

- **θετικό**, η κατεύθυνση του διανύσματος **δ** είναι ανοδική, και το σύστημα που σχηματίζεται από τις εισπράξεις και τις δαπάνες του τομέα ή της οικονομίας είναι 'δεξιόστροφο' (right-handed screw system), οπότε οι (χρηματικές) ροές κυκλοφορούν αντίθετα από τους δείχτες του ωρολογίου.
- **αρνητικό**, η κατεύθυνση του διανύσματος **δ** είναι καθοδική, και το σύστημα που σχηματίζεται από τις εισπράξεις και τις δαπάνες του τομέα ή της οικονομίας είναι 'αριστερόστροφο' (left-handed screw system), οπότε οι (χρηματικές) ροές κυκλοφορούν μαζί με τους δείχτες του ωρολογίου.

Σε κάθε Ευκλείδειο σύμπλεγμα συναλλαγών, τα θετικά και, άρα, δεξιόστροφα κυκλώματα εσόδων και εξόδων (y_i, e_i) διακυμαίνονται ευθέως ανάλογα με την ετήσια προσφορά ρευστότητας (k). Όταν οι δύο χρηματικές ροές, που χαρακτηρίζουν κάθε τομέα ή παζάρι, έχουν αντίθετα πρόσημα, τότε η μεν μια είναι θετική συνάρτηση η δε άλλη είναι αρνητική συνάρτηση της ετήσιας μεταβολής της συνολικής ρευστότητας (k). Σε τέτοια αριστερόστροφα κυκλώματα, οι εισπράξεις και οι πληρωμές των εμπλεκόμενων μερών αντιδρούν αλλοπρόσαλλα, χωρίς λογική εξήγηση, και, συνεπώς, η εφαρμογή αμιγούς επεκτατικής ή περιοριστικής οικονομικής πολιτικής καθίσταται αδύνατη.

v) Οι πλείστοι καταναλωτές, παραγωγοί και τραπεζίτες πιστεύουν, μεταξύ άλλων, ότι:

- ανάμεσα στις ύψιστες προτεραιότητες έκαστης κυβέρνησης πρέπει να είναι η πρόληψη των τομεακών και των γενικών χρηματοοικονομικών κρίσεων.
- το σύμπλεγμα συναλλαγών πρέπει να καταλήγει σε θετικά έσοδα και έξοδα για τους μη-κρατικούς τομείς, άσχετα από δικά τους λάθη ή παραλείψεις.
- τα έσοδα και έξοδα των μη-κρατικών τομέων πρέπει να είναι ικανοποιητικά σε σύγκριση με τις ισχύουσες τιμές και τις διαθέσιμες ποσότητες των αγαθών.

Με δεδομένες τις στατιστικές κατανομές των εισοδημάτων και των δαπανών των μη-κρατικών τομέων, και χάρη στα λογισμικά, όπως το *Mathematica*, ως επιστήμονες οικονομολόγοι είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα όρια των παραμέτρων των δημόσιων εσόδων (ζ, τ_w, τ_u) και των δημόσιων εξόδων (σ_w, σ_u ή σ_s) μέσα στα οποία:

- η οικονομία έχει ένα σταθερό διάνυσμα ισορροπίας αποτελούμενο από θετικές ροές,
- η κυβέρνηση μπορεί να βελτιώσει την κατάσταση επιτυγχάνοντας τους στόχους της.

X.5 Προϋποθέσεις μιας Πηδαλιουχούμενης Οικονομίας

Για να μπορούν οι αρχές να καθοδηγούν ένα συμπλέγματα συναλλαγών του τύπου **50** προς το επιλεχθέν διάνυσμα ισορροπίας (chosen steady state), είναι αναγκαίο, αλλά όχι επαρκές, να διαθέτουν τουλάχιστον τόσα εργαλεία οικονομικής πολιτικής όσες είναι οι στοχευόμενες χρηματικές ροές. Κανένα σύμπλεγμα συναλλαγών δεν ελέγχεται μόνο μέσω των ετήσιων νομισματικών πράξεων ή μόνο μέσω του ετήσιου κρατικού προϋπολογισμού, διότι οι αριθμοί των χρηματικών ροών των τομέων και οι αριθμοί των ποσοτικών χασμάτων των αγαθών είναι μεγαλύτεροι από τον αριθμό εργαλείων της καθεμιάς κατηγορίας ξεχωριστά. Επιπλέον, οι δύο κατηγορίες οικονομικής πολιτικής επιδρούν με ανόμοιους τρόπους στις ενδογενείς μεταβλητές του συστήματος και, άρα, συμπληρώνουν η μία την άλλη. Επομένως, οι τεχνοκράτες που εφαρμόζουν τη νομισματική πολιτική και οι αξιωματούχοι που ασκούν τη δημοσιονομική πολιτική πρέπει, απαραιτήτως, να ενεργούν συντονισμένα, ώστε μαζί, τουλάχιστον, να εξασφαλίζουν ότι οι θεσμικοί τομείς και τα παζάρια αγαθών απολαμβάνουν μοναδικά, σταθερά και δεξιόστροφα ετήσια διανύσματα εισπράξεων και πληρωμών.

Οι παράμετροι της δημοσιονομικής πολιτικής κατατάσσονται σε δύο ομάδες:

Η **πρώτη** περιλαμβάνει το ποσοστό (ζ) των δημόσιων εσόδων που προέρχεται από φόρους, καθώς επίσης τους συντελεστές παρακράτησης στους μισθούς των εργαζομένων (τ_w) και στις πωλήσεις (τ_u) των επιχειρήσεων. Η **δεύτερη** περιλαμβάνει τις εκατοστιαίες κατανομές των κυβερνητικών εξόδων ($1=\sigma_w+\sigma_u+\sigma_s$) ανάμεσα στα παζάρια για εργασία σ_w, παραγωγή σ_u και ρευστότητα σ_s. Οι αναλογίες των κρατικών εισοδημάτων και οι αναλογίες των κρατικών δαπανών είναι ύψιστης σημασίας επειδή, μεταξύ άλλων:

- ρυθμίζουν τα ετήσια έσοδα και έξοδα των θεσμικών τομέων της οικονομίας,
- καθορίζουν τη δυναμική σταθερότητα του συστήματος χρηματικών ροών,
- εκφράζουν τη σύλληψη, σχεδιασμό και εφαρμογή της κυβερνητικής πολιτικής.

Κάθε νέα κυβέρνηση ανακατανέμει τις πηγές των δημόσιων εσόδων και τους προορισμούς των δημόσιων εξόδων σύμφωνα με την ορθολογική αριστοποίηση, το ένστικτο αυτοσυντήρησης και την πολιτική φιλοδοξία που τη χαρακτηρίζει. Οι συνεπακόλουθες δομικές ανακατατάξεις είναι δυνατό να φθάσουν μέχρι την ανατροπή της προηγούμενης τάξης πραγμάτων. Μεσοπρόθεσμα, η πολιτική είναι η τέχνη του εφικτού και, συνεπώς, τα αποδεκτά όρια των φόρων παρακράτησης, των κρατικών επιδοτήσεων, αλλά και των νομισματικών πράξεων ευρίσκονται παραπλήσια σε αυτά που ήδη έχουν συνηθίσει οι συναλλασσόμενοι. Σε αυτό το ρεαλιστικό πλαίσιο, πρώτιστο μέλημα των αρχών πρέπει να είναι η διερεύνηση τού κατά πόσον οι συμπεριφορές των θεσμικών τομέων, σε συνδυασμό με τις εφαρμοζόμενες δημοσιονομικές και νομισματικές πολιτικές, διασφαλίζουν:

- την ύπαρξη, μοναδικότητα και σταθερότητα της λύσης ισορροπίας του συστήματος,
- το θετικό πρόσημο όλων των στοιχείων του διανύσματος ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ και, άρα,
- τη δεξιόστροφη κυκλοφορία των χρηματικών ροών σε κάθε τομέα και παζάρι.

Κατόπιν, οι αρχές μπορούν να δοκιμάσουν, με το κατάλληλο λογισμικό, διάφορα εναλλακτικά σενάρια πηγών κρατικών εσόδων και προορισμών κρατικών εξόδων παραπλήσια προς τα ισχύοντα, ώστε να υπολογίσουν τις επιπτώσεις στη στατική ισορροπία των χρηματικών ροών και, άρα, των πραγματικών ποσοτήτων, καθώς επίσης στη δυναμική σταθερότητα του συγκεκριμένου πλέγματος συναλλαγών. Με δεδομένες τις στατιστικές της αγοραίας συμπεριφοράς των μη-κρατικών τομέων, ο βαθμός δυσκολίας έκαστου σεναρίου είναι ευθέως ανάλογος με τον αριθμό των δημοσιονομικών παραμέτρων, που

παραμένουν στο μαθηματικό υπόδειγμα ως αλγεβρικά σύμβολα ή άγνωστες μεταβλητές. Η κυβέρνηση έχει την ευχέρεια να επιτυγχάνει κάποιους ή όλους τους στόχους της διαφοροποιώντας τις πηγές των εισπράξεων και τους προορισμούς των πληρωμών της μόνο μέσα στα όρια όπου, σε συνδυασμό με τις πράξεις νομισματικής πολιτικής, το οικονομικό σύστημα καταλήγει σε μοναδικά, σταθερά και δεξιόστροφα διανύσματα ισορροπίας, τόσο για τους θεσμικούς τομείς όσο και για τα παζάρια αγαθών.

Χ.6 Προγραμματισμός των Παρεμβατικών Σταδίων

Τίθεται το ερώτημα, αν είναι δυνατό να εξευρεθεί το σύνολο των οκτώ παραμέτρων της οικονομικής πολιτικής **Π**(k, h και g**;** ζ, τ_w και τ_u**;** σ_w, σ_u ή σ_s), το οποίο εξασφαλίζει τη σταθερότητα (και, άρα, τη μοναδικότητα), το δεξιόστροφο (και, άρα, τη θετικότητα) και το επιθυμητό μέγεθος των οκτώ ροών $\mathbf{X}^* = \{(y_h^*, e_h^*), (y_b^*, e_b^*), (y_f^*, e_f^*), (y_g^*, e_g^*)\}$ τού **81**, σε σχέση με την ισχύουσα τιμή και τη διαθέσιμη ποσότητα έκαστου αγαθού. Το γενικό πρόβλημα αποτελείται από τρία αλληλοεξαρτώμενα μαθηματικά συστήματα:

- τις οκτώ πολυώνυμες ανισότητες, που συνιστούν τις Συνθήκες τών Routh-Hurwitz $\mathbf{rh_i}$, i = 1,…, 8, και οι οποίες πρέπει να είναι όλες θετικές.
- τις στατικές ροές (y_n^*, e_n^*) $n = h, b, f, g$ των τεσσάρων θεσμικών τομέων, οι οποίες προκύπτουν από τον Κανόνα τού Cramer και που πρέπει να είναι δεξιόστροφες.
- τους επαναλαμβανόμενους κύκλους δοσοληψιών ρ_n^*, $n = w, u, s, t$, καθένας από τους οποίους πρέπει να έχει το αναμενόμενο μέγεθος σε σχέση με το ισχύον αντίτιμο ή τη διαθέσιμη ποσότητα του αντίστοιχου αγαθού.

Το γενικό πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί, διότι υπάρχουν μόνο οκτώ παράμετροι πολιτικής, για να ικανοποιήσουν 20 μαθηματικές σχέσεις. Επιπλέον, οποιοδήποτε σύστημα πολυώνυμων ανισοτήτων περιέχει πέραν των δύο εξωγενών μεταβλητών σε αλγεβρική μορφή δε λύνεται με τρόπο που να είναι άμεσα χρήσιμος. Οι πιθανές λύσεις περιπλέκονται όσο περισσότερες είναι οι εξωγενείς μεταβλητές, που παραμένουν στο σύστημα πολυώνυμων ανισοτήτων ($\mathbf{rh_i > 0}$) ως αλγεβρικά σύμβολα. Το συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι τα όρια κάθε εξωγενούς μεταβλητής, εντός των οποίων λύνεται το σύστημα των πολυώνυμων ανισοτήτων ($\mathbf{rh_i > 0}$), είναι αμφότερα συναρτήσεις των τιμών των υπόλοιπων εξωγενών μεταβλητών. Συνεπώς, το γενικό πρόβλημα πρέπει να τεμαχίζεται ώστε, κάθε φορά, το σύστημα πολυώνυμων ανισοτήτων ($\mathbf{rh_i > 0}$) να περιέχει

μέχρι δύο παραμέτρους, τα όρια των οποίων επιδιώκεται να εξευρεθούν σε σχέση με την υπό μελέτη δημοσιονομική πολιτική. Υπενθυμίζεται ότι τα μερίδια (h, b, g) των μη-εκδοτικών τομέων στη μεταβολή (k) του τραπεζικού παθητικού δεν επηρεάζουν τις συνθήκες δυναμικής σταθερότητας, ενώ είναι καθοριστικά όσον αφορά τα μεγέθη και τα πρόσημα των χρηματικών ροών. Αντίθετα, οι παράμετροι δημοσιονομικής πολιτικής (ζ; τ_w, τ_u; σ_w, σ_u ή σ_s) επηρεάζουν τόσο τις συνθήκες σταθερότητας ($\mathbf{rh_i}$) όσο και τα διανύσματα ισορροπίας (y_h^*, e_h^*), (y_b^*, e_b^*), (y_f^*, e_f^*), (y_g^*, e_g^*) του συμπλέγματος συναλλαγών. Λαμβάνοντας τη νομισματική πολιτική ως δεδομένη, θα προχωρήσουμε σταδιακά στη διερεύνηση των επιπτώσεων των επιλογών αναφορικά με τα δημόσια έσοδα (ζ, τ_w, τ_u) και τα δημόσια έξοδα (σ_w, σ_u ή σ_s) στη δυναμική σταθερότητα ($\mathbf{rh_i}$) και τη στατική ισορροπία $\mathbf{X}^*$ της οικονομίας, ως ακολούθως:

(i) Στο στοιχειώδες δημοσιονομικό υπόδειγμα **81**, θα αντικαταστήσουμε τα σύμβολα (α_{hw}, α_{hs}, β_{hu}, β_{hs}), (α_{bu}, α_{bs}, β_{bw}, β_{bs}), (β_{fw}, β_{fu}, β_{fs}) με τις στατιστικές της αγοραίας συμπεριφοράς των μη-κρατικών τομέων, όπως αυτές επιμετρήθηκαν στην ετήσια έρευνα.

(ii) Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε ως εξωγενείς μεταβλητές, αρχικά τους συντελεστές της φορολογικής πολιτικής (ζ, τ_w, τ_u) και, κατόπιν, τα ποσοστά των κρατικών επιδοτήσεων (σ_w, σ_u ή σ_s), για να διερευνήσουμε (με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica*) τα όρια των προαναφερθεισών παραμέτρων μέσα στα οποία οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz:

83 $\mathbf{rh_1}>0$, $\mathbf{rh_2}>0$, $\mathbf{rh_3}>0$, $\mathbf{rh_4}>0$, $\mathbf{rh_5}>0$, $\mathbf{rh_6}>0$, $\mathbf{rh_7}>0$, $\mathbf{rh_8}>0$

παραμένουν μεγαλύτερες του μηδενός και, άρα, το διάνυσμα ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ τού **81** παραμένει μοναδικό και σταθερό.

(iii) Μέσα στα όρια των παραμέτρων (ζ, τ_w, τ_u) και (σ_w, σ_u ή σ_s), όπου το **81** αποδίδει μοναδικά και σταθερά διανύσματα ισορροπίας $\mathbf{X}^*$, θα υπολογίσουμε τα όρια των μεριδίων των θεσμικών τομέων (h, b = 1- h - g, g) στις πράξεις νομισματικής πολιτικής (k), όπου τα τέσσερα ζεύγη των χρηματικών ροών:

84
$$y_h^*(h, g)>0, \quad y_b^*(h, g)>0, \quad y_f^*(h, g)>0, \quad y_g^*(h, g)>0,$$
$$e_h^*(h, g)>0, \quad e_b^*(h, g)>0, \quad e_f^*(h, g)>0, \quad e_g^*(h, g)>0$$

του στοιχειώδους δημοσιονομικού μοντέλου **81** παραμένουν δεξιόστροφα.

(iv) Λαμβάνοντας τους συντελεστές αγοραίας συμπεριφοράς από την ετήσια έρευνα και εκφράζοντας τις στατικές τομεακές ροές $\mathbf{X}^*$ που αποδίδει ο Κανόνας τού Cramer, αρχικά ως συναρτήσεις του διανύσματος $\mathbf{\Pi_1} = (k, h, g; \zeta, \tau_w, \tau_u)$ και, κατόπιν, ως συναρτήσεις του διανύσματος $\mathbf{\Pi_2} = (k, h, g; \sigma_w, \sigma_u$ ή $\sigma_s)$, υπολογίζουμε τις ελαστικότητες ανταπόκρισης των εσόδων και εξόδων σε μικρές μεταβολές των συγκεκριμένων παραμέτρων πολιτικής.

(v) Σε κάθε διάνυσμα παραμέτρων πολιτικής $\mathbf{\Pi_i}$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα στατικής ισορροπίας $\mathbf{X_i}^*$. Αντικαθιστώντας με τη σειρά τα διανύσματα $\mathbf{X_i}^*(\mathbf{\Pi_i})$, i=1,2 στις εξισώσεις **79**, υπολογίζουμε τις ετησίως επαναλαμβανόμενες δοσοληψίες ρ_j^*, που αφορούν (a) την εργασία, (b) την παραγωγή, (c) τη ρευστότητα και (d) τη φορολογία και, άρα, τα ισοζύγια ζήτησης εισοδημάτων και προσφοράς δαπανών στα εν λόγω παζάρια:

85

(a) $y_w^* = \alpha_{hw} \cdot y_h^* = (1-\tau_w)\cdot\beta_{bw} \cdot e_b^* + (1-\tau_w)\cdot\beta_{fw} \cdot e_f^* + \sigma_w \cdot e_g^* = e_w^* = \rho_w^*$

(b) $y_u^* = \alpha_{bu} \cdot y_b^* = (1-\tau_u)\cdot\beta_{hu} \cdot e_h^* + (1-\tau_u)\cdot\beta_{fu} \cdot e_f + \sigma_u \cdot e_g^* = e_u^* = \rho_u^*$

(c) $y_s^* = \alpha_{hs} \cdot y_h^* + \alpha_{bs} \cdot y_b^* + y_f + (1-\zeta) \cdot y_g^* = \beta_{hs} \cdot e_h^* + \beta_{bs} \cdot e_b^* + \beta_{fs} \cdot e_f^* + \sigma_s \cdot e_g^* = e_s^* = \rho_s^*$

(d) $y_t^* = \zeta \cdot y_g^* = \tau_u \cdot \beta_{hu} \cdot e_h^* + \tau_w \cdot \beta_{bw} \cdot e_b^* + (\tau_w \cdot \beta_{fw} + \tau_u \cdot \beta_{fu}) \cdot e_f^* = e_t^* = \rho_t^*$

(vi) Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα έξοδα στο παζάρι εργασίας e_w^* είναι συνάρτηση της μεταβολής του τραπεζικού ισολογισμού k, συνάγεται ότι το προαναφερθέν εργαλείο ευρίσκεται στη διάθεση των αρμόδιων αρχών, για να εξισώσουν τη ζήτηση για υπηρεσίες e_w^* με το γινόμενο των διαθέσιμων ετών εργασίας q_w^f επί το μισθό των εργαζομένων p_w κατά το συγκεκριμένο χρόνο:

86 $e_w^*(k) = p_w \cdot q_w^f = y_w^* = \rho_w^*$

(vii) Κάθε χρόνο, το δημοσιονομικό μοντέλο **81** πηδαλιουχείται μέχρι ενός σημείου, αφού περιέχει ανεπαρκή αριθμό εργαλείων πολιτικής σε σύγκριση με τις πολύπλοκες μαθηματικές σχέσεις, που πρέπει να ικανοποιούνται. Τα περιορισμένα πλαίσια, μέσα στα οποία είναι δυνατό να μεταβάλλονται οι παράμετροι πολιτικής, και τα ανελαστικά αντίτιμα των αγαθών συντείνουν ώστε τα ελλείμματα ή και πλεονάσματα εργασίας, παραγωγής και ρευστότητας να παραμένουν ανοικτά. Εντός τών εν λόγω ορίων, εάν οι αρχές ελέγχουν το χάσμα εργασίας μέσω τροποποιήσεων της προσφοράς χρήματος και το χάσμα ρευστότητας μέσω τροποποιήσεων του προεξοφλητικού επιτοκίου, συνάγεται ότι διαθέτουν τις κατανομές των τραπεζικών πιστώσεων, των φόρων παρακράτησης και των κρατικών επιδοτήσεων, για να ρυθμίζουν τα δημόσια οικονομικά και τα παζάρια προϊόντων.

Χ.7 Η Εφαρμογή της Θεωρίας στην Πράξη

Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία που έχουμε αναπτύξει στην περίπτωση μιας στοιχειώδους δημοσιονομικής οικονομίας **Βήτα**, όπου οι θεσμικοί τομείς συμπεριφέρονται σύμφωνα με τα ακόλουθα στατιστικά δεδομένα:

Τα **καταναλωτικά νοικοκυριά**, λόγω βιολογικών και άλλων εξωγενών παραγόντων, κατανέμουν τα (ετήσια) έσοδα και έξοδά τους ανάμεσα στις εφικτές πηγές και τους δυνητικούς προορισμούς, ως εξής:

Ποσοστό Εισοδήματος από:	Εργασία $\alpha_{hw} = 8/9$	Χρεόγραφα $\alpha_{hs} = 1/9$
Ποσοστό της Δαπάνης για:	Προϊόντα $\beta_{hu} = 7/8$	Χρεόγραφα $\beta_{hs} = 1/8$

Οι **παραγωγικές επιχειρήσεις**, εξαιτίας διευθυντικών επιλογών σχετικά με την τεχνολογία, τη ρευστότητα κ.λπ., κατανέμουν τα (ετήσια) έσοδα και έξοδά τους ανάμεσα στις εφικτές πηγές και τους δυνητικούς προορισμούς, ως ακολούθως:

Ποσοστό Εισοδήματος από:	Προϊόντα $\alpha_{bu} = 6/7$	Χρεόγραφα $\alpha_{bs} = 1/7$
Ποσοστό της Δαπάνης για:	Εργασία $\beta_{bw} = 5/6$	Χρεόγραφα $\beta_{bs} = 1/6$

Τα **χρηματοπιστωτικά ιδρύματα**, ως σύνολο, απολαμβάνουν το 100% του εισοδήματός τους από εγγυημένα ομόλογα ενώ, για εξυπηρέτηση πραγματικών αναγκών και διάφορων συμφερόντων, κατανέμουν τις δαπάνες τους ανάμεσα στα αγαθά, ως εξής:

Ποσοστό της Δαπάνης για:	Εργασία $\beta_{fw} = 10/20$	Προϊόντα $\beta_{fu} = 3/20$	Χρεόγραφα $\beta_{fs} = 7/20$

Η **κεντρική τράπεζα** εκτελεί πράξεις παροχής και απορρόφησης ρευστότητας, αποδεχόμενη και εκδίδουσα εγγυημένα ομόλογα, σύμφωνα με τις πολιτικές, κοινωνικές και άλλες προτεραιότητές της. Μετά τις πράξεις αναγωγής (netting), η ετήσια αύξηση του παθητικού των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων εμφανίζεται ως ετήσια αύξηση του νομισματικού ενεργητικού των καταναλωτών, των παραγωγών και των κυβερνώντων στις αναλογίες $h = {}^{5}/_{10}$, $b = {}^{4}/_{10}$, $g = {}^{1}/_{10}$, αντίστοιχα

Η **εκτελεστική εξουσία** απολαμβάνει το $(1-\zeta) = {}^{1}/_{100}$ τοις εκατό του εισοδήματός της από τις τραπεζικές καταθέσεις ή ρευστοποιήσιμα χρεόγραφα που, εξ ανάγκης, διατηρεί και το $\zeta = {}^{99}/_{100}$ τοις εκατό του εισοδήματός της από τις διάφορες φορολογίες που επιβάλλει. Η κυβέρνηση έχει καθορίσει τα ποσοστά των φόρων παρακράτησης στις αγοραπωλησίες υπηρεσιών και προϊόντων ως $\tau_w = {}^{1}/_{5}$ και $\tau_u = {}^{3}/_{20}$, αντίστοιχα, καθώς επίσης τα ποσοστά

των κρατικών δαπανών για υπηρεσίες, προϊόντα και ομόλογα ως $\sigma_w = {}^3/_6$, $\sigma_u = {}^2/_6$ και $\sigma_s = {}^1/_6$, αντίστοιχα. Με τις πιο πάνω πληροφορίες υπολογίζουμε τις συνθήκες σταθερότητας $\mathbf{rh_i}$, i = 1,…, 8, και το διάνυσμα ισορροπίας $X^*(y_n^*, e_n^*)$, $n = h, b, f, g$, τής **Βήτα**, όταν οι εξωγενείς μεταβλητές είναι, επιπλέον των χρηματοπιστωτικών πράξεων (k; h, g), αρχικά, οι φορολογικοί συντελεστές (ζ, τ_w, τ_u) και, κατόπιν, οι κρατικές επιδοτήσεις (σ_w, σ_u ή σ_s).

Αντικαθιστώντας στο **81** τα συμβολα ($\alpha_{hw}, \alpha_{hs}, \beta_{hu}, \beta_{hs}$), ($\alpha_{bu}, \alpha_{bs}, \beta_{bw}, \beta_{bs}$), ($\beta_{fw}, \beta_{fu}, \beta_{fs}$) με τις αντίστοιχες στατιστικές, λαμβάνουμε το σύστημα:

87 $\mathbf{dX/dt = B \cdot X - K}$, του οποίου ο πίνακας **B** είναι ίσος με:

$$\begin{vmatrix}
-1 & {}^1/_8 & -{}^1/_7 & (1-\tau_w)\cdot {}^5/_6 + {}^1/_6 & -1 & (1-\tau_w)\cdot {}^1/_2 + {}^7/_{20} & 0 & \sigma_w \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^1/_9 & (1-\tau_u)\cdot {}^7/_8 + {}^1/_8 & -1 & {}^1/_6 & -1 & (1-\tau_u)\cdot {}^3/_{20} + {}^7/_{20} & 0 & \sigma_u \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^1/_9 & {}^1/_8 & -{}^1/_7 & {}^1/_6 & -1 & {}^7/_{20} & \zeta-1 & \sigma_s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-{}^1/_9 & \tau_u\cdot {}^7/_8 + {}^1/_8 & 0 & \tau_w\cdot {}^5/_6 + {}^1/_6 & -1 & \tau_w\cdot {}^1/_2 + \tau_u\cdot {}^3/_{20} + {}^7/_{20} & -1 & \sigma_s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{vmatrix}$$

Το **87** αποτελείται από οκτώ μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές) και, γι' αυτόν το λόγο, μεταβάλλεται στο δυναμικό χώρο ($\boldsymbol{R^8}$, t). Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση, δηλαδή το πολυώνυμο ιδιοτιμών (eigenvalues):

88 $$\left| \mathbf{B} - \lambda\cdot\mathbf{I} \right| = \mathbf{b_0}\cdot\lambda^8 + \mathbf{b_1}\cdot\lambda^7 + \mathbf{b_2}\cdot\lambda^6 + \mathbf{b_3}\cdot\lambda^5 + \mathbf{b_4}\cdot\lambda^4 + \mathbf{b_5}\cdot\lambda^3 + \mathbf{b_6}\cdot\lambda^2 + \mathbf{b_7}\cdot\lambda + \mathbf{b_8} = 0$$

ισούται με την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix}
-1-\lambda & {}^1/_8 & -{}^1/_7 & (1-\tau_w)\cdot {}^5/_6 + {}^1/_6 & -1 & (1-\tau_w)\cdot {}^1/_2 + {}^7/_{20} & 0 & \sigma_w \\
1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^1/_9 & (1-\tau_u)\cdot {}^7/_8 + {}^1/_8 & -1-\lambda & {}^1/_6 & -1 & (1-\tau_u)\cdot {}^3/_{20} + {}^7/_{20} & 0 & \sigma_u \\
0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^1/_9 & {}^1/_8 & -{}^1/_7 & {}^1/_6 & -1-\lambda & {}^7/_{20} & \zeta-1 & \sigma_s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\
-{}^1/_9 & \tau_u\cdot {}^7/_8 + {}^1/_8 & 0 & \tau_w\cdot {}^5/_6 + {}^1/_6 & -1 & \tau_w\cdot {}^1/_2 + \tau_u\cdot {}^3/_{20} + {}^7/_{20} & -1-\lambda & \sigma_s \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda
\end{vmatrix}$$

Χ.8 Το Ποσοστό των Φορολογικών Εσόδων

Όταν το ποσοστό ζ του κυβερνητικού εισοδήματος που πηγάζει από φόρους μεταβάλλεται, ενώ οι άλλες παράμετροι της δημοσιονομικής πολιτικής παραμένουν όπως επιμετρήθηκαν στην τελευταία έρευνα, το *Mathematica* αποδίδει τους ακόλουθους συντελεστές $\mathbf{b_i}$, i = 0,…, 8, για το πολυώνυμο **88**:

$$\mathbf{b_0} = 1 \quad ; \quad \mathbf{b_1} = 8 \quad ; \quad \mathbf{b_2} = (23516280+907200\cdot\zeta)/907200 \quad ;$$

$$\mathbf{b_3} = (40849806+4913748\cdot\zeta)/907200 \quad ; \quad \mathbf{b_4} = (40493364+11306610\cdot\zeta)/907200 \quad ; \qquad \mathbf{89}$$

$$\mathbf{b_5} = (21107036+14101743\cdot\zeta)/907200 \quad ; \quad \mathbf{b_6} = (3413681+9712743\cdot\zeta)/907200 \quad ;$$

$$\mathbf{b_7} = (-1259223+3280125\cdot\zeta)/907200 \quad ; \quad \mathbf{b_8} = (-363714+369063\cdot\zeta)/907200 \quad ;$$

Οι Συνθήκες τών Routh-Hurwitz $\mathbf{rh_i}$, i = 1,…, 8, είναι οι ελάσσονες τού πιο κάτω Πίνακα X_3, που αποτελείται από τους συντελεστές $\mathbf{b_i}$, i = 0,…, 8, της χαρακτηριστικής εξίσωσης **88**. Το σύμπλεγμα συναλλαγών **87** είναι σφαιρικά σταθερό αν, και μόνον αν, οι οκτώ Ορίζουσες $\mathbf{rh_i}$ είναι μεγαλύτερες του μηδενός. Οι υπολογισμοί των συντελεστών $\mathbf{b_i}$, i = 0,..., 8, του πολυώνυμου **88** και των Συνθηκών $\mathbf{rh_i}$, i = 1,…, 8, τών Routh-Hurwitz, παρατίθενται στο Παράρτημα **X** του παρόντος κεφαλαίου.

Πίνακας X_3
Πίνακας των Routh-Hurwitz

$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_0}$	0	0	0	0	0	0
$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_0}$	0	0	0	0
$\mathbf{b_5}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_0}$	0	0
$\mathbf{b_7}$	$\mathbf{b_6}$	$\mathbf{b_5}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_0}$
0	$\mathbf{b_8}$	$\mathbf{b_7}$	$\mathbf{b_6}$	$\mathbf{b_5}$	$\mathbf{b_4}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_2}$
0	0	0	$\mathbf{b_8}$	$\mathbf{b_7}$	$\mathbf{b_6}$	$\mathbf{b_5}$	$\mathbf{b_4}$
0	0	0	0	0	$\mathbf{b_8}$	$\mathbf{b_7}$	$\mathbf{b_6}$
0	0	0	0	0	0	**0**	$\mathbf{b_8}$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών $\mathbf{b_i}$, που αποδίδονται από τις εξισώσεις **89**, στις ελάσσονες του Πίνακα X_3 λαμβάνουμε, με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica*, τις

οκτώ Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz που ισχύουν όταν, εκτός από το ποσοστό ζ του κυβερνητικού εισοδήματος που πηγάζει από φόρους, οι εξωγενείς παράμετροι της οικονομίας **Βήτα** παραμένουν σταθερές. Στο Παράρτημα **X** αποδεικνύεται ότι οι οκτώ Ορίζουσες $\mathbf{rh_i}$, i = 1,…, 8 είναι μεγαλύτερες από το μηδέν, εφόσον η κυβέρνηση εισπράττει ολιγότερο από 1,4493 τοις εκατό του εισοδήματός της από τα ρευστοποιήσιμα χρεόγραφα που διατηρεί και, άρα, περισσότερο από 98,5507 τοις εκατό του εισοδήματός της από τους διάφορους φόρους που επιβάλλει.

Για να λειτουργεί η **Βήτα** ως μία σταθερή οικονομία, η κυβέρνηση πρέπει να χρηματοδοτεί τον κρατικό προϋπολογισμό μέσω της συνεχούς συλλογής φόρων και όχι μέσω της εκμετάλλευσης ρευστοποιήσιμων ομολόγων. Στις περιπτώσεις όπου $0{,}985507 < \zeta < 1$, οι Συνθήκες τών Routh-Hurwitz είναι θετικές και, συνεπώς, τα έσοδα και έξοδα των καταναλωτών, των παραγωγών, των τραπεζιτών και των κυβερνώντων συγκλίνουν προς το $\mathbf{X}^* = (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*, y_g^*, e_g^*)$ από οποιονδήποτε συνδυασμό $\mathbf{X^0}$ και αν αρχίσουν. Ταυτόχρονα, οι δοσοληψίες που αφορούν υπηρεσίες ($y_w^* = e_w^*$), προϊόντα ($y_u^* = e_u^*$), χρεόγραφα ($y_s^* = e_s^*$) και φόρους ($y_t^* = e_t^*$) τείνουν προς τις σταθερά επαναλαμβανόμενες ροές $\mathbf{R}^*(\rho_w^*, \rho_u^*, \rho_s^*, \rho_t^*)$, οι οποίες αποδίδονται από τις εξισώσεις **85**.

Στη συνέχεια, είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε κατά πόσο οι θεσμικοί τομείς τής **Βήτα** απολαμβάνουν θετικές και, άρα, δεξιόστροφες ροές, όταν το ποσοστό των φορολογικών εσόδων (ζ) και η αύξηση του τραπεζικού ισολογισμού (k) μεταβάλλονται, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι της δημοσιονομικής ($\tau_w = {}^1/_5$, $\tau_u = {}^3/_{20}$; $\sigma_w = {}^3/_6$, $\sigma_u = {}^2/_6$, $\sigma_s = {}^1/_6$) και της νομισματικής ($h = {}^5/_{10}$, $b = {}^4/_{10}$, $g = {}^1/_{10}$) πολιτικής παραμένουν όπως επιμετρήθηκαν στην τελευταία στατιστική έρευνα. Εφαρμόζοντας τον Κανόνα τού Cramer στο χρονικά αμετάβλητο σύστημα **87**, $\mathbf{dX/dt = B{\cdot}X - K = 0}$, υπολογίζουμε, με τη βοήθεια τού *Mathematica*, τα τομεακά έσοδα και έξοδα (y_h^*, e_h^*, y_b^*, e_b^*, y_f^*, e_f^*, y_g^*, e_g^*) ως συναρτήσεις τών ζ και k:

(a) $y_h^* = (-1374+1553{\cdot}\zeta){\cdot}117{\cdot}k\,/(-1212380+1230210{\cdot}\zeta)$

(b) $e_h^* = (222716-216702{\cdot}\zeta){\cdot}k\,/(-606190+615105{\cdot}\zeta)$

(c) $y_b^* = 7{\cdot}(26221-23977{\cdot}\zeta){\cdot}k\,/(-1212380+1230210{\cdot}\zeta)$

(d) $e_b^* = (668499-659923{\cdot}\zeta){\cdot}k\,/(-1212380+1230210{\cdot}\zeta)$

(e) $y_f^* = 2\cdot(-58266+59587\cdot\zeta)\cdot k / (-363714+369063\cdot\zeta)$

(f) $e_f^* = 131\cdot(-3666+3727\cdot\zeta)\cdot k / (-363714+369063\cdot\zeta)$

90

(g) $y_g^* = 1703\cdot k / (-242476+246042\cdot\zeta)$

(h) $e_g^* = 9\cdot(-14417+13669\cdot\zeta)\cdot k / (1212380-1230210\cdot\zeta)$

Το **90** αποτελεί ένα σύστημα οκτώ μη-γραμμικών εξισώσεων με δύο άγνωστες μεταβλητές. Στο Παράρτημα **X** αποδεικνύουμε ότι, νοουμένου $k > 0$, τα ετήσια έσοδα και έξοδα των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των τραπεζιτών και των κυβερνώντων είναι μεγαλύτερα από το μηδέν, όταν $0{,}985507 < \zeta < 1$. Γενικά, οι αρμόδιες αρχές, εκφράζοντας τις Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz και τις στατικές χρηματικές ροές ως συναρτήσεις αριθμού παραμέτρων δημοσιονομικής πολιτικής, μπορούν να υπολογίζουν τα όρια τών εν λόγω παραμέτρων, όπου οι τομεακές εισπράξεις και πληρωμές είναι σταθερές και θετικές. Μέσα σε αυτά τα όρια μπορούν να ρυθμίζουν ισάριθμους κύκλους δοσοληψιών (ρ_w^*, ρ_u^*, ρ_s^*, ρ_t^*) για υπηρεσίες, προϊόντα, ομόλογα και φόρους, σύμφωνα με το αποδεκτό πλεόνασμα ή έλλειμμα του καθενός ετησίως.

Στη περίπτωση τής **Βήτα**, εάν η κυβέρνηση αποφάσιζε να μεταβάλει κατά ένα τοις εκατό το ποσοστό $0{,}985507 < \zeta < 1$ των εισπράξεών της που πηγάζει από φόρους, αφήνοντας τις άλλες παραμέτρους πολιτικής ως έχουν, τα εισοδήματα και οι δαπάνες των θεσμικών τομέων θα διαμορφώνονταν σύμφωνα με τις ακόλουθες ελαστικότητες ανταπόκρισης:

$dy_h^*/d\zeta\cdot(\zeta/y_h^*) = -210{,}915$ $\qquad$ $de_h^*/d\zeta\cdot(\zeta/e_h^*) = -246{,}544$

$dy_b^*/d\zeta\cdot(\zeta/y_b^*) = -229{,}877$ $\qquad$ $de_b^*/d\zeta\cdot(\zeta/e_b^*) = -263{,}372$

91

$dy_f^*/d\zeta\cdot(\zeta/y_f^*) = -138{,}968$ $\qquad$ $de_f^*/d\zeta\cdot(\zeta/e_f^*) = -64{,}8322$

$dy_g^*/d\zeta\cdot(\zeta/y_g^*) = -220{,}32$ $\qquad$ $de_g^*/d\zeta\cdot(\zeta/e_g^*) = -235{,}616$

Οι αυξομειώσεις τού ζ συνοδεύονται από αντίθετες μεταβολές των εσόδων και εξόδων των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των τραπεζιτών και των κυβερνώντων. Το μέγεθος της ανταπόκρισης των τομεακών ροών στο ζ επεξηγεί γιατί οι αρχές σπάνια στοχεύουν στη μεμονωμένη τροποποίηση του ποσοστού του προϋπολογισμού, που πηγάζει από φόρους.

Στην παρούσα περίπτωση, όπου $\zeta = {}^{99}/_{100}$, τα τομεακά έσοδα και έξοδα ισούνται με:

$$y_h^* = {}^{1\,912\,599}/_{55\,279}\cdot k \approx 3{,}459\cdot k \Rightarrow 38{,}4\% \qquad e_h^* = {}^{818\,102}/_{276\,395}\cdot k \approx 2{,}959\cdot k \Rightarrow 32{,}8\%$$

$$y_b^* = {}^{248\,377}/_{78\,970}\cdot k \approx 3{,}145\cdot k \Rightarrow 34{,}9\% \qquad e_b^* = {}^{216\,789}/_{78\,970}\cdot k \approx 2{,}745\cdot k \Rightarrow 30{,}5\%$$

92

$$y_f^* = {}^{6\,906}/_{7\,897}\cdot k \approx 0{,}874\cdot k \Rightarrow 9{,}6\% \qquad e_f^* = {}^{14\,808}/_{7\,897}\cdot k \approx 1{,}874\cdot k \Rightarrow 20{,}7\%$$

$$y_g^* = {}^{85\,150}/_{55\,279}\cdot k \approx 1{,}540\cdot k \Rightarrow 17{,}1\% \qquad e_g^* = {}^{796\,221}/_{552\,790}\cdot k \approx 1{,}440\cdot k \Rightarrow 16{,}0\%$$

$$Y^* = 9{,}01999\cdot k \Rightarrow 100{,}0\% \qquad E^* = 9{,}01999\cdot k \Rightarrow 100{,}0\%$$

Ο καθένας μπορεί να επιβεβαιώσει ότι το άθροισμα των τομεακών εσόδων $Y^* = (y_h^* + y_b^* + y_f^* + y_g^*)$ ισούται με το άθροισμα των τομεακών εξόδων $E^* = (e_h^* + e_b^* + e_f^* + e_g^*)$. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις **92** στις εξισώσεις **85** υπολογίζουμε τις επαναλαμβανόμενες δοσοληψίες που αφορούν εργασία, παραγωγή, ρευστότητα και φορολογία, ως ακολούθως:

$$y_w^* = {}^4/_5 \cdot {}^5/_6 \cdot 2{,}745\cdot k + {}^4/_5 \cdot {}^1/_2 \cdot 1{,}874\cdot k + {}^1/_2 \cdot 1{,}440\cdot k = 3{,}30013\cdot k = e_w^* = \rho_w^*$$

$$y_u^* = {}^{17}/_{20} \cdot {}^7/_8 \cdot 2{,}959 \cdot k + {}^{17}/_{20} \cdot {}^3/_{20} \cdot 1{,}874\cdot k + {}^1/_3\, 1{,}440\cdot k = 2{,}92052\cdot k = e_u^* = \rho_u^*$$

93

$$y_s^* = {}^1/_8 \cdot 2{,}959\cdot k + {}^1/_6 \cdot 2{,}745 \cdot k + {}^7/_{20} \cdot 1{,}874\cdot k + {}^1/_6 \cdot 1{,}440\cdot k = 1{,}72366\cdot k = e_s^* = \rho_s^*$$

$$y_t^* = {}^3/_{20} \cdot {}^7/_8 \cdot 2{,}959 \cdot k + {}^1/_5 \cdot {}^5/_6 \cdot 2{,}745 \cdot k + \{{}^3/_{20} \cdot {}^3/_{20} + {}^1/_5 \cdot {}^1/_2\} \cdot 1{,}874\cdot k = 1{,}07566\cdot k = e_t^* = \rho_t^*$$

Στην οικονομία **Βήτα**, η κυκλοφορία του χρήματος αφορά 36,6% την εργασία, 32,4% την παραγωγή, 19,1% τη ρευστότητα και 11,9% τη φορολογία. Σε αυτό το πλαίσιο, εύκολα αποδεικνύεται ότι $(\rho_w + \rho_u + \rho_s + \rho_t)\cdot k = (y_h + y_b + y_f + y_g)\cdot k = (e_h + e_b + e_f + e_g)\cdot k = \mathbf{c}\cdot k = 9{,}0199\cdot k$, όπου **c** είναι ο Ευκλείδειος πολλαπλασιαστής. Το εντυπωσιακό αποτέλεσμα $R^* = Y^* = E^*$ απορρέει από τις 12 αξιωματικές προτάσεις της υιοθετηθείσας μεθοδολογίας.

Χ.9 Διαφοροποιήσεις των Φόρων Παρακράτησης

Οι συντελεστές παρακράτησης (τ_w, τ_u) επηρεάζουν τις συνθήκες δυναμικής σταθερότητας $\mathbf{rh_i}$, i = 1,…, **n**, και τις λύσεις στατικής ισορροπίας (y_i^*, e_i^*), $i = 1, \ldots, \boldsymbol{n}$, του οικονομικού συστήματος, καθώς επίσης τα ποσοστά των δαπανών των καταναλωτών (t_h), των παραγωγών (t_b) και των χρηματοπιστωτών (t_f) που, τελικά, πληρώνονται και εισπράττονται ως φόροι ($y_{gt}^* = \zeta \cdot y_g^*$). Ως επιστήμονες οικονομολόγοι, μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε επακριβώς τη συνεισφορά των συντελεστών παρακράτησης στη δυναμική σταθερότητα, τη στατική ισορροπία και την ποσοστιαία κατανομή των χρηματικών ροών του συμπλέγματος συναλλαγών, ώστε να βασίσουμε τα σχόλια και τις εισηγήσεις μας σε αδιάσειστα θεμέλια.

Επικεντρωνόμενοι στη **Βήτα**, θα υποθέσουμε ότι, μεσοπρόθεσμα, οι συντελεστές των φόρων παρακράτησης τροποποιούνται σύμφωνα με τους στόχους των αρμοδίων, ενώ οι υπόλοιπες εξωγενείς μεταβλητές παραμένουν όπως επιμετρήθηκαν στη στατιστική έρευνα. Συνεπώς, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τής εν λόγω οικονομίας διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{vmatrix}
-1-\lambda & {}^{1}/_{8} & -{}^{1}/_{7} & (1-\tau_w)\cdot {}^{5}/_{6}+{}^{1}/_{6} & -1 & (1-\tau_w)\cdot {}^{1}/_{2}+{}^{7}/_{20} & 0 & {}^{3}/_{6} \\
1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^{1}/_{9} & (1-\tau_u)\cdot {}^{7}/_{8}+{}^{1}/_{8} & -1-\lambda & {}^{1}/_{6} & -1 & (1-\tau_u)\cdot {}^{3}/_{20}+{}^{7}/_{20} & 0 & {}^{2}/_{6} \\
0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^{1}/_{9} & {}^{1}/_{8} & -{}^{1}/_{7} & {}^{1}/_{6} & -1-\lambda & {}^{7}/_{20} & -{}^{1}/_{99} & {}^{1}/_{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\
-{}^{1}/_{9} & \tau_u\cdot {}^{7}/_{8}+{}^{1}/_{8} & 0 & \tau_w\cdot {}^{5}/_{6}+{}^{1}/_{6} & -1 & \tau_w\cdot {}^{1}/_{2}+\tau_u\cdot {}^{3}/_{20}+{}^{7}/_{20} & -1-\lambda & {}^{1}/_{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda
\end{vmatrix}$$

Οι συντελεστές τού ανωτέρω πολυώνυμου ιδιοτιμών (eigenvalues):

94 $$\left| \mathbf{B} - \lambda\cdot\mathbf{I} \right| = \mathbf{b_0}\cdot\lambda^8 + \mathbf{b_1}\cdot\lambda^7 + \mathbf{b_2}\cdot\lambda^6 + \mathbf{b_3}\cdot\lambda^5 + \mathbf{b_4}\cdot\lambda^4 + \mathbf{b_5}\cdot\lambda^3 + \mathbf{b_6}\cdot\lambda^2 + \mathbf{b_7}\cdot\lambda + \mathbf{b_8} = 0$$

είναι οι ακόλουθες συναρτήσεις των τ_w και τ_u:

$\mathbf{b_0} = 1$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{b_1} = 8$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{b_2} = 339089/12600$

$\mathbf{b_3} = (228800556 - 657396\cdot\tau_u + 657396\cdot\tau_w)/4536000$

$\mathbf{b_4} = (258728496 - 764370\cdot\tau_u + 400380\cdot\tau_w - 3307500\cdot\tau_u\cdot\tau_w) / 4536000$

$\mathbf{b_5} = (174180831 + 3569022\cdot\tau_u + 5049470\cdot\tau_w - 12909015\cdot\tau_u\cdot\tau_w) / 4536000$

$\mathbf{b_6} = (62981859 + 6738912\cdot\tau_u + 7913660\cdot\tau_w - 14298165\cdot\tau_u\cdot\tau_w) / 4536000$

$\mathbf{b_7} = (8798709 + 3817278\cdot\tau_u + 3604110\cdot\tau_w - 5053965\cdot\tau_u\cdot\tau_w) / 4536000$

$\mathbf{b_8} = (-250299 + 880362\cdot\tau_u + 742980\cdot\tau_w - 735315\cdot\tau_u\cdot\tau_w) / 4536000$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών $\mathbf{b_i}$, $i = 0,\ldots, 8$, στις ελάσσονες ορίζουσες του Πίνακα $\boldsymbol{X_3}$ υπολογίζουμε, με το *Mathematica*, τις οκτώ Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz που ισχύουν όταν, εκτός από τα ποσοστά τ_w και τ_u, οι αυτόνομες μεταβλητές της οικονομίας **Βήτα** παραμένουν σταθερές. Στο Παράρτημα **X** αποδεικνύεται ότι, για να είναι όλες οι Ορίζουσες $\mathbf{rh_i}$, $i = 1,\ldots, 8$, θετικές, το ποσοστό παρακράτησης επί των μισθών (τ_w) πρέπει να είναι μεγαλύτερο από 18,69 τοις εκατό, ενώ το ποσοστό παρακράτησης επί των πωλήσεων (τ_u) μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ μηδέν και εκατό τοις εκατό.

Για σκοπούς χάραξης πολιτικής είναι αναγκαίο, επίσης, να γνωρίζουμε τα όρια των φορολογικών συντελεστών (τ_w, τ_u), μέσα στα οποία όλες οι χρηματικές ροές της οικονομίας **Βήτα** είναι μεγαλύτερες από το μηδέν. Θεωρώντας τις υπόλοιπες εξωγενείς παραμέτρους ως σταθερές, λύνουμε το χρονικά αμετάβλητο σύστημα **87** με τον Κανόνα τού Cramer, για να εξεύρουμε τα έσοδα και τα έξοδα των νοικοκυριών (y_h^*, e_h^*), των επιχειρήσεων (y_b^*, e_b^*), των τραπεζιτών (y_f^*, e_f^*) και των κυβερνώντων (y_g^*, e_g^*) ως συναρτήσεις των εκατοστιαίων φόρων παρακράτησης τ_w, τ_u και της ετήσιας προσφοράς χρήματος k:

$$y_h^* = 9\cdot[2449+\tau_u\cdot(88598-75905\cdot\tau_w)-14180\cdot\tau_w]\cdot k\ /\ 70\cdot(-11919+41922\cdot\tau_u+35380\cdot\tau_w-35015\cdot\tau_u\cdot\tau_w)$$

$$e_h^*=[219603+\tau_u\cdot(-334944+271190\cdot\tau_w)-682960\cdot\tau_w]\cdot k/35\cdot(-11919+41922\cdot\tau_u+35380\cdot\tau_w-35015\cdot\tau_u\cdot\tau_w)$$

$$y_b^* = [40689+\tau_u\cdot(-13289+43710\cdot\tau_w)-131120\cdot\tau_w]\cdot k\ /\ 10\cdot(11919+41922\cdot\tau_u+35380\cdot\tau_w-35015\cdot\tau_u\cdot\tau_w)$$

$$e_b^*=\cdot[17673+\tau_u\cdot(-41511+54238\cdot\tau_w)-54528\cdot\tau_w]\cdot k\ /\ 2\cdot(-11919+41922\cdot\tau_u+35380\cdot\tau_w-35015\cdot\tau_u\cdot\tau_w)$$

95

$$y_f^* = [-20679+\tau_u\cdot(83412-61100\cdot\tau_w)+60360\cdot\tau_w]\cdot k/6\cdot(-11919+41922\cdot\tau_u+35380\cdot\tau_w-35015\cdot\tau_u\cdot\tau_w)$$

$$e_f^* = [-92193+\tau_u\cdot(334944-2711905\cdot\tau_w)+272640\cdot\tau_w]\cdot k\ /\ (-11919+41922\cdot\tau_u+35380\cdot\tau_w-35015\cdot\tau_u\cdot\tau_w)$$

$$y_g^* = 5\cdot[822+\tau_u\cdot(3699+3155\cdot\tau_w)-3100\cdot\tau_w]\cdot k\ /\ 7\cdot(-11919+41922\cdot\tau_u+35380\cdot\tau_w-35015\cdot\tau_u\cdot\tau_w)$$

$$e_g^* = 3\cdot[41511+\tau_u\cdot(-36168+134285\cdot\tau_w)-134220\cdot\tau_w]\cdot k/7\cdot(-11919+41922\cdot\tau_u+35380\cdot\tau_w-35015\cdot\tau_u\cdot\tau_w)$$

Νοουμένου ότι $k > 0$, το **95** αποτελεί ένα σύστημα οκτώ μη-γραμμικών εξισώσεων ως προς δύο άγνωστες μεταβλητές, τ_w και τ_u. Στο Παράρτημα **X** αποδεικνύουμε ότι οι τομεακές ροές είναι θετικές, όταν $18{,}6894\% < \tau_w < 24{,}673\%$ και $13{,}8692\% < \tau_u < 22{,}07\%$. Σύμφωνα με τα δεδομένα τής **Βήτα**, οι ποσοστιαίες μεταβολές των εισοδημάτων και των δαπανών των καταναλωτών, των παραγωγών, των τραπεζιτών και των κυβερνώντων, που προκύπτουν από ένα τοις εκατό τροποποίηση του παρακρατούμενου:

- φόρου στους **μισθούς** τ_w, ισούνται με τις ακόλουθες ελαστικότητες ανταπόκρισης:

$$dy_h^*/d\tau_w\cdot(\tau_w/y_h^*) = -15{,}74 \qquad de_h^*/d\tau_w\cdot(\tau_w/e_h^*) = -18{,}40$$

$$dy_b^*/d\tau_w\cdot(\tau_w/y_b^*) = -17{,}05 \qquad de_b^*/d\tau_w\cdot(\tau_w/e_b^*) = -19{,}54$$

96

$$dy_f^*/d\tau_w\cdot(\tau_w/y_f^*) = -10{,}32 \qquad de_f^*/d\tau_w\cdot(\tau_w/e_f^*) = -4{,}81$$

$$dy_g^*/d\tau_w\cdot(\tau_w/y_g^*) = -15{,}88 \qquad de_g^*/d\tau_w\cdot(\tau_w/e_g^*) = -16{,}99$$

- φόρου στα **προϊόντα** τ_u, ισούνται με τις ακόλουθες ελαστικότητες ανταπόκρισης:

$dy_h^*/d\tau_u \cdot (\tau_u / y_h^*) = -12{,}22$ $\qquad$ $de_h^*/d\tau_u \cdot (\tau_u / e_h^*) = -14{,}29$

$dy_b^*/d\tau_u \cdot (\tau_u / y_b^*) = -13{,}43$ $\qquad$ $de_b^*/d\tau_u \cdot (\tau_u / e_b^*) = -15{,}38$

97

$dy_f^*/d\tau_u \cdot (\tau_u / y_f^*) = -8{,}11$ $\qquad$ $de_f^*/d\tau_u \cdot (\tau_u / e_f^*) = -3{,}78$

$dy_g^*/d\tau_u \cdot (\tau_u / y_g^*) = -12{,}50$ $\qquad$ $de_g^*/d\tau_u \cdot (\tau_u / e_g^*) = -13{,}37$

Ceteris paribus, μικρές διαφοροποιήσεις τών τ_w και τ_u προκαλούν σημαντικές και αντίθετες μεταβολές στις χρηματικές ροές. Ως εκ τούτου, οι κυβερνήσεις σπάνια τροποποιούν τους φόρους παρακράτησης, χωρίς να έχουν ήδη τροποποιήσει, κατάλληλα, τις δημόσιες δαπάνες. Σε κάθε Ευκλείδειο δημοσιονομικό υπόδειγμα, οι ποσοστιαίοι φόροι t_i, $i = 1,..,$ **n**, στα τομεακά έξοδα είναι γραμμικές συναρτήσεις των συντελεστών παρακράτησης τ_j, $j = 1,..,$ **n**, στις αγοραπωλησίες αγαθών, και αντίστροφα. Αντικαθιστώντας τα αριθμητικά δεδομένα $\tau_w = {}^1/_5$, $\tau_u = {}^3/_{20}$, $\tau_s = 0$, $\beta_{hu} = {}^7/_8$, $\beta_{bw} = {}^5/_6$, $\beta_{fw} = {}^1/_2$, $\beta_{fu} = {}^3/_{20}$, που ισχύουν στην οικονομία **Βήτα**, στις εξισώσεις **73** προκύπτει ότι:

(a) $t_h = \tau_u \cdot \beta_{hu} = {}^3/_{20} \cdot {}^7/_8 = {}^{21}/_{160} = 13{,}125\%$

98 (b) $t_b = \tau_w \cdot \beta_{bw} = {}^1/_5 \cdot {}^5/_6 = {}^5/_{30} = 16{,}666\%$

(c) $t_f = \tau_w \cdot \beta_{fw} + \tau_u \cdot \beta_{fu} = ({}^1/_5 \cdot {}^1/_2 + {}^3/_{20} \cdot {}^3/_{20}) = ({}^{40}/_{400} + {}^9/_{400}) = 12{,}25\%$

Τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις πληρώνουν ως φόρο το 13,125% και 16,666%, αντίστοιχα, των ετήσιων δαπανών τους. Παρά το ότι οι συναλλαγές που αφορούν εγγυημένα ομόλογα δεν υπόκεινται σε φόρο παρακράτησης, εντούτοις τα έξοδα των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων φορολογούνται σύμφωνα με το ποσοστό $t_f = 12{,}25\%$.

X.10 Οι Επιδοτήσεις των Αγοραίων Αγαθών

Θεωρητικά, οι συντελεστές τ_j των φόρων παρακράτησης στις διάφορες δοσοληψίες είναι ανεξάρτητοι ο ένας από τον άλλο. Αντίθετα, τα μερίδια σ_j των δημόσιων δαπανών στα παζάρια αγαθών είναι αλληλένδετα. Δεδομένου ότι $(\sigma_1 + \ldots + \sigma_{n-1} + \sigma_n) = 1$, για να αυξηθεί το ποσοστό του προϋπολογισμού που προορίζεται για ένα παζάρι, πρέπει να μειωθεί το ποσοστό που προορίζεται για τα άλλα αγαθά και αντίστροφα. Χρησιμοποιώντας τις στατιστικές τής τελευταίας έρευνας, υπολογίσαμε τους συντελεστές $\mathbf{b_i}$, $i = 0, \ldots, 8$, της χαρακτηριστικής εξίσωσης **88** της οικονομίας **Βήτα**, ως συναρτήσεις των μεριδίων των κρατικών εξόδων, που προορίζονται για υπηρεσίες, προϊόντα και ομόλογα, ως ακολούθως:

$\mathbf{b_0} = 1$ $\mathbf{b_1} = 8$ $\mathbf{b_2} = 818853600\cdot\sigma_s - 30240000 / 30240000$

$\mathbf{b_3} = (1547333884 - 151200000\cdot\sigma_s + 3360000\cdot\sigma_w) / 30240000$

$\mathbf{b_4} = (1773758830 - 292484400\cdot\sigma_s - 14880000\cdot\sigma_u + 5691000\cdot\sigma_w) / 30240000$

$\mathbf{b_5} = (1233178919 - 272124400\cdot\sigma_s - 47571800\cdot\sigma_u - 6084400\cdot\sigma_w) / 30240000$

$\mathbf{b_6} = (484639919 - 93849400\cdot\sigma_s - 61252100\cdot\sigma_u - 28542200\cdot\sigma_w) / 30240000$

$\mathbf{b_7} = (89690925 + 15759900\cdot\sigma_s - 36391500\cdot\sigma_u - 27834100\cdot\sigma_w) / 30240000$

$\mathbf{b_8} = (4631379 + 7547700\cdot\sigma_s - 7226400\cdot\sigma_u - 6850500\cdot\sigma_w) / 30240000$

Οι ανωτέρω συντελεστές $\mathbf{b_i}$ είναι τα στοιχεία του Πίνακα $\boldsymbol{X_3}$, του οποίου οι οκτώ ελάσσονες ορίζουσες $\mathbf{rh_i}$ αποτελούν τις Συνθήκες τών Routh-Hurwitz. Στο Παράρτημα **X** αποδεικνύεται ότι όλες οι Ορίζουσες $\mathbf{rh_i}$, i = 1,…, 8, είναι θετικές όταν, υπό τις συγκεκριμένες περιστάσεις, το ποσοστό του προϋπολογισμού που δαπανάται για:

- εργασία είναι $0 < \sigma_w < 0{,}508069$
- παραγωγή είναι $0{,}270996 < \sigma_u < 0{,}340983$
- ρευστότητα είναι $0{,}159343 < \sigma_s < 0{,}225774$.

Επιπλέον, για σκοπούς διαμόρφωσης πολιτικής, οι αρχές πρέπει να γνωρίζουν τα όρια τών σ_w, σ_u και σ_s μέσα στα οποία οι τομεακές χρηματικές ροές είναι μεγαλύτερες από το μηδέν. Εάν οι υπόλοιπες εξωγενείς παράμετροι παραμένουν όπως επιμετρήθηκαν στην πρόσφατη στατιστική έρευνα και, άρα, $|\mathbf{B}| = (1543793 + 2515900\cdot\sigma_s - 2408800\cdot\sigma_u - 2283500\cdot\sigma_w) / 10080000$, στο Παράρτημα **X** λύνουμε το χρονικά αμετάβλητο σύστημα **87** με τον Κανόνα τού Cramer, για να εξεύρουμε τα ετήσια έσοδα και έξοδα των καταναλωτών (y_h^*, e_h^*), των παραγωγών (y_b^*, e_b^*), των τραπεζιτών (y_f^*, e_f^*) και των κυβερνώντων (y_g^*, e_g^*), ως συναρτήσεις της κατανομής των δημόσιων δαπανών (σ_w, σ_u, σ_s) και της μεταβολής του νομισματικού ισολογισμού (k):

(a) $y_h^* = 3\cdot[221149 + 324242\cdot\sigma_s - 316818\cdot\sigma_u - 291942\cdot\sigma_w]\cdot k / 11200000\cdot|\mathbf{B}|$

(b) $e_h^* = [-873971 - 1912483\cdot\sigma_s + 1744957\cdot\sigma_u + 1767533\cdot\sigma_w]\cdot k / 50400000\cdot|\mathbf{B}|$

(c) $y_b^* = [229223 + 215089\cdot\sigma_s - 217231\cdot\sigma_u - 219737\cdot\sigma_w]\cdot k / 14400000\cdot|\mathbf{B}|$

(d) $e_b^* = [-1523537 - 2852659\cdot\sigma_s + 2704861\cdot\sigma_u + 2531947\cdot\sigma_w]\cdot k / 33600000\cdot|\mathbf{B}|$

(e) $y_f^* = [1080693 + 1831887 \cdot \sigma_s - 1677033 \cdot \sigma_u - 1589537 \cdot \sigma_w] \cdot k / 20160000 \cdot |\mathbf{B}|$

(f) $e_f^* = [4168279 + 6863687 \cdot \sigma_s - 6494633 \cdot \sigma_u - 6156537 \cdot \sigma_w] \cdot k / 20160000 \cdot |\mathbf{B}|$

99

(g) $y_g^* = [18092 + 25159 \cdot \sigma_s - 24088 \cdot \sigma_u - 22835 \cdot \sigma_w] \cdot k / 1008000 \cdot |\mathbf{B}|$

(h) $e_g^* = 88469 \cdot k / 33600000 \cdot |\mathbf{B}|$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $k > 0$ και $\sigma_w + \sigma_u + \sigma_s = 1$, το **99** αποτελεί ένα σύστημα οκτώ μη-γραμμικών εξισώσεων ως προς τρεις άγνωστες αλληλεξαρτώμενες μεταβλητές, σ_w, σ_u και σ_s. Στο Παράρτημα **X**, αποδεικνύουμε ότι στην οικονομία **Βήτα** οι χρηματικές ροές των θεσμικών τομέων είναι ανεξαιρέτως θετικές, όταν το ποσοστό των κρατικών εξόδων που κατανέμεται στην αγορά:

- υπηρεσιών είναι $0{,}433406 < \sigma_w < 0{,}508069$
- προϊόντων είναι $0{,}270996 < \sigma_u < 0{,}340983$
- χρεογράφων είναι $0{,}159343 < \sigma_s < 0{,}225774$.

Με σταθερό το δημοσιονομικό χάσμα, η κυβέρνηση μπορεί να αυξήσει το ποσοστό του προϋπολογισμού που προορίζεται για ένα αγαθό, μόνο όταν μειώσει το ποσοστό που προορίζεται για τα άλλα αγαθά και αντίστροφα. Πιο κάτω, συγκρίνονται αντίθετες αλλά ταυτόχρονες διαφοροποιήσεις μεριδίων δαπανών, που πραγματοποιεί ο δημόσιος τομέας:

Πίνακας ***X₄***

Αύξηση τού σ_w μέσω Μείωσης τού σ_u	Αύξηση τού σ_w μέσω Μείωσης τού σ_s
$(dy_h^* / d\sigma_u) \cdot (d\sigma_u / d\sigma_w) = -19{,}8824 \cdot k$	$(dy_h^* / d\sigma_s) \cdot (d\sigma_s / d\sigma_w) = 810{,}891 \cdot k$
$(de_h^* / d\sigma_u) \cdot (d\sigma_u / d\sigma_w) = -19{,}8824 \cdot k$	$(de_h^* / d\sigma_s) \cdot (d\sigma_s / d\sigma_w) = 810{,}891 \cdot k$
$(dy_b^* / d\sigma_u) \cdot (d\sigma_u / d\sigma_w) = -21{,}4828 \cdot k$	$(dy_b^* / d\sigma_s) \cdot (d\sigma_s / d\sigma_w) = 802{,}695 \cdot k$
$(de_b^* / d\sigma_u) \cdot (d\sigma_u / d\sigma_w) = -21{,}4828 \cdot k$	$(de_b^* / d\sigma_s) \cdot (d\sigma_s / d\sigma_w) = 802{,}695 \cdot k$
$(dy_f^* / d\sigma_u) \cdot (d\sigma_u / d\sigma_w) = -3{,}5727 \cdot k$	$(dy_f^* / d\sigma_s) \cdot (d\sigma_s / d\sigma_w) = 134{,}938 \cdot k$
$(de_f^* / d\sigma_u) \cdot (d\sigma_u / d\sigma_w) = -3{,}5727 \cdot k$	$(de_f^* / d\sigma_s) \cdot (d\sigma_s / d\sigma_w) = 134{,}938 \cdot k$
$(dy_g^* / d\sigma_u) \cdot (d\sigma_u / d\sigma_w) = -9{,}79458 \cdot k$	$(dy_g^* / d\sigma_s) \cdot (d\sigma_s / d\sigma_w) = 375{,}164 \cdot k$
$(de_g^* / d\sigma_u) \cdot (d\sigma_u / d\sigma_w) = -9{,}79458 \cdot k$	$(de_g^* / d\sigma_s) \cdot (d\sigma_s / d\sigma_w) = 375{,}164 \cdot k$

Πίνακας X_5

Αύξηση τού σ_u μέσω Μείωσης τού σ_w	Αύξηση τού σ_u μέσω Μείωσης τού σ_s
$(dy_h^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_u) = 19{,}8824\cdot k$	$(dy_h^* / d\sigma_s)\cdot(d\sigma_s / d\sigma_u) = 830{,}774\cdot k$
$(de_h^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_u) = 19{,}8824\cdot k$	$(de_h^* / d\sigma_s)\cdot(d\sigma_s / d\sigma_u) = 830{,}774\cdot k$
$(dy_b^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_u) = 21{,}4828\cdot k$	$(dy_b^* / d\sigma_s)\cdot(d\sigma_s / d\sigma_u) = 824{,}178\cdot k$
$(de_b^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_u) = 21{,}4828\cdot k$	$(de_b^* / d\sigma_s)\cdot(d\sigma_s / d\sigma_u) = 824{,}178\cdot k$
$(dy_f^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_u) = 3{,}5727\cdot k$	$(dy_f^* / d\sigma_s)\cdot(d\sigma_s / d\sigma_u) = 138{,}51\cdot k$
$(de_f^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_u) = 3{,}5727\cdot k$	$(de_f^* / d\sigma_s)\cdot(d\sigma_s / d\sigma_u) = 138{,}51\cdot k$
$(dy_g^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_u) = 9{,}79458\cdot k$	$(dy_g^* / d\sigma_s)\cdot(d\sigma_s / d\sigma_u) = 384{,}959\cdot k$
$(de_g^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_u) = 9{,}79458\cdot k$	$(de_g^* / d\sigma_s)\cdot(d\sigma_s / d\sigma_u) = 384{,}959\cdot k$

Πίνακας X_6

Αύξηση τού σ_s μέσω Μείωσης τού σ_u	Αύξηση τού σ_s μέσω Μείωσης τού σ_w
$(dy_h^* / d\sigma_u)\cdot(d\sigma_u / d\sigma_s) = -830{,}774\cdot k$	$(dy_h^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_s) = -810{,}891\cdot k$
$(de_h^* / d\sigma_u)\cdot(d\sigma_u / d\sigma_s) = -830{,}774\cdot k$	$(de_h^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_s) = -810{,}891\cdot k$
$(dy_b^* / d\sigma_u)\cdot(d\sigma_u / d\sigma_s) = -824{,}178\cdot k$	$(dy_b^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_s) = -802{,}695\cdot k$
$(de_b^* / d\sigma_u)\cdot(d\sigma_u / d\sigma_s) = -824{,}178\cdot k$	$(de_b^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_s) = -802{,}695\cdot k$
$(dy_f^* / d\sigma_u)\cdot(d\sigma_u / d\sigma_s) = -138{,}51\cdot k$	$(dy_f^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_s) = -134{,}938\cdot k$
$(de_f^* / d\sigma_u)\cdot(d\sigma_u / d\sigma_s) = -138{,}51\cdot k$	$(de_f^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_s) = -134{,}938\cdot k$
$(dy_g^* / d\sigma_u)\cdot(d\sigma_u / d\sigma_s) = -384{,}959\cdot k$	$(dy_g^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_s) = -375{,}164\cdot k$
$(de_g^* / d\sigma_u)\cdot(d\sigma_u / d\sigma_s) = -384{,}959\cdot k$	$(de_g^* / d\sigma_w)\cdot(d\sigma_w / d\sigma_s) = -375{,}164\cdot k$

Λόγω της δομής τής **Βήτα**, οι χρηματικές ροές των θεσμικών τομέων μεταβάλλονται ευθέως ανάλογα με τις κρατικές δαπάνες, που αφορούν αγορές παραγόμενων προϊόντων (σ_u) αλλά αντιστρόφως ανάλογα με τις κρατικές δαπάνες, που αφορούν εξυπηρέτηση του δημόσιου χρέους (σ_s). Το ποσοστό (σ_w) που αφορά την εργοδότηση νοικοκυριών επιδρά **θετικά όταν** αυξάνεται με μείωση τού (σ_s) και **αρνητικά όταν** μεγεθύνεται με σμίκρυνση τού (σ_u). Μέσω των εξισώσεων **80**(a)(b)(c) υπολογίζονται οι εισπράξεις των μη-κρατικών τομέων, ενώ μέσω των εξισώσεων **85**(a)(b)(c) υπολογίζονται οι συναλλαγές στα παζάρια

αγαθών, οι οποίες προκύπτουν από δημόσια έξοδα. Στη οικονομία **Βήτα**:

- το 20,8%, το 15,3% και το 27,5% των εσόδων των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των χρηματοπιστωτών, αντίστοιχα, πηγάζει από κυβερνητικές δαπάνες.
- το 21,8%, το 16,4% και το 13,9% των αγοραπωλησιών στα παζάρια εργασίας, παραγωγής και ρευστότητας οφείλεται σε αντίστοιχα κυβερνητικά έξοδα.

X.11 Η Τομεακή Κατανομή του Νέου Χρήματος

Οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυώνυμου $|\mathbf{B} - \lambda \cdot \mathbf{I}|$, οι οποίοι απαρτίζουν τις Ορίζουσες Routh-Hurwitz, είναι συναρτήσεις των κατανομών των τομεακών ροών (α_{ij}, β_{ij}), $i = h, b, f, g$ και $j = w, u, s, t$, και των παραμέτρων δημοσιονομικής πολιτικής (ζ, τ_j, σ_j). Τα μερίδια των θεσμικών τομέων στην ετήσια μεταβολή του νομισματικού ισολογισμού, τα οποία συνιστούν τη στήλη $\mathbf{K}(0, k_h, 0, k_b, 0, -k, 0, k_g)$, υπεισέρχονται μόνο στη λύση στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^* = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{K}$. Το διάνυσμα **K** είναι καθοριστικό όσον αφορά τα μεγέθη αλλά και τα πρόσημα (ή κατευθύνσεις) των τομεακών εισπράξεων και πληρωμών. Η νομισματική αρχή οφείλει να γνωρίζει τα τρέχοντα μερίδια τών μη-εκδοτικών τομέων στην αύξηση των τραπεζικών υποχρεώσεων, καθώς επίσης τα όρια τών εν λόγω μεριδίων εντός των οποίων όλες οι χρηματικές ροές είναι δεξιόστροφες ώστε, πριν το οικονομικό σύστημα εκτροχιασθεί, να παρεμβαίνει, για να το καθοδηγεί στον ορθό δρόμο.

Στην οικονομία **Βήτα**, θεωρώντας τις υπόλοιπες εξωγενείς παραμέτρους ως σταθερές, υπολογίσαμε, με τον Κανόνα τού Cramer, τα έσοδα και έξοδα των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των τραπεζιτών και των κυβερνώντων ως συναρτήσεις τών h, b, g και k:

$$y_h^* = -9 \cdot (-1564862 + 1546016b + 1097930g + 1630823h) \cdot k/55279$$

$$e_h^* = -2 \cdot (-7041879 + 6957072b + 4940685g + 7366343h) \cdot k/55279$$

$$y_b^* = -(-1990537 + 1964969b + 1396992g + 2080025h) \cdot k/7897$$

$$e_b^* = -(-1990537 + 1972866b + 1396992g + 2080025h) \cdot k/7897$$

$$y_f^* = -(-1034914 + 1015440b + 722775g + 1071485h) \cdot k/23691$$

$$e_f^* = -5 \cdot (-211721 + 203088b + 144555g + 214297h) \cdot k/23691$$

$$y_g^* = -100 \cdot (-65292 + 64476b + 45761g + 68148h) \cdot k/55279$$

$$e_g^* = -3 \cdot (-2176400 + 2149200b + 1543793g + 2271600h) \cdot k/55279$$

Νοουμένου ότι k>0 και h+b+g=1, το **100** αποτελεί ένα σύστημα οκτώ γραμμικών εξισώσεων με τρεις άγνωστες αλληλεξαρτώμενες μεταβλητές. Στο Παράρτημα **X** αποδεικνύουμε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση οι χρηματικές ροές των θεσμικών τομέων είναι θετικές, όταν το μερίδιο (της αύξησης του τραπεζικού παθητικού) που κατανέμεται:

- στους καταναλωτές είναι $0 < h < 0{,}510422$
- στους παραγωγούς είναι $0 < b < 0{,}410989$
- στους κυβερνώντες είναι $0 < g < 0{,}115518$.

Στην οικονομία **Βήτα**, όπου $h = {}^{50}/_{100}$, $b = {}^{40}/_{100}$ και $g = {}^{10}/_{100}$, τα εισοδήματα και οι δαπάνες των καταναλωτών, των παραγωγών, των χρηματοπιστωτών και των κυβερνώντων αποδίδονται από τις εξισώσεις **92**. Κρατώντας σταθερή τη μεγέθυνση του τραπεζικού ισολογισμού k, η αρμόδια αρχή μπορεί να αυξήσει το ποσοστό του νέου χρήματος που προορίζεται για έναν τομέα, μόνο όταν μειώσει το ποσοστό που προορίζεται για τους άλλους τομείς και αντίστροφα. Στους πιο κάτω Πίνακες συγκρίνονται ταυτόχρονες αλλά αντίθετες διαφοροποιήσεις των τομεακών μεριδίων στη νομισματική επέκταση. Λόγω της δομής τής **Βήτα**, τα έσοδα και τα έξοδα των θεσμικών τομέων μεταβάλλονται **ευθέως** ανάλογα με το μερίδιο των κυβερνώντων g αλλά **αντιστρόφως** ανάλογα προς το μερίδιο των νοικοκυριών h στο νέο χρήμα. Το ποσοστό των επιχειρήσεων b επιδρά στις τομεακές ροές **θετικά**, όταν αυξάνεται με μείωση του h, και **αρνητικά**, όταν μεγεθύνεται με σμίκρυνση του g.

Πίνακας X_7

Αύξηση τού h μέσω Μείωσης τού b	Αύξηση τού h μέσω Μείωσης τού g
$(dy_h^* / db)\cdot(db / dh) = -13{,}8075\cdot k$	$(dy_h^* / dg)\cdot(dg / dh) = -86{,}7606\cdot k$
$(de_h^* / db)\cdot(db / dh) = -14{,}8075\cdot k$	$(de_h^* / dg)\cdot(dg / dh) = -87{,}7606\cdot k$
$(dy_b^* / db)\cdot(db / dh) = -14{,}5696\cdot k$	$(dy_b^* / dg)\cdot(dg / dh) = -86{,}4927\cdot k$
$(de_b^* / db)\cdot(db / dh) = -13{,}5696\cdot k$	$(de_b^* / dg)\cdot(dg / dh) = -86{,}4927\cdot k$
$(dy_f^* / db)\cdot(db / dh) = -2{,}36567\cdot k$	$(dy_f^* / dg)\cdot(dg / dh) = -14{,}7191\cdot k$
$(de_f^* / db)\cdot(db / dh) = -2{,}36567\cdot k$	$(de_f^* / dg)\cdot(dg / dh) = -14{,}7191\cdot k$
$(dy_g^* / db)\cdot(db / dh) = -6{,}64267\cdot k$	$(dy_g^* / dg)\cdot(dg / dh) = -40{,}4982\cdot k$
$(de_g^* / db)\cdot(db / dh) = -6{,}64267\cdot k$	$(de_g^* / dg)\cdot(dg / dh) = -39{,}4982\cdot k$

Πίνακας X_8

Αύξηση τού b μέσω Μείωσης τού h	Αύξηση τού b μέσω Μείωσης τού g
$(dy_h^* / dh)\cdot(dh / db) = 13{,}8075\cdot k$	$(dy_h^* / dg)\cdot(dg / db) = -72{,}9531\cdot k$
$(de_h^* / dh)\cdot(dh / db) = 14{,}8075\cdot k$	$(de_h^* / dg)\cdot(dg / db) = -72{,}9531\cdot k$
$(dy_b^* / dh)\cdot(dh / db) = 14{,}5696\cdot k$	$(dy_b^* / dg)\cdot(dg / db) = -71{,}9231\cdot k$
$(de_b^* / dh)\cdot(dh / db) = 13{,}5696\cdot k$	$(de_b^* / dg)\cdot(dg / db) = -72{,}9231\cdot k$
$(dy_f^* / dh)\cdot(dh / db) = 2{,}36567\cdot k$	$(dy_f^* / dg)\cdot(dg / db) = -12,\ 3534\cdot k$
$(de_f^* / dh)\cdot(dh / db) = 2{,}36567\cdot k$	$(de_f^* / dg)\cdot(dg / db) = -12,\ 3534\cdot k$
$(dy_g^* / dh)\cdot(dh / db) = 6{,}64267\cdot k$	$(dy_g^* / dg)\cdot(dg / db) = -33{,}8555\cdot k$
$(de_g^* / dh)\cdot(dh / db) = 6{,}64267\cdot k$	$(de_g^* / dg)\cdot(dg / db) = -32{,}8555\cdot k$

Πίνακας X_9

Αύξηση τού g μέσω Μείωσης τού b	Αύξηση τού g μέσω Μείωσης τού h
$(dy_h^* / db)\cdot(db / dg) = 72{,}9531\cdot k$	$(dy_h^* / dh)\cdot(dh / dg) = 86{,}7606\cdot k$
$(de_h^* / db)\cdot(db / dg) = 72{,}9531\cdot k$	$(de_h^* / dh)\cdot(dh / dg) = 87{,}7606\cdot k$
$(dy_b^* / db)\cdot(db / dg) = 71{,}9231\cdot k$	$(dy_b^* / dh)\cdot(dh / dg) = 86{,}4927\cdot k$
$(de_b^* / db)\cdot(db / dg) = 72{,}9231\cdot k$	$(de_b^* / dh)\cdot(dh / dg) = 86{,}4927\cdot k$
$(dy_f^* / db)\cdot(db / dg) = 12,\ 3534\cdot k$	$(dy_f^* / dh)\cdot(dh / dg) = 14,\ 7191\cdot k$
$(de_f^* / db)\cdot(db / dg) = 12,\ 3534\cdot k$	$(de_f^* / dh)\cdot(dh / dg) = 14,\ 7191\cdot k$
$(dy_g^* / db)\cdot(db / dg) = 33{,}8555\cdot k$	$(dy_g^* / dh)\cdot(dh / dg) = 40{,}4982\cdot k$
$(de_g^* / db)\cdot(db / dg) = 32{,}8555\cdot k$	$(de_g^* / dh)\cdot(dh / dg) = 39{,}4982\cdot k$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το h δεν μπορεί να υπερβαίνει το 51,0422% και το b δεν μπορεί να υπερβαίνει το 41,0989%, συνάγεται ότι το g δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το 7,8589%. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται τα ελάχιστα μερίδια h και b στην αύξηση του νομισματικού παθητικού k ως 47,3493% και 37,406%, αντίστοιχα. Στα Ευκλείδεια μοντέλα, η ετήσια προσφορά (k) και η τομεακή κατανομή (k_1, k_2,..., k_n) του νέου χρήματος δεν επηρεάζουν τη δυναμική σταθερότητα του συμπλέγματος συναλλαγών, παρόλο που αμφότερες είναι οι συνήθεις αιτίες εξωγενών κλονισμών των ενδογενών ροών.

Χ.12 Η Πολυδιάστατη Μορφή της Οικονομικής Πολιτικής

Τα καταναλωτικά νοικοκυριά, οι παραγωγικές επιχειρήσεις και οι ιδιώτες τραπεζίτες συνεχώς επιδιώκουν την αριστοποίηση του καθαρού πλούτου τους, δηλαδή της διαφοράς των εσόδων και των εξόδων τους μέσα στα όρια των πραγματικών πόρων που διαθέτουν. Στο ανωτέρω πλαίσιο, συγκρίνουν τις ποσότητες των υπηρεσιών, των προϊόντων και των ομολόγων που πωλούν και αγοράζουν με τα αποθέματα των ίδιων αγαθών για:

- να προσαρμόσουν τους μισθούς, τις τιμές και τις αξίες που ελέγχουν ή
- να απαιτήσουν συμφέρουσες τροποποιήσεις της οικονομικής πολιτικής.

Έκαστος μη-κρατικός τομέας αναμένει τις αρμόδιες αρχές να παρεμβαίνουν στο σύμπλεγμα συναλλαγών ώστε, τουλάχιστο, να μεγιστοποιούν τις δαπάνες **για** και, άρα, το εισόδημα **από** το αγαθό, που αυτός εμπορεύεται. Όλοι μαζί αντιλαμβάνονται ότι, χωρίς δημοσιονομικές ή χρηματοπιστωτικές παρεμβάσεις, δεν μπορούν από μόνοι τους:

- να βελτιώσουν τις εισπράξεις και τις πληρωμές όλων των θεσμικών τομέων,
- να αποτρέψουν δυσμενείς συνέπειες από αλλαγές στο εξωτερικό περιβάλλον ή
- να εφαρμόσουν συλλογικές αποφάσεις, κατευθυντήριες συμφωνίες κ.λπ.

Στο κεφάλαιο αυτό εξηγήσαμε πώς η εκτελεστική εξουσία και η κεντρική τράπεζα πηδαλιουχούν το διάνυσμα οικονομικής ισορροπίας $\mathbf{X}^*$ με μικρές, σταδιακές και συντονισμένες διαφοροποιήσεις των παραμέτρων πολιτικής. Συναφώς, υποδείξαμε ότι το σύμπλεγμα συναλλαγών **81**, που αποτελείται από οκτώ ενδογενείς μεταβλητές και ίσο αριθμό παρεμβατικών εργαλείων, είναι τελείως κατευθυνόμενο μέσα στα όρια των δημοσιονομικών (ζ; τ_w, τ_u, τ_s; σ_w, σ_u ή σ_s) και των νομισματικών (k; h, b ή g) παραμέτρων, όπου τόσο οι Ορίζουσες Routh-Hurwitz $\mathbf{rh}_i$, i = 1,…, 8, όσο και οι λύσεις στατικής ισορροπίας $\mathbf{X}^* = (y_n^*, e_n^*)$, $n = h, b, f, g$, είναι μεγαλύτερες από το μηδέν.

Στο επόμενο κεφάλαιο, όπου ενδιατρίβουμε στη διεθνή οικονομία, θα διαφανεί ακόμη εντονότερα ότι οι αρμόδιες αρχές, εφαρμόζοντας την Ευκλείδεια μεθοδολογία, μπορούν να ανακατανέμουν τις τομεακές ροές και να αξιοποιούν τους πραγματικούς πόρους στα εμπλεκόμενα κράτη, μόνο με προμελετημένες και εναρμονισμένες νομισματικές, δημοσιονομικές και συναλλαγματικές πολιτικές.

XI. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΕΘΝΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ

Οι 12 αξιωματικές προτάσεις της Ευκλείδειας μεθοδολογίας ισχύουν τόσο στην εγχώρια όσο και στην παγκόσμια οικονομία. Όμως, η δόμηση διεθνών μοντέλων απαιτεί επιπρόσθετες υποθέσεις για τους τρόπους με τους οποίους συσχετίζονται οι προσφορές χρήματος, συνενώνονται οι τομεακές ροές και αλληλεπιδρούν οι αγοραπωλησίες αγαθών στο ενιαίο σύμπλεγμα συναλλαγών. Το μέγεθος έκαστου μαθηματικού υποδείγματος εξαρτάται από τον αριθμό των συνδεδεμένων οικονομιών, καθώς επίσης από το διαχωρισμό τους σε θεσμικούς τομείς και νομισματικές ζώνες. Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύουμε και συνθέτουμε το απλούστερο σύμπλεγμα διεθνών συναλλαγών, που αποτελεί το πρότυπο για την κατασκευή παρόμοιων μοντέλων μεγαλύτερης κλίμακας. Το εν λόγω υπόδειγμα συνίσταται από δύο στοιχειώδεις νομισματικές οικονομίες, οι οποίες συνδέονται μέσω του παγκόσμιου συστήματος εμπορίου και πληρωμών. Συνεπώς, το απλούστερο μαθηματικό μοντέλο διεθνών αγοραπωλησιών, υπηρεσιών, προϊόντων και χρεογράφων είναι ένα σύστημα δέκα μη-ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (πρώτης τάξης με αμετάβλητους συντελεστές), το οποίο προσδιορίζεται στο διανυσματικό χώρο ($\boldsymbol{R}^{10}$, t).

XI.1 Το Ενιαίο Οικονομικό και Χρηματοπιστωτικό Σύστημα

Το πρότυπο διεθνές σύστημα συναλλαγών αποτελείται από δύο νομισματικές ζώνες, τη Χώρα **Ένα** και τον υπόλοιπο κόσμο (Χώρα **Δύο**). Τα νοικοκυριά, οι επιχειρήσεις και οι τραπεζίτες των περιοχών αυτών είναι ελεύθεροι να ζητούν και να προσφέρουν χρηματικές ροές (ή στοιχεία ενεργητικού και παθητικού) πουλώντας και αγοράζοντας υπηρεσίες, προϊόντα και ομόλογα, οπουδήποτε στον κόσμο. Οι δύο οικονομίες συνδέονται μέσω των νομισματικών τους συστημάτων, δηλαδή τις αντίστοιχες κεντρικές τράπεζες και λοιπά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Οι συγκρίσεις των τομεακών ροών με τους μισθούς, τις τιμές και τις αξίες των αγαθών διευκολύνονται από την ύπαρξη μίας παγκόσμια αποδεκτής λογιστικής μονάδας. Τα εισοδήματα και οι δαπάνες των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών αμφότερων των χωρών (ή ζωνών) καθορίζονται από τη διεθνή ζήτηση για τα αγαθά που προσφέρουν και τη διεθνή προσφορά για τα αγαθά που ζητούν. Οι μεσοπρόθεσμα σταθερές αναλογίες των τομεακών εσόδων που πηγάζουν από πωλήσεις και των τομεακών εξόδων που προορίζονται για αγορές εργασίας και παραγωγής έναντι ρευστότητας, και αντίστροφα, διαμορφώνονται σε αυτό το πλαίσιο.

Οι κυρίαρχες περιοχές δεν είναι εξίσου ισχυρές από οικονομικής, πολιτικής και άλλης άποψης. Οι διαφορές (ή χάσματα) ανάμεσα στα ετήσια έσοδα και έξοδα τών δύο χρηματοπιστωτικών τομέων υπολογίζονται στη διεθνή λογιστική μονάδα (*ΔΛΜ*) που, σε αυτήν την περίπτωση, συμπίπτει με το εθνικό νόμισμα της Χώρας **Ένα** ($\xi_1 = 1$). Από μαθηματικής σκοπιάς, οι δύο νομισματικοί τομείς είναι γραμμικώς εξαρτημένοι, αφού το τραπεζικό σύστημα της Χώρας **Δύο** (υποχρεούται να) αυξάνει το παθητικό του ανάλογα με την αύξηση του παθητικού του τραπεζικού συστήματος της Χώρας **Ένα**. Οι χρηματοπιστωτές, μέσω των συναλλαγών τους με τα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις, καθορίζουν την κατανομή της διεθνούς ρευστότητας ανάμεσα στους τελικούς αποδέχτες. Όπως είναι γνωστό, οι αγοραπωλησίες ομολόγων ανάμεσα στα τραπεζικά ιδρύματα δεν επηρεάζουν την προσφορά χρήματος (K_F). Μεσοπρόθεσμα, τα τομεακά μερίδια κ_{ij}, $i = 1, 2$, $j = h, b, f$, στην αύξηση της εθνικής ρευστότητας (K_{iF}) και οι συναλλαγματικές ισοτιμίες αμφότερων των νομισμάτων (ξ_i) καθορίζονται εξωγενώς. Μετά τις πράξεις συμψηφισμού, ο παγκόσμιος τραπεζικός ισολογισμός κατανέμεται (στη *ΔΛΜ*) ανάμεσα στους εκδοτικούς ($0<\varphi_i<1$) και τους μη-εκδοτικούς τομείς ($\mu_{1H} + \mu_{1B} + \mu_{2H} + \mu_{2B} = 1$) των δύο χωρών, ως εξής:

$$K_F = K_{1F} + K_{2F} = K_{1F} + \varphi \cdot K_F = (1-\varphi) \cdot K_F + \varphi \cdot K_F = \xi_1 \cdot k_{1f} + \xi_2 \cdot k_{2f}$$

$$K_{1F} = (K_{1F1H} + K_{1F1B} + K_{1F2H} + K_{1F2B}) = (\kappa_{1f1h} + \kappa_{1f1b} + \kappa_{1f2h} + \kappa_{1f2b}) \cdot K_{1F}$$

$$K_{2F} = (K_{2F1H} + K_{2F1B} + K_{2F2H} + K_{2F2B}) = (\kappa_{2f1h} + \kappa_{2f1b} + \kappa_{2f2h} + \kappa_{2f2b}) \cdot K_{2F}$$

$$\mu_{1H} + \mu_{2H} + \mu_{1B} + \mu_{2B} = (1-\varphi)(\kappa_{1f\mathbf{1h}} + \kappa_{1f\mathbf{1b}} + \kappa_{1f\mathbf{2h}} + \kappa_{1f\mathbf{2b}}) + \varphi(\kappa_{2f\mathbf{1h}} + \kappa_{2f\mathbf{1b}} + \kappa_{2f\mathbf{2h}} + \kappa_{2f\mathbf{2b}}) = 1$$

Οι θεσμικοί τομείς δεν ξεχωρίζουν τις χρηματικές ροές (και, άρα, τις αντίστοιχες παρούσες αξίες) ανάλογα με την περιοχή ή το νόμισμα που προέρχονται ή προορίζονται. Όλοι ανεξαιρέτως ζητούν και προσφέρουν το ίδιο κεφάλαιο, με αντάλλαγμα μια μονάδα διεθνούς ρευστότητας ετησίως. Δηλαδή, οι καταναλωτές, οι παραγωγοί και οι τραπεζίτες δεν πάσχουν από χρηματική αυταπάτη (money illusion). Σε αυτό το πλαίσιο ισορροπίας της συναλλαγματικής αξίας των χαρτοφυλακίων (portfolio balance approach), τα ποσοστά των ετήσιων τομεακών εσόδων που ζητούνται **από** και των ετήσιων τομεακών εξόδων που προσφέρονται **για** εγγυημένα ομόλογα είναι σταθερά και υπολογίσιμα. Οποιαδήποτε σχέση χαρακτηρίζεται από διαχρονική αστάθεια είναι άχρηστη, ιδίως για τη χάραξη οικονομικής πολιτικής, η οποία αποτελεί προτεραιότητα της Ευκλείδειας μεθοδολογίας. Το μερίδιο κάθε Χώρας i στην ετήσια αύξηση της παγκόσμιας ρευστότητας ($\varphi_i \cdot K_F$) είναι

εξωγενές και ίσο με την ισοτιμία επί την προσφορά ($\xi_i \cdot k_{if}$) του αντίστοιχου εθνικού νομίσματος. Επομένως, όλες οι κεντρικές τράπεζες, πλην εκείνης της οποίας το χρήμα τυγχάνει παγκόσμιας αποδοχής ως *ΔΛΜ*, έχουν να επιλέξουν μεταξύ:

- ισχυρού εθνικού νομίσματος και μικρής αύξησης του τραπεζικού ισολογισμού ή
- αδύνατου εθνικού νομίσματος και μεγάλης αύξησης του τραπεζικού ισολογισμού.

Η αύξηση της διεθνούς ρευστότητας K_F κατανέμεται ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς των δύο χωρών ή ζωνών σύμφωνα με τις αποφάσεις των χρηματοπιστωτών, ως εξής:

102 $$K_F = \{(1-\varphi)\cdot(\kappa_{1f1h} + \kappa_{1f1b} + \kappa_{1f2h} + \kappa_{1f2b}) + \varphi\cdot(\kappa_{2f1h} + \kappa_{2f1b} + \kappa_{2f2h} + \kappa_{2f2b})\}\cdot K_F > 0$$

Στα Ευκλείδεια οικονομικά μοντέλα τα εισοδήματα και οι δαπάνες των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών, οπουδήποτε στον κόσμο, είναι συναρτήσεις της ετήσιας μεταβολής και της τομεακής κατανομής τής παγκόσμιας προσφοράς χρήματος. Συνεπώς, οι αντιπαραθέσεις, οι αντιπαλότητες και οι αντιζηλίες, που σχετίζονται με την αύξηση (K_F) και το μοίρασμα του διεθνούς τραπεζικού ισολογισμού ανάμεσα στα εκδοτικούς (φ_i) και τους μη-εκδοτικούς τομείς (μ_{ij}), είναι αναπόφευκτες κάθε χρόνο.

Η δωδέκατη αξιωματική πρόταση θεωρεί ότι η λειτουργία μιας ανώτατης νομισματικής αρχής (η οποία διασφαλίζει ότι ο τραπεζικός ισολογισμός μεταβάλλεται και κατανέμεται σύμφωνα με συγκεκριμένα οικονομικά, πολιτικά και κοινωνικά συμφέροντα ή κριτήρια) είναι εκ των ων ουκ άνευ σε κάθε σύμπλεγμα ανταλλαγής αγαθών με χρήματα, και αντίστροφα. Στο στοιχειώδες μαθηματικό μοντέλο που μας απασχολεί, οι εκδοτικοί τομείς των δύο περιοχών, αναγκαστικά, συντονίζονται μέσω μιας Διεθνούς Νομισματικής Λέσχης (ΔΝΛ), που έχουν εγκαθιδρύσει για να συγκρατούν τον καταστροφικό ανταγωνισμό και για να μοιράζουν τη διεθνή ρευστότητα. Ετησίως και μετά από διαβουλεύσεις, η ΔΝΛ υποδεικνύει τη στοχευόμενη αύξηση (K_F) και τη μοιρασιά (φ_i) της παγκόσμιας προσφοράς χρήματος ανάμεσα στα κράτη-μέλη. Για να καθορίσει τα μερίδια των χωρών στην αύξηση της διεθνούς ρευστότητας, η ΔΝΛ λαμβάνει υπόψη (ανάμεσα σε άλλα) τα ποσοτικά χάσματα και τα ισχύοντα αντίτιμα των αγοραίων αγαθών σε παγκόσμια κλίμακα. Σε αυτό το πλαίσιο, έκαστος τραπεζικός τομέας κατανέμει το νέο χρήμα που εκδίδει, ανάμεσα στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις αμφοτέρων των χωρών, ενώ υποχρεούται να διατηρεί τη μεταβολή των υποχρεώσεών του, υπολογισμένων στη διεθνή λογιστική μονάδα, πλησίον του ποσού $\xi_i \cdot k_{if} = K_{iF}$, $i = 1, 2$, που συμφωνήθηκε με τη ΔΝΛ.

XI.2 Η Μαθηματική Ανάλυση και Σύνθεση των Συναλλαγών

Με δεδομένους τους μισθούς, τις τιμές και τις αξίες, καθώς επίσης τις εκδόσεις και αποδοχές εγγυημένων ομολόγων, οι θεσμικοί τομείς αμφότερων των χωρών ενεργούν ώστε να μεγιστοποιούν τις εισπράξεις τους και να ελαχιστοποιούν τι πληρωμές τους, καθοδηγούμενοι (σε μεγαλύτερο ή μικρότερο βαθμό) από την ορθολογική αριστοποίηση, το ένστικτο της αυτοσυντήρησης και τη θέληση για δύναμη. Όταν το διεθνές εμπόριο και οι διεθνείς πληρωμές διεξάγονται ελεύθερα, οι εγχώριες και οι παγκόσμιες χρηματικές ροές και, άρα, οι αντίστοιχες κεφαλαιακές αξίες, συγκρίνονται σε διεθνείς λογιστικές μονάδες. Στον ακόλουθο Πίνακα ταξινομούνται οι πηγές των εισοδημάτων και οι προορισμοί των δαπανών των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών, που συμμετέχουν στο διεθνές σύμπλεγμα συναλλαγών:

Πίνακας $\boldsymbol{XI_1}$
Η Παγκόσμια Ζήτηση Εσόδων Y και Προσφορά Εξόδων E σε $\Delta\Lambda M$

ΤΟΜΕΑΣ ΡΟΕΣ	ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ ΧΩΡΑ ΕΝΑ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΧΩΡΑ ΕΝΑ		ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ ΧΩΡΑ ΔΥΟ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΧΩΡΑ ΔΥΟ		ΤΡΑΠΕΖΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ	
	Y_{1H}	E_{1H}	Y_{1B}	E_{1B}	Y_{2H}	E_{2H}	Y_{2B}	E_{2B}	Y_F	E_F
ΑΓΑΘΟ	**Εργασία**									
Y_{1W}	Y_{1H1W}	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E_{1W}	-	-	-	E_{1B1W}	-	E_{2H1W}	-	E_{2B1W}	-	E_{F1W}
Y_{2W}	-	-	-		Y_{2H2W}	-	-	-	-	-
E_{2W}	-	E_{1H2W}	-	E_{1B2W}	-	-	-	E_{2B2W}	-	E_{F2W}
ΑΓΑΘΟ	**Παραγωγή**									
Y_{1U}	-	-	Y_{1B1U}		-	-		-	-	-
E_{1U}	-	E_{1H1U}	-		-	E_{2H1U}	-	E_{2B1U}	-	E_{F1U}
Y_{2U}	-	-	-		-	-	Y_{2B2U}	-	-	-
E_{2U}	-	E_{1H2U}	-	E_{1B2W}	-	E_{2H2U}	-	-	-	E_{F2U}
ΑΓΑΘΟ	**Ρευστότητα**									
Y_{FS}	Y_{1HFS}	-	Y_{1BFS}		Y_{2HFS}	-	Y_{2BFS}	-	Y_{FS}	-
E_{FS}	-	E_{1HFS}	-	E_{1BFS}	-	E_{2HFS}	-	E_{2BFS}	-	E_{FS}

Ο Πίνακας $\boldsymbol{XI_1}$ αντιστοιχεί στον Πίνακα $\boldsymbol{III_6}$ του νομισματικού μοντέλου και στον Πίνακα $\boldsymbol{X_1}$ του δημοσιονομικού μοντέλου. Στα Ευκλείδεια υποδείγματα, κάθε θεσμικός τομέας διαφοροποιείται μέσω της προσφοράς ενός αγαθού, που δεν αγοράζεται από τον ίδιο και

δεν πωλείται από τους άλλους τομείς, με εξαίρεση το νομισματικό τομέα. Έκαστη κεντρική τράπεζα, μεριμνώντας για την ποσότητα του χρήματος και τη λειτουργία της οικονομίας, αποδέχεται και εκδίδει εγγυημένα ομόλογα στην εθνική λογιστική μονάδα, παρεμβαίνοντας στο παζάρι εγχώριας ρευστότητας. Η μόνη κατάσταση κατά την οποία αμφότερες οι αρμόδιες αρχές μπορούν να χαράξουν εθνικές νομισματικές πολιτικές με προβλέψιμα αποτελέσματα, είναι όταν οι θεσμικοί τομείς και των δύο χωρών είναι αδιάφοροι για τη συναλλαγματική σύνθεση των χαρτοφυλακίων τους. Εκτός ισορροπίας των αποδόσεων, οι μεταβολές και οι κατανομές των εθνικών τραπεζικών ισολογισμών στρεβλώνονται από τις παρεμβάσεις των κερδοσκόπων.

Ο κύκλος εργασιών του παζαριού για διεθνές χρήμα αποτελείται από τις πληρωμές όλων των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων για τα εγγυημένα ομόλογα που εξέδωσαν, καθώς επίσης από τις εισπράξεις των καταναλωτών και των παραγωγών, παγκοσμίως, για τα εγγυημένα ομόλογα, τα οποία αποδέχθηκαν (υπολογισμένων σε *ΔΛΜ*):

103 $$E_{FS} = Y_{1HFS} + Y_{1BFS} + Y_{2HFS} + Y_{2BFS}$$

Το ανωτέρω άθροισμα χρησιμεύει στη μαθηματική απεικόνιση των εισοδημάτων των νοικοκυριών και των επιχειρήσεων αμφότερων των χωρών. Συγκεκριμένα, ως αποτέλεσμα της παγκοσμιοποίησης:

- Τα νοικοκυριά απολαμβάνουν έσοδα από την εργασία τους, την οποία πωλούν στους άλλους τομείς, και από τα χρεόγραφα που συσσωρεύουν σε *ΔΛΜ*. Το συνολικό εισόδημα των καταναλωτών κάθε χώρας ισούται με το άθροισμα των εσόδων τους από τις πωλήσεις υπηρεσιών και τις επενδύσεις κεφαλαίων, που πραγματοποιούν διεθνώς:

104
$$Y_{1H} = (E_{2H1W} + E_{1B1W} + E_{2B1W} + E_{F1W}) + \mathbf{(Y_{1HFS})}$$
$$Y_{2H} = (E_{1H2W} + E_{1B2W} + E_{2B2W} + E_{F2W}) + \mathbf{(Y_{2HFS})}$$

Από το άθροισμα **103** προκύπτει ότι:

105
$$\mathbf{(Y_{1HFS})} = E_{FS} - (Y_{2HFS} + Y_{1BFS} + Y_{2BFS})$$
$$\mathbf{(Y_{2HFS})} = E_{FS} - (Y_{1HFS} + Y_{1BFS} + Y_{2BFS})$$

Οι εισπράξεις των καταναλωτών διαφοροποιούνται ανάλογα με τη ζήτηση για την εργασία και τη ρευστότητα που διαθέτουν στους υπόλοιπους τομείς της παγκόσμιας οικονομίας:

106

(a) $$dY_{1H}/dt = \{E_{2H1W} + E_{1B1W} + E_{2B1W} + E_{F1W} + \mathbf{(Y_{1HFS})} - Y_{1H}\}$$

(b) $$dY_{2H}/dt = \{E_{1H2W} + E_{1B2W} + E_{2B2W} + E_{F2W} + \mathbf{(Y_{2HFS})} - Y_{2H}\}$$

Τα νοικοκυριά συντηρούν τον καθαρό πλούτο τους προσαρμόζοντας τα έξοδα ανάλογα με τα έσοδά τους. Δηλαδή, οι δαπάνες τους δεν ξεπερνούν το ενδογενώς καθοριζόμενο εισόδημα, μείον το εξωγενώς καθοριζόμενο μερίδιό τους στην ετήσια αύξηση των υποχρεώσεων του παγκόσμιου χρηματοπιστωτικού συστήματος:

107 (a) $$dE_{1H}/dt = \{Y_{1H} - \mathrm{K_{1H}} - E_{1H}\}$$ (b) $$dE_{2H}/dt = \{Y_{2H} - \mathrm{K_{2H}} - E_{2H}\}$$

- Οι επιχειρήσεις απολαμβάνουν έσοδα από την παραγωγή την οποία πωλούν στους άλλους θεσμικούς τομείς και από τα χρεόγραφα που συσσωρεύουν σε *ΔΛΜ*. Το συνολικό εισόδημα των παραγωγών κάθε χώρας ισούται με το άθροισμα των εσόδων από τις πωλήσεις προϊόντων και τις επενδύσεις κεφαλαίων, που πραγματοποιούν διεθνώς:

108

$$Y_{1B} = (E_{1H1U} + E_{2H1U} + E_{2B1U} + E_{F1U}) + \mathbf{(Y_{1BFS})}$$

$$Y_{2B} = (E_{1H2U} + E_{2H2U} + E_{1B2U} + E_{F2U}) + \mathbf{(Y_{2BFSS})}$$

Από το άθροισμα **103** προκύπτει ότι:

109

$$\mathbf{(Y_{1BFS})} = E_{FS} - (Y_{1HFS} + Y_{2HFS} + Y_{2BFS})$$

$$\mathbf{(Y_{2BFS})} = E_{FS} - (Y_{1HFS} + Y_{2HFS} + Y_{1BFS})$$

Τα έσοδα των επιχειρήσεων διαφοροποιούνται ανάλογα με τη ζήτηση για την παραγωγή και τη ρευστότητα, που διαθέτουν στους υπόλοιπους τομείς της παγκόσμιας οικονομίας:

110

(a) $$dY_{1B}/dt = \{E_{1H1U} + E_{2H1U} + E_{2B1U} + E_{F1U} + \mathbf{(Y_{1BFS})} - Y_{1B}\}$$

(b) $$dY_{2B}/dt = \{E_{1H2U} + E_{2H2U} + E_{1B2U} + E_{F2U} + \mathbf{(Y_{2BFS})} - Y_{2B}\}$$

Οι παραγωγοί προσαρμόζουν τις δαπάνες τους, ώστε να μην ξεπερνούν το ενδογενώς καθοριζόμενο εισόδημα, μείον το εξωγενώς καθοριζόμενο μερίδιό τους στην ετήσια αύξηση των υποχρεώσεων του διεθνούς χρηματοπιστωτικού συστήματος:

111 (a) $$dE_{1B}/dt = \{Y_{1B} - \mathrm{K_{1B}} - E_{1B}\}$$ (b) $$dE_{2B}/dt = \{Y_{2B} - \mathrm{K_{2B}} - E_{2B}\}$$

- Οι τραπεζίτες εισπράττουν, σε *ΔΛΜ*, μόνο τόκους ή και δόσεις στα εγγυημένα ομόλογα, που οι ίδιοι αποδέχθηκαν από τα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις των δύο χωρών:

112 $\boldsymbol{Y_{FS}} = (E_{1HFS} + E_{2HFS} + E_{1BFS} + E_{2BFS}) = Y_F$

Οι εισπράξεις των τραπεζών διαφοροποιούνται ανάλογα με τις πληρωμές (ζήτηση) τών μη-εκδοτικών τομέων για διεθνή ρευστότητα:

113 $\mathrm{d}Y_F/\mathrm{dt} = \{(\boldsymbol{Y_{FS}}) - Y_F\}$

Τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα δαπανούν, σε *ΔΛΜ*, για τα χρεόγραφα που εξέδωσαν, καθώς επίσης για τις υπηρεσίες και τα προϊόντα που αγόρασαν σε αμφότερες τις χώρες, ανάλογα με τις λειτουργικές τους ανάγκες και τυχόν άλλες προτεραιότητες:

114 $E_F = E_{FS} + E_{F1W} + E_{F2W} + E_{F1U} + E_{F2U}$

Κάθε χρόνο, ο παγκόσμιος νομισματικός τομέας προσαρμόζει τις δαπάνες του, ώστε αυτές να μην υπερβαίνουν το άθροισμα του (ενδογενούς) εισοδήματος και της (εξωγενούς) αύξησης των υποχρεώσεών του (υπολογισμένων σε *ΔΛΜ*), που ενέκρινε η ΔΝΛ:

115 $\mathrm{d}E_F/\mathrm{dt} = \{Y_F + \mathrm{K_F} - E_F\}$

Τα πέντε ζεύγη εξισώσεων **106**(a)(b), **107**(a)(b), **110**(a)(b), **111**(a)(b), **113** και **115** συναποτελούν το απλούστερο μαθηματικό υπόδειγμα του παγκόσμιου συστήματος εμπορίου και πληρωμών. Το μοντέλο **116**, που έχει τη γενική μορφή $\mathbf{dX/dt = A \cdot X - K}$, είναι προσδιορισμένο στο διανυσματικό χώρο $(\boldsymbol{R^{10}}, t)$ ως ακολούθως:

$$\mathrm{d}Y_{1H}/\mathrm{dt} = \{(E_{2H1W} + E_{1B1W} + E_{2B1W} + E_{F1W}) + E_{FS} - (Y_{2HFS} + Y_{1BFS} + Y_{2BFS}) - Y_{1H}\}$$

$$\mathrm{d}E_{1H}/\mathrm{dt} = \{Y_{1H} - \mathrm{K_{1H}} - E_{1H}\}$$

$$\mathrm{d}Y_{2H}/\mathrm{dt} = \{(E_{1H2W} + E_{1B2W} + E_{2B2W} + E_{F2W}) + E_{FS} - (Y_{1HFS} + Y_{1BFS} + Y_{2BFS}) - Y_{2H}\}$$

$$\mathrm{d}E_{2H}/\mathrm{dt} = \{Y_{2H} - \mathrm{K_{2H}} - E_{2H}\}$$

$$\mathrm{d}Y_{1B}/\mathrm{dt} = \{(E_{1H1U} + E_{2H1U} + E_{2B1U} + E_{F1U}) + E_{FS} - (Y_{1HFS} + Y_{2HFS} + Y_{2BFS}) - Y_{1B}\}$$

116

$$\mathrm{d}E_{1B}/\mathrm{dt} = \{Y_{1B} - \mathrm{K_{1B}} - E_{1B}\}$$

$$\mathrm{d}Y_{2B}/\mathrm{dt} = \{(E_{1H2U} + E_{2H2U} + E_{1B2U} + E_{F2U}) + E_{FS} - (Y_{1HFS} + Y_{2HFS} + Y_{1BFS}) - Y_{1B}\}$$

$$\mathrm{d}E_{2B}/\mathrm{dt} = \{Y_{2B} - \mathrm{K_{2B}} - E_{2B}\}$$

$$\mathrm{d}Y_F/\mathrm{dt} = \{E_{1H1S} + E_{1B1S} + E_{2H1S} + E_{2B1S} - Y_F\}$$

$$\mathrm{d}E_F/\mathrm{dt} = \{Y_F + \mathrm{K_F} - E_F\}$$

Οι δέκα μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις αποδίδουν τις διαφοροποιήσεις των **ενδογενών μεταβλητών** (δηλαδή των εισοδημάτων και των δαπανών των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών) ως συναρτήσεις των **εξωγενών παραμέτρων** (δηλαδή των αγοραίων συμπεριφορών, των χρηματοπιστωτικών πράξεων και των συναλλαγματικών ισοτιμιών) σε αμφότερες τις χώρες. Σύμφωνα με την ισχύουσα σημειολογία, οι τομεακές χρηματικές ροές καταγράφονται σε *ΔΛΜ* (Y_{ij}, E_{ij}) και στα επιτόπια νομίσματα (y_{ij}, e_{ij}), i = 1, 2, $j = h, b, f$, όπως φαίνεται στο κατωτέρω παράδειγμα:

$$Y_{1H1W} = \alpha_{1h1w} \cdot Y_{1H} = \alpha_{1h1w} \cdot \xi_1 \cdot y_{1h}$$

$$E_{2B1S} = \beta_{2b1s} \cdot E_{2B} = \beta_{2b1s} \cdot \xi_2 \cdot e_{2b}$$

Πίνακας ***XI₂***

Η Ποσοστιαία Κατανομή της Παγκόσμιας Ζήτησης Εσόδων και Προσφοράς Εξόδων

ΤΟΜΕΑΣ ΡΟΕΣ	ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ ΧΩΡΑ ΕΝΑ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΧΩΡΑ ΕΝΑ		ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ ΧΩΡΑ ΔΥΟ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΧΩΡΑ ΔΥΟ		ΤΡΑΠΕΖΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ	
	Y_{1H}	E_{1H}	Y_{1B}	E_{1B}	Y_{2H}	E_{2H}	Y_{2B}	E_{2B}	Y_F	E_F
ΑΓΑΘΟ	**Εργασία**									
Y_{1W}	α_{1h1w}	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E_{1W}	-	-	-	β_{1b1w}	-	β_{2h1w}	-	β_{2b1w}	-	β_{f1w}
Y_{2W}	-	-	-		α_{2h2w}	-	-	-	-	-
E_{2W}	-	β_{1h2w}	-	β_{1b2w}	-	-	-	β_{2b2w}	-	β_{f2w}
ΑΓΑΘΟ	**Παραγωγή**									
Y_{1U}	-	-	α_{1b1u}		-	-		-	-	-
E_{1U}	-	β_{1h1u}	-		-	β_{2h1u}	-	β_{2b1u}	-	β_{f1u}
Y_{2U}	-	-	-		-	-	α_{2b2u}	-	-	-
E_{2U}	-	β_{1h2u}	-	β_{1b2w}	-	β_{2h2u}	-	-	-	β_{f2u}
ΑΓΑΘΟ	**Ρευστότητα**									
Y_{FS}	α_{1hfs}	-	α_{1bfs}		α_{2hfs}	-	α_{2bfs}	-	α_{fs}	-
E_{FS}	-	β_{1hfs}	-	β_{1bfs}	-	β_{2hfs}	-	β_{2bfs}	-	β_{fs}

Οι συναλλαγματικές ισοτιμίες ξ_i (*ΔΛΜ* ανά εθνική λογιστική μονάδα) είναι οι βαθμωτοί αριθμοί, που καθιστούν εφικτές τις συγκρίσεις ανάμεσα στις εισπράξεις και πληρωμές στα παζάρια αγαθών, καθώς επίσης τις πιστώσεις και χρεώσεις στους τραπεζικούς ισολογισμούς των δύο νομισματικών περιοχών. Η αυτονομία μισθών, τιμών και αξιών αποτελεί μια από τις 12 αξιωματικές προτάσεις της Ευκλείδειας μεθοδολογίας.

XI.3 Παράδειγμα Προσομοίωσης της Παγκόσμιας Οικονομίας

Στον ακόλουθο Πίνακα παρουσιάζονται τα κλάσματα των εσόδων και των εξόδων των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των χρηματοπιστωτών τα οποία, σύμφωνα με τη στατιστική έρευνα, πηγάζουν από και προορίζονται προς τα παζάρια εργασίας, παραγωγής και ρευστότητας της Χώρας **Ένα** και του υπόλοιπου κόσμου (Χώρα **Δύο**):

Πίνακας XI_3
Παράδειγμα Κατανομής της Παγκόσμιας Ζήτησης Εσόδων και Προσφοράς Εξόδων

ΤΟΜΕΑΣ ΡΟΕΣ	ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ ΧΩΡΑ ΕΝΑ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΧΩΡΑ ΕΝΑ		ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ ΧΩΡΑ ΔΥΟ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΧΩΡΑ ΔΥΟ		ΤΡΑΠΕΖΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ	
	Y_{1H}	E_{1H}	Y_{1B}	E_{1B}	Y_{2H}	E_{2H}	Y_{2B}	E_{2B}	Y_F	E_F
ΑΓΑΘΟ	**Εργασία**									
Y_{1W}	$^{7}/_{10}$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E_{1W}	-	-	-	$^{4}/_{16}$	-	$^{5}/_{15}$	-	$^{2}/_{16}$	-	$^{\eta}/_{10}$
Y_{2W}	-	-	-	-	$^{5}/_{8}$	-		-	-	-
E_{2W}	-	$^{1}/_{12}$	-	$^{3}/_{16}$	-	-	-	$^{6}/_{16}$	-	$^{2\eta}/_{10}$
ΑΓΑΘΟ	**Παραγωγή**									
Y_{1U}	-	-	$^{4}/_{7}$	-	-	-		-	-	-
E_{1U}	-	$^{4}/_{12}$	-	-	-	$^{3}/_{15}$	-	$^{5}/_{16}$	-	$^{3\eta}/_{10}$
Y_{2U}	-	-	-	-	-	-	$^{5}/_{9}$	-	-	-
E_{2U}	-	$^{3}/_{12}$	-	$^{5}/_{16}$	-	$^{4}/_{15}$	-	-	-	$^{4\eta}/_{10}$
ΑΓΑΘΟ	**Ρευστότητα**									
Y_{FS}	$^{3}/_{10}$	-	$^{3}/_{7}$	-	$^{3}/_{8}$	-	$^{4}/_{9}$	-	1	-
E_{FS}	-	$^{4}/_{12}$	-	$^{4}/_{16}$	-	$^{3}/_{15}$	-	$^{3}/_{16}$	-	1-η

Στο Παράρτημα **XI** αποδεικνύουμε ότι, αντικαθιστώντας τα σύμβολα του διεθνούς μοντέλου **116** με τα ποσοστά που παρατάσσονται στον Πίνακα XI_3, λαμβάνουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων **118**, το οποίο έχει τη γενική μορφή $\mathbf{dX/dt = \Delta \cdot X - K_F}$. Συνεπώς, με τη βοήθεια του λογισμικού *Mathematica*, μπορούμε να διερευνήσουμε τις επιδράσεις κάθε συντελεστή αγοραίας συμπεριφοράς, παραμέτρου νομισματικής πολιτικής και τρέχουσας συναλλαγματικής ισοτιμίας στα στοιχεία των διανυσμάτων στατικής ισορροπίας ${}^{*}\mathbf{X}({}^{*}Y_{1H}, {}^{*}E_{1H}, {}^{*}Y_{2H}, {}^{*}E_{2H}, {}^{*}Y_{1B}, {}^{*}E_{1B}, {}^{*}Y_{2B}, {}^{*}E_{2B}, {}^{*}Y_F, {}^{*}E_F)$ και δυναμικής σταθερότητας $\mathbf{RH(rh_1, rh_2, ..., rh_{10})}$ της παγκόσμιας οικονομίας, στην οποία έχουμε δώσει την ονομασία **Δέλτα**, όπως πράξαμε στις περιπτώσεις τής **Άλφα** (**20**) και τής **Βήτα** (**87**).

Το ακόλουθο μαθηματικό υπόδειγμα αναπαριστάνει, σε *ΔΛΜ*, τις διακυμάνσεις των χρηματικών ροών των πέντε θεσμικών τομέων, που συναποτελούν το παγκόσμιο σύμπλεγμα συναλλαγών με την ονομασία **Δέλτα**:

$$dY_{1H}/dt = \{-Y_{1H} - {}^{3}/_{8}\cdot Y_{2H} + {}^{1}/_{3}\cdot E_{2H} - {}^{3}/_{7}\cdot Y_{1B} + {}^{1}/_{4}\cdot E_{1B} -$$
$$- {}^{4}/_{9}\cdot Y_{2B} + {}^{1}/_{8}\cdot E_{2B} + (1 - {}^{9\eta}/_{10})\cdot E_{F}\}$$

$$dE_{1H}/dt = \{Y_{1H} - K_{1H} - E_{1H}\}$$

$$dY_{2H}/dt = \{-{}^{3}/_{10}\cdot Y_{1H} + {}^{1}/_{12}\cdot E_{1H} - Y_{2H} - {}^{3}/_{7}\cdot Y_{1B} + {}^{3}/_{16}\cdot E_{1B} -$$
$$- {}^{4}/_{9}\cdot Y_{2B} + {}^{3}/_{8}\cdot E_{2B} + (1 - {}^{4\eta}/_{5})\cdot E_{F}\}$$

$$dE_{2H}/dt = \{Y_{2H} - K_{2H} - E_{2H}\}$$

$$dY_{1B}/dt = \{-{}^{3}/_{10}\cdot Y_{1H} + {}^{1}/_{3}\cdot E_{1H} - {}^{3}/_{8}\cdot Y_{2H} + {}^{1}/_{5}\cdot E_{2H} - Y_{1B} -$$

$$- {}^{4}/_{9}\cdot Y_{2B} + {}^{5}/_{16}\cdot E_{2B} + (1 - {}^{7\eta}/_{10})\cdot E_{F}\}$$

$$dE_{1B}/dt = \{Y_{1B} - K_{1B} - E_{1B}\}$$

$$dY_{2B}/dt = \{-{}^{3}/_{10}\cdot Y_{1H} + {}^{1}/_{4}\cdot E_{1H} - {}^{3}/_{8}\cdot Y_{2H} + {}^{4}/_{15}\cdot E_{2H} - {}^{3}/_{7}\cdot Y_{1B} + {}^{5}/_{16}\cdot E_{1B} -$$
$$- Y_{2B} + (1 - {}^{3\eta}/_{5})\cdot E_{F}\}$$

$$dE_{2B}/dt = \{Y_{2B} - K_{2B} - E_{2B}\}$$

$$dY_{F}/dt = \{{}^{1}/_{3}\cdot E_{1H} + {}^{1}/_{5}\cdot E_{2H} + {}^{1}/_{4}\cdot E_{1B} + {}^{3}/_{16}\cdot E_{2B} - Y_{F}\}$$

$$dE_{F}/dt = \{Y_{F} + K_{F} - E_{F}\}$$

Το απορρέον στατικό διάνυσμα $^{*}\mathbf{X}$ είναι κατευθυνόμενο, νοουμένου ότι:

- συνίσταται από μοναδικές, σταθερές και θετικές χρηματικές ροές και
- οι νομισματικές αρχές αμφότερων των χωρών ενεργούν συντονισμένα.

Με δεδομένους τους άλλους συντελεστές αγοραίας συμπεριφοράς, κάθε ποσοστό εισπράξεων α_{ij} ή πληρωμών β_{ij} χαρακτηρίζεται από ορισμένα όρια, έξω από τα οποία το $^{*}\mathbf{X}$ δεν πηδαλιουχείται. Στην περίπτωση του διεθνούς μοντέλου **118**, θα αναζητήσουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη αναλογία η, $0 < \eta < 1$, όπου τα τομεακά ζεύγη εσόδων και εξόδων $\{(^{*}Y_{1H}, {}^{*}E_{1H}), (^{*}Y_{2H}, {}^{*}E_{2H}), (^{*}Y_{1B}, {}^{*}E_{1B}), (^{*}Y_{2B}, {}^{*}E_{2B}), (^{*}Y_{F}, {}^{*}E_{F})\}$ παραμένουν μοναδικά, σταθερά και δεξιόστροφα και, συνεπώς, κατευθυνόμενα από τις αρμόδιες αρχές.

Στην κατάσταση ισορροπίας, τα έσοδα και έξοδα των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών δίδονται από τη λύση τού χρονικά αμετάβλητου συστήματος $\mathbf{\Delta} \cdot {}^{*}\mathbf{X} = \mathbf{K_F}$, νοουμένου ότι ο πίνακας $\mathbf{\Delta}$ είναι μη-ιδιάζων ($|\mathbf{\Delta}| \neq 0$).

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -{}^{3}/_{8} & {}^{1}/_{3} & -{}^{3}/_{7} & {}^{1}/_{4} & -{}^{4}/_{9} & {}^{1}/_{8} & 0 & 1-{}^{9\eta}/_{10} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^{3}/_{10} & {}^{1}/_{12} & -1 & 0 & -{}^{3}/_{7} & {}^{3}/_{16} & -{}^{4}/_{9} & {}^{3}/_{8} & 0 & 1-{}^{4\eta}/_{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^{3}/_{10} & {}^{1}/_{3} & -{}^{3}/_{8} & {}^{1}/_{5} & -1 & 0 & -{}^{4}/_{9} & {}^{5}/_{16} & 0 & 1-{}^{7\eta}/_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^{3}/_{10} & {}^{1}/_{4} & -{}^{3}/_{8} & {}^{4}/_{15} & -{}^{3}/_{7} & {}^{5}/_{16} & -1 & 0 & 0 & 1-{}^{3\eta}/_{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{3} & 0 & {}^{1}/_{5} & 0 & {}^{1}/_{4} & 0 & {}^{3}/_{16} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} {}^{*}Y_{1H} \\ {}^{*}E_{1H} \\ {}^{*}Y_{2H} \\ {}^{*}E_{2H} \\ {}^{*}Y_{1B} \\ {}^{*}E_{1B} \\ {}^{*}Y_{2B} \\ {}^{*}E_{2B} \\ {}^{*}Y_{1F} \\ {}^{*}E_{1F} \end{vmatrix} =$$

119

$$= \mathbf{\Delta} \cdot \mathbf{X} = \begin{vmatrix} 0 \\ \xi_1 \cdot k_{1f1h} + \xi_2 \cdot k_{2f1h} \\ 0 \\ \xi_1 \cdot k_{1f2h} + \xi_2 \cdot k_{2f2h} \\ 0 \\ \xi_1 \cdot k_{1f1b} + \xi_2 \cdot k_{2f1b} \\ 0 \\ \xi_1 \cdot k_{1f2b} + \xi_2 \cdot k_{2f2b} \\ 0 \\ -\xi_1 \cdot k_{1F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \{(1-\varphi) \cdot \kappa_{1f1h} + \varphi \cdot \kappa_{2f1h}\} \cdot K_{1F} \\ 0 \\ \{(1-\varphi) \cdot \kappa_{1f2h} + \varphi \cdot \kappa_{2f2h}\} \cdot K_{1F} \\ 0 \\ \{(1-\varphi) \cdot \kappa_{1f1b} + \varphi \cdot \kappa_{2f1b}\} \cdot K_{1F} \\ 0 \\ \{(1-\varphi) \cdot \kappa_{1f2b} + \varphi \cdot \kappa_{2f2b}\} \cdot K_{1F} \\ 0 \\ -K_{1F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ K_{1H} \\ 0 \\ K_{2H} \\ 0 \\ K_{1B} \\ 0 \\ K_{2B} \\ 0 \\ -K_{1F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mu_{1H} \\ 0 \\ \mu_{2H} \\ 0 \\ \mu_{1B} \\ 0 \\ \mu_{2B} \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \cdot K_F = \mathbf{K_F}$$

Η ετήσια αύξηση (K_F) του παγκόσμιου τραπεζικού παθητικού μοιράζεται, ποικιλοτρόπως, ως ενεργητικό ($\mu_{1H} + \mu_{2H} + \mu_{1B} + \mu_{2B} = 1$) των τεσσάρων μη-εκδοτικών τομέων της διεθνούς οικονομίας. Το διάνυσμα $\mathbf{K_F}$ (που αναπαριστάνει την κατανομή της μεταβολής του διεθνούς νομισματικού ισολογισμού) μετατρέπεται γραμμικά μέσω του πίνακα $\mathbf{\Delta}$ (που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις των εισπράξεων από πωλήσεις και των πληρωμών για αγορές αγαθών) στο ενδογενές διάνυσμα ${}^{*}\mathbf{X}$ (το οποίο συνίσταται από τις χρηματικές ροές των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών της διεθνούς οικονομίας).

Στις εξισώσεις **119** βλέπουμε ότι (δεδομένων των συναλλαγματικών ισοτιμιών ξ_i, $i = 1, 2$) τα εθνικά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, αυξάνοντας το τραπεζικό παθητικό στο νόμισμά τους, κατανέμουν το αντίστοιχο ενεργητικό ($k_{if1h} + k_{if1b} + k_{if2h} + k_{if2b}$) ανάμεσα στους μη-εκδοτικούς τομείς της παγκόσμιας οικονομίας κάθε χρόνο. Οι θεσμικές διευθετήσεις, σύμφωνα με τις οποίες ελέγχεται το παγκόσμιο χρηματοπιστωτικό σύστημα, αναγκάζουν τους εθνικούς τραπεζικούς τομείς να περιορίζουν τις αυξήσεις των υποχρεώσεών τους μέσα στα πλαίσια που υπέδειξε η ΔΝΛ. Σε τελική ανάλυση, τα μερίδια των καταναλωτών και των παραγωγών (μ_{iH}, μ_{iB}) αμφότερων των χωρών στις αυξήσεις της διεθνούς ρευστότητας (K_F) καθορίζονται συλλογικά από το παγκόσμιο χρηματοπιστωτικό σύστημα και όχι ξεχωριστά από τους εθνικούς τραπεζικούς τομείς. Έκαστη νομισματική αρχή απολαμβάνει το δικαίωμα να διαφοροποιεί τους παράγοντες (ξ_i και k_{if1h}, k_{if2h}, k_{if1b}, k_{if2b}) που ελέγχει, νοουμένου ότι το γινόμενό τους $\xi_i \cdot (k_{if1h} + k_{if1b} + k_{if2h} + k_{if2b}) = \xi_i \cdot k_{if} = K_{iF}$ παραμένει μέσα στο όριο (1-φ ή φ), που καθόρισε η ΔΝΛ.

XI.4 Δυναμικές και Στατικές Ιδιότητες του Μοντέλου

Οι συγκρίσεις στατικών ισορροπιών $^*\mathbf{X}$ έχουν πρακτικό νόημα, όταν το δυναμικό σύστημα $\mathbf{dX/dt = \Delta \cdot X - K_F}$ είναι σφαιρικά σταθερό. Το σύμπλεγμα συναλλαγών **118** χαρακτηρίζεται από σφαιρική σταθερότητα αν, και μόνο αν, οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz, οι οποίες αποτελούνται από συντελεστές του πολυώνυμου ιδιοτιμών $\left| \mathbf{\Delta - \lambda \cdot I} \right|$, είναι μεγαλύτερες από το μηδέν. Το εν λόγω πολυώνυμο ισούται με την ορίζουσα του χαρακτηριστικού πίνακα της οικονομίας **Δέλτα**:

120

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3/8 & 1/3 & -3/7 & 1/4 & -4/9 & 1/8 & 0 & 1-9\eta/10 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/10 & 1/12 & -1-\lambda & 0 & -3/7 & 3/16 & -4/9 & 3/8 & 0 & 1-4\eta/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/10 & 1/3 & -3/8 & 1/5 & -1-\lambda & 0 & -4/9 & 5/16 & 0 & 1-7\eta/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/10 & 1/4 & -3/8 & 4/15 & -3/7 & 5/16 & -1-\lambda & 0 & 0 & 1-3\eta/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/5 & 0 & 1/4 & 0 & 3/16 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \left| \mathbf{\Delta} - \lambda \cdot \mathbf{I} \right| = \boldsymbol{\delta}_0 \cdot \lambda^{10} + \boldsymbol{\delta}_1 \cdot \lambda^9 + \boldsymbol{\delta}_2 \cdot \lambda^8 + \boldsymbol{\delta}_3 \cdot \lambda^7 + \boldsymbol{\delta}_4 \cdot \lambda^6 +$$

120

$$+ \boldsymbol{\delta}_5 \cdot \lambda^5 + \boldsymbol{\delta}_6 \cdot \lambda^4 + \boldsymbol{\delta}_7 \cdot \lambda^3 + \boldsymbol{\delta}_8 \cdot \lambda^2 + \boldsymbol{\delta}_9 \cdot \lambda + \boldsymbol{\delta}_{10}$$

Στο Παράρτημα **XI** υπολογίσαμε τους συντελεστές $\boldsymbol{\delta}_i$, i = 0,…, 10, ως εξής:

$$\boldsymbol{\delta}_0 = 1 \;\; ; \;\; \boldsymbol{\delta}_1 = 10 \;\; ; \;\; \boldsymbol{\delta}_2 = {}^{25609305600}/_{580608000} \;\; ;$$

$$\boldsymbol{\delta}_3 = {}^{66480302400}/_{580608000} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\delta}_4 = {}^{13440\,(8388461 + 32292\,\eta)}/_{580608000} \; ;$$

121 $$\boldsymbol{\delta}_5 = {}^{4\,(32583360125 + 5300746272\,\eta)}/_{580608000} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\delta}_6 = {}^{8(12936677615 + 574473384\,\eta)}/_{580608000}$$

$$\boldsymbol{\delta}_7 = {}^{(55139883180 + 5586304646\,\eta)}/_{580608000} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\delta}_8 = {}^{(18416267810 + 4018483239\,\eta)}/_{580608000} \;\; ;$$

$$\boldsymbol{\delta}_9 = {}^{4\,(817724725 + 406019374\,\eta)}/_{580608000} \;\; ; \;\; \boldsymbol{\delta}_{10} = {}^{3\,(59918270 + 97166093\,\eta)}/_{580608000} = \left| \Delta \right| \;\; ;$$

Οι συντελεστές $\boldsymbol{\delta}_i$ του ανωτέρω πολυώνυμου ιδιοτιμών αποτελούν τα στοιχεία των Οριζουσών Routh-Hurwitz $\mathbf{rh}_i$, i = 1,..., 10, που είναι οι ελάσσονες του ακόλουθου πίνακα:

Πίνακας ***XI₄***
Οι Συνθήκες τών Routh-Hurwitz

$\boldsymbol{\delta}_1$	$\boldsymbol{\delta}_0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{\delta}_3$	$\boldsymbol{\delta}_2$	$\boldsymbol{\delta}_1$	$\boldsymbol{\delta}_0$	0	0	0	0	0	0
$\boldsymbol{\delta}_5$	$\boldsymbol{\delta}_4$	$\boldsymbol{\delta}_3$	$\boldsymbol{\delta}_2$	$\boldsymbol{\delta}_1$	$\boldsymbol{\delta}_0$	0	0	0	0
$\boldsymbol{\delta}_7$	$\boldsymbol{\delta}_6$	$\boldsymbol{\delta}_5$	$\boldsymbol{\delta}_4$	$\boldsymbol{\delta}_3$	$\boldsymbol{\delta}_2$	$\boldsymbol{\delta}_1$	$\boldsymbol{\delta}_0$	0	0
$\boldsymbol{\delta}_9$	$\boldsymbol{\delta}_8$	$\boldsymbol{\delta}_7$	$\boldsymbol{\delta}_6$	$\boldsymbol{\delta}_5$	$\boldsymbol{\delta}_4$	$\boldsymbol{\delta}_3$	$\boldsymbol{\delta}_2$	$\boldsymbol{\delta}_1$	$\boldsymbol{\delta}_0$
0	$\boldsymbol{\delta}_{10}$	$\boldsymbol{\delta}_9$	$\boldsymbol{\delta}_8$	$\boldsymbol{\delta}_7$	$\boldsymbol{\delta}_6$	$\boldsymbol{\delta}_5$	$\boldsymbol{\delta}_4$	$\boldsymbol{\delta}_3$	$\boldsymbol{\delta}_2$
0	0	0	$\boldsymbol{\delta}_{10}$	$\boldsymbol{\delta}_9$	$\boldsymbol{\delta}_8$	$\boldsymbol{\delta}_7$	$\boldsymbol{\delta}_6$	$\boldsymbol{\delta}_5$	$\boldsymbol{\delta}_4$
0	0	0	0	0	$\boldsymbol{\delta}_{10}$	$\boldsymbol{\delta}_9$	$\boldsymbol{\delta}_8$	$\boldsymbol{\delta}_7$	$\boldsymbol{\delta}_6$
0	0	0	0	0	0	0	$\boldsymbol{\delta}_{10}$	$\boldsymbol{\delta}_9$	$\boldsymbol{\delta}_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\boldsymbol{\delta}_{10}$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών $\boldsymbol{\delta}_i$ στις 10 ελάσσονες του Πίνακα ***XI₄***, λαμβάνουμε τις Συνθήκες τών Routh-Hurwitz για το διεθνές σύμπλεγμα συναλλαγών **118**. Στο Παράρτημα **XI** αποδεικνύουμε ότι οι Ορίζουσες $\mathbf{rh}_i$, i = 1,..., 10 έχουν θετικά πρόσημα για όλες τις αναλογίες $0 < \eta < 1$. Συνεπώς, η στοιχειώδης παγκόσμια οικονομία, που απεικονίζεται από το Ευκλείδειο μαθηματικό μοντέλο **118**, είναι σφαιρικά σταθερή.

Αυτό σημαίνει ότι η **Δέλτα** επιστρέφει στο διάνυσμα ${}^{*}\mathbf{X}$ μετά από κάθε τροποποίηση των παραμέτρων πολιτικής $\mathbf{\Pi}(\xi_1, \xi_2; k_{1f1h}, k_{1f2h}, k_{1f1b}, k_{1f2b}; k_{2f1h}, k_{2f2h}, k_{2f1b}, k_{2f2b}; k_{1f}, k_{2f}) = \mathbf{\Pi}(K_F, \mu_{1H}, \mu_{2H}, \mu_{1B}, \mu_{2b})$ ή / και κλονισμό των αρχικών ροών ${}^{0}\mathbf{X}({}^{0}Y_{1H}, {}^{0}E_{1H}; {}^{0}Y_{2H}, {}^{0}E_{2H}; {}^{0}Y_{1B}, {}^{0}E_{1B}; {}^{0}Y_{2B}, {}^{0}E_{2B}; {}^{0}Y_{F}, {}^{0}E_{F})$. Όμως, οι στατικές εισπράξεις και πληρωμές $({}^{*}Y_{1H}, {}^{*}E_{1H}; {}^{*}Y_{2H}, {}^{*}E_{2H}; {}^{*}Y_{1B}, {}^{*}E_{1B}; {}^{*}Y_{2B}, {}^{*}E_{2B}; {}^{*}Y_{F}, {}^{*}E_{F})$ των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των τραπεζιτών δεν είναι απαραίτητα μεγαλύτερες από το μηδέν και, άρα, ταυτόχρονα πηδαλιουχούμενες. Ως γνωστόν, τα (ετήσια) εισοδήματα και δαπάνες των θεσμικών τομέων αμφότερων των χωρών ή ζωνών $({}^{*}\mathbf{X} = \mathbf{\Delta}^{-1} \cdot \mathbf{K_F})$ είναι συναρτήσεις της (ετήσιας) αύξησης και της κατανομής του διεθνούς τραπεζικού ισολογισμού:

$$K_F = (\xi_1 \cdot k_{1f1h} + \xi_2 \cdot k_{2f1h}) + (\xi_1 \cdot k_{1f2h} + \xi_2 \cdot k_{2f2h}) + (\xi_1 \cdot k_{1f1b} + \xi_2 \cdot k_{2f1b}) + (\xi_1 \cdot k_{1f2b} + \xi_2 \cdot k_{2f2b}) =$$

122

$$= \xi_1 \cdot k_{1f} + \xi_2 \cdot k_{2f} = K_F \cdot (\mu_{1H} + \mu_{2H} + \mu_{1B} + \mu_{2B}) = \varphi \cdot K_F + (1\text{-}\varphi) \cdot K_F = K_{1F} + K_{2F}$$

Ως επιστήμονες οικονομολόγοι ενδιαφερόμαστε, κυρίως, για τα όρια των μεριδίων μ_{iH}, μ_{iB}, $i = 1, 2$, των καταναλωτών και των παραγωγών των δύο χωρών στη διεθνή προσφορά χρήματος (K_F), τα οποία καταλήγουν σε θετικά έσοδα και έξοδα για όλους ανεξαίρετα τους εμπλεκόμενους τομείς. **Μεσοπρόθεσμα**, η παγκόσμια ρευστότητα μπορεί να μοιράζεται αυθαίρετα ως παθητικό ανάμεσα στα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα και ως ενεργητικό ανάμεσα στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις των δύο περιοχών. **Μακροχρόνια**, όμως, τα εθνικά τραπεζικά ιδρύματα ενδιαφέρονται για την ποιότητα των χαρτοφυλακίων τους και τη συγκράτηση του πληθωρισμού στις διάφορες χώρες. Συνεπώς, μεριμνούν, μεταξύ άλλων, όπως το νέο χρήμα κατανέμεται ανάμεσα στους μη-εκδοτικούς τομείς με τον πιο εξασφαλισμένο και παραγωγικό τρόπο, δηλαδή σύμφωνα με τις δυνητικές αυξήσεις της προσφοράς υπηρεσιών και της προσφοράς προϊόντων σε κάθε χώρα.

Σχετικά επαναλαμβάνεται ότι ένα σύστημα ανισοτήτων, το οποίο περιέχει πέραν των δύο εξωγενών μεταβλητών σε αλγεβρική μορφή, δεν λύνεται με τρόπον που είναι άμεσα χρήσιμος. Η λύση περιπλέκεται όσο περισσότερες είναι οι παράμετροι, οι οποίες αφέθηκαν στο σύστημα ως αλγεβρικά σύμβολα, αφού τα όρια έκαστης εξωγενούς μεταβλητής, μέσα στα οποία λύνεται το σύστημα ανισοτήτων, είναι αμφότερα συναρτήσεις των υπόλοιπων παραμέτρων. Επομένως, το γενικό πρόβλημα θα πρέπει να εξειδικεύεται ώστε, κάθε φορά, να εξευρίσκονται τα όρια μόνο μίας εξωγενούς μεταβλητής, εντός των οποίων επιλύεται το σύστημα ανισοτήτων, δεδομένων όλων των άλλων παραμέτρων.

Οι στατικές ροές ($^{*}Y_{1H}$, $^{*}E_{1H}$, $^{*}Y_{2H}$, $^{*}E_{2H}$, $^{*}Y_{1B}$, $^{*}E_{1B}$, $^{*}Y_{2B}$, $^{*}E_{2B}$, $^{*}Y_{F}$, $^{*}E_{F}$) υπολογίζονται ως συναρτήσεις οποιασδήποτε ετήσιας κατανομής του παγκόσμιου τραπεζικού παθητικού, νοουμένου ότι $(\mu_{1H} + \mu_{2H} + \mu_{1B} + \mu_{2B}) = 1$. Πιο κάτω, παραθέτουμε τα έσοδα και έξοδα των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών ως συναρτήσεις τών μ_{2H} και K_F, αφού υποθέσαμε ότι $\eta = {}^{1}/_{10}$, $\mu_{1H} = {}^{1}/_{8}$, $\mu_{1B} = {}^{2}/_{10}$ και λύσαμε το γραμμικό σύστημα **119** με τον Κανόνα τού Cramer:

Πίνακας ***XI*****5**

Οι Τομεακές Ροές της Παγκόσμιας Οικονομίας Δέλτα, όταν $\eta = {}^{1}/_{10}$, $\mu_{1H} = {}^{1}/_{8}$ και $\mu_{1B} = {}^{2}/_{10}$.

Έσοδα των Νοικοκυριών τής Ένα =

$^{*}Y_{1H} = -38\cdot(-10319048 + 3563925\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 890680979$

Έξοδα των Νοικοκυριών τής Ένα =

$^{*}E_{1H} = -3\cdot(-748769871 + 361144400\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 7125447832$

Έσοδα των Νοικοκυριών τής Δύο =

$^{*}Y_{2H} = 2\cdot(173406225 + 174625852\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 890680979$

Έξοδα των Νοικοκυριών τής Δύο =

$^{*}E_{2H} = -2175\cdot(-159454 + 248933\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 890680979$

Έσοδα των Επιχειρήσεων τής Ένα =

$^{*}Y_{1B} = 7\cdot(75652199 + 7201560\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 890680979$

Έξοδα των Επιχειρήσεων τής Ένα =

$^{*}E_{1B} = 3\cdot(1468324317 + 168036400\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 8906809790$

Έσοδα των Επιχειρήσεων τής Δύο =

$^{*}Y_{2B} = -9\cdot(-3538979333 + 1328557240\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 35627239160$

Έξοδα των Επιχειρήσεων τής Δύο =

$^{*}E_{2B} = 4\cdot(132490739 + 739694500\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 4453404895$

Έσοδα των Διεθνών Τραπεζιτών =

$^{*}Y_{F} = (585913317 - 59744000\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 1781361958$

Έξοδα των Διεθνών Τραπεζιτών =

$^{*}E_{F} = -25\cdot(-94691011 + 2389760\cdot\mu_{2H})\cdot K_F / 1781361958$

Στο Παράρτημα **XI** αποδεικνύουμε ότι, υπό τις συγκεκριμένες περιστάσεις, τα εισοδήματα και οι δαπάνες όλων των θεσμικών τομέων τής **Δέλτα** είναι θετικά, νοουμένου ότι το μερίδιο της διεθνούς προσφοράς ρευστότητας που κατανέμεται ανάμεσα στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις της Χώρας **Δύο**, κυμαίνεται μεταξύ $0 < (\mu_{2H} + \mu_{2B}) < {}^{54}/_{80}$. Αντικαθιστώντας $\mu_{2H} = {}^{14}/_{80}$ στις εξισώσεις του Πίνακα ***XI*****5**, λαμβάνουμε τις ετήσιες ροές

τής **Δέλτα** ως συναρτήσεις της αύξησης της διεθνούς ρευστότητας K_F, ως εξής:

$$^*Y = (^*Y_{1H} + {}^*Y_{2H} + {}^*Y_{1B} + {}^*Y_{2B} + {}^*Y_F) =$$

$$= \{0{,}413643 + 0{,}458 + 0{,}604467 + 0{,}4835269 + 0{,}323044\} \cdot K_F = \mathbf{c} \cdot K_F = (2{,}63442) \cdot K_F$$

123

$$^*E = (^*E_{1H} + {}^*E_{2H} + {}^*E_{1B} + {}^*E_{2B} + {}^*E_F) =$$

$$= \{0{,}288643 + 0{,}283 + 0{,}504467 + 0{,}235269 + 1{,}32304\} \cdot K_F = \mathbf{c} \cdot K_F = (2{,}63442) \cdot K_F$$

Συνεπώς, οι εισπράξεις και πληρωμές της παγκόσμιας οικονομίας ($^*Y$, $^*E$) κατανέμονται ανάμεσα στους καταναλωτές, τους παραγωγούς και τους τραπεζίτες αμφότερων των χωρών στις ακόλουθες (εκατοστιαίες) αναλογίες:

$$(^*y_{1h} + {}^*y_{2h} + {}^*y_{1b} + {}^*y_{2b} + {}^*y_f) = (15{,}7\% + 17{,}4\% + 22{,}\ 9\% + 31{,}7\% + 12{,}3\%) = 100\%$$

124

$$(^*e_{1h} + {}^*e_{2h} + {}^*e_{1b} + {}^*e_{2b} + {}^*e_f) = (11{,}0\% + 10{,}8\% + 19{,}1\% + 8{,}9\% + 50{,}2\%) = 100\%$$

Οι εισπράξεις και πληρωμές στα παζάρια εργασίας, παραγωγής και ρευστότητας υπολογίζονται από τις αντίστοιχες γραμμές του Πίνακα ***XI₃***, ως εξής:

$$^*W_{1H} = {}^1/_3 \cdot {}^*E_{2H} + {}^1/_4 \cdot {}^*E_{1B} + {}^1/_8 \cdot {}^*E_{2B} + {}^1/_{100} \cdot {}^*E_F$$

$$^*W_{2H} = {}^1/_{12} \cdot {}^*E_{1H} + {}^3/_{16} \cdot {}^*E_{1B} + {}^3/_8 \cdot {}^*E_{2B} + {}^1/_{50} \cdot {}^*E_F$$

125

$$^*U_{1B} = {}^1/_3 \cdot {}^*E_{1H} + {}^1/_5 \cdot {}^*E_{2H} + {}^5/_{16} \cdot {}^*E_{2B} + {}^3/_{100} \cdot {}^*E_F$$

$$^*U_{2B} = {}^1/_4 \cdot {}^*E_{1H} + {}^4/_{15} \cdot {}^*E_{2H} + {}^5/_{16} \cdot {}^*E_{1B} + {}^1/_{25} \cdot {}^*E_F$$

$$^*S_F = {}^1/_3 \cdot {}^*E_{1H} + {}^1/_5 \cdot {}^*E_{2H} + {}^1/_4 \cdot {}^*E_{1B} + {}^3/_{16} \cdot {}^*E_{2B} + {}^9/_{10} \cdot {}^*E_F$$

Στην προκείμενη περίπτωση, όπου $\eta = {}^1/_{10}$, $\mu_{1H} = {}^1/_8$, $\mu_{2H} = {}^{14}/_{80}$, $\mu_{1B} = {}^2/_{10}$ και $\mu_{2B} = ½$, οι ετήσιες αγοραπωλησίες ($^*R$) κατανέμονται ανάμεσα στα πέντε αγαθά της παγκόσμιας οικονομίας στις ακόλουθες (εκατοστιαίες) αναλογίες:

126 $(^*w_{1h} + {}^*w_{2h} + {}^*u_{1b} + {}^*u_{2b} + {}^*s_f) = (9{,}9\% + 8{,}9\% + 10{,}1\% + 13{,}6\% + 57{,}5\%) = 100\%$

Οι εξισώσεις **122**, **123**, **124** και **126** επιβεβαιώνουν ότι η αγοραία συμπεριφορά (**Δ**) των θεσμικών τομέων καθορίζει τις αναλογίες, ενώ η ετήσια μεταβολή (K_F) του τραπεζικού ισολογισμού καθορίζει τα μεγέθη των χρηματικών ροών ($^*\mathbf{X}$). Ο κύκλος εργασιών κάθε παζαριού, διαιρεμένος με το μισθό, τιμή ή αξία που αντιστοιχεί, αποδίδει τα έτη υπηρεσιών, τα τεμάχια προϊόντων ή τις μονάδες ομολόγων, που πωλούνται και

αγοράζονται εκεί. Επίσης, μέσω των Πινάκων ***XI₁***, ***XI₂*** και ***XI₃***, εύκολα υπολογίζονται:

- οι αγορές (πωλήσεις) των τομέων τής **Ένα** από (προς) τους τομείς τής **Δύο** και
- τα ισοζύγια υπηρεσιών και προϊόντων αμφότερων των νομισματικών ζωνών.

Για κάθε επισκοπούμενο ή προβαλλόμενο οικονομικό έτος, οι αγοραπωλησίες στα παζάρια ($^*W_{1H}$, $^*W_{2H}$, $^*U_{1B}$, $^*U_{2B}$, $^*S_F$) πρέπει να συγκρίνονται με τα αντίτιμα (p_{1W}, p_{2W}, p_{1U}, p_{2U}, p_{FS}) και τα αποθέματα (q_{1W}, q_{2W}, q_{1U}, q_{2U}, q_{FS}) των αγαθών, ώστε να επιμετρούνται τα τυχόν πραγματικά χάσματα και να αντλούνται συμπεράσματα για το δέον γενέσθαι. Μεσοπρόθεσμα, σύμφωνα με τις αξιωματικές προτάσεις, τα αντίτιμα και τα αποθέματα των υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων καθορίζονται από ανεξάρτητες και αυτόνομες διαδικασίες εκτός του συστήματος των χρηματικών ροών. Η Ευκλείδεια μεθοδολογία και το λογισμικό *Mathematica* προσφέρουν στους ενδιαφερομένους τα εργαλεία, για να διερευνήσουν τρόπους με τους οποίους, μακροχρόνια:

- αλληλεπηρεάζονται οι ισχύουσες τιμές και οι διαθέσιμες ποσότητες των αγαθών,
- συνδέονται τα συστήματα των αυτόνομων και των ενδογενών μεταβλητών.

XI.5 Η Επίδραση του Διεθνούς Τραπεζικού Ισολογισμού

Με τη βοήθεια τού *Mathematica*, εύκολα επίσης υπολογίζονται οι ποσοστιαίες ή άλλες μεταβολές των χρηματικών ροών των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των χρηματοπιστωτών της διεθνούς οικονομίας **Δέλτα**, οι οποίες προκαλούνται από ταυτόχρονη αύξηση του μεριδίου των (καθαρών) πιστώσεων προς ένα μη-εκδοτικό τομέα και μείωση του μεριδίου των (καθαρών) πιστώσεων προς άλλο μη-εκδοτικό τομέα, οποιουδήποτε συνδυασμού χωρών.

Πίνακας ***XI₆***
Διαφοροποίηση των Ροών τής Δέλτα μέσω Αύξησης τού μ_{2H} και Μείωσης τού μ_{2B}.

$\partial^* Y_{1H} / d\mu_{2H} = -0{,}1520 \cdot K_F$	$\partial^* E_{1H} / d\mu_{2H} = -0{,}1520 \cdot K_F$
$\partial^* Y_{2H} / d\mu_{2H} = 0{,}3921 \cdot K_F$	$\partial^* E_{2H} / d\mu_{2H} = -0{,}6078 \cdot K_F$
$\partial^* Y_{1B} / d\mu_{2H} = 0{,}0565 \cdot K_F$	$\partial^* E_{1B} / d\mu_{2H} = 0{,}0565 \cdot K_F$
$\partial^* Y_{2B} / d\mu_{2H} = -0{,}3356 \cdot K_F$	$\partial^* E_{2B} / d\mu_{2H} = 0{,}6643 \cdot K_F$
$\partial^* Y_F / d\mu_{2H} = -0{,}0335 \cdot K_F$	$\partial^* E_F / d\mu_{2H} = -0{,}0335 \cdot K_F$

Ο Πίνακας ***XI*$_6$** παραθέτει τις διαφοροποιήσεις των εσόδων και εξόδων των πέντε τομέων του μοντέλου **118**, που προκύπτουν (όταν $\eta = {}^{1}/_{10}$, $\mu_{1H} = {}^{1}/_{8}$, $\mu_{2H} = {}^{14}/_{80}$, $\mu_{1B} = {}^{2}/_{10}$, $\mu_{2B} = ½$) από την ταυτόχρονη αύξηση του μεριδίου των πιστώσεων (μ_{2H}) προς τους καταναλωτές της Χώρας **Δύο** και μείωση του μεριδίου των πιστώσεων (μ_{2B}) προς στους παραγωγούς της Χώρας **Δύο**. Γενικά, το διάνυσμα μεταβολής και κατανομής του τραπεζικού ισολογισμού της διεθνούς οικονομίας **Δέλτα**, αναλύεται και συντίθεται ως εξής:

127
$$\mathbf{K_F} = \begin{vmatrix} 0 \\ \xi_1 \cdot k_{1f1h} + \xi_2 \cdot k_{2f1h} \\ 0 \\ \xi_1 \cdot k_{1f2h} + \xi_2 \cdot k_{2f2h} \\ 0 \\ \xi_1 \cdot k_{1f1b} + \xi_2 \cdot k_{2f1b} \\ 0 \\ \xi_1 \cdot k_{1f2b} + \xi_2 \cdot k_{2f2b} \\ 0 \\ -\xi_1 \cdot k_{1F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \{(1-\varphi) \cdot \kappa_{1f1h} + \varphi \cdot \kappa_{2f1h}\} \cdot K_{1F} \\ 0 \\ \{(1-\varphi) \cdot \kappa_{1f2h} + \varphi \cdot \kappa_{2f2h}\} \cdot K_{1F} \\ 0 \\ \{(1-\varphi) \cdot \kappa_{1f1b} + \varphi \cdot \kappa_{2f1b}\} \cdot K_{1F} \\ 0 \\ \{(1-\varphi) \cdot \kappa_{1f2b} + \varphi \cdot \kappa_{2f2b}\} \cdot K_{1F} \\ 0 \\ -K_{1F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ K_{1H} \\ 0 \\ K_{2H} \\ 0 \\ K_{1B} \\ 0 \\ K_{2B} \\ 0 \\ -K_{1F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mu_{1H} \\ 0 \\ \mu_{2H} \\ 0 \\ \mu_{1B} \\ 0 \\ \mu_{2B} \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \cdot K_F$$

Τα ανωτέρω συστήματα αποτελούνται από τέσσερις εξισώσεις και οκτώ (γραμμικά εξαρτώμενες) παραμέτρους το καθένα. Έκαστο λύνεται με τον Κανόνα τού Cramer:

- δεδομένων των ποσοστών (μ_{1H}, μ_{2H}, μ_{1B}, μ_{2b}) της προσφοράς χρήματος (K_F), που μοίρασε το παγκόσμιο τραπεζικό σύστημα στους μη-εκδοτικούς τομείς και
- δεδομένων οποιωνδήποτε τεσσάρων παραμέτρων από τα σύνολα $\mathbf{\Pi}(\varphi;\ \kappa_{1f1h}, \kappa_{1f2h}, \kappa_{1f1b}, \kappa_{1f2b};\ \kappa_{2f1h}, \kappa_{2f2h}, \kappa_{2f1b})$ ή $\mathbf{\Pi}(\xi_2;\ k_{1f1h}, k_{1f2h}, k_{1f1b}, k_{1f2b};\ k_{2f1h}, k_{2f2h}, k_{2f1b})$,

αφού $\xi_1 = 1$, $0<\varphi<1$, $\kappa_{1f1h} + \kappa_{1f2h} + \kappa_{1f1b} + \kappa_{1f2b} = 1$ και $\kappa_{2f1h} + \kappa_{2f2h} + \kappa_{2f1b} + \kappa_{2f2b} = 1$. Παραδείγματος χάριν, αν υποθέσουμε ότι $\mu_{1H} = {}^{1}/_{8}$, $\mu_{2H} = {}^{14}/_{80}$, $\mu_{1B} = {}^{2}/_{10}$, $\mu_{2B} = ½$ και $K_F =$ \$100 000, τότε $K_F = (K_{1H} + K_{2H} + K_{1B} + K_{2B}) = (\$12\,500 + \$17\,500 + \$20\,000 + \$50\,000)$.

(i) Επιπλέον, εάν $\varphi = {}^{1}/_{2}$, $\kappa_{2f1h} = {}^{1}/_{4}$, $\kappa_{2f2h} = {}^{1}/_{4}$, $\kappa_{2h1b} = {}^{1}/_{4}$ και $\kappa_{2f2b} = {}^{1}/_{4}$, τότε:

128
$$\mu_{1H} = (1-\varphi) \cdot \kappa_{1f1h} + \varphi \cdot \kappa_{2f1h} = 1/8 + 1/2 \cdot \kappa_{2f1h} = 10/80 \ \Rightarrow\ \kappa_{2f1h} = 0/80$$

$$\mu_{2H} = (1-\varphi) \cdot \kappa_{1f2h} + \varphi \cdot \kappa_{2f2h} = 1/8 + 1/2 \cdot \kappa_{2f2h} = 14/80 \ \Rightarrow\ \kappa_{2f2h} = 8/80$$

$$\mu_{1B} = (1-\varphi) \cdot \kappa_{1f1b} + \varphi \cdot \kappa_{2f1b} = 1/8 + 1/2 \cdot \kappa_{2f1b} = 16/80 \ \Rightarrow\ \kappa_{2f1b} = 12/80$$

$$\mu_{2B} = (1-\varphi) \cdot \kappa_{1f2b} + \varphi \cdot \kappa_{2f2b} = 1/8 + 1/2 \cdot \kappa_{2f2b} = 40/80 \ \Rightarrow\ \kappa_{2f2b} = 60/80.$$

(ii) Επίσης, εάν $k_{1f1h} = \$5\,000$, $k_{1f2h} = \$10\,000$, $k_{1h1b} = \$15\,000$ και $k_{1f2b} = \$20\,000$, τότε:

$$\mu_{1H} \cdot K_F = \xi_1 \cdot k_{1f1h} + \xi_2 \cdot k_{2f1h} = \$4\,000 + \xi \cdot k_{2f1h} = \$12\,500 \;\Rightarrow\; \xi \cdot k_{2f1h} = \$8\,500$$

$$\mu_{2H} \cdot K_F = \xi_1 \cdot k_{1f2h} + \xi_2 \cdot k_{2f2h} = \$8\,000 + \xi \cdot k_{2f2h} = \$17\,500 \;\Rightarrow\; \xi \cdot k_{2f2h} = \$9\,500$$

129

$$\mu_{1B} \cdot K_F = \xi_1 \cdot k_{1f1b} + \xi_2 \cdot k_{2f1b} = \$12\,000 + \xi \cdot k_{2f1b} = \$20\,000 \;\Rightarrow\; \xi \cdot k_{2f1b} = \$8\,000$$

$$\mu_{2B} \cdot K_F = \xi_1 \cdot k_{1f2b} + \xi_2 \cdot k_{2f2b} = \$16\,000 + \xi \cdot k_{2f2b} = \$50\,000 \;\Rightarrow\; \xi \cdot k_{2f2b} = \$34\,000$$

όπου $\xi_1 = 1$ και $\xi_2 = \xi$. Από τα συστήματα **128** και **129**, φαίνεται ότι η ίδια μοιρασιά (μ_{1H}, μ_{2H}, μ_{1B}, μ_{2b}) της παγκόσμιας ρευστότητας (K_F) επιτυγχάνεται με άπειρους (γραμμικούς) συνδυασμούς πιστώσεων (**Π**) των εθνικών τραπεζικών ιδρυμάτων προς τα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις των δύο περιοχών. Επίσης, βλέπουμε ότι το μερίδιο **φ** και η ισοτιμία **ξ** διαδραματίζουν παρόμοιους ρόλους στα ανωτέρω συστήματα. Με δεδομένα τα διανύσματα (μ_{1H}, μ_{2H}, μ_{1B}, μ_{2b}) και (κ_{1f1h}, κ_{1f2h}, κ_{1f1b}, κ_{1f2b}) ή (k_{1f1h}, k_{1f2h}, k_{1f1b}, k_{1f2b}), όσο μεγαλύτερα (μικρότερα) είναι το **φ** και το **ξ**, τόσο μικρότερες (μεγαλύτερες) είναι οι πιστώσεις που (πρέπει να) χορηγούν τα τραπεζικά ιδρύματα της Χώρας **Δύο**, στο εθνικό νόμισμα, προς τους μη-εκδοτικούς τομείς της παγκόσμιας οικονομίας. Δηλαδή, η εξωγενής κατανομή της διεθνούς ρευστότητας συνεπάγεται ότι η συναλλαγματική ισοτιμία (μιας μονάδας) του νομίσματος της Χώρας **Δύο** (πρέπει να) είναι αντίστροφα ανάλογη με την ετήσια προσφορά χρήματος στην εν λόγω λογιστική μονάδα. Αυτό το συμπέρασμα μάς επαναφέρει στις θεμελιώδεις σχέσεις που (πρέπει να) επικρατούν, ώστε τα συναλλαγματικά χαρτοφυλάκια να ευρίσκονται σε ισορροπία.

Συναφώς, ας υποθέσουμε ότι το ετήσιο επιτόκιο είναι r_1 στη Χώρα **Ένα** και r_2 στη Χώρα **Δύο**. Λαμβάνοντας υπόψη ότι, για συγκριτικούς σκοπούς, όλα τα οικονομικά μεγέθη πρέπει να είναι εκφρασμένα σε *ΔΛΜ*, οι παρούσες αξίες των προαναφερθέντων μοναδιαίων ομολόγων είναι $(1/r_1)$ και (ξ / r_2), αντίστοιχα. Στη σταθερή ισορροπία, δηλαδή τη μόνη κατάσταση όπου είναι δυνατή η εξαγωγή συμπερασμάτων και η λήψη μέτρων, τα δύο είδη εγγυημένων χρεογράφων (πρέπει να) είναι παντελώς εναλλάξιμα. Ήτοι:

130 $$(1/r_1) = (\xi / r_2)$$

Μακροχρόνια, οποιαδήποτε προσπάθεια της χρηματοπιστωτικής αρχής της Χώρας **Δύο** να προσφέρει υψηλότερο (ή χαμηλότερο) επιτόκιο σε όσους επενδύουν (ή δανείζονται) σε ομόλογα που είναι εκφρασμένα στο δικό της νόμισμα (από ό,τι προσφέρεται στα ομόλογα

που είναι εκφρασμένα στο νόμισμα της Χώρας **Ένα**), είναι μάταιη, εξαιτίας της αναπόφευκτης υποτίμησης (ανατίμησης) του εθνικού της νομίσματος. Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως αρχή της Ακάλυπτης Ισοδυναμίας Επιτοκίων (Uncovered Interest Parity). Η επιλογή ανάμεσα σε χαμηλότερο (ή υψηλότερο) επιτόκιο ή υψηλότερη (ή χαμηλότερη) ισοτιμία εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, ανάμεσα στους οποίους είναι τα πλεονάσματα (ή ελλείμματα) ροών συναλλάγματος ή αποθεμάτων ρευστότητας που αντιλαμβάνεται ή αντιμετωπίζει η χρηματοπιστωτική αρχή της Χώρας **Δύο**.

Παρόμοιο συμπέρασμα αντλείται από τον ορισμό και την αύξηση της (διεθνούς) προσφοράς χρήματος έκαστης οικονομίας:

131

$$M_1 = k_1 / r_1 \quad => \quad (dM_1/dt)/M_1 = (dk_1/dt)/k_1 - (dr_1/dt)/r_1$$

$$M_2 = \xi \cdot k_2 / r_2 \quad => \quad (dM_2/dt)/M_2 = (dk_2/dt)/k_2 + (d\xi/dt)/\xi - (dr_2/dt)/r_2$$

Η προκαθορισμένη κατανομή της παγκόσμιας ρευστότητας (1-φ, φ) συνεπάγεται ότι:

132 $(dM_1/dt)/M_1 = (dM_2/dt)/M_2$

Συνεπώς, μη λαμβανομένου υπόψη του δυνητικού ρυθμού μεγέθυνσης (weighted employment and production gap) κάθε οικονομίας, το τραπεζικό σύστημα:

- της Χώρας **Ένα** μπορεί να επιταχύνει την έκδοση νέου χρήματος $(dk_1/dt)/k_1>0$ νοουμένου ότι, ταυτόχρονα, θα αυξήσει το προσφερόμενο επιτόκιο.
- της Χώρας **Δύο** μπορεί να επιταχύνει την έκδοση νέου χρήματος $(dk_2/dt)/k_2>0$ εάν, ταυτόχρονα, αυξήσει το επιτόκιο ή υποτιμήσει το νόμισμα.

Μεσοπρόθεσμα, οι σχέσεις **130**, **131** και **132** δεν τηρούνται αυτόματα, αφού οι προσφορές χρήματος, τα ετήσια επιτόκια και οι συναλλαγματικές ισοτιμίες είναι εξωγενή μεγέθη κάτω από τον έλεγχο και τις σκοπιμότητες των οικείων νομισματικών αρχών. Τέλος, πρέπει να τονιστεί ότι, **μακροχρόνια**, το μέγεθος μιας οικονομίας δεν περιορίζεται τόσο από το μερίδιό της στην ετήσια αύξηση των υποχρεώσεων του παγκόσμιου χρηματοπιστωτικού συστήματος όσο από την ποσότητα και την ποιότητα του ανθρώπινου δυναμικού και του φυσικού πλούτου που διαθέτει. Η Διεθνής Νομισματική Λέσχη λαμβάνει υπόψη τα δυνητικά χάσματα και τα ισχύοντα αντίτιμα των αγαθών, για να εγκρίνει τα μερίδια που επιδιώκουν οι διάφορες χώρες στην ετήσια αύξηση της παγκόσμιας ρευστότητας, K_F.

XI.6. Δύο Ανεξάρτητες Κλειστές Οικονομίες

Αρχικά, θα υποθέσουμε ότι ο κόσμος χωρίζεται σε δύο στοιχειώδεις οικονομίες ή νομισματικές ζώνες, την **Άλφα** και τη **Γάμμα**, οι οποίες δε συναλλάσσονται μεταξύ τους. Στο επόμενο στάδιο, οι κυρίαρχες κυβερνήσεις, αξιολογώντας τις δυνατότητες πραγματοποίησης εισοδημάτων και δαπανών από τους θεσμικούς τομείς αμφότερων των κρατών ή περιοχών, θα επιτρέψουν τις αγοραπωλησίες υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων μέσα στα πλαίσια του παγκόσμιου συστήματος εμπορίου και πληρωμών, που έχουμε περιγράψει. Η όλη άσκηση στοχεύει στο να μετρήσει και να συγκρίνει τα έσοδα και έξοδα των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών από τις δύο χώρες **πριν** και **μετά** την έναρξη του ανταγωνισμού και της συνεργασίας τους σε διεθνές επίπεδο. Σύμφωνα με τις αξιωματικές προτάσεις της Ευκλείδειας μεθοδολογίας, νοείται ότι:

- καθεμιά από τις εθνικές οικονομίες ξεχωρίζει από τις άλλες εξαιτίας των διαφορετικών κατανομών των ετήσιων εσόδων και εξόδων των συνιστώντων θεσμικών τομέων ανάμεσα στα παζάρια αγαθών.
- η διεθνής προσφορά και ζήτηση εργασίας, παραγωγής και ρευστότητας από τους θεσμικούς τομείς αμφότερων των χωρών αποτελεί προϋπόθεση για την ουσιαστική συνένωσή τους σε ενιαίο σύμπλεγμα συναλλαγών.

Οι θεσμικοί τομείς δεν πάσχουν από χρηματική αυταπάτη και, άρα, δεν λαμβάνουν υπόψη την περιοχή ή το νόμισμα των εγγυημένων χρεογράφων μετά την ενοποίηση των δύο οικονομιών. Με εξαίρεση τα προαναφερθέντα ομόλογα, οι εθνικοί θεσμικοί τομείς προτιμούν τα επιτόπια σε σύγκριση με τα ξένα αγαθά στην αναλογία α/(1-α) στην **Άλφα** και στην αναλογία γ/(1-γ) στη **Γάμμα**. Με δοσμένους τους αρχικούς συντελεστές των αγοραίων συμπεριφορών των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των χρηματοπιστωτών εκάστης χώρας, θα εντοπίσουμε τα όρια των ελαστικοτήτων αντικατάστασης α/(1-α) και γ/(1-γ), πέραν των οποίων αποσταθεροποιείται το νέο παγκόσμιο σύμπλεγμα συναλλαγών, στο οποίο έχουμε δώσει την ονομασία **Ζήτα**. Τέλος, για να διευκολύνουμε τη συζήτηση αναφορικά με τον καθορισμό των αντιτίμων των αγαθών σε διεθνές επίπεδο, θα υποθέσουμε ότι τα δύο κράτη ξεκινούν από:

- τις ίδιες ετήσιες αυξήσεις και τομεακές κατανομές των τραπεζικών πιστώσεων,
- τις ίδιες νομισματικές ισοτιμίες προς τη Διεθνή Λογιστική Μονάδα (*ΔΛΜ*),

- τα ίδια αποθέματα ετών εργασίας, τεμαχίων παραγωγής και μονάδων ρευστότητας.

(**i**) Από τη στατιστική έρευνα έχουν προκύψει τα ακόλουθα δεδομένα για την **Άλφα**:

Τα **καταναλωτικά νοικοκυριά** κατανέμουν τα (ετήσια) έσοδα και έξοδά τους ανάμεσα στις εφικτές πηγές και τους δυνητικούς προορισμούς, ως εξής:

Ποσοστό Εισοδήματος από:	Υπηρεσίες 8/9	Χρεόγραφα 1/9
Ποσοστό Δαπάνης για:	Προϊόντα 7/8	Χρεόγραφα 1/8

Οι **παραγωγικές επιχειρήσεις** κατανέμουν τα (ετήσια) έσοδα και έξοδά τους ανάμεσα στις εφικτές πηγές και τους δυνητικούς προορισμούς, ως ακολούθως:

Ποσοστό Εισοδήματος από:	Προϊόντα 6/7	Χρεόγραφα 1/7
Ποσοστό Δαπάνης για:	Υπηρεσίες 5/6	Χρεόγραφα 1/6

Τα **χρηματοπιστωτικά ιδρύματα**, λόγω θεσμικών προνομίων, απολαμβάνουν το 100% των εσόδων τους από εγγυημένα ομόλογα ενώ, για εξυπηρέτηση πραγματικών αναγκών και διαφόρων συμφερόντων, κατανέμουν τα (ετήσια) έξοδά τους, ως εξής:

Ποσοστό Δαπάνης για:	Χρεόγραφα $^{439}/_{3168}$	Υπηρεσίες 1/2	Προϊόντα $^{1145}/_{3168}$

Η **κεντρική και τα λοιπά τραπεζικά ιδρύματα**, μέσω των αγοραπωλησιών εγγυημένων χρεογράφων, κατανέμουν την ετήσια αύξηση του νομισματικού παθητικού ανάμεσα στους καταναλωτές και τους παραγωγούς, ως ακολούθως:

Ποσοστιαία Αναλογία:	Νοικοκυριά 1/2	Επιχειρήσεις 1/2

Σύμφωνα με την Ευκλείδεια μεθοδολογία, οι χρηματικές ροές των θεσμικών τομέων τής **Άλφα** προσομοιώνονται από το ακόλουθο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

133

$$\begin{vmatrix} dy_h/dt \\ de_h/dt \\ dy_b/dt \\ de_b/dt \\ dy_f/dt \\ de_f/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -^{1}/_{7} & ^{5}/_{6} & 0 & ^{2023}/_{3168} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -^{1}/_{9} & ^{7}/_{8} & -1 & 0 & 0 & ^{1584}/_{3168} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & ^{1}/_{8} & 0 & ^{1}/_{6} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_h \\ e_h \\ y_b \\ e_b \\ y_f \\ e_f \end{vmatrix} - k_A \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ ½ \\ 0 \\ ½ \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Το ανωτέρω μοντέλο έχει τη γενική μορφή $\mathbf{dX/dt = A \cdot X - K_A}$. Η λύση των σύγχρονων

εξισώσεων $\mathbf{X^A = A^{-1} \cdot K_A}$ αποδίδει τα έσοδα και έξοδα των καταναλωτών (y_h^A, e_h^A), των παραγωγών (y_b^A, e_b^A) και των τραπεζιτών (y_f^A, e_f^A) στην κατάσταση ισορροπίας, νοουμένου ότι ο πίνακας **A** είναι μη-ιδιάζων. Σε αυτήν την περίπτωση, $|\mathbf{A}| = {}^{253109}/_{1368576}$ και, άρα, $\mathbf{X^A} = k_A\cdot(0{,}59342,\ 0{,}09342;\ 0{,}52361,\ 0{,}02362;\ 0{,}01561,\ 1{,}01561)$. Οι συνολικές εισπράξεις και πληρωμές τής **Άλφα**, υπολογιζόμενες σε *ΔΜ*, ισούνται με $Y^A = \mathbf{1{,}13264}\cdot\xi_1\cdot k_A = E^A$.

Οι συγκρίσεις στατικών ισορροπιών έχουν πρακτικό νόημα, όταν το αντίστοιχο δυναμικό σύστημα είναι σφαιρικά σταθερό. Το σύμπλεγμα συναλλαγών **133** χαρακτηρίζεται από σφαιρική σταθερότητα αν, και μόνο αν, οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz, οι οποίες αποτελούνται από συντελεστές του πολυώνυμου ιδιοτιμών $\left|\ \mathbf{A} - \lambda\cdot\mathbf{I}\ \right|$, είναι μεγαλύτερες από το μηδέν. Στο Παράρτημα **XI** βλέπουμε ότι το εν λόγω πολυώνυμο ισούται με:

134 $$\left|\ \mathbf{A} - \lambda\cdot\mathbf{I}\ \right| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -{}^{1}/_{7} & {}^{5}/_{6} & 0 & {}^{2023}/_{3168} \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^{1}/_{9} & {}^{7}/_{8} & -1-\lambda & 0 & 0 & {}^{1584}/_{3168} \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{8} & 0 & {}^{1}/_{6} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^6 + 6\cdot\lambda^5 + ({}^{944}/_{63})\cdot\lambda^4 + ({}^{30473}/_{1512})\cdot\lambda^3 + ({}^{2601727}/_{177408})\cdot\lambda^2 + ({}^{11556863}/_{2395008})\cdot\lambda + ({}^{253109}/_{1368576})$$

$$= \mathbf{a_0}\cdot\lambda^6 + \mathbf{a_1}\cdot\lambda^5 + \mathbf{a_2}\cdot\lambda^4 + \mathbf{a_3}\cdot\lambda^3 + \mathbf{a_4}\cdot\lambda^2 + \mathbf{a_5}\cdot\lambda + \mathbf{a_6} = 0$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών $\mathbf{a_i}$, i = 0,.., 6 του ανωτέρω πολυωνύμου στις Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz υπολογίζουμε, με τη *Mathematica*, ότι $\mathbf{rh_1} = 6$, $\mathbf{rh_2} = 69{,}751$, $\mathbf{rh_3} = 906{,}766$, $\mathbf{rh_4} = 8733{,}36$, $\mathbf{rh_5} = 42141{,}9$ και $\mathbf{rh_6} = 0{,}184943$. Εφόσον όλες οι συνθήκες ικανοποιούνται, οι χρηματικές ροές των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών συγκλίνουν προς το $\mathbf{X^A}$ ανεξάρτητα από τις αρχικές τους τιμές. Συνεπώς, οι αγοραπωλησίες ετών εργασίας, τεμαχίων παραγωγής και μονάδων ρευστότητας (που καθορίζονται από την αντικατάσταση του $\mathbf{X^A}$ στις εξισώσεις **17**) τείνουν προς το διάνυσμα $\mathbf{R^A} = \{\rho_w^A, \rho_u^A, \rho_s^A\} = k_A\cdot\{0{,}52748,\ 0{,}44880,\ 0{,}15635\}$ μετά από οποιονδήποτε εξωτερικό κλονισμό τής **Άλφα**.

(**ii**) Η στατιστική έρευνα έχει αποδώσει τα ακόλουθα δεδομένα για την κλειστή οικονομία **Γάμμα**:

Τα **καταναλωτικά νοικοκυριά** κατανέμουν τα (ετήσια) έσοδα και έξοδά τους ανάμεσα στις εφικτές πηγές και τους δυνητικούς προορισμούς, ως εξής:

Ποσοστό Εισοδήματος από:	Υπηρεσίες 1/3	Χρεόγραφα 2/3
Ποσοστό Δαπάνης για:	Προϊόντα 1/4	Χρεόγραφα 3/4

Οι **παραγωγικές επιχειρήσεις** κατανέμουν τα (ετήσια) έσοδα και έξοδά τους ανάμεσα στις εφικτές πηγές και τους δυνητικούς προορισμούς, ως ακολούθως:

Ποσοστό Εισοδήματος από:	Προϊόντα 1/5	Χρεόγραφα 4/5
Ποσοστό Δαπάνης για:	Υπηρεσίες 1/6	Χρεόγραφα 5/6

Τα **χρηματοπιστωτικά ιδρύματα**, λόγω θεσμικών προνομίων, απολαμβάνουν το 100% των εσόδων τους από εγγυημένα ομόλογα ενώ, για εξυπηρέτηση πραγματικών αναγκών και διαφόρων συμφερόντων, κατανέμουν τα (ετήσια) έξοδά τους, ως εξής:

Ποσοστό Δαπάνης για:	Χρεόγραφα 18/24	Υπηρεσίες 4/24	Προϊόντα 2/24

Η **κεντρική και τα λοιπά τραπεζικά ιδρύματα**, μέσω των αγοραπωλησιών εγγυημένων χρεογράφων, κατανέμουν την ετήσια αύξηση του νομισματικού παθητικού ανάμεσα στους καταναλωτές και τους παραγωγούς, ως ακολούθως:

Ποσοστιαία Αναλογία:	Νοικοκυριά 1/2	Επιχειρήσεις 1/2

Σύμφωνα με την Ευκλείδεια μεθοδολογία, οι χρηματικές ροές των θεσμικών τομέων της **Γάμμα** προσομοιώνονται από το ακόλουθο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\mathbf{135} \qquad \begin{vmatrix} dy_h/dt \\ de_h/dt \\ dy_b/dt \\ de_b/dt \\ dy_f/dt \\ de_f/dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -{}^4/_5 & {}^1/_6 & 0 & {}^{11}/_{12} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^2/_3 & \frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 & {}^5/_6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & {}^5/_6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_h \\ e_h \\ y_b \\ e_b \\ y_f \\ e_f \end{vmatrix} - \mathrm{k}_\Gamma \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Το ανωτέρω μοντέλο έχει τη γενική μορφή $\mathbf{dX/dt = \Gamma \cdot X - K_\Gamma}$. Τα στατικά έσοδα και έξοδα των καταναλωτών (y_h^Γ, e_h^Γ), των παραγωγών (y_b^Γ, e_b^Γ) και των τραπεζιτών (y_f^Γ, e_f^Γ)

δίδονται από τη λύση των γραμμικών εξισώσεων $\mathbf{X}^{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{\Gamma}$, νοουμένου ότι ο πίνακας **Γ** είναι μη-ιδιάζων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, $|\mathbf{\Gamma}| = {}^{59}/_{864}$ και, άρα, $\mathbf{X}^{\Gamma} = k_{\Gamma}\cdot(0{,}574576,\ 0{,}0745763;\ 0{,}550847,\ 0{,}0508475;\ 0{,}0983051,\ 1{,}09831)$. Οι συνολικές εισπράξεις και πληρωμές τής **Γάμμα**, υπολογιζόμενες σε *ΔΛΜ*, ισούνται με $Y^{\Gamma} = \mathbf{1{,}22373}\cdot\xi_1\cdot k_{\Gamma} = E^{\Gamma}$.

Το σύμπλεγμα συναλλαγών **135** χαρακτηρίζεται από σφαιρική σταθερότητα αν, και μόνο αν, οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz, οι οποίες αποτελούνται από συντελεστές του πολυώνυμου ιδιοτιμών $\left|\ \mathbf{\Gamma} - \lambda\cdot\mathbf{I}\ \right|$, είναι μεγαλύτερες από το μηδέν. Στο Παράρτημα **XI** βλέπουμε ότι το εν λόγω πολυώνυμο ισούται με:

136 $$\left|\ \mathbf{\Gamma} - \lambda\cdot\mathbf{I}\ \right| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -{}^{4}/_{5} & {}^{1}/_{6} & 0 & {}^{11}/_{12} \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^{2}/_{3} & {}^{1}/_{4} & -1-\lambda & 0 & 0 & {}^{5}/_{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & {}^{3}/_{4} & 0 & {}^{5}/_{6} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^6 + 6\cdot\lambda^5 + ({}^{217}/_{15})\cdot\lambda^4 + ({}^{812}/_{45})\cdot\lambda^3 + ({}^{8143}/_{720})\cdot\lambda^2 + ({}^{3199}/_{1080})\cdot\lambda + ({}^{59}/_{864}) =$$

$$= \mathbf{g_0}\cdot\lambda^6 + \mathbf{g_1}\cdot\lambda^5 + \mathbf{g_2}\cdot\lambda^4 + \mathbf{g_3}\cdot\lambda^3 + \mathbf{g_4}\cdot\lambda^2 + \mathbf{g_5}\cdot\lambda + \mathbf{g_6} = 0$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των συντελεστών $\mathbf{g_i}$, i = 0,.., 6 του ανωτέρω πολυωνύμου στις Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz υπολογίζουμε, με το *Mathematica*, ότι $\mathbf{rh_1} = 6$, $\mathbf{rh_2} = 68{,}622$, $\mathbf{rh_3} = 858{,}022$, $\mathbf{rh_4} = 6983{,}81$, $\mathbf{rh_5} = 20686{,}3$ και $\mathbf{rh_6} = 0{,}68287$. Εφόσον όλες οι συνθήκες ικανοποιούνται, οι χρηματικές ροές των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των χρηματοπιστωτών συγκλίνουν προς το $\mathbf{X}^{\Gamma}$ ανεξάρτητα από τις αρχικές τους τιμές. Συνεπώς, οι αγοραπωλησίες ετών εργασίας, τεμαχίων παραγωγής και μονάδων ρευστότητας (που καθορίζονται από το $\mathbf{X}^{\Gamma}$ στις εξισώσεις **17**) τείνουν προς το διάνυσμα $\mathbf{R}^{\Gamma} = \{\rho_w^{\Gamma}, \rho_u^{\Gamma}, \rho_s^{\Gamma}\} = k_{\Gamma}\cdot\{0{,}191525, 0{,}110169, 0{,}922034\}$ μετά από οποιονδήποτε εξωτερικό κλονισμό τής **Γάμμα**.

Δεδομένου ότι οι συναλλαγματικές ισοτιμίες των νομισμάτων τής **Άλφα** και τής **Γάμμα** είναι $\xi_1 = \Delta\Lambda M/\$ = \xi_2 = \Delta\Lambda M/€$, συνάγεται ότι, σε *ΔΛΜ*, η ετήσια χρηματική ροή της παγκόσμιας οικονομίας ισούται με $Y^{A} + Y^{\Gamma} = \mathbf{1{,}1326}\cdot\xi_1\cdot k_A + \mathbf{1{,}2237}\cdot\xi_2\cdot k_{\Gamma} = E^{A} + E^{\Gamma}$, ενώ η ετήσια μεταβολή του παγκόσμιου τραπεζικού ισολογισμού ισούται με $K_F = \xi_1\cdot k_A + \xi_2\cdot k_{\Gamma}$. Μέχρις εδώ, δεν υπάρχει ούτε αλληλεπίδραση ούτε συντονισμός ανάμεσα στις δύο

οικονομίες, αφού αυτές λειτουργούν τελείως ξεχωριστά. Στη συνέχεια, θα υποθέσουμε ότι η **Άλφα** και η **Γάμμα** έχουν συμφωνήσει να αρχίσουν εμπόριο και πληρωμές στην ισοτιμία **1$ = 1€**. Σε αυτό το πλαίσιο, θα υπολογίσουμε τις συνθήκες σταθερότητας του διεθνούς πλέγματος συναλλαγών και τις τομεακές επιπτώσεις των διεθνών τραπεζικών αποφάσεων.

XI.7 Η Παγκοσμιοποίηση της Προσφοράς και Ζήτησης Αγαθών

Ο ακόλουθος πίνακας απεικονίζει τις κατανομές των τομεακών ροών ανάμεσα στα παζάρια αγαθών μετά το άνοιγμά των δύο κρατών στον ανταγωνισμό και τη συνεργασία σε διεθνές επίπεδο, λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ελαστικότητες αντικατάστασης τής επιτόπιας προς την ξένη εργασία και παραγωγή είναι α/(1-α) στην **Άλφα** και γ/(1-γ) στη **Γάμμα**.

Πίνακας ***XI*** $_7$
Παράδειγμα Κατανομής της Παγκόσμιας Ζήτησης Εσόδων και Προσφοράς Εξόδων

ΤΟΜΕΑΣ ΡΟΕΣ	ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ ΧΩΡΑ ΕΝΑ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΧΩΡΑ ΕΝΑ		ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ ΧΩΡΑ ΔΥΟ		ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ ΧΩΡΑ ΔΥΟ		ΤΡΑΠΕΖΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ	
	Y_{1H}	E_{1H}	Y_{1B}	E_{1B}	Y_{2H}	E_{2H}	Y_{2B}	E_{2B}	Y_F	E_F
ΑΓΑΘΟ	**Εργασία**									
Y_{1W}	$^8/_9$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
E_{1W}	-	-	-	$^{5\alpha}/_6$	-	-	-	$^{(1-\gamma)}/_6$	-	$^1/_4$
Y_{2W}	-	-	-	-	$^1/_3$	-		-	-	-
E_{2W}	-	-	-	$^{5(1-\alpha)}/_6$	-	-	-	$^\gamma/_6$	-	$^1/_{12}$
ΑΓΑΘΟ	**Παραγωγή**									
Y_{1U}	-	-	$^6/_7$	-	-	-		-	-	-
E_{1U}	-	$^{7\alpha}/_8$	-	-	-	$^{(1-\gamma)}/_4$	-	-	-	$^{1145}/_{6336}$
Y_{2U}	-	-	-	-	-	-	$^1/_5$	-	-	-
E_{2U}	-	$^{7(1-\alpha)}/_8$	-	-	-	$^\gamma/_4$	-	-	-	$^1/_{24}$
ΑΓΑΘΟ	**Ρευστότητα**									
Y_{FS}	$^1/_9$	-	$^1/_7$	-	$^2/_3$	-	$^4/_5$	-	1	-
E_{FS}	-	$^1/_8$	-	$^1/_6$	-	$^3/_4$	-	$^5/_6$	-	$^{2815}/_{6336}$

Αντικαθιστώντας τους ανωτέρω συντελεστές αγοραίας συμπεριφοράς στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων **116**, λαμβάνουμε το Ευκλείδειο μοντέλο, που προσομοιώνει τα

εισοδήματα και τις δαπάνες των θεσμικών τομέων της διεθνούς οικονομίας **Ζήτα**:

$$dY_{1H}/dt = \{-Y_{1H} - {}^{2}/_{3}\cdot Y_{2H} - {}^{1}/_{7}\cdot Y_{1B} + {}^{5\alpha}/_{6}\cdot E_{1B} - {}^{4}/_{5}\cdot Y_{2B} + {}^{(1-\gamma)}/_{6}\cdot E_{2B} + {}^{4399}/_{6336}\cdot E_{F}\}$$

$$dE_{1H}/dt = \{Y_{1H} - K_{1H} - E_{1H}\}$$

$$dY_{2H}/dt = \{-{}^{1}/_{9}\cdot Y_{1H} - Y_{2H} - {}^{1}/_{7}\cdot Y_{1B} + {}^{5(1-\alpha)}/_{6}\cdot E_{1B} - {}^{4}/_{5}\cdot Y_{2B} + {}^{\gamma}/_{6}\cdot E_{2B} + {}^{3343}/_{6336}\cdot E_{F}\}$$

$$dE_{2H}/dt = \{Y_{2H} - K_{2H} - E_{2H}\}$$

$$dY_{1B}/dt = \{-{}^{1}/_{9}\cdot Y_{1H} + {}^{7\alpha}/_{8}\cdot E_{1H} - {}^{2}/_{3}\cdot Y_{2H} + {}^{(1-\gamma)}/_{4}\cdot E_{2H} - Y_{1B} - {}^{4}/_{5}\cdot Y_{2B} + {}^{5}/_{8}\cdot E_{F}\}$$

137

$$dE_{1B}/dt = \{Y_{1B} - K_{1B} - E_{1B}\}$$

$$dY_{2B}/dt = \{-{}^{1}/_{9}\cdot Y_{1H} + {}^{7(1-\alpha)}/_{8}\cdot E_{1H} - {}^{2}/_{3}\cdot Y_{2H} + {}^{\gamma}/_{4}\cdot E_{2H} - {}^{1}/_{7}\cdot Y_{1B} - Y_{2B} + {}^{3079}/_{6336}\cdot E_{F}\}$$

$$dE_{2B}/dt = \{Y_{2B} - K_{2B} - E_{2B}\}$$

$$dY_{F}/dt = \{{}^{1}/_{8}\cdot E_{1H} + {}^{3}/_{4}\cdot E_{2H} + {}^{1}/_{6}\cdot E_{1B} + {}^{5}/_{6}\cdot E_{2B} - Y_{F}\}$$

$$dE_{F}/dt = \{Y_{F} + K_{F} - E_{F}\}$$

Το πιο πάνω μοντέλο της παγκόσμιας οικονομίας έχει τη μορφή $\mathbf{dX/dt = Z\cdot X - K_F}$ και, άρα, χαρακτηρίζεται από σφαιρική σταθερότητα αν, και μόνο αν, οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz, οι οποίες αποτελούνται από συντελεστές του πολυώνυμου ιδιοτιμών $\left|\mathbf{Z - \lambda\cdot I}\right|$, είναι θετικές. Το προαναφερθέν πολυώνυμο ισούται με την ορίζουσα του χαρακτηριστικού πίνακα τής **Ζήτα**, ως ακολούθως:

$$\begin{vmatrix}
-1-\lambda & 0 & -{}^{2}/_{3} & 0 & -{}^{1}/_{7} & {}^{5\alpha}/_{6} & -{}^{4}/_{5} & {}^{(1-\gamma)}/_{6} & 0 & {}^{4399}/_{6336} \\
1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^{1}/_{9} & 0 & -1-\lambda & 0 & -{}^{1}/_{7} & {}^{5(1-\alpha)}/_{6} & -{}^{4}/_{5} & {}^{\gamma}/_{6} & 0 & {}^{3743}/_{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^{1}/_{9} & {}^{7\alpha}/_{8} & -{}^{2}/_{3} & {}^{(1-\gamma)}/_{4} & -1-\lambda & 0 & -{}^{4}/_{5} & 0 & 0 & {}^{5}/_{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-{}^{1}/_{9} & {}^{7(1-\alpha)}/_{8} & -{}^{2}/_{3} & {}^{\gamma}/_{4} & -{}^{1}/_{7} & 0 & -1-\lambda & 0 & 0 & {}^{3079}/_{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\
0 & {}^{1}/_{8} & 0 & {}^{3}/_{4} & 0 & {}^{1}/_{6} & 0 & {}^{5}/_{6} & -1-\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda
\end{vmatrix} =$$

$$= \left|\mathbf{Z - \lambda\cdot I}\right| = \zeta_0\cdot\lambda^{10} + \zeta_1\cdot\lambda^{9} + \zeta_2\cdot\lambda^{8} + \zeta_3\cdot\lambda^{7} + \zeta_4\cdot\lambda^{6} + \zeta_5\cdot\lambda^{5} +$$

138

$$+ \zeta_6\cdot\lambda^{4} + \zeta_7\cdot\lambda^{3} + \zeta_8\cdot\lambda^{2} + \zeta_9\cdot\lambda^{1} + \zeta_{10}\cdot\lambda^{0}$$

Οι συντελεστές ζ_i, i = 0,…, 10, οι οποίοι υπολογίζονται με το *Mathematica*, είναι πολυώνυμες συναρτήσεις (μέχρι) δεύτερου βαθμού ως προς το **α** και το **γ**.

Πίνακας ***XI₈***
Πίνακας των Routh-Hurwitz

ζ_1	ζ_0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
ζ_3	ζ_2	ζ_1	ζ_0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
ζ_5	ζ_4	ζ_3	ζ_2	ζ_1	ζ_0	**0**	**0**	**0**	**0**
ζ_7	ζ_6	ζ_5	ζ_4	ζ_3	ζ_2	ζ_1	ζ_0	**0**	**0**
ζ_9	ζ_8	ζ_7	ζ_6	ζ_5	ζ_4	ζ_3	ζ_2	ζ_1	ζ_0
0	ζ_{10}	ζ_9	ζ_8	ζ_7	ζ_6	ζ_5	ζ_4	ζ_3	ζ_2
0	**0**	**0**	ζ_{10}	ζ_9	ζ_8	ζ_7	ζ_6	ζ_5	ζ_4
0	**0**	**0**	**0**	**0**	ζ_{10}	ζ_9	ζ_8	ζ_7	ζ_6
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	ζ_{10}	ζ_9	ζ_8
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	ζ_{10}

Όταν αντικαταστήσουμε στις ελάσσονες του Πίνακα ***XI₈*** τους συντελεστές ζ_i, λαμβάνουμε τις Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz $\mathbf{rh_i}$, i = 1,…, 10, ως πολυώνυμες συναρτήσεις (μέχρι) όγδοου βαθμού ως προς το **α** και το **γ**. Το *Mathematica* αδυνατεί να λύσει το συγκεκριμένο σύστημα δέκα πολυώνυμων ανισοτήτων ($\mathbf{rh_i} > 0$), ταυτόχρονα, ως προς το **α** και το **γ**. Ευτυχώς, για κάθε (υποθετική ή γνωστή) αναλογία **α** ή **γ**, το εν λόγω λογισμικό αποδίδει τα όρια της αναλογίας **γ** ή **α**, αντίστοιχα, όπου όλες οι $\mathbf{rh_i}$ είναι μεγαλύτερες από το μηδέν και, άρα, η παγκόσμια οικονομία **137** παραμένει σφαιρικά σταθερή. Στο Παράρτημα **XI**, με τη βοήθεια τού *Mathematica*, αποδεικνύεται ότι:

Πίνακας ***XI₉***
Συνδυασμοί Ελαστικοτήτων Αντικατάστασης Στις Δύο Χώρες

εάν το α είναι ίσο με:	½	¾	$^7/_8$	$^{127}/_{128}$
και το γ είναι μεταξύ:	$0 < \gamma < 1$	$0 < \gamma < 1$	$0 < \gamma < 1$	$0 < \gamma < 1$

το διεθνές σύμπλεγμα συναλλαγών επιστρέφει στο διάνυσμα στατικής ισορροπίας ^{Z}X μετά

από κάθε συνδυασμό αρχικών ροών ${}^{0}\boldsymbol{X}({}^{0}Y_{1H}, {}^{0}E_{1H}, {}^{0}Y_{2H}, {}^{0}E_{2H}, {}^{0}Y_{1B}, {}^{0}E_{1B}, {}^{0}Y_{2B}, {}^{0}E_{2B}, {}^{0}Y_{F}, {}^{0}E_{F})$ ή κλονισμό των συντελεστών αγοραίας συμπεριφοράς **Z** και των παραμέτρων νομισματικής πολιτικής $\mathbf{K_F}$. Το γεγονός ότι οι καταναλωτές, οι παραγωγοί και οι τραπεζίτες αμφότερων των χωρών ή ζωνών επιλέγουν τις πηγές των εσόδων και τους προορισμούς των εξόδων τους μέσα σε πλατιά όρια, χωρίς να αποσταθεροποιούν το σύμπλεγμα συναλλαγών **137**, δε συνεπάγεται ότι όλοι οι τομείς (και τα παζάρια) της παγκόσμιας οικονομίας **Ζήτα** καταλήγουν, επίσης, με ετήσιες εισπράξεις και πληρωμές που είναι μεγαλύτερες από το μηδέν.

XI.8 Κέρδη ή Ζημιές από Διεθνείς Συναλλαγές;

Αρχικός μας στόχος είναι να εκφράσουμε τις χρηματικές ροές των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των χρηματοπιστωτών τής **Άλφα** και τής **Γάμμα** ως συναρτήσεις τού **α** και τού γ, ώστε να εντοπίσουμε τα όρια μέσα στα οποία όλοι οι θεσμικοί τομείς απολαμβάνουν θετικά εισοδήματα και δαπάνες. Συναφώς, έχουμε υποθέσει ότι:

- η (μεσοπρόθεσμη) ισοτιμία είναι \$1 = €1, ενώ οι τράπεζες επεκτείνουν το παθητικό τους κατά \$1 000 ετησίως στην **Άλφα** και κατά €1 000 ετησίως στη **Γάμμα**.
- οι (καθαρές) πιστώσεις κατανέμονται εξίσου στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις των δύο περιοχών λόγω οικονομικών, πολιτικών και άλλων σκοπιμοτήτων.

Αντικαθιστώντας τα προαναφερθέντα στατιστικά δεδομένα στο διάνυσμα του διεθνούς νομισματικού ισολογισμού, $\mathbf{K_F}$, λαμβάνουμε:

$$\mathbf{139} \qquad \mathbf{Z}\cdot{}^{\mathbf{Z}}\boldsymbol{X} = \mathbf{K_F} = \begin{vmatrix} 0 \\ \xi_1\cdot\$250 + \xi_2\cdot€250 \\ 0 \\ \xi_1\cdot\$250 + \xi_2\cdot€250 \\ 0 \\ \xi_1\cdot\$250 + \xi_2\cdot€250 \\ \xi_1\cdot\$250 + \xi_2\cdot€250 \\ 0 \\ -(\xi_1\cdot\$1000 + \xi_2\cdot€1000) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ K_{1H} \\ 0 \\ K_{2H} \\ 0 \\ K_{1B} \\ K_{2B} \\ 0 \\ -K_{1F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mu_{1H}\cdot K_F \\ 0 \\ \mu_{2H}\cdot K_F \\ 0 \\ \mu_{1B}\cdot K_F \\ \mu_{2B}\cdot K_F \\ 0 \\ -K_F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ ¼ \\ 0 \\ ¼ \\ 0 \\ ¼ \\ 0 \\ ¼ \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \cdot K_F$$

Στο Παράρτημα **XI**, μέσω του Κανόνα τού Cramer, λύσαμε το σύγχρονο σύστημα **139** που αντιστοιχεί στο διαφορικό σύστημα **137** και λάβαμε τα στοιχεία του διανύσματος ισορροπίας ${}^{\mathbf{Z}}\boldsymbol{X}$ ως συναρτήσεις τού **α** και τού γ.

Το *Mathematica* αποδίδει τα όρια τών **α** και **γ** μέσα στα οποία οι δέκα πολυώνυμες ανισότητες ${}^{Z}Y_{1H}>0$, ${}^{Z}E_{1H}>0$, ${}^{Z}Y_{2H}>0$, ${}^{Z}E_{2H}>0$, ${}^{Z}Y_{1B}>0$, ${}^{Z}E_{1B}>0$, ${}^{Z}Y_{2B}>0$, ${}^{Z}E_{2B}>0$, ${}^{Z}Y_{F}>0$, ${}^{Z}E_{F}>0$ (δεύτερου βαθμού ως προς το α και το γ) γίνονται, ταυτόχρονα, μεγαλύτερες από το μηδέν. Τα εν λόγω όρια αποτυπώνονται στον ακόλουθο Πίνακα για ευκολία αναφοράς:

Πίνακας ***XI₁₀***

Τα Όρια των **α** και **γ** Όπου Όλοι οι Τομείς τής Ζήτα Απολαμβάνουν Θετικές Ροές

$$\frac{15443467}{22110599} < \alpha \leq \frac{2802592}{3441571} \;\&\&\; 0 < \gamma < \frac{-4979698 + 5421969\,\alpha}{3995142} + \frac{\sqrt{-98600295103424 + 122670429049392\,\alpha + 29397747836961\,\alpha^2}}{3995142} \;||$$

$$\frac{2802592}{3441571} < \alpha < \frac{62975641 - \sqrt{202426429445521}}{54219690} \;\&\&\; 0 < \gamma < 1 \;||$$

$$\frac{62975641 - \sqrt{202426429445521}}{54219690} \leq \alpha < \frac{4\left(9120437 - \sqrt{6878892894589}\right)}{27109845} \;\&\&\; \frac{34706072 - 62975641\,\alpha + 27109845\,\alpha^2}{-10327592 + 9987855\,\alpha} < \gamma < 1$$

Επομένως, ανάλογα με τις διαβαθμίσεις τών **α** και **γ**, είναι πιθανό:

- κάποιοι τομείς να απολαμβάνουν μικρότερα εισοδήματα και δαπάνες μετά το άνοιγμα των οικονομιών **Άλφα** και **Γάμμα** στις διεθνείς συναλλαγές.
- το βιωτικό επίπεδο όλων όσων συμμετέχουν στις διεθνείς συναλλαγές να μη βελτιωθεί μετά την απελευθέρωση του εμπορίου και των πληρωμών.

Υπό την προϋπόθεση ότι $\boldsymbol{\alpha} = {}^{55}/_{64}$, λύσαμε το στατικό σύστημα **139**, που αντιστοιχεί στο δυναμικό σύστημα **137**, και λάβαμε τα έσοδα και τα έξοδα των καταναλωτών, των παραγωγών και των τραπεζιτών της παγκόσμιας οικονομίας **Ζήτα** ως συναρτήσεις τού γ και τού K_F. Οι εν λόγω χρηματικές ροές παρατάσσονται στον Πίνακα ***XI₁₁*** για ευκολία αναφοράς. Νοουμένου ότι $K_F > 0$, οι θεσμικοί τομείς απολαμβάνουν θετικά έσοδα και έξοδα για όλες τις ελαστικότητες αντικατάστασης $0<\gamma/(1-\gamma)<1$. Αθροίζοντας λαμβάνουμε:

$${}^{Z}Y = {}^{Z}Y_{1H} + {}^{Z}Y_{2H} + {}^{Z}Y_{1B} + {}^{Z}Y_{2B} + {}^{Z}Y_{F} =$$

140 $$= \left\{(553178342635 + 371181255936\cdot\gamma - 106841042944\cdot\gamma 2)\cdot \mathbf{K_F}/_{480622571522 + 339131327232\cdot\gamma - 84520263680\cdot\gamma^2}\right\} =$$

$$= {}^{Z}E_{1H} + {}^{Z}E_{2H} + {}^{Z}E_{1B} + {}^{Z}E_{2B} + {}^{Z}E_{F} = {}^{Z}E$$

Πίνακας $\boldsymbol{XI_{11}}$

Οι Τομεακές Ροές της Παγκόσμιας Οικονομίας Ζήτα, όταν $\alpha = {}^{55}/_{64}$

Έσοδα των Νοικοκυριών τής Άλφα =

$${}^{Z}Y_{1H} = (303266986497 + 195911186304\cdot\gamma - 64971337728\cdot\gamma^2)\cdot K_F / 4\cdot(240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Έξοδα των Νοικοκυριών τής Άλφα =

$${}^{Z}E_{1H} = 128\cdot(122960353 + 51456099\cdot\gamma - 44357824\cdot\gamma^2)\cdot K_F / (240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Έσοδα των Νοικοκυριών τής Γάμμα =

$${}^{Z}Y_{2H} = 5\cdot(51622981353 + 35207371904\cdot\gamma - 8452026368\cdot\gamma^2)\cdot K_F / 4\cdot(240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Έξοδα των Νοικοκυριών τής Γάμμα =

$${}^{Z}E_{2H} = (4450905251 + 1617798976\cdot\gamma)\cdot K_F / (240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Έσοδα των Επιχειρήσεων τής Άλφα =

$${}^{Z}Y_{1B} = 7\cdot(38493860151 + 23848948480\cdot\gamma - 8374890496\cdot\gamma^2)\cdot K_F / 4\cdot (240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Έξοδα των Επιχειρήσεων τής Άλφα =

$${}^{Z}E_{1B} = 32\cdot(227701057 - 20492377\cdot\gamma - 127844544\cdot\gamma^2)\cdot K_F / (240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Έσοδα των Επιχειρήσεων τής Γάμμα =

$${}^{Z}Y_{2B} = 5\cdot(49057895439 + 36770959616\cdot\gamma - 8452026368\cdot\gamma^2)\cdot K_F / 4\cdot (240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Έξοδα των Επιχειρήσεων τής Γάμμα =

$${}^{Z}E_{2B} = (2489095717 + 7144567232\cdot\gamma)\cdot K_F / 2\cdot (240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Έσοδα των Διεθνών Τραπεζιτών =

$${}^{Z}Y_{F} = (7557073439 + 4904257152\cdot\gamma - 1391562752\cdot\gamma^2)\cdot K_F / (240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Έξοδα των Διεθνών Τραπεζιτών =

$${}^{Z}E_{F} = 3168\cdot(78241275 + 55072576\cdot\gamma - 13778944\cdot\gamma^2)\cdot K_F / (240311285761+169565663616\cdot\gamma - 42260131840\cdot\gamma^2)$$

Μέσα στα όρια $0 < \gamma < 1$, οι εισπράξεις ${}^{Z}Y$ και πληρωμές ${}^{Z}E$ του διεθνούς συμπλέγματος συναλλαγών διαφοροποιούνται αντιστρόφως ανάλογα προς το γ (από $1{,}15096\cdot K_F$ μέχρι $1{,}111962\cdot K_F$). Αυξανομένου τού γ, τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις τής **Γάμμα** προτιμούν περισσότερο τα **επιτόπια** έτη εργασίας και τεμάχια παραγωγής σε **σχέση** προς τα αντίστοιχα **ξένα**, με αποτέλεσμα η διεθνής κυκλοφορία του χρήματος να μειώνεται.

Στη συνέχεια, συγκρίνουμε τις χρηματικές ροές τής **Άλφα** και τής **Γάμμα** στις περιπτώσεις που αμφότερες λειτουργούν (i) ως μεμονωμένες και (ii) ως ενωμένες οικονομίες. Για να διευκολύνουμε τις συγκρίσεις μετά την ένταξή τους στο παγκόσμιο σύστημα εμπορίου και πληρωμών, θα υποθέσουμε ότι $\boldsymbol{\alpha} = {}^{55}/_{64}$, $\boldsymbol{\gamma} = {}^{2}/_{3}$ και ότι οι καθαρές πιστώσεις εξακολουθούν να κατανέμονται εξίσου στα νοικοκυριά και τις επιχειρήσεις των δύο οικονομιών λόγω διαφόρων σκοπιμοτήτων. Στο Παράρτημα **XI** λύσαμε, υπό τις ανωτέρω προϋποθέσεις, το χρονικά αμετάβλητο σύστημα **139**, που αντιστοιχεί στο χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα **137**, και λάβαμε τις στατικές ροές των πέντε θεσμικών τομέων τής **Ζήτα** ως συναρτήσεις της ετήσιας αύξησης της διεθνούς ρευστότητας K_F, ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&{}^{Z}Y = ({}^{Z}Y_{1H} + {}^{Z}Y_{2H} + {}^{Z}Y_{1B} + {}^{Z}Y_{2B} + {}^{Z}Y_{F}) = \\
&= \{0{,}302623 + 0{,}266527 + 0{,}265037 + 0{,}260838 + 0{,}0305109\} \cdot \mathrm{K_F} = (\mathbf{1{,}12554}) \cdot \mathrm{K_F} \\
&{}^{Z}E = ({}^{Z}E_{1H} + {}^{Z}E_{2H} + {}^{Z}E_{1B} + {}^{Z}E_{2B} + {}^{Z}E_{F}) = \\
&= \{0{,}0526235 + 0{,}0165269 + 0{,}0150372 + 0{,}010838 + 1{,}03051\} \cdot \mathrm{K_F} = (\mathbf{1{,}12554}) \cdot \mathrm{K_F}
\end{aligned}
\qquad \mathbf{141}
$$

Συνεπώς, οι επαναλαμβανόμενες εισπράξεις και πληρωμές (^{Z}Y, ^{Z}E) τού εν λόγω συμπλέγματος συναλλαγών κατανέμονται ανάμεσα στους καταναλωτές, τους παραγωγούς και τους τραπεζίτες αμφότερων των χωρών στις ακόλουθες (εκατοστιαίες) αναλογίες:

$$
\begin{aligned}
&({}^{z}y_{1h} + {}^{z}y_{2h} + {}^{z}y_{1b} + {}^{z}y_{2b} + {}^{z}y_{f}) = (26{,}9\% + 23{,}7\% + 23{,}5\% + 23{,}2\% + 2{,}7\%) = 100\% \\
&({}^{z}e_{1h} + {}^{z}e_{2h} + {}^{z}e_{1b} + {}^{z}e_{2b} + {}^{z}e_{f}) = (4{,}7\% + 1{,}5\% + 1{,}3\% + 1{,}0\% + 91{,}5\%) = 100\%
\end{aligned}
\qquad \mathbf{142}
$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι ο Ευκλείδειος πολλαπλασιαστής **c** ισούται: στην κλειστή οικονομία **Άλφα** με **1,13264**, στην κλειστή οικονομία **Γάμμα** με **1,22373** και στο σύμπλεγμα συναλλαγών **Ζήτα** με **1,12554**. Επομένως, διατηρώντας σταθερές (σε *ΔΛΜ*) τις εθνικές προσφορές ρευστότητας, η συνένωση δύο (ή περισσότερων) οικονομιών δε συνοδεύεται, κατ' ανάγκη, από αυξήσεις στις στατικές ροές των τομέων και των παζαριών.

Σημειώνεται ότι με τη 'συρραφή' τής **Άλφα** με τη **Γάμμα**, ελευθερώνονται τόσο οι αγοραπωλησίες των αγαθών όσο και οι μετατροπές των νομισμάτων των δύο περιοχών. Με δεδομένες τις συναλλαγματικές ισοτιμίες $\xi_1 = \Delta\Lambda M/\$$ και $\xi_2 = \Delta\Lambda M/€$, συμπεραίνεται ότι η ετήσια προσφορά χρήματος στο διεθνές σύμπλεγμα **Ζήτα** αποτελείται από το άθροισμα των μεταβολών των ισολογισμών των δύο τραπεζικών συστημάτων, ακριβώς όπως αναπαριστάνεται στις εξισώσεις **122** και **139**, δηλαδή:

$$K_F=(\xi_1\cdot k_{1f1h}+\xi_2\cdot k_{2f1h})+(\xi_1\cdot k_{1f2h}+\xi_2\cdot k_{2f2h})+(\xi_1\cdot k_{1f1b}+\xi_2\cdot k_{2f1b})+(\xi_1\cdot k_{1f2b}+\xi_2\cdot k_{2f2b})=$$

$$=(\xi_1\cdot\$250+\xi_2\cdot€250)+(\xi_1\cdot\$250+\xi_2\cdot€250)+(\xi_1\cdot\$250+\xi_2\cdot€250)+(\xi_1\cdot\$250+\xi_2\cdot€250)=$$

143

$$=\xi_1\cdot k_{1f}+\xi_2\cdot k_{2f}=(\xi_1\cdot\$1000+\xi_2\cdot€1000)=K_{1F}+K_{2F}=\Delta\Lambda M2000=\varphi\cdot K_F+(1-\varphi)\cdot K_F=$$

$$=½\cdot K_F+(1-½)\cdot K_F=K_F\cdot(\mu_{1H}+\mu_{2H}+\mu_{1B}+\mu_{2B})=K_F\cdot(¼+¼+¼+¼)=\Delta\Lambda M2\ 000.$$

Στους Πίνακες ***XI*$_{12}$ – *XI*$_{14}$** βλέπουμε ότι, με σταθερή κυκλοφορούσα ρευστότητα $\mathbf{K_F}$ (όπως αντανακλάται στον ισολογισμό του διεθνούς τραπεζικού συστήματος), οι συνολικές ροές των τομέων και των παζαριών των συνενωμένων οικονομιών **Άλφα** και **Γάμμα** έχουν σμικρύνει εξαιτίας της μείωσης του Ευκλείδειου πολλαπλασιαστή **c** (ο οποίος αντανακλά τη νέα δομή της παγκόσμιας προσφοράς και ζήτησης αγαθών).

Πίνακας ***XI*$_{12}$**
Συγκρίσεις των Τομεακών Ροών σε *ΔΛΜ* Πριν και Μετά την Παγκοσμιοποίηση

Ροές	**Κλειστές Οικονομίες**			**Ανοιχτές Οικονομίες**		
ΤΟΜΕΙΣ	**Άλφα**	**Γάμμα**	**Σύνολο**	**Άλφα**	**Γάμμα**	**Σύνολο**
Νοικοκυριά	593,42	574,58	1 168,00	605,25	533,05	1 138,30
Επιχειρήσεις	523,62	550,85	1 074,47	530,07	521,67	1 051,74
Υποσύνολο	1 117,04	1 125,43	2 242,47			2 190,04
Τραπεζίτες	15,61	98,31	113,92	-	-	61,02
Έσοδα	1 132,65	1 223,74	**2 356,39**			**2 251,06**
Νοικοκυριά	93,42	74,58	168,00	***105,25***	***33,05***	138,30
Επιχειρήσεις	23,62	50,85	74,47	***30,07***	***21,67***	51,74
Υποσύνολο	117,04	125,43	242,47			219,74
Τραπεζίτες	1 015,61	1 098,31	2 113,92	-	-	2 061,02
Έξοδα	1 132,65	1 223,74	**2 356,39**			**2 251,06**

Οι επαναλαμβανόμενες δοσοληψίες στα παζάρια υπηρεσιών, προϊόντων και χρεογράφων του συστήματος **137** υπολογίζονται από τις αντίστοιχες γραμμές του Πίνακα ***XI*$_7$**, ως εξής:

$${}^{Z}W_{1H}={}^{5\alpha}/_{6}\cdot{}^{Z}E_{1B}+{}^{(1-\gamma)}/_{6}\cdot{}^{Z}E_{2B}+{}^{1}/_{4}\cdot{}^{Z}E_{F}={}^{275}/_{384}\cdot{}^{Z}E_{1B}+{}^{1}/_{18}\cdot{}^{Z}E_{2B}+{}^{1}/_{4}\cdot{}^{Z}E_{F}$$

$${}^{Z}W_{2H}={}^{5(1-\alpha)}/_{6}\cdot{}^{Z}E_{1B}+{}^{\gamma}/_{6}\cdot{}^{Z}E_{2B}+{}^{1}/_{12}\cdot{}^{Z}E_{F}={}^{15}/_{128}\cdot{}^{Z}E_{1B}+{}^{1}/_{9}\cdot{}^{Z}E_{2B}+{}^{1}/_{12}\cdot{}^{Z}E_{F}$$

144

$${}^{Z}U_{1B}={}^{7\alpha}/_{8}\cdot{}^{Z}E_{1H}+{}^{(1-\gamma)}/_{4}\cdot{}^{Z}E_{2H}+{}^{1145}/_{6336}\cdot{}^{Z}E_{F}={}^{385}/_{512}\cdot{}^{Z}E_{1H}+{}^{1}/_{12}\cdot{}^{Z}E_{2H}+{}^{1145}/_{6336}\cdot{}^{Z}E_{F}$$

$${}^{Z}U_{2B}={}^{7(1-\alpha)}/_{8}\cdot{}^{Z}E_{1H}+{}^{\gamma}/_{4}\cdot{}^{Z}E_{2H}+{}^{1}/_{24}\cdot{}^{Z}E_{F}={}^{63}/_{512}\cdot{}^{Z}E_{1H}+{}^{1}/_{6}\cdot{}^{Z}E_{2H}+{}^{1}/_{24}\cdot{}^{Z}E_{F}$$

$${}^{Z}S_{F}={}^{1}/_{8}\cdot{}^{Z}E_{1H}+{}^{3}/_{4}\cdot{}^{Z}E_{2H}+{}^{1}/_{6}\cdot{}^{Z}E_{1B}+{}^{5}/_{6}\cdot{}^{Z}E_{2B}+{}^{2815}/_{6336}\cdot{}^{Z}E_{F}$$

Στην προκείμενη περίπτωση έχει υποτεθεί ότι $\boldsymbol{\alpha} = {}^{55}/_{64}$, $\boldsymbol{\gamma} = {}^{2}/_{3}$, ότι $\mu_{1H} = \mu_{2H} = \mu_{1B} = \mu_{2B} = {}^{1}/_{4}$, ότι η ισοτιμία παραμένει \$1 = €1 και ότι οι τράπεζες επεκτείνουν το παθητικό τους κατά \$1 000 στην **Άλφα** και κατά €1 000 στη **Γάμμα** στη διάρκεια του χρόνου. Από τις εξισώσεις **144**, συνάγεται ότι οι ετήσιες αγοραπωλησίες ${}^{Z}\boldsymbol{R}$ κατανέμονται ανάμεσα στα πέντε αγαθά της παγκόσμιας οικονομίας **Ζήτα**, ως ακολούθως:

145

$$({}^{Z}W_{1H} + {}^{Z}W_{2H} + {}^{Z}U_{1B} + {}^{Z}U_{2B} + {}^{Z}S_{F}) \approx (0{,}269 + 0{,}089 + 0{,}227 + 0{,}0522 + 0{,}488)\cdot \mathrm{K_F} \approx \mathbf{0{,}125}\cdot \mathrm{K_F}$$

$$({}^{Z}\mathrm{w_{1h}} + {}^{Z}\mathrm{w_{2h}} + {}^{Z}\mathrm{u_{1b}} + {}^{Z}\mathrm{u_{2b}} + {}^{Z}\mathrm{s_f}) = (23{,}92\% + 7{,}9\% + 20{,}2\% + 4{,}64\% + 43{,}34\%) = 100\%$$

Οι μικροδιαφορές στις στατικές ροές των Πινάκων ***XI₁₂*** και ***XI₁₃*** οφείλονται στα στρογγυλεύματα των εμπλεκόμενων αριθμών.

Πίνακας ***XI₁₃***
Κύκλοι Εργασιών των Παζαριών σε *ΔΛΜ* Πριν και Μετά την Παγκοσμιοποίηση

Ροές	**Κλειστές Οικονομίες**			**Ανοιχτές Οικονομίες**		
Εισπράξεις	**Άλφα**	**Γάμμα**	**Σύνολο**	**Άλφα**	**Γάμμα**	**Σύνολο**
Υπηρεσίες W_{1H}	527,48	-	527,48	538,10	-	538,10
Προϊόντα U_{1B}	448,81	-	448,81	454,50	-	454,50
Υποσύνολο A_1	976,29		976,29	992,60		992,60
Υπηρεσίες W_{2H}	-	191,53	191,53	-	178,00	178,00
Προϊόντα U_{2B}	-	110,17	110,17	-	104,40	104,40
Υποσύνολο Γ_2		301,70	301,70		282,40	282,40
Ομόλογα S_{1F}		-	156,35	-	-	-
Ομόλογα S_{2F}	-		922,03	-	-	-
Υποσύνολο S_F	-	-	1 078,38	-	-	975,00
Πωλήσεις	976,29	301,70	**2 356,39**	992,60	282,40	**2 250,00**

Νοείται ότι, για κάθε επισκοπούμενο ή προβαλλόμενο έτος, οι αγοραπωλησίες (${}^{Z}W_{1H}$, ${}^{Z}W_{2H}$, ${}^{Z}U_{1B}$, ${}^{Z}U_{2B}$, ${}^{Z}S_{F}$) στα παζάρια πρέπει να συγκρίνονται με τα αντίτιμα (p_{1W}, p_{2W}, p_{1U}, p_{2U}, p_{FS}) και τα αποθέματα (q_{1W}, q_{2W}, q_{1U}, q_{2U}, q_{FS}) των αγαθών, ώστε να επιμετρούνται τα ποσοτικά χάσματα και να αντλούνται χρήσιμα συμπεράσματα για το δέον γενέσθαι. **Μεσοπρόθεσμα**, σύμφωνα με τις αξιωματικές προτάσεις, τα αντίτιμα και τα αποθέματα των υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων καθορίζονται από ανεξάρτητες και αυτόνομες διαδικασίες, εκτός του συστήματος των χρηματικών ροών. Η Ευκλείδεια μεθοδολογία και το λογισμικό *Mathematica* προσφέρουν στους ενδιαφερομένους τα εργαλεία, για να διερευνήσουν τους τρόπους με τους οποίους, **μακροχρόνια**:

- αλληλεπηρεάζονται οι ισχύουσες τιμές και οι διαθέσιμες ποσότητες των αγαθών,
- συνδέονται τα συστήματα των αυτόνομων και των ενδογενών μεταβλητών,

τόσο σε κλειστό όσο και σε ανοιχτό περιβάλλον. **Τα Ευκλείδεια μαθηματικά μοντέλα είναι δομημένα για να καταγράφουν, με διπλές εγγραφές και σε τρεις λογιστικούς πίνακες, ταυτόχρονα, την ετήσια κυκλοφορία του χρήματος ανάμεσα στους τομείς, τα παζάρια και τις χώρες, που είναι οι πωλητές και οι αγοραστές των αγαθών της εικονιζόμενης διεθνούς οικονομίας**. Στη **Ζήτα**, ως αποτέλεσμα της παγκοσμιοποίησης:

- οι ροές των θεσμικών τομέων, αμφότερων των νομισματικών ζωνών, μειώνονται.
- οι αγοραπωλησίες ανακατανέμονται υπέρ των υπηρεσιών και προϊόντων τής **Άλφα**.
- το έλλειμμα τής **Άλφα** ισούται με το πλεόνασμα τής **Γάμμα** στο ισοζύγιο προϊόντων και υπηρεσιών.

Πίνακας ***XI₁₄***
Δαπάνες για Αγαθά σε *ΔΛΜ* Μετά την Παγκοσμιοποίηση

ΠΑΖΑΡΙ	**ΝΟΙΚΟΚΥΡΙΑ**		**ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΙΣ**		**Διεθνείς**	
Ζήτηση για	**Άλφα**	**Γάμμα**	**Άλφα**	**Γάμμα**	**Τραπεζίτες**	**Σύνολο**
Υπηρεσίες W_{1H}	-	-	21,54	1,20	515,26	538,00
Προϊόντα U_{1B}	79,14	2,75	-	-	372,45	454,34
Υποσύνολο A_1	79,14	2,75	21,54	1,20	887,71	992,3
Υπηρεσίες W_{2H}	-	-	3,52	2,41	171,75	177,68
Προϊόντα U_{2B}	12,95	5,51	-	-	85,88	104,34
Υποσύνολο Γ_2	12,95	5,51	3,52	2,41	257,63	282,02
Ομόλογα S_F	13,16	24,79	5,01	18,06	915,68	976,70
Πληρωμές	***105,25***	***33,05***	***30,07***	***21,67***	**2 061,02**	**2 251,06**

Από τον Πίνακα ***XI₁₄*** προκύπτει ότι οι εισαγωγές υπηρεσιών και προϊόντων συμποσούνται στις *ΔΛΜ*(12,95+3,52) = *ΔΛΜ*16,47 στην **Άλφα** και στις *ΔΛΜ*(2,75+1,20)= *ΔΛΜ*3,95 στη **Γάμμα**. Μέσω του καναλιού αυτού, τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις συσσωρεύουν παθητικό στην **Άλφα** και ενεργητικό στη **Γάμμα**. Η χρηματοδότηση των μη-εκδοτικών τομέων και, άρα, των δύο κρατών από το διεθνές τραπεζικό σύστημα ισούται με τη διαφορά μεταξύ των εσόδων και εξόδων εκάστου, όπως φαίνεται στην πιο κάτω εξίσωση:

146 $$K_F = {}^{Z}E_F - {}^{Z}Y_F = \{({}^{Z}Y_{1H} - {}^{Z}E_{1H}) + ({}^{Z}Y_{1B} - {}^{Z}E_{1B})\} + \{({}^{Z}Y_{2H} - {}^{Z}E_{2H}) + ({}^{Z}Y_{2B} - {}^{Z}E_{2B})\} > 0$$

Συναφώς, επαναλαμβάνεται ότι οι ελαστικότητες αντικατάστασης των αγαθών και οι

κατανομές των τραπεζικών δανείων καθορίζουν τα ποσοστά των παγκόσμιων χρηματικών ροών που αναλογούν στους τομείς και στα παζάρια των δύο κυρίαρχων κρατών και, άρα, τις θετικές ή αρνητικές επιπτώσεις από την ένταξή τους στο διεθνές σύστημα εμπορικού ανταγωνισμού και νομισματικής συνεργασίας. Χωρίς το κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο, είναι αδύνατο να προβλεφθεί ποια από δύο μη-συγκοινωνούσες οικονομίες, όπως η **133** και η **135**, θα κερδίσει ή θα χάσει περισσότερο από τη συνένωση σε ένα παγκόσμιο σύμπλεγμα συναλλαγών, όπως το **137**. Νοουμένου ότι οι συνεργαζόμενες κεντρικές τράπεζες βασίζονται στο ορθό μαθηματικό υπόδειγμα της οικονομικής πραγματικότητας, μπορούν να μεταβάλλουν και να κατανέμουν το παθητικό τους, ώστε να κατευθύνουν:

- τους θεσμικούς τομείς και τις αντίστοιχες χώρες προς σταθερές, θετικές και, άρα, πηδαλιουχούμενες ετήσιες εισπράξεις και πληρωμές.
- τις αγοραπωλησίες στα παζάρια προς τα ελάχιστα ποσοτικά χάσματα και, άρα, τις ελάχιστες πιέσεις στα αντίτιμα των αγαθών.

XI.9 Ο Καθοριστικός Ρόλος των Συναλλαγματικών Ισοτιμιών

Οι εθνικοί τραπεζικοί τομείς απολαμβάνουν το νομικά κατοχυρωμένο δικαίωμα να αυξάνουν τις υποχρεώσεις τους στο δικό τους νόμισμα, ενώ τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις υπόκεινται στη νομική υποχρέωση να αυξάνουν το ενεργητικό τους στα αντίστοιχα νομίσματα. **Μεσοπρόθεσμα**, το αντίτιμο του αγαθού (δηλαδή του μοναδιαίου ομολόγου) που συνδέεται με τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα κάθε χώρας, καθορίζεται αυτόνομα από τα ίδια και, άρα, οι υπόλοιποι τομείς αδυνατούν να προβλέψουν, επακριβώς, τις διαφοροποιήσεις του επιτοκίου και της ισοτιμίας του συγκεκριμένου νομίσματος. **Μακροχρόνια**, όμως, τόσο οι πιστωτές όσο και οι χρεώστες αντιλαμβάνονται ότι:

- μια μονάδα διεθνούς ρευστότητας έχει την ίδια αξία, ασχέτως του νομίσματος που εισπράττεται ή πληρώνεται.
- η εφαρμογή της Ακάλυπτης Ισοδυναμίας των Επιτοκίων (Uncovered Interest Parity) είναι αναπόδραστη.

Το αντίθετο θα αποτελούσε μια αδικαιολόγητη (και, άρα, μη-διατηρήσιμη) επιλογή πτώχευσης εκείνου που πληρώνει υψηλότερο τόκο, προς πλουτισμό εκείνου που εισπράττει υψηλότερο τόκο, όταν ο τελευταίος υπολογίζεται σε *ΔΛΜ*. Στα στενά περιθώρια όπου οι Ορίζουσες Routh-Hurwitz, καθώς επίσης οι τομεακές ροές, είναι

μεγαλύτερες από το μηδέν, οι συνεργαζόμενες τραπεζικές αρχές είναι σε θέση να πηδαλιουχήσουν αριθμό εισπράξεων και πληρωμών του διεθνούς συμπλέγματος συναλλαγών μέσω συμφωνημένων διαφοροποιήσεων ίσου αριθμού παραμέτρων του ετήσιου νομισματικού ισολογισμού:

147 $\mathbf{K_F} = \mathbf{\Pi}(\xi_1, \xi_2; k_{1f1h}, k_{1f2h}, k_{1f1b}, k_{1f2b}; k_{2f1h}, k_{2f2h}, k_{2f1b}, k_{2f2b}) = \mathbf{\Pi}(K_F, \mu_{1H}, \mu_{2H}, \mu_{1B}, \mu_{2b})$

Στην περίπτωση της παγκόσμιας οικονομίας **Ζήτα** (με δεδομένη τη μεταβολή του διεθνούς τραπεζικού ισολογισμού K_F και λαμβάνοντας υπόψη ότι το νόμισμα τής **Άλφα** χρησιμοποιείται ως η *ΔΛΜ*), οι χρηματικές ροές των τομέων και των παζαριών αμφότερων των χωρών εκφράζονται ως γραμμικές συναρτήσεις της συναλλαγματικής ισοτιμίας $\xi_2 = \xi$.

Πίνακας ***XI₁₅***
Οι Τομεακές Ροές της Παγκόσμιας Οικονομίας Ζήτα ως Συναρτήσεις της $\xi_2 = \xi$.

Έσοδα των Νοικοκυριών τής Άλφα =
$${}^{z}Y_{1H} = \{(^{30374872044875}/_{941755465728}) + (^{182249232269250}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$
Έξοδα των Νοικοκυριών τής Άλφα =
$${}^{z}E_{1H} = \{(^{30948711875}/_{5518098432}) + (^{31691480960000}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$
Έσοδα των Νοικοκυριών τής Γάμμα =
$${}^{z}Y_{2H} = \{(^{802580255369766125}/_{2825266397184}) + (^{160510737532250}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$
Έξοδα των Νοικοκυριών τής Γάμμα =
$${}^{z}E_{2H} = \{(^{414707842625}/_{235438866432}) + (^{9952988223000}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$
Έσοδα των Επιχειρήσεων τής Άλφα =
$${}^{z}Y_{1B} = \{(^{11400971756375}/_{403609485312}) + (^{159613604589250}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$
Έξοδα των Επιχειρήσεων τής Άλφα =
$${}^{z}E_{1B} = \{(^{3930491875}/_{2452488192}) + (^{9055853280000}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$
Έσοδα των Επιχειρήσεων τής Γάμμα =
$${}^{z}Y_{2B} = \{(^{11220334128125}/_{403609485312}) + (^{157084677793750}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$
Έξοδα των Επιχειρήσεων τής Γάμμα =
$${}^{z}E_{2B} = \{(^{543910540375}/_{470877732864}) + (^{6526926484500}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$
Έσοδα των Διεθνών Τραπεζιτών =
$${}^{z}Y_{F} = \{(^{2296823821375}/_{706316599296}) + (^{18374590571000}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$
Έξοδα των Διεθνών Τραπεζιτών =
$${}^{z}E_{F} = \{(^{24487278875}/_{222953472}) + (^{620605595808000}/_{602231005237}) \cdot \xi\} \cdot K_F$$

Η ισοτιμία **ξ**, όπως όλα τα αντίτιμα, δεν επηρεάζει τις διαχρονικές ιδιότητες του (γενεσιουργού) δυναμικού συστήματος **137**, το οποίο, όπως είδαμε, είναι σφαιρικά σταθερό, όταν $\boldsymbol{\alpha} = {}^{55}/_{64}$ και $\boldsymbol{\gamma} = {}^{2}/_{3}$. Οι τομεακές ροές, που αποδίδει η εφαρμογή του Κανόνα τού Cramer στο (αντίστοιχο) στατικό σύστημα **139**, καταγράφονται στον Πίνακα ***XI*$_{15}$**. Λύνοντας ταυτόχρονα τις δέκα ανισότητες (${}^{Z}Y_{1H}>0$, ${}^{Z}E_{1H}>0$, ${}^{Z}Y_{2H}>0$, ${}^{Z}E_{2H}>0$, ${}^{Z}Y_{1B}>0$, ${}^{Z}E_{1B}>0$, ${}^{Z}Y_{2B}>0$, ${}^{Z}E_{2B}>0$, ${}^{Z}Y_{F}>0$, ${}^{Z}E_{F}>0$) συμπεραίνουμε ότι οι πέντε θεσμικοί τομείς απολαμβάνουν μεγαλύτερα τού μηδενός έσοδα και έξοδα για όλες τις συναλλαγματικές ισοτιμίες $0 < \xi = \Delta M/€ =$ **$/€** και, άρα, η παγκόσμια οικονομία **Ζήτα** πηδαλιουχείται για όλες τις ισοτιμίες του νομίσματος τής **Γάμμα**.

Οι παγκόσμιες εισπράξεις και πληρωμές (${}^{Z}Y$, ${}^{Z}E$) είναι τα αθροίσματα των αντίστοιχων εθνικών τομεακών ροών:

$$
\begin{aligned}
&{}^{Z}Y = {}^{Z}Y_{1H} + {}^{Z}Y_{2H} + {}^{Z}Y_{1B} + {}^{Z}Y_{2B} + {}^{Z}Y_{F} = \\
&= \{({}^{24208315884125}/_{201804742656}) + ({}^{677832844755500}/_{602231005237})\cdot\xi\}\cdot K_F = \\
&= {}^{Z}E_{1H} + {}^{Z}E_{2H} + {}^{Z}E_{1B} + {}^{Z}E_{2B} + {}^{Z}E_{F} = {}^{Z}E
\end{aligned}
\qquad \textbf{148}
$$

Ceteris paribus, οι παγκόσμιες εισπράξεις και πληρωμές (${}^{Z}Y$, ${}^{Z}E$) είναι θετικές συναρτήσεις της συναλλαγματικής ισοτιμίας **ξ** του νομίσματος τής **Γάμμα**. Από τον ορισμό της διεθνούς προσφοράς ρευστότητας:

$$K_F = K_{1F} + K_{2F} = \xi_1\cdot k_{1f} + \xi_2\cdot k_{2f} = K_{1F} + \xi\cdot k_{2f} = K_{1F} + \boldsymbol{\varphi}\cdot K_F \qquad \textbf{149}$$

είναι φανερό ότι, με αμετάβλητη την ποσότητα K_{1F} τής **Άλφα**, το χρηματοπιστωτικό μερίδιο **φ** και η συναλλαγματική ισοτιμία $\xi_2 = \xi$ τής **Γάμμα** αλληλοεξαρτώνται, ως εξής:

$$\boldsymbol{\varphi} = (\xi_2\cdot k_{2f})/(\xi_1\cdot k_{1f} + \xi_2\cdot k_{2f}) = (\xi\cdot k_{2f})/(K_{1F} + \xi\cdot k_{2f}) \qquad \textbf{150}$$

Όταν η ΔΝΛ επιτρέπει κάποια, έστω ελάχιστα, περιθώρια διακύμανσης των μεριδίων (1-**φ**) και **φ** των δύο χωρών ή ζωνών στην αύξηση των υποχρεώσεων του παγκόσμιου τραπεζικού συστήματος, τότε η συναλλαγματική ισοτιμία **ξ** του νομίσματος **Γάμμα** αποτελεί μια από τις παραμέτρους άσκησης μεσοπρόθεσμης πολιτικής. Οι διαφοροποιήσεις των ετήσιων ροών των καταναλωτών, των παραγωγών και των χρηματοπιστωτών του διεθνούς συμπλέγματος **Ζήτα**, οι οποίες προκαλούνται από ανατίμηση (+) ή υποτίμηση (-) της ισοτιμίας του **€** έναντι του **$**, παρατίθενται πιο κάτω:

Πίνακας ***XI*$_{16}$**

Οι Αλλαγές στις Τομεακές Ροές τής Ζήτα από Ανατίμηση (+) τού ξ

$\partial^Z Y_{1H} / \partial\xi = 302{,}623 \cdot K_F$ $\qquad$ $\partial^Z E_{1H} / \partial\xi = 52{,}623 \cdot K_F$

$\partial^Z Y_{2H} / \partial\xi = 266{,}527 \cdot K_F$ $\qquad$ $\partial^Z E_{2H} / \partial\xi = 16{,}527 \cdot K_F$

$\partial^Z Y_{1B} / \partial\xi = 265{,}037 \cdot K_F$ $\qquad$ $\partial^Z E_{1B} / \partial\xi = 15{,}072 \cdot K_F$

$\partial^Z Y_{2B} / \partial\xi = 260{,}838 \cdot K_F$ $\qquad$ $\partial^Z E_{2B} / \partial\xi = 10{,}838 \cdot K_F$

$\partial^Z Y_F / \partial\xi = 30{,}51 \cdot K_F$ $\qquad$ $\partial^Z E_F / \partial\xi = 1\,030{,}51 \cdot K_F$

Συνάγεται ότι η ανατίμηση της ισοτιμίας του νομίσματος τής **Γάμμα** αυξάνει τα έσοδα $(302{,}623+265{,}037) \cdot K_F$ και τα έξοδα $(52{,}623+15{,}072) \cdot K_F$ των μη-εκδοτικών τομέων τής **Άλφα** περισσότερο από τα εισοδήματα $(266{,}527+260{,}838) \cdot K_F$ και τις δαπάνες $(16{,}527+10{,}838) \cdot K_F$ των μη-εκδοτικών τομέων τής **Γάμμα**. Οι διαφορές πηγάζουν από το ότι τα νοικοκυριά και οι επιχειρήσεις προτιμούν την επιτόπια σε σχέση προς την ξένη εργασία και παραγωγή, στη μεν **Άλφα** στην αναλογία $\alpha/(1-\alpha) \approx 6/1$, στη δε **Γάμμα** στην αναλογία $\gamma/(1-\gamma) \approx 2/1$.

Στο παράδειγμα της διεθνούς οικονομίας **Ζήτα** υποθέσαμε ότι τα συνιστώντα κράτη ξεκινούν από τα ίδια αποθέματα εργασίας, παραγωγής και ρευστότητας. Εφόσον ήδη έχουμε αναπτύξει όλη τη σχετική μεθοδολογία, θα αφήσουμε τον ενδιαφερόμενο μελετητή να ενδιατρίψει στα πιθανά σενάρια αναφορικά με τα ετήσια χάσματα των ποσοτήτων και τις ετήσιες μεταβολές των αντιτίμων των αγαθών στις χώρες **Άλφα** και **Γάμμα**. Όπως είναι γνωστό, για να πηδαλιουχείται τελείως οποιοδήποτε οικονομικό σύστημα απαιτείται, ανάμεσα σε άλλα, ισότητα μεταξύ του αριθμού των στόχων και του αριθμού των εργαλείων. Η προαναφερθείσα ιδιότητα ικανοποιείται εάν κάθε κράτος διαθέτει, επιπλέον της νομισματικής και της συναλλαγματικής, το πλήρες οπλοστάσιο της δημοσιονομικής πολιτικής. Σύμφωνα με την Ευκλείδεια μεθοδολογία, το στοιχειώδες μοντέλο ενός διεθνούς συμπλέγματος συναλλαγών, που εμπεριέχει δημοσιονομικές παραμέτρους, κατασκευάζεται εύκολα με τη 'συρραφή' δύο προσομοιώσεων του τύπου **Βήτα ή 81**. Και σε αυτήν την περίπτωση, νοουμένου ότι οι Ορίζουσες τών Routh-Hurwitz είναι μεγαλύτερες από το μηδέν, οι εθνικές αρχές οφείλουν να συντονίζουν τα τομεακά μερίδια των τραπεζικών πιστώσεων, των φορολογικών εισπράξεων και των κρατικών δαπανών, ώστε οι ετήσιες ροές των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων και των χρηματοπιστωτών να διατηρούνται θετικές ενώ, ταυτόχρονα, τα ποσοτικά χάσματα στα παζάρια, και άρα οι πιέσεις στα αντίτιμα των αγαθών, να ελαχιστοποιούνται σε αμφότερες τις χώρες.

XII. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

Κάθε μονάδα ή ομάδα που συμμετέχει στο οικονομικό σύστημα αποζητά έσοδα πωλώντας ένα χαρακτηριστικό αγαθό, ενώ προβαίνει σε έξοδα αγοράζοντας άλλα αγαθά. Συνεπώς, τα σύγχρονα συμπλέγματα συναλλαγών λειτουργούν στη βάση:

- δούναι και λαβείν, πίστωσης και χρέωσης και, άρα, παθητικού και ενεργητικού.
- ανταλλαγής υπηρεσιών και προϊόντων με χρήματα ή χρεόγραφα, και αντίστροφα.

Ούτε οι εκ φύσεως αντίθετες χρηματικές ροές ούτε τα διάφορα είδη πραγματικών αγαθών υπόκεινται, άμεσα, σε μαθηματικές πράξεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού ή διαίρεσης, αφού τα εν λόγω μεγέθη μετρούνται σε άλλες διαστάσεις του διανυσματικού χώρου. Αρχίζοντας από τις προαναφερθείσες αλήθειες, καθώς και τη νεοκλασική θεωρία, διαμορφώσαμε 12 αξιωματικές προτάσεις, με τις οποίες έχουμε επιτύχει:

- την εφαρμογή των νόμων των μαθηματικών σε οποιοδήποτε σύμπλεγμα συναλλαγών και, άρα,
- την πλήρη αναπαράσταση οποιασδήποτε οικονομίας ως ενός συστήματος μαθηματικών συναρτήσεων.

Όπως ο Ευκλείδης απέδειξε ότι η γεωμετρία υπόκειται στους νόμους των μαθηματικών, νοουμένου ότι ισχύουν τα πέντε Ευκλείδεια αξιώματα, έτσι και εμείς έχουμε αποδείξει ότι, όταν ισχύουν οι 12 αξιωματικές προτάσεις, η οικονομία υπόκειται στους νόμους των μαθηματικών. Το ακριβές υπόδειγμα οποιουδήποτε συμπλέγματος συναλλαγών δομείται ως ένα σύστημα μη-ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης, με (μεσοπρόθεσμα) σταθερούς συντελεστές. Οι ενδογενείς μεταβλητές, οι οποίες είναι τα εισοδήματα και οι δαπάνες των ομοειδών μονάδων ή θεσμικών τομέων, συνιστούν ένα διανυσματικό χώρο $\mathbf{V_{2xn}}$, όπου το **n** είναι ο αριθμός των τομέων ή των αγαθών της οικονομίας. Επομένως, οι χρηματικές ροές, καθώς επίσης τα αντίστοιχα στοιχεία ενεργητικού και παθητικού που παράγει το σύστημα, κατανέμονται ολοκληρωτικά μεταξύ των τομέων, των παζαριών και των χωρών που συμμετέχουν. Το λεγόμενο συναθροιστικό πρόβλημα, που για χρόνια ταλάνιζε τους κατασκευαστές και χρήστες οικονομετρικών και άλλων μοντέλων, με αυτόν τον τρόπο εξαλείφεται διά παντός.

Οι 12 αξιωματικές προτάσεις ή θεμελιώδεις υποθέσεις των Ευκλείδειων Οικονομικών κατατάσσονται σε τέσσερεις ενότητες, ως ακολούθως:

Α. Οι Κανόνες των Συναλλαγών

1. Τα οικονομικά μεγέθη μετρούνται ομοιόμορφα στην ίδια μονάδα.
2. Μεσοπρόθεσμα, τα αντίτιμα όλων των αγαθών καθορίζονται εξωγενώς.
3. Η οικονομική δραστηριότητα καταγράφεται από το τραπεζικό σύστημα.

Β. Η Συμπεριφορά των Τομέων

4. Οι οικονομικές μονάδες κατατάσσονται πλήρως σε θεσμικούς τομείς.
5. Οι κατανομές των τομεακών εσόδων και εξόδων είναι μεσοπρόθεσμα σταθερές.
6. Οι τομείς μεγιστοποιούν τον πλούτο τους, ενώ προσαρμόζουν τις πληρωμές ανάλογα με τις εισπράξεις τους.

Γ. Οι Μαθηματικές Προδιαγραφές

7. Τα τομεακά έσοδα και έξοδα καθορίζονται, ταυτόχρονα, ως ένα διάνυσμα.
8. Οι συναρτήσεις των τομεακών συμπεριφορών είναι γραμμικώς ομογενείς.
9. Το επιτόκιο αποτελεί τη μόνη σύνδεση του παρόντος με το παρελθόν και το μέλλον.

Δ. Οι Νομισματικές Διευθετήσεις

10. Οι τράπεζες εκδίδουν και αποδέχονται μόνο εγγυημένα χρεόγραφα.
11. Οι τράπεζες δικαιούνται να εκδίδουν χρεόγραφα, που οφείλουν να αποδέχονται οι άλλοι τομείς.
12. Η νομισματική αρχή παρεμβαίνει στην ετήσια μεταβολή και κατανομή του τραπεζικού ισολογισμού.

Το πρωταρχικό όργανο πολιτικής είναι η ετήσια μεταβολή του παθητικού των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων και η κατανομή του ως ενεργητικού των μη-εκδοτικών τομέων. Η συμπερίληψη δημοσιονομικών και διεθνών συναλλαγών αυξάνει, ανάλογα, τον αριθμό των παρεμβατικών εργαλείων. Ενώ προηγουμένως κάθε οικονομικό και, ιδίως, οικονομετρικό μοντέλο εθεωρείτο και, άρα, ετύγχανε χειρισμού ως **είδος αφ' εαυτού**, εφεξής, χάρη στην Ευκλείδεια μεθοδολογία, τα υποδείγματα συμπλεγμάτων συναλλαγών όλων των μεγεθών μπορούν να κτίζονται στο ίδιο πλαίσιο και σύμφωνα με τις ίδιες αρχές.

Οι οποιεσδήποτε διαφορές πηγάζουν μόνο από τις εξωγενείς παραμέτρους, δηλαδή τις αγοραίες συμπεριφορές, τις κρατικές παρεμβάσεις, τους φυσικούς πόρους, κ.λπ., που προσδίδουν σε κάθε οικονομία την ιδιαιτερότητά της. Οι μεσοπρόθεσμα σταθερές, αλλά μακροχρόνια μεταβλητές, εξωγενείς παράμετροι κάθε συμπλέγματος συναλλαγών, είναι:

1) Ο αριθμός των θεσμικών τομέων ή παζαριών αγαθών και, άρα, ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος.
2) Τα ποσοστά των τομεακών εισοδημάτων που πηγάζουν από και των δαπανών που προορίζονται για κάθε παζάρι.
3) Οι παράμετροι νομισματικής, δημοσιονομικής, συναλλαγματικής, τιμολογιακής και εισοδηματικής πολιτικής.
4) Οι ποσότητες των ετών εργασίας, τεμαχίων παραγωγής και μονάδων ρευστότητας οι οποίες είναι διαθέσιμες.
5) Οι τρέχουσες τιμές των διαφόρων ειδών υπηρεσιών, προϊόντων και ομολόγων.
6) Οι ετήσιοι ρυθμοί διαφοροποίησης των προαναφερθεισών εξωγενών μεταβλητών.

Ως αποτέλεσμα των ανωτέρω, οι εθνικές οικονομίες, οι νομισματικές ζώνες και τα αναπτυξιακά στάδιά τους συγκρίνονται με απλότητα, ομοιομορφία και γενικότητα. Επιπλέον, τα δυναμικά συστήματα, τα οποία αποτελούνται από μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, λύνονται και μελετούνται σχετικώς εύκολα, ιδίως με τη βοήθεια λογισμικών, όπως το *Mathematica* της εταιρείας Wolfram Research. Έκαστο Ευκλείδειο μοντέλο αποδίδει το διάνυσμα ισορροπίας και τις συνθήκες σταθερότητας, που αντιστοιχούν στο σύνολο των εξωγενών παραμέτρων ετησίως. Μεσοπρόθεσμα, οι μισθοί, οι τιμές και οι αξίες μεταβάλλονται αυτόνομα, αφού οποιαδήποτε αύξηση ή μείωση προϋποθέτει συντεχνιακή, εταιρική, γραφειοκρατική ή επίσημη αποδοχή, επικύρωση, έγκριση ή άδεια. Ο κύκλος δοσοληψιών σε κάθε παζάρι, διαιρούμενος με το μισθό, την τιμή ή την αξία που αντιστοιχεί, αποδίδει τον αριθμό των ετών υπηρεσιών, των τεμαχίων προϊόντων ή των μοναδιαίων ομολόγων, που πωλούνται και αγοράζονται εκεί στη μονάδα του χρόνου. Οι ανοδικές ή πτωτικές τάσεις στα αντίτιμα των αγαθών καθορίζονται από τα χάσματα ανάμεσα στις ζητούμενες και στις διαθέσιμες ποσότητες. Πιο μακροχρόνιες προβλέψεις επιτυγχάνονται με επανάληψη της προσομοίωσης ή των υπολογισμών για κάθε έτος, για το οποίο υπάρχουν ή έχουν γίνει προβολές ή υποθέσεις για τις ισχύουσες εξωγενείς μεταβλητές.

Σύμφωνα με τη θεωρία του δυναμικού ελέγχου συστημάτων, τα διανύσματα στατικής ισορροπίας, τα οποία συνίστανται από μοναδικά, σταθερά και θετικά στοιχεία είναι πηδαλιουχούμενα. Οι νομισματικές, δημοσιονομικές και συναλλαγματικές αρχές μπορούν να διερευνούν λεπτομερώς τις επιπτώσεις της μεταπήδησης από το σημερινό σύνολο σε οποιοδήποτε νέο σύνολο παραμέτρων πολιτικής, το οποίο πιστεύουν ότι θα βελτιώσει τις χρηματικές ροές των τομέων και τα ποσοτικά χάσματα των αγαθών. Η συνύπαρξη πολλών κυρίαρχων και αλληλεπηρεαζόμενων κρατών απαιτεί όπως αυτά συντονίζουν τις τραπεζικές πιστώσεις, τις φορολογικές εισπράξεις, τις δημόσιες δαπάνες, τα ετήσια επιτόκια και τις συναλλαγματικές ισοτιμίες τους, με τρόπο που τα έσοδα και έξοδα των νοικοκυριών, των επιχειρήσεων, των χρηματοπιστωτών και των κυβερνώντων να διατηρούνται θετικά, ενώ τα ποσοτικά χάσματα στα παζάρια και, άρα, οι πιέσεις στα αντίτιμα των αγαθών, να ελαχιστοποιούνται, ει δυνατόν, σε όλες τις χώρες, ταυτόχρονα. Όταν τα έσοδα ή έξοδα κάποιου τομέα διαφέρουν από εκείνα που αντιστοιχούν στην ισορροπία ολόκληρου του συστήματος, τότε αυτά επιδρούν θετικά ή αρνητικά στις υπόλοιπες ροές που, με τη σειρά τους, προκαλούν νέες συγκλίνουσες ή (χειρότερα) αποκλίνουσες αντιδράσεις. Συνεπώς, όποιος εισηγείται, συζητά ή προγραμματίζει την εφαρμογή μέτρων οικονομικής πολιτικής, χωρίς να διαθέτει το μαθηματικό υπόδειγμα του συγκεκριμένου συμπλέγματος συναλλαγών, μοιάζει:

- με έναν ποντοπόρο καπετάνιο, ο οποίος επιχειρεί να ταξιδεύσει με το πλοίο του σε απομακρυσμένα μέρη χωρίς χάρτη, πυξίδα και εξάντα ή
- με ένα διαστημικό οργανισμό, που τολμά να εκτοξεύει επανδρωμένους δορυφόρους, χωρίς να γνωρίζει τη διαδρομή τους κάθε δευτερόλεπτο.

Συναφώς, δώσαμε ολοκληρωμένα παραδείγματα συμπλεγμάτων συναλλαγών, τα οποία αποτελούνται από τρεις, από τέσσερις καθώς, επίσης, από πέντε τομείς ή παζάρια και, επομένως, από έξι, από οκτώ και από δέκα μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, αντίστοιχα. Ο απώτερος στόχος των παραδειγμάτων ήταν η πρόβλεψη των ετήσιων επιπτώσεων στις χρηματικές ροές των τομέων και στα ποσοτικά χάσματα των αγαθών, που προκαλούνται από διάφορα σενάρια πολιτικής ή από υποθετικούς κλυδωνισμούς. Ταυτόχρονα, εφαρμόσαμε την Ευκλείδεια μεθοδολογία σε αριθμό πρακτικών και θεωρητικών προβλημάτων, ώστε να αξιολογηθεί, ευρύτερα, η χρησιμότητά της. Ανάμεσα στα θέματα που μελετήσαμε είναι:

- οι ακριβείς σχέσεις ανάμεσα στις τομεακές χρηματικές ροές, τις ποσότητες και τα αντίτιμα των αγαθών,
- η μέτρηση της σύγκλισης διαφόρων οικονομιών προς έναν ενιαίο χώρο για σκοπούς υιοθέτησης κοινού νομίσματος,
- η επίδραση του προεξοφλητικού επιτοκίου στους χρηματοοικονομικούς ισολογισμούς των θεσμικών τομέων,
- η διαχρονική αναπαράσταση των σταδίων της οικονομικής μεγέθυνσης μέσω αυτοματοποιημένων υπολογισμών,
- τα συγκριτικά μειονεκτήματα και πλεονεκτήματα των μέτρων νομισματικής, δημοσιονομικής ή άλλου είδους πολιτικής,
- η τομεακή κατανομή των κερδοζημιών, οι οποίες προέρχονται από την παγκοσμιοποίηση των συναλλαγών.

Οι 12 αξιωματικές προτάσεις, με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού και ηλεκτρονικού υπολογιστή, καθιστούν δυνατή τη μαθηματική προσομοίωση και τη μαθηματική διερεύνηση κάθε οικονομικού προβλήματος ως αναπόσπαστου τμήματος του ολικού πλέγματος τομέων και παζαριών, χωρίς αναφορά σε άλλες θεωρίες ή βοηθήματα. Τα Ευκλείδεια μοντέλα που αναπαριστάνουν τις αγοραίες δραστηριότητες των καταναλωτών, των παραγωγών, των τραπεζιτών και των κυβερνώντων επιβεβαιώνουν τα πλείστα κλασικά και σύγχρονα συμπεράσματα. Η κατανόηση και εφαρμογή των 12 αξιωματικών προτάσεων προϋποθέτει βαθιές γνώσεις των οικονομικών και των μαθηματικών επιστημών. Για αυτόν το λόγο αποφύγαμε, ως περισσές, τις συγκρίσεις με προηγούμενες συνεισφορές στη δόμηση και χρήση υποδειγμάτων συμπλεγμάτων συναλλαγών. Τέτοιου είδους αναφορές θα ήταν άδικες για τους επιστήμονες, των οποίων τα έργα έτυχε, για οποιονδήποτε λόγο, να παραβλεφθούν ή να επικριθούν. Στη βιβλιογραφία που ακολουθεί έχουν περιληφθεί οι συγγραφείς και τα έργα που χρησίμευσαν άμεσα στην έμπνευση, την απόδειξη ή τη συμπλήρωση των διαφόρων θεμάτων.

Το μεγαλύτερο μειονέκτημα των Ευκλείδειων μοντέλων είναι η απουσία προϊστορίας. Προς το παρόν, δεν υπάρχουν συγγράμματα για το βέλτιστο αριθμό τομέων ή αγαθών και, άρα, για το βέλτιστο μέγεθος αυτού του είδους των μοντέλων. Αυτό και άλλα προβλήματα πρέπει να λυθούν από τη θεωρητική και την πρακτική σκοπιά, το συντομότερο δυνατό, ώστε τα Ευκλείδεια υποδείγματα να αρχίσουν να συμβάλλουν αποτελεσματικά:

- στην καταγραφή των οικονομικών δομών και τη σύγκριση των συμπλεγμάτων συναλλαγών των διαφόρων χωρών,
- στην ετοιμασία ετήσιων προβλέψεων βάσει προσυμφωνημένων διαφοροποιήσεων των εξωγενών μεταβλητών,
- στην κατανόηση και το διάλογο μεταξύ όλων όσων εμπλέκονται στη διαμόρφωση οικονομικής πολιτικής.

Από τη δεκαετία του 1930, χιλιάδες οικονομετρικά μοντέλα έχουν δοκιμασθεί από επιστήμονες και οργανισμούς. Παρά την αναμφισβήτητα μεγάλη χρησιμότητά τους, τα μοντέλα αυτά εξακολουθούν να παρουσιάζουν αδυναμίες. Επομένως, οι επενδύσεις ανάλογων ποσών από πανεπιστήμια, επιχειρήσεις, τράπεζες και κυβερνήσεις, στην κατασκευή, εφαρμογή και τελειοποίηση των Ευκλείδειων υποδειγμάτων θα απέβαινε ιδιαιτέρως επωφελής, αφού η νέα μεθοδολογία υπόσχεται πολλά και αξίζει υποστήριξης. Η μαθηματική προσέγγιση στη δόμηση και χρήση οικονομικών μοντέλων μπορεί να αρχίσει να εφαρμόζεται σταδιακά για την επίλυση διάφορων τρεχόντων προβλημάτων από πολλές χώρες και οργανισμούς, ταυτόχρονα με τη συλλογή των αναγκαίων στατιστικών στοιχείων και την ανάπτυξη ειδικών λογισμικών προγραμμάτων. Τα Ευκλείδεια Οικονομικά πιθανό να εισαχθούν και να διδάσκονται σε πλείστα πανεπιστήμια στο εγγύς μέλλον λόγω των βαθιών θεωρητικών τους θεμελίων και των πολλών πρακτικών τους χρήσεων. Κάθε νέα ανακάλυψη δημιουργεί ένα εργαλείο, το οποίο τίθεται στη διάθεση εκείνων που επιθυμούν να το χρησιμοποιήσουν για τη βελτίωση του ανθρώπου, κυρίως, και του περιβάλλοντός του. Όσοι μελετήσουν, εφαρμόσουν και επεκτείνουν την προτεινόμενη μεθοδολογία θα αποτελέσουν μέρος τού γίγνεσθαι της επιστήμης των συμπλεγμάτων συναλλαγών, η οποία θα ενώσει για πάντα τους κλάδους των οικονομικών, της στατιστικής και της λογιστικής μέσω των νόμων της γεωμετρίας και, επομένως, των μαθηματικών. Το Ίδρυμα Ευκλείδειων Οικονομικών στοχεύει στην προώθηση της νέας επιστημονικής προσέγγισης στα συμπλέγματα συναλλαγών μέσω διαλέξεων, εκδόσεων και εφαρμογών. Σε αυτό το πλαίσιο, ελπίζουμε πως το ανά χείρας βιβλίο:

- θα αποτελέσει ένα είδος Πέτρας της Ροσέττας όσον αφορά τους όρους, τις έννοιες και τα σύμβολα, που χρησιμοποιούν οι επιστήμονες οικονομολόγοι,
- θα αναθεωρείται σε τακτά διαστήματα, ώστε να ενσωματώνει τις έρευνες και τα σχόλια ακαδημαϊκών και επαγγελματιών από ολόκληρο τον κόσμο.

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Οι υπολογισμοί και αποδείξεις που ακολουθούν διατίθενται σε μορφή CD από το συγγραφέα του βιβλίου, μέσω των ηλεκτρονικών ταχυδρομικών διευθύνσεων: sophoclesmichaelides@centralbank.gov.cy ή somapomi@logos.cy.net. Το CD μπορεί να αναγνωσθεί και να χρησιμοποιηθεί μόνο με το λογισμικό *Mathematica* της εταιρείας Wolfram Research.

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Μαθηματικοί Υπολογισμοί και Αποδείξεις

Σελίδες στο Βιβλίο		Σελίδες στο Παράρτημα
III.	**ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΗ~ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ**	
37	Μέθοδος Αριστοποίησης υπό Περιορισμούς του Lagrange	202
IV.	**ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ**	
45-47	Η Μοναδικότητα της Στατικής Ισορροπίας και οι Συνθήκες Δυναμικής Σταθερότητας του Συστήματος Διαφορικών Εξισώσεων 7	207
49	Λύση του Συστήματος Ανισοτήτων που Σχηματίζεται από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz της Οικονομίας Άλφα	209
50-51	Εξεύρεση (με τον Κανόνα του Cramer) των Στατικών Ροών της Στοιχειώδους Νομισματικής Οικονομίας 7	213
51	Οι Μερικές Παράγωγοι των Τομεακών Εισοδημάτων και Δαπανών ως προς την Κατανομή του Τραπεζικού Παθητικού h	217
V.	**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**	
63	Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο και Λύση του Συστήματος Ανισοτήτων που Σχηματίζεται από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz του Υποδείγματος 20	222
64-65	Εξεύρεση (με τον Κανόνα του Cramer) των Στατικών Ροών του Στοιχειώδους Μαθηματικού Υποδείγματος 20	226
65-66	Οι Μερικές Παράγωγοι των Τομεακών Ροών της Στοιχειώδους Οικονομίας Άλφα ως προς το μερίδιο h	232
65	Οι Επαναλαμβανόμενες Αγοραπωλησίες στα Παζάρια Αγαθών της Άλφα	235
VI.	**ΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΧΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΓΑΘΩΝ**	
81-84	Το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο και οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz του Υποδείγματος 43	240
VII.	**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**	
91-92	Ο Υπολογισμός του Εμβαδού ενός Τριγώνου Σύμφωνα με τον Τύπο της Αναλυτικής Γεωμετρίας	244
X.	**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**	
135-137	Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο και Λύση του Συστήματος Ανισοτήτων που Σχηματίζεται από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz του Υποδείγματος 87	246
137-138	Λύση των Στατικών Εξισώσεων του Μοντέλου ως Συναρτήσεων του ζ και Υπολογισμός των Ελαστικοτήτων Ανταπόκρισης των Ετήσιων Ροών στο ζ	249
138-139	Η Λύση των Στατικών Εξισώσεων ως Ένα Σύστημα Ανισοτήτων και η Κατανομή των Ετήσιων Ροών Ανάμεσα στους Θεσμικούς Τομείς	261
139	Η Κατανομή των Επαναλαμβανόμενων Αγοραπωλησιών Ανάμεσα στα Παζάρια Αγαθών	265

Σελίδες στο Βιβλίο		Σελίδες στο Παράρτημα
140	Οι Συντελεστές του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου ως Συναρτήσεις των Φόρων Παρακράτησης και η Λύση των Αντίστοιχων Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Ένα Σύστημα Ανισοτήτων	267
141	Οι Ροές Στατικής Ισορροπίας ως Συναρτήσεις των Φορολογικών Συντελεστών και η Λύση τους ως Ένα Σύστημα Ανισοτήτων	277
141	Οι Ελαστικότητες Ανταπόκρισης των Τομεακών Ροών ως προς τον Φόρο Παρακράτησης στην Εργασία	287
142	Οι Ελαστικότητες Ανταπόκρισης των Τομεακών Ροών ως προς τον Φόρο Παρακράτησης στην Παραγωγή	295
143	Οι Συντελεστές του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου 88 ως Συναρτήσεις της Κατανομής των Δημόσιων Δαπανών και η Λύση των Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Σύστημα Ανισοτήτων	302
143-144	Οι Ροές Ισορροπίας ως Συναρτήσεις της Κατανομής των Δημόσιων Δαπανών και η Λύση του Αντίστοιχου Συστήματος Ανισοτήτων	318
144	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή των Δημόσιων Δαπανών Μεταξύ Προϊόντων και Ομολόγων	329
145	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή των Δημόσιων Δαπανών Μεταξύ Υπηρεσιών και Ομολόγων	334
145	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή των Δημόσιων Δαπανών Μεταξύ Υπηρεσιών και Προϊόντων	339
146-147	Οι Ροές Ισορροπίας ως Συναρτήσεις της Κατανομής του Τραπεζικού Παθητικού και η Λύση του Αντίστοιχου Συστήματος Ανισοτήτων	344
147	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Κράτους και Επιχειρήσεων	355
148	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Νοικοκυριών και Κράτους	360
148	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Επιχειρήσεων και Νοικοκυριών	365
XI.	**ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΕΘΝΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ**	
159	Η Αντικατάσταση των Συντελεστών Τομεακής Συμπεριφοράς της Δέλτα στο Παγκόσμιο Οικονομικό Μοντέλο 116	371
161-162	Οι Συντελεστές του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου ως Συναρτήσεις των Τραπεζικών Δαπανών και η Λύση των Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Σύστημα Ανισοτήτων	374
164	Οι Ροές Ισορροπίας ως Συναρτήσεις της Κατανομής του Διεθνούς Τραπεζικού Παθητικού και η Λύση τους ως Σύστημα Ανισοτήτων	382
165	Οι Ροές Ισορροπίας και η Κατανομή τους Ανάμεσα στους Θεσμικούς Τομείς των Δύο Χωρών της Δέλτα	394
165	Η Κατανομή των Επαναλαμβανόμενων Αγοραπωλησιών Ανάμεσα στα Παζάρια Αγαθών των Δύο Χωρών της Δέλτα	397

Σελίδες στο Βιβλίο		Σελίδες στο Παράρτημα
166	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Διεθνούς Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Νοικοκυριών και Επιχειρήσεων	401
176	Αντικατάσταση των Συντελεστών Τομεακής Συμπεριφοράς της Ζήτα στο Παγκόσμιο Οικονομικό Μοντέλο 116	404
177	Υπολογισμός των Συντελεστών του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου και η Λύση των Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Σύστημα Ανισοτήτων ως προς το γ, όταν α = $^{1}/_{2}$, α = $^{3}/_{4}$, α = $^{7}/_{8}$, α = $^{127}/_{128}$.	407
178-179	Εξεύρεση (με τον Κανόνα του Cramer) των Τομεακών Ροών του Συστήματος 139 και τα Όρια των Παραμέτρων α και γ όπου όλες οι Τομεακές Ροές είναι Θετικές	435
179-180	Τα Έσοδα και τα Έξοδα των Τομέων των Δύο Χωρών και οι Διεθνείς Εισπράξεις και Πληρωμές της Ζήτα	449
181	Η Κατανομή των Εσόδων και Εξόδων Ανάμεσα στους Θεσμικούς Τομείς των Δύο Χωρών	454
182-183	Υπολογισμός της Κατανομής των Επαναλαμβανόμενων Αγοραπωλησιών Ανάμεσα στα Παζάρια Αγαθών της Παγκόσμιας Οικονομίας Ζήτα	458
186	Λύση (με τον Κανόνα του Cramer) του Συστήματος των Τομεακών Ροών ως Συναρτήσεων της Συναλλαγματικής Ισοτιμίας ξ	460
187	Οι Ετήσιες Ροές των Τομέων των Δύο Χωρών ως Συναρτήσεις της Συναλλαγματικής Ισοτιμίας ξ και η Λύση του Αντίστοιχου Συστήματος Ανισοτήτων	472
188	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών των Δύο Χωρών ως προς τη Συναλλαγματική Ισοτιμία ξ	474
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	477

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ III

Οι ακόλουθοι υπολογισμοί με το Mathematica αναφέρονται στο Κεφάλαιο
ΟΡΘΟΛΟΓΙΚΗ ΑΡΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ

Σελίδα		Πίνακας
37	Μέθοδος Αριστοποίησης υπό Περιορισμούς του Lagrange	III_7

Page 37 Borderered Hessian (Table III7) Minimization of the Lagrange Function

$$-x^{(1-\eta)(1-\theta)} y^{\theta(1-\eta)} z^{\eta} - \lambda (x+y+z-C)$$

First Order Conditions

$$D[-x^{(1-\eta)(1-\theta)} y^{\theta(1-\eta)} z^{\eta} - \lambda (x+y+z-C), x]$$

$$\{-x^{-1+(1-\eta)(1-\theta)} y^{(1-\eta)\theta} z^{\eta} (1-\eta)(1-\theta) - \lambda\}$$

$$D[-x^{(1-\eta)(1-\theta)} y^{\theta(1-\eta)} z^{\eta} - \lambda (x+y+z-C), y]$$

$$\{-x^{(1-\eta)(1-\theta)} y^{-1+(1-\eta)\theta} z^{\eta} (1-\eta)\theta - \lambda\}$$

$$D[-x^{(1-\eta)(1-\theta)} y^{\theta(1-\eta)} z^{\eta} - \lambda (x+y+z-C), z]$$

$$\{-x^{(1-\eta)(1-\theta)} y^{(1-\eta)\theta} z^{-1+\eta}\eta - \lambda\}$$

$$D[-x^{(1-\eta)(1-\theta)} y^{\theta(1-\eta)} z^{\eta} - \lambda (x+y+z-C), \lambda]$$

$$\{C-x-y-z\}$$

Second Order Conditions

$$D[-\{x^{-1+(1-\eta)(1-\theta)} y^{(1-\eta)\theta} z^{\eta} (1-\eta)(1-\theta) - \lambda\}, x]$$

$$\{-x^{-2+(1-\eta)(1-\theta)} y^{(1-\eta)\theta} z^{\eta} (1-\eta)(-1+(1-\eta)(1-\theta))(1-\theta)\}$$

$$D[-\{x^{-1+(1-\eta)(1-\theta)} y^{(1-\eta)\theta} z^{\eta} (1-\eta)(1-\theta) - \lambda\}, y]$$

$$\{-x^{-1+(1-\eta)(1-\theta)} y^{-1+(1-\eta)\theta} z^{\eta} (1-\eta)^2 (1-\theta)\theta\}$$

$$D[-\{x^{-1+(1-\eta)(1-\theta)} y^{(1-\eta)\theta} z^{\eta} (1-\eta)(1-\theta) - \lambda\}, z]$$

$$\{-x^{-1+(1-\eta)(1-\theta)} y^{(1-\eta)\theta} z^{-1+\eta} (1-\eta)\eta (1-\theta)\}$$

$$\ldots \ldots \ldots \

```
D[-{x^(1-η) (1-θ) y^-1+(1-η) θ z^η (1 - η) θ - λ}, y]
```

$$\{-x^{(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{-2+(1-\eta)\ \theta}\ z^{\eta}\ (1-\eta)\ \theta\ (-1+(1-\eta)\ \theta)\}$$

```
D[-{x^(1-η) (1-θ) y^-1+(1-η) θ z^η (1 - η) θ - λ}, z]
```

$$\{-x^{(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{-1+(1-\eta)\ \theta}\ z^{-1+\eta}\ (1-\eta)\ \eta\ \theta\}$$

. . . . . .

```
D[-{x^(1-η) (1-θ) y^(1-η) θ z^-1+η η - λ}, x]
```

$$\{-x^{-1+(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{(1-\eta)\ \theta}\ z^{-1+\eta}\ (1-\eta)\ \eta\ (1-\theta)\}$$

```
D[-{x^(1-η) (1-θ) y^(1-η) θ z^-1+η η - λ}, y]
```

$$\{-x^{(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{-1+(1-\eta)\ \theta}\ z^{-1+\eta}\ (1-\eta)\ \eta\ \theta\}$$

```
D[-{x^(1-η) (1-θ) y^(1-η) θ z^-1+η η - λ}, z]
```

$$\{-x^{(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{(1-\eta)\ \theta}\ z^{-2+\eta}\ (-1+\eta)\ \eta\}$$

Bordered Hessian

```
matrixgama = {{0, -λ, -λ, -λ}, {-λ, -x^-2+(1-η) (1-θ) y^(1-η) θ z^η (1 - η) (-1 + (1 - η) (1 - θ)) (1 - θ),
    -x^-1+(1-η) (1-θ) y^-1+(1-η) θ z^η (1 - η)^2 (1 - θ) θ, -x^-1+(1-η) (1-θ) y^(1-η) θ z^-1+η (1 - η) η (1 - θ)},
  {-λ, -x^-1+(1-η) (1-θ) y^-1+(1-η) θ z^η (1 - η)^2 (1 - θ) θ, -x^(1-η) (1-θ) y^-2+(1-η) θ z^η (1 - η) θ (-1 + (1 - η) θ), -x^(1-η) (1-θ) y^-1+(1-η) θ z^-1+η (1 - η) η θ},
  {-λ, -x^-1+(1-η) (1-θ) y^(1-η) θ z^-1+η (1 - η) η (1 - θ), -x^(1-η) (1-θ) y^-1+(1-η) θ z^-1+η (1 - η) η θ, -x^(1-η) (1-θ) y^(1-η) θ z^-2+η (-1 + η) η}}
```

$$\{\{0, -\lambda, -\lambda, -\lambda\},$$
$$\{-\lambda, -x^{-2+(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{(1-\eta)\ \theta}\ z^{\eta}\ (1-\eta)\ (-1+(1-\eta)\ (1-\theta))\ (1-\theta), -x^{-1+(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{-1+(1-\eta)\ \theta}\ z^{\eta}\ (1-\eta)^2\ (1-\theta)\ \theta, -x^{-1+(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{(1-\eta)\ \theta}\ z^{-1+\eta}\ (1-\eta)\ \eta\ (1-\theta)\},$$
$$\{-\lambda, -x^{-1+(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{-1+(1-\eta)\ \theta}\ z^{\eta}\ (1-\eta)^2\ (1-\theta)\ \theta, -x^{(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{-2+(1-\eta)\ \theta}\ z^{\eta}\ (1-\eta)\ \theta\ (-1+(1-\eta)\ \theta), -x^{(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{-1+(1-\eta)\ \theta}\ z^{-1+\eta}\ (1-\eta)\ \eta\ \theta\},$$
$$\{-\lambda, -x^{-1+(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{(1-\eta)\ \theta}\ z^{-1+\eta}\ (1-\eta)\ \eta\ (1-\theta), -x^{(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{-1+(1-\eta)\ \theta}\ z^{-1+\eta}\ (1-\eta)\ \eta\ \theta, -x^{(1-\eta)\ (1-\theta)}\ y^{(1-\eta)\ \theta}\ z^{-2+\eta}\ (-1+\eta)\ \eta\}\}$$

Third Minor

```
matrixdelta = {{0, -λ, -λ}, {-λ, -x^(-2+(1-η) (1-θ)) y^((1-η) θ) z^η (1-η) (-1+(1-η) (1-θ)) (1-θ), -x^(-1+(1-η) (1-θ)) y^(-1+(1-η) θ) z^η (1-η)^2 (1-θ) θ},
  {-λ, -x^(-1+(1-η) (1-θ)) y^(-1+(1-η) θ) z^η (1-η)^2 (1-θ) θ, -x^((1-η) (1-θ)) y^(-2+(1-η) θ) z^η (1-η) θ (-1+(1-η) θ)}}
{{0, -λ, -λ}, {-λ, -x^(-2+(1-η) (1-θ)) y^((1-η) θ) z^η (1-η) (-1+(1-η) (1-θ)) (1-θ), -x^(-1+(1-η) (1-θ)) y^(-1+(1-η) θ) z^η (1-η)^2 (1-θ) θ},
 {-λ, -x^(-1+(1-η) (1-θ)) y^(-1+(1-η) θ) z^η (1-η)^2 (1-θ) θ, -x^((1-η) (1-θ)) y^(-2+(1-η) θ) z^η (1-η) θ (-1+(1-η) θ)}}
```

```
Det[matrixdelta]
-λ (-x^(-2+(1-η) (1-θ)) y^((1-η) θ) z^η (1-η) (-1+(1-η) (1-θ)) (1-θ) λ + x^(-1+(1-η) (1-θ)) y^(-1+(1-η) θ) z^η (1-η)^2 (1-θ) θ λ) +
 λ (-x^(-1+(1-η) (1-θ)) y^(-1+(1-η) θ) z^η (1-η)^2 (1-θ) θ λ + x^((1-η) (1-θ)) y^(-2+(1-η) θ) z^η (1-η) θ (-1+(1-η) θ) λ)
FullSimplify[Det[matrixdelta]]
x^(-1+η (-1+θ)-θ) y^(-2+θ-η θ) z^η (-1+η) (y^2 η + (x+y) (x+y-2 y η) θ + (x+y)^2 (-1+η) θ^2) λ^2
x^(-1+η (-1+θ)-θ) y^(-2+θ-η θ) z^η (-1+η) (y^2 η + (x+y) (x+y-2 y η) θ + (x+y)^2 (-1+η) θ^2) λ^2 /. x → (1-η) (1-θ) /. y → (1-η) θ /. z → η
(-1+η) η^η ((1-η) (1-θ))^(-1+η (-1+θ)-θ) ((1-η) θ)^(-2+θ-η θ)
 ((1-η)^2 η θ^2 + (-1+η) θ^2 ((1-η) (1-θ) + (1-η) θ)^2 + θ ((1-η) (1-θ) + (1-η) θ) ((1-η) (1-θ) + (1-η) θ - 2 (1-η) η θ)) λ^2
Simplify[%]
```

$$-\frac{\eta^{\eta}\,((-1+\eta)\,(-1+\theta))^{\eta\,(-1+\theta)-\theta}\,(\theta-\eta\,\theta)^{\theta-\eta\,\theta}\,\lambda^2}{\theta}$$

```
-η^η ((-1+η) (-1+θ))^(η (-1+θ)-θ) (θ-η θ)^(θ-η θ) λ^2 / θ /. η → 439/3168 /. θ → 1145/2729
```

$$-\frac{2729\,439^{439/3168}\,\lambda^2}{12\,\sqrt{11}\;1145^{2023/3168}}$$

Fourth Minor

```
MatrixForm[matrixgama]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -x^{-2+(1-\eta)\,(1-\theta)}\,y^{(1-\eta)\,\theta}\,z^{\eta}\,(1-\eta)\,(-1+(1-\eta)\,(1-\theta))\,(1-\theta) & -x^{-1+(1-\eta)\,(1-\theta)}\,y^{-1+(1-\eta)\,\theta}\,z^{\eta}\,(1-\eta)^2\,(1-\theta)\,\theta & -x^{-1+(1-\eta)\,(1-\theta)}\,y^{(1-\eta)\,\theta}\,z^{-1+\eta}\,(1-\eta)\,\eta\,(1-\theta) \\ -\lambda & -x^{-1+(1-\eta)\,(1-\theta)}\,y^{-1+(1-\eta)\,\theta}\,z^{\eta}\,(1-\eta)^2\,(1-\theta)\,\theta & -x^{(1-\eta)\,(1-\theta)}\,y^{-2+(1-\eta)\,\theta}\,z^{\eta}\,(1-\eta)\,\theta\,(-1+(1-\eta)\,\theta) & -x^{(1-\eta)\,(1-\theta)}\,y^{-1+(1-\eta)\,\theta}\,z^{-1+\eta}\,(1-\eta)\,\eta\,\theta \\ -\lambda & -x^{-1+(1-\eta)\,(1-\theta)}\,y^{(1-\eta)\,\theta}\,z^{-1+\eta}\,(1-\eta)\,\eta\,(1-\theta) & -x^{(1-\eta)\,(1-\theta)}\,y^{-1+(1-\eta)\,\theta}\,z^{-1+\eta}\,(1-\eta)\,\eta\,\theta & -x^{(1-\eta)\,(1-\theta)}\,y^{(1-\eta)\,\theta}\,z^{-2+\eta}\,(-1+\eta)\,\eta \end{pmatrix}$$

Sugiyama-Nishihara

Det[matrixgama]

$$-x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{2\eta}\,\eta\,\theta\,\lambda^2 - x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta\,\theta\,\lambda^2 - x^{2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta\,\theta\,\lambda^2 -$$
$$2\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta\,\theta\,\lambda^2 - 2\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta\,\theta\,\lambda^2 - 2\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta\,\theta\,\lambda^2$$
$$2\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{2\eta}\,\eta^2\,\theta\,\lambda^2 + 2\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^2\,\theta\,\lambda^2 + 2\,x^{2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^2\,\theta\,\lambda^2 +$$
$$4\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^2\,\theta\,\lambda^2 + 4\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta^2\,\theta\,\lambda^2 + 4\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta^2\,\theta$$
$$x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{2\eta}\,\eta^3\,\theta\,\lambda^2 - x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^3\,\theta\,\lambda^2 - x^{2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^3\,\theta\,\lambda^2 -$$
$$2\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^3\,\theta\,\lambda^2 - 2\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta^3\,\theta\,\lambda^2 - 2\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta^3\,\theta$$
$$x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{2\eta}\,\eta\,\theta^2\,\lambda^2 + x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta\,\theta^2\,\lambda^2 + x^{2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta\,\theta^2\,\lambda^2 +$$
$$2\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta\,\theta^2\,\lambda^2 + 2\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta\,\theta^2\,\lambda^2 + 2\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta\,\theta^2$$
$$2\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{2\eta}\,\eta^2\,\theta^2\,\lambda^2 - 2\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^2\,\theta^2\,\lambda^2 - 2\,x^{2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^2\,\theta^2\,\lambda^2 -$$
$$4\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^2\,\theta^2\,\lambda^2 - 4\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta^2\,\theta^2\,\lambda^2 - 4\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta^2$$
$$x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{2\eta}\,\eta^3\,\theta^2\,\lambda^2 + x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^3\,\theta^2\,\lambda^2 + x^{2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^3\,\theta^2\,\lambda^2 +$$
$$2\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-2+2\eta}\,\eta^3\,\theta^2\,\lambda^2 + 2\,x^{-1+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-2+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta^3\,\theta^2\,\lambda^2 + 2\,x^{-2+2(1-\eta)(1-\theta)}\,y^{-1+2(1-\eta)\theta}\,z^{-1+2\eta}\,\eta^3$$

FullSimplify[%]

$$x^{-2(\eta+\theta-\eta\theta)}\,y^{-2-2(-1+\eta)\theta}\,z^{2(-1+\eta)}\,(x+y+z)^2\,(-1+\eta)^2\,\eta\,(-1+\theta)\,\theta\,\lambda^2$$

$$x^{-2(\eta+\theta-\eta\theta)}\,y^{-2-2(-1+\eta)\theta}\,z^{2(-1+\eta)}\,(x+y+z)^2\,(-1+\eta)^2\,\eta\,(-1+\theta)\,\theta\,\lambda^2 /. x\to(1-\eta)(1-\theta) /. y\to(1-\eta)\theta /. z\to\eta$$

$$(-1+\eta)^2\,\eta^{1+2(-1+\eta)}\,((1-\eta)(1-\theta))^{-2(\eta+\theta-\eta\theta)}\,(-1+\theta)\,\theta\,((1-\eta)\theta)^{-2-2(-1+\eta)\theta}\,(\eta+(1-\eta)(1-\theta)+(1-\eta)\theta)^2\,\lambda^2$$

Simplify[%]

$$\frac{\eta^{-1+2\eta}\,(-1+\theta)\,((-1+\eta)(-1+\theta))^{-2(\eta+\theta-\eta\theta)}\,(\theta-\eta\theta)^{-2(-1+\eta)\theta}\,\lambda^2}{\theta}$$

$$\frac{\eta^{-1+2\eta}\,(-1+\theta)\,((-1+\eta)(-1+\theta))^{-2(\eta+\theta-\eta\theta)}\,(\theta-\eta\theta)^{-2(-1+\eta)\theta}\,\lambda^2}{\theta} /. \eta\to 439/3168 /. \theta\to 1145/2729$$

$$-\frac{3168\,\lambda^2}{439^{1145/1584}\,1145^{439/1584}}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ IV

Οι ακόλουθοι υπολογισμοί με το Mathematica αναφέρονται στο Κεφάλαιο
ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΝΟΜΙΣΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Σελίδες		Εξισώσεις ή Πίνακες
45-47	Η Μοναδικότητα της Στατικής Ισορροπίας και οι Συνθήκες Δυναμικής Σταθερότητας του Συστήματος Διαφορικών Εξισώσεων **7**	9-14
49	Λύση του Συστήματος Ανισοτήτων που Σχηματίζεται από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz της Οικονομίας **Άλφα**	IV_1
50-51	Λύση των Στατικών Εξισώσεων της Στοιχειώδους Νομισματικής Οικονομίας **7** με τον Κανόνα του Cramer	15
51	Οι Μερικές Παράγωγοι των Τομεακών Εισοδημάτων και Δαπανών ως προς την Κατανομή του Τραπεζικού Παθητικού h	16

Pages 45 - 47 The uniqueness condition (equation 9) and the characteristic polynomial (equation 12) of differential equation system 7

```
matrixalpha = {{-1 - λ, 0, δ - 1, ϵ, 0, ω + φ},
   {1, -1 - λ, 0, 0, 0, 0}, {β - 1, γ, -1 - λ, 0, 0, υ + φ}, {0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0},
   {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1 - λ, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ}} /. υ → 1 - ω - φ
```

```
{{-1 - λ, 0, -1 + δ, ϵ, 0, φ + ω}, {1, -1 - λ, 0, 0, 0, 0}, {-1 + β, γ, -1 - λ, 0, 0, 1 - ω},
 {0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1 - λ, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ}}
```

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -1+\delta & \epsilon & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1+\beta & \gamma & -1-\lambda & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\epsilon & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

```
Det[matrixalpha]
```

$$(-1-\lambda)^2\,(\beta+\gamma+\delta-\beta\,\delta-\gamma\,\delta+\epsilon-\beta\,\epsilon-\gamma\,\epsilon+2\,\lambda+2\,\beta\,\lambda+\gamma\,\lambda+2\,\delta\,\lambda-2\,\beta\,\delta\,\lambda-\gamma\,\delta\,\lambda+\epsilon\,\lambda-\beta\,\epsilon\,\lambda+5\,\lambda^2+\beta\,\lambda^2+\delta\,\lambda^2-\beta\,\delta\,\lambda^2+4\,\lambda^3+\lambda^4)+(1-\gamma)\,(1-\delta-\epsilon+\lambda-\delta\,\lambda-\varphi-2\,\lambda\,\varphi-\lambda^2\,\varphi-2\,\omega+\delta\,\omega+\epsilon\,\omega-3\,\lambda\,\omega+\delta\,\lambda\,\omega-\lambda^2\,\omega)+(1-\epsilon)\,(-(1+2\,\lambda+\lambda^2)\,(1-\omega)-(-1+\beta+\gamma-\lambda+\beta\,\lambda)\,(\varphi+\omega))$$

```
polyalpha =
 (-1 - λ)^2 (β + γ + δ - β δ - γ δ + ϵ - β ϵ - γ ϵ + 2 λ + 2 β λ + γ λ + 2 δ λ - 2 β δ λ - γ δ λ + ϵ λ -
     β ϵ λ + 5 λ^2 + β λ^2 + δ λ^2 - β δ λ^2 + 4 λ^3 + λ^4) +
  (1 - γ) (1 - δ - ϵ + λ - δ λ - φ - 2 λ φ - λ^2 φ - 2 ω + δ ω + ϵ ω - 3 λ ω + δ λ ω - λ^2 ω) +
  (1 - ϵ) (-(1 + 2 λ + λ^2) (1 - ω) - (-1 + β + γ - λ + β λ) (φ + ω))
```

$$(-1-\lambda)^2\,(\beta+\gamma+\delta-\beta\,\delta-\gamma\,\delta+\epsilon-\beta\,\epsilon-\gamma\,\epsilon+2\,\lambda+2\,\beta\,\lambda+\gamma\,\lambda+2\,\delta\,\lambda-2\,\beta\,\delta\,\lambda-\gamma\,\delta\,\lambda+\epsilon\,\lambda-\beta\,\epsilon\,\lambda+5\,\lambda^2+\beta\,\lambda^2+\delta\,\lambda^2-\beta\,\delta\,\lambda^2+4\,\lambda^3+\lambda^4)+(1-\gamma)\,(1-\delta-\epsilon+\lambda-\delta\,\lambda-\varphi-2\,\lambda\,\varphi-\lambda^2\,\varphi-2\,\omega+\delta\,\omega+\epsilon\,\omega-3\,\lambda\,\omega+\delta\,\lambda\,\omega-\lambda^2\,\omega)+(1-\epsilon)\,((-1-2\,\lambda-\lambda^2)\,(1-\omega)-(-1+\beta+\gamma-\lambda+\beta\,\lambda)\,(\varphi+\omega))$$

```
Collect[polyalpha, λ]
```

$$\beta+\delta-\beta\,\delta-(1-\gamma)\,\delta-\gamma\,\delta+2\,\epsilon-\beta\,\epsilon-(1-\gamma)\,\epsilon-\gamma\,\epsilon+(16+4\,\beta+\gamma+4\,\delta-4\,\beta\,\delta-\gamma\,\delta+\epsilon-\beta\,\epsilon)\,\lambda^3+(14+\beta+\delta-\beta\,\delta)\,\lambda^4+6\,\lambda^5+\lambda^6-(1-\gamma)\,\varphi+(1-\epsilon)\,\varphi-2\,(1-\gamma)\,\omega+(1-\gamma)\,\delta\,\omega+2\,(1-\epsilon)\,\omega+(1-\gamma)\,\epsilon\,\omega-\beta\,(1-\epsilon)\,(\varphi+\omega)-\gamma\,(1-\epsilon)\,(\varphi+\omega)+\lambda^2\,(9+6\,\beta+3\,\gamma+6\,\delta-6\,\beta\,\delta-3\,\gamma\,\delta+3\,\epsilon-3\,\beta\,\epsilon-\gamma\,\epsilon+(-1+\gamma)\,\varphi+(-1+\epsilon)\,(1-\omega)+(-1+\gamma)\,\omega)+\lambda\,(3+4\,\beta+2\,\gamma+4\,\delta-4\,\beta\,\delta+(-1+\gamma)\,\delta-3\,\gamma\,\delta+3\,\epsilon-3\,\beta\,\epsilon-2\,\gamma\,\epsilon-2\,(1-\gamma)\,\varphi-2\,(1-\epsilon)\,(1-\omega)-3\,(1-\gamma)\,\omega+(1-\gamma)\,\delta\,\omega+(1-\epsilon)\,(\varphi+\omega)-\beta\,(1-\epsilon)\,(\varphi+\omega))$$

```
alpha0 = Coefficient[polyalpha, λ, 6]
```

```
1
```

```
alpha1 = Coefficient[polyalpha, λ, 5]
```

```
6
```

```
alpha2 = Coefficient[polyalpha, λ, 4]
```

```
14 + β + δ - β δ
```

```
Simplify[%]
```

$$14 + \beta + \delta - \beta\,\delta$$

```
alpha3 = Coefficient[polyalpha, λ, 3]
```

$$16 + 4\,\beta + \gamma + 4\,\delta - 4\,\beta\,\delta - \gamma\,\delta + \epsilon - \beta\,\epsilon$$

$$\mathbf{16 + 4\,\beta + \gamma + 4\,\delta + \epsilon - \beta\,\epsilon - 4\,\beta\,\delta - \gamma\,\delta}$$

```
alpha4 = Coefficient[polyalpha, λ, 2]
```

$$8 + 6\,\beta + 3\,\gamma + 6\,\delta - 6\,\beta\,\delta - 3\,\gamma\,\delta + 4\,\epsilon - 3\,\beta\,\epsilon - \gamma\,\epsilon - \varphi + \gamma\,\varphi + \gamma\,\omega - \epsilon\,\omega$$

$$\mathbf{8 + 6\,\beta + 3\,\gamma + 6\,\delta + 4\,\epsilon + \gamma\,\varphi + \gamma\,\omega - \epsilon\,\omega - 6\,\beta\,\delta - 3\,\gamma\,\delta - 3\,\beta\,\epsilon - \gamma\,\epsilon - \varphi}$$

```
Simplify[8 + 6 β + 3 γ + 6 δ + 4 ϵ + γ φ + γ ω]
```

$$8 + 6\,\beta + 6\,\delta + 4\,\epsilon + \gamma\,(3 + \varphi + \omega)$$

```
Simplify[-ϵ ω - 6 β δ - 3 γ δ - 3 β ϵ - γ ϵ - φ]
```

$$-6\,\beta\,\delta - 3\,\gamma\,\delta - 3\,\beta\,\epsilon - \gamma\,\epsilon - \varphi - \epsilon\,\omega$$

```
alpha5 = Coefficient[polyalpha, λ, 1]
```

$$1 + 4\,\beta + 2\,\gamma + 3\,\delta - 4\,\beta\,\delta - 2\,\gamma\,\delta + 5\,\epsilon - 3\,\beta\,\epsilon - 2\,\gamma\,\epsilon - \varphi - \beta\,\varphi + 2\,\gamma\,\varphi - \epsilon\,\varphi + \beta\,\epsilon\,\varphi - \beta\,\omega + 3\,\gamma\,\omega + \delta\,\omega - \gamma\,\delta\,\omega - 3\,\epsilon\,\omega + \beta\,\epsilon\,\omega$$

$$\mathbf{1 + 4\,\beta + 2\,\gamma + 3\,\delta + 5\,\epsilon + 2\,\gamma\,\varphi + \beta\,\epsilon\,\varphi + 3\,\gamma\,\omega + \delta\,\omega + \beta\,\epsilon\,\omega - 4\,\beta\,\delta - 2\,\gamma\,\delta - 3\,\beta\,\epsilon - 2\,\gamma\,\epsilon - \varphi - \beta\,\varphi - \epsilon\,\varphi - \beta\,\omega - \gamma\,\delta\,\omega - 3\,\epsilon\,\omega}$$

```
Simplify[1 + 4 β + 2 γ + 3 δ + 5 ϵ + 2 γ φ + β ϵ φ + 3 γ ω + δ ω + β ϵ ω]
```

$$1 + 3\,\delta + 5\,\epsilon + \delta\,\omega + \gamma\,(2 + 2\,\varphi + 3\,\omega) + \beta\,(4 + \epsilon\,(\varphi + \omega))$$

```
Simplify[-4 β δ - 2 γ δ - 3 β ϵ - 2 γ ϵ - φ - β φ - ϵ φ - β ω - γ δ ω - 3 ϵ ω]
```

$$-4\,\beta\,\delta - 2\,\gamma\,\delta - 3\,\beta\,\epsilon - 2\,\gamma\,\epsilon - \varphi - \beta\,\varphi - \epsilon\,\varphi - \beta\,\omega - \gamma\,\delta\,\omega - 3\,\epsilon\,\omega$$

```
alpha6 = Coefficient[polyalpha, λ, 0]
```

$$\beta - \beta\,\delta + \epsilon - \beta\,\epsilon - \beta\,\varphi - \epsilon\,\varphi + \beta\,\epsilon\,\varphi + \gamma\,\epsilon\,\varphi - \beta\,\omega + \gamma\,\omega + \delta\,\omega - \gamma\,\delta\,\omega - \epsilon\,\omega + \beta\,\epsilon\,\omega$$

$$\boldsymbol{\beta + \epsilon + \beta\,\epsilon\,\varphi + \gamma\,\epsilon\,\varphi + \gamma\,\omega + \delta\,\omega + \beta\,\epsilon\,\omega - \beta\,\delta - \beta\,\epsilon - \beta\,\varphi - \epsilon\,\varphi - \beta\,\omega - \gamma\,\delta\,\omega - \epsilon\,\omega}$$

```
Simplify[β + ϵ + β ϵ φ + γ ϵ φ + γ ω + δ ω + β ϵ ω]
```

$$\epsilon + \gamma\,\epsilon\,\varphi + (\gamma + \delta)\,\omega + \beta\,(1 + \epsilon\,(\varphi + \omega))$$

```
Simplify[-β δ - β ϵ - β φ - ϵ φ - β ω - γ δ ω - ϵ ω]
```

$$-\gamma\,\delta\,\omega - \epsilon\,(\varphi + \omega) - \beta\,(\delta + \epsilon + \varphi + \omega)$$

```
determinantalfa = {ϵ + γ ϵ φ + (γ + δ) ω + β (1 + ϵ (φ + ω))} - {γ δ ω + ϵ (φ + ω) + β (δ + ϵ + φ + ω)}
```

Page 49 Solution of Routh - Hurwitz conditions as a system of inequalities (Table IV1)

```
alpha = {{-1 - λ, 0, δ - 1, ε, 0, ω + φ}, {1, -1 - λ, 0, 0, 0, 0},
      {β - 1, γ, -1 - λ, 0, 0, 1 - ω}, {0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ε, -1 - λ, 0},
      {0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ}} /. β → 8 / 9 /. γ → 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ε → 5 / 6
```

$$\left\{\left\{-1-\lambda,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ 0,\ \varphi+\omega\right\},\ \{1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7}{8},\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 1-\omega\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{6},\ -1-\lambda,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda\}\right\}$$

```
MatrixForm[alpha]
```

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{7}{8} & -1-\lambda & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

```
Det[alpha]
```

$$\frac{83}{378}+\frac{809\,\lambda}{168}+\frac{14779\,\lambda^2}{1008}+\frac{30473\,\lambda^3}{1512}+\frac{944\,\lambda^4}{63}+ 6\,\lambda^5+\lambda^6-\frac{109\,\varphi}{432}-\frac{25\,\lambda\,\varphi}{108}-\frac{\lambda^2\,\varphi}{8}+\frac{\omega}{1512}+\frac{127\,\lambda\,\omega}{1512}+\frac{\lambda^2\,\omega}{24}$$

```
polytria = 83/378 + 809 λ/168 + 14779 λ^2/1008 + 30473 λ^3/1512 +
   944 λ^4/63 + 6 λ^5 + λ^6 - 109 φ/432 - 25 λ φ/108 - λ^2 φ/8 + ω/1512 + 127 λ ω/1512 + λ^2 ω/24
```

$$\frac{83}{378}+\frac{809\,\lambda}{168}+\frac{14779\,\lambda^2}{1008}+\frac{30473\,\lambda^3}{1512}+\frac{944\,\lambda^4}{63}+ 6\,\lambda^5+\lambda^6-\frac{109\,\varphi}{432}-\frac{25\,\lambda\,\varphi}{108}-\frac{\lambda^2\,\varphi}{8}+\frac{\omega}{1512}+\frac{127\,\lambda\,\omega}{1512}+\frac{\lambda^2\,\omega}{24}$$

```
Collect[polytria, λ]
```

$$\frac{83}{378}+\frac{30473\,\lambda^3}{1512}+\frac{944\,\lambda^4}{63}+6\,\lambda^5+\lambda^6-\frac{109\,\varphi}{432}+ \lambda^2\left(\frac{14779}{1008}-\frac{\varphi}{8}+\frac{\omega}{24}\right)+\lambda\left(\frac{809}{168}-\frac{25\,\varphi}{108}+\frac{127\,\omega}{1512}\right)+\frac{\omega}{1512}$$

```
alfa0 = Coefficient[polytria, λ, 6]
```

```
1
```

```
alfa1 = Coefficient[polytria, λ, 5]
```

```
6
```

```
alfa2 = Coefficient[polytria, λ, 4]
```

$$\frac{944}{63}$$

```
alfa3 = Coefficient[polytria, λ, 3]
```

$$\frac{30473}{1512}$$

```
alfa4 = Coefficient[polytria, λ, 2]
```

$$\frac{14779}{1008} - \frac{\varphi}{8} + \frac{\omega}{24}$$

```
Simplify[14779/1008 - φ/8 + ω/24]
```

$$\frac{14779 - 126\,\varphi + 42\,\omega}{1008}$$

```
alfa5 = Coefficient[polytria, λ, 1]
```

$$\frac{809}{168} - \frac{25\,\varphi}{108} + \frac{127\,\omega}{1512}$$

```
Simplify[809/168 - 25 φ/108 + 127 ω/1512]
```

$$\frac{7281 - 350\,\varphi + 127\,\omega}{1512}$$

```
alfa6 = Coefficient[polytria, λ, 0]
```

$$\frac{83}{378} - \frac{109\,\varphi}{432} + \frac{\omega}{1512}$$

```
Simplify[83/378 - 109 φ/432 + ω/1512]
```

$$\frac{664 - 763\,\varphi + 2\,\omega}{3024}$$

```
rh0 = alfa0
```

1

```
rh1 = alfa1
```

6

```
rh2 = Det[{{alfa1, alfa0}, {alfa3, alfa2}}]
```

$$\frac{105463}{1512}$$

```
N[105463/1512]
```

69.7507

```
rh3 = Det[{{alfa1, alfa0, 0}, {alfa3, alfa2, alfa1}, {alfa5, alfa4, alfa3}}]
```

$$\frac{2073151439}{2286144} + \frac{28\,\varphi}{9} - \frac{251\,\omega}{252}$$

```
2073151439/2286144 + 28 φ/9 - 251 ω/252 /. ω → 1/2 /. φ → 439/3168
```

$$\frac{22802983477}{25147584}$$

```
N[22802983477/25147584]
```

906.766

```
rh4 = Det[{{alfa1, alfa0, 0, 0}, {alfa3, alfa2, alfa1, alfa0},
   {alfa5, alfa4, alfa3, alfa2}, {0, alfa6, alfa5, alfa4}}]
```

$$\frac{20175631062677}{2304433152} + \frac{7712130785\,\varphi}{164602368} - \frac{196\,\varphi^2}{729} - \frac{65152506901\,\omega}{1152216576} + \frac{251\,\varphi\,\omega}{1458} - \frac{63001\,\omega^2}{2286144}$$

```
20175631062677/2304433152 + 7712130785 φ/164602368 - 196 φ^2/729 -
  65152506901 ω/1152216576 + 251 φ ω/1458 - 63001 ω^2/2286144 /.
 ω → 1/2 /. φ → 439/3168
```

$$\frac{16698365072430527}{1912021106688}$$

```
N[16698365072430527/1912021106688]
```

```
8733.36
```

```
rh5 = Det[{{alfa1, alfa0, 0, 0, 0},
   {alfa3, alfa2, alfa1, alfa0, 0}, {alfa5, alfa4, alfa3, alfa2, alfa1},
   {0, alfa6, alfa5, alfa4, alfa3}, {0, 0, 0, 0, alfa5}}]
```

$$\frac{16322085529705693}{387144769536} - \frac{112059688080335\,\varphi}{62219695104} - \frac{215819151353\,\varphi^2}{17777055744} + \frac{1225\,\varphi^3}{19683} + \frac{1613554339467617\,\omega}{3484302925824} + \frac{4443386894521\,\varphi\,\omega}{248878780416} - \frac{3277\,\varphi^2\,\omega}{52488} - \frac{8505558358051\,\omega^2}{1742151462912} + \frac{1715083\,\varphi\,\omega^2}{82301184} - \frac{8001127\,\omega^3}{3456649728}$$

```
16322085529705693/387144769536 - 112059688080335 φ/62219695104 -
  215819151353 φ^2/17777055744 + 1225 φ^3/19683 +
  1613554339467617 ω/3484302925824 + 4443386894521 φ ω/248878780416 -
  3277 φ^2 ω/52488 - 8505558358051 ω^2/1742151462912 +
  1715083 φ ω^2/82301184 - 8001127 ω^3/3456649728 /. ω → 1/2 /. φ → 439/3168
```

$$\frac{19298071746606467755 6801}{4579305846686613504}$$

```
N[192980717466064677556801/4579305846686613504]
```

```
42141.9
```

```
rh6 = alfa6
```

$$\frac{83}{378} - \frac{109\,\varphi}{432} + \frac{\omega}{1512}$$

```
83/378 - 109 φ/432 + ω/1512 /. ω → 1/2 /. φ → 439/3168
```

$$\frac{253109}{1368576}$$

```
N[253109/1368576]
```

```
0.184943
```

```
<< Algebra`InequalitySolve`
```

```
InequalitySolve[
 {22815507373/25147584 - 251 ω/252 > 0, 117266893831017065/13384147746816 - 716375217295 ω/12674382336 - 63001 ω^2/2286144 > 0,
  134344225319151035040113 5/32055140926806294528 + 28264697833583211155 ω/60710494179557376 -
   187011604425883 ω^2/38327332184064 - 8001127 ω^3/3456649728 > 0, 1768595/9580032 + ω/1512 > 0}, {ω}]
```

$$-\frac{11456279}{201168} < \omega < -\frac{716375217295}{698555088} + \frac{\sqrt{\frac{3037909159534838615774 5}{22}}}{31752504}$$

```
N[-11456279/201168 < ω < -716375217295/698555088 + Sqrt[3037909159534838615774 5/22]/31752504]
```

$$-56.9488 < \omega < 144.792$$

```
2073151439/2286144 + 28 φ/9 - 251 ω/252 /. ω → 1/2
```

$$\frac{2072012903}{2286144} + \frac{28\,\varphi}{9}$$

```
20175631062677/2304433152 + 7712130785 φ/164602368 - 196 φ^2/729 - 65152506901 ω/1152216576 + 251 φ ω/1458 - 63001 ω^2/2286144 /. ω -
```

$$\frac{718230809983}{82301184} + \frac{7726299233\,\varphi}{164602368} - \frac{196\,\varphi^2}{729}$$

```
16322085529705693/387144769536 - 112059688080335 φ/62219695104 - 215819151353 φ^2/17777055744 +
 1225 φ^3/19683 + 1613554339467617 ω/3484302925824 + 4443386894521 φ ω/248878780416 - 3277 φ^2 ω/52488 -
 8505558358051 ω^2/1742151462912 + 1715083 φ ω^2/82301184 - 8001127 ω^3/3456649728 /. ω → 1/2
```

$$\frac{10550092367840287}{248878780416} - \frac{297343841514221\,\varphi}{165919186944} - \frac{216374091641\,\varphi^2}{17777055744} + \frac{1225\,\varphi^3}{19683}$$

```
83/378 - 109 φ/432 + ω/1512 /. ω → 1/2
```

$$\frac{95}{432} - \frac{109\,\varphi}{432}$$

```
InequalitySolve[{2072012903/2286144 + 28 φ/9 > 0, 718230809983/82301184 + 7726299233 φ/164602368 - 196 φ^2/729 >
 10550092367840287/248878780416 - 297343841514221 φ/165919186944 - 216374091641 φ^2/17777055744 + 1225 φ^3/19683 > 0,
 95/432 - 109 φ/432 > 0}, {φ}]
```

$$\frac{7726299233}{88510464} - \frac{\sqrt{313979468840621036737}}{88510464} < \varphi < \frac{95}{109}$$

```
N[7726299233/88510464 - Sqrt[313979468840621036737]/88510464 < φ < 95/109]
```

$$-112.904 < \varphi < 0.87156$$

Pages 50 - 51 Cramer's Rule equations 15

```
matrixalpha = {{-1, 0, δ - 1, ϵ, 0, ω + φ}, {1, -1, 0, 0, 0, 0}, {β - 1, γ, -1, 0, 0, υ + φ},
   {0, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. υ → 1 - φ - ω
```

```
{{-1, 0, -1 + δ, ϵ, 0, φ + ω}, {1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1 + β, γ, -1, 0, 0, 1 - ω},
 {0, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+\delta & \epsilon & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1+\beta & \gamma & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\epsilon & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[matrixalpha]
```

$$\beta - \beta\,\delta + \epsilon - \beta\,\epsilon - \beta\,\varphi - \epsilon\,\varphi + \beta\,\epsilon\,\varphi + \gamma\,\epsilon\,\varphi - \beta\,\omega + \gamma\,\omega + \delta\,\omega - \gamma\,\delta\,\omega - \epsilon\,\omega + \beta\,\epsilon\,\omega$$

```
Simplify[β + ϵ + β ϵ φ + γ ϵ φ + γ ω + δ ω + β ϵ ω]
```

$$\epsilon + \gamma\,\epsilon\,\varphi + (\gamma+\delta)\,\omega + \beta\,(1 + \epsilon\,(\varphi+\omega))$$

```
Simplify[-β δ - β ϵ - β φ - ϵ φ - β ω - γ δ ω - ϵ ω]
```

$$-\gamma\,\delta\,\omega - \epsilon\,(\varphi+\omega) - \beta\,(\delta+\epsilon+\varphi+\omega)$$

Equations 15 Cramer's Rule

```
inchou = {{0, 0, -1 + δ, ϵ, 0, φ + ω}, {h, -1, 0, 0, 0, 0}, {0, γ, -1, 0, 0, 1 - ω},
   {1 - h, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {-1, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

```
{{0, 0, -1 + δ, ϵ, 0, φ + ω}, {h, -1, 0, 0, 0, 0}, {0, γ, -1, 0, 0, 1 - ω},
 {1 - h, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {-1, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

```
MatrixForm[inchou]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1+\delta & \epsilon & 0 & \varphi+\omega \\ h & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 1-h & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\epsilon & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[inchou]
```

$$-\epsilon + h\,\epsilon + \delta\,\epsilon - h\,\delta\,\epsilon + \epsilon\,\varphi - h\,\epsilon\,\varphi + h\,\gamma\,\epsilon\,\varphi + h\,\gamma\,\omega - h\,\gamma\,\delta\,\omega + \epsilon\,\omega - h\,\epsilon\,\omega - \delta\,\epsilon\,\omega + h\,\delta\,\epsilon\,\omega$$

```
FullSimplify[Det[inchou]]
```

$$\epsilon\,(-1+\delta+\varphi-h\,(-1+\delta+\varphi-\gamma\,\varphi)) - (-1+\delta)\,(h\,(\gamma-\epsilon)+\epsilon)\,\omega$$

```
householdincome =
 ϵ (-1 + δ + φ - h (-1 + δ + φ - γ φ)) - (-1 + δ) (h (γ - ϵ) + ϵ) ω / Det[matrixalpha]
```

```
exphou = {{-1, 0, -1 + δ, ϵ, 0, φ + ω}, {1, h, 0, 0, 0, 0}, {-1 + β, 0, -1, 0, 0, 1 - ω},
  {0, 1 - h, 1, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {0, -1, 0, 0, 1, -1}}
```

```
{{-1, 0, -1 + δ, ϵ, 0, φ + ω}, {1, h, 0, 0, 0, 0}, {-1 + β, 0, -1, 0, 0, 1 - ω},
 {0, 1 - h, 1, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {0, -1, 0, 0, 1, -1}}
```

```
MatrixForm[exphou]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+\delta & \epsilon & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1+\beta & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 1-h & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\epsilon & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[exphou]
```

$$-h\beta+h\beta\delta-\epsilon+h\beta\epsilon+\delta\epsilon-h\delta\epsilon+h\beta\varphi+\epsilon\varphi-h\beta\epsilon\varphi+h\beta\omega-h\delta\omega+\epsilon\omega-h\beta\epsilon\omega-\delta\epsilon\omega+h\delta\epsilon\omega$$

```
FullSimplify[Det[exphou]]
```

$$\epsilon\,(-1+\delta+\varphi+\omega-\delta\omega)+h\,(-\delta\epsilon+\delta\,(-1+\epsilon)\,\omega+\beta\,(\delta-(-1+\epsilon)\,(-1+\varphi+\omega)))$$

```
householdexpenditure =
 ϵ (-1 + δ + φ + ω - δ ω) + h (-δ ϵ + δ (-1 + ϵ) ω + β (δ - (-1 + ϵ) (-1 + φ + ω))) / Det[matrixalpha]
```

```
incbus = {{-1, 0, 0, ϵ, 0, φ + ω}, {1, -1, h, 0, 0, 0}, {-1 + β, γ, 0, 0, 0, 1 - ω},
  {0, 0, 1 - h, -1, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {0, 0, -1, 0, 1, -1}}
```

```
{{-1, 0, 0, ϵ, 0, φ + ω}, {1, -1, h, 0, 0, 0}, {-1 + β, γ, 0, 0, 0, 1 - ω},
 {0, 0, 1 - h, -1, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {0, 0, -1, 0, 1, -1}}
```

```
MatrixForm[incbus]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & -1 & h & 0 & 0 & 0 \\ -1+\beta & \gamma & 0 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1-h & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\epsilon & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[incbus]
```

$$\epsilon-h\epsilon-\beta\epsilon+h\beta\epsilon+h\beta\gamma\varphi-\epsilon\varphi+h\epsilon\varphi+\beta\epsilon\varphi-h\beta\epsilon\varphi+\gamma\epsilon\varphi-h\gamma\epsilon\varphi-h\gamma\omega+h\beta\gamma\omega-\epsilon\omega+h\epsilon\omega+\beta\epsilon\omega-h\beta\epsilon\omega$$

```
FullSimplify[Det[incbus]]
```

$$(-1+h)\,\epsilon\,(-1+\varphi-\gamma\varphi+\omega-\beta\,(-1+\varphi+\omega))+h\gamma\,(-\omega+\beta\,(\varphi+\omega))$$

```
businessincome =
 (-1 + h) ϵ (-1 + φ - γ φ + ω - β (-1 + φ + ω)) + h γ (-ω + β (φ + ω)) / Det[matrixalpha]
```

```
expbus = {{-1, 0, -1 + δ, 0, 0, φ + ω}, {1, -1, 0, h, 0, 0}, {-1 + β, γ, -1, 0, 0, 1 - ω},
  {0, 0, 1, 1 - h, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, -1, 1, -1}}
```

```
{{-1, 0, -1 + δ, 0, 0, φ + ω}, {1, -1, 0, h, 0, 0}, {-1 + β, γ, -1, 0, 0, 1 - ω},
 {0, 0, 1, 1 - h, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 0, -1, 0}, {0, 0, 0, -1, 1, -1}}
```

MatrixForm[expbus]

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+\delta & 0 & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & -1 & 0 & h & 0 & 0 \\ -1+\beta & \gamma & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & 1-h & 0 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det[expbus]

$$-\beta+h\beta+\beta\delta-h\beta\delta+\beta\varphi-h\beta\varphi+h\beta\gamma\varphi+\beta\omega-h\beta\omega-\gamma\omega+h\beta\gamma\omega-\delta\omega+h\delta\omega+\gamma\delta\omega-h\gamma\delta\omega$$

FullSimplify[Det[expbus]]

$$-(\gamma+(-1+h)\ (-1+\gamma)\ \delta)\ \omega+\beta\ (-1+\delta+\varphi+\omega-h\ (-1+\delta+\varphi-\gamma\varphi+\omega-\gamma\omega))$$

businessexpenditure =
$-(\gamma+(-1+h)\ (-1+\gamma)\ \delta)\ \omega+\beta\ (-1+\delta+\varphi+\omega-h\ (-1+\delta+\varphi-\gamma\varphi+\omega-\gamma\omega))$ / Det[matrixalpha]

incfin = {{-1, 0, -1 + δ, ϵ, 0, φ + ω}, {1, -1, 0, 0, h, 0}, {-1 + β, γ, -1, 0, 0, 1 - ω},
{0, 0, 1, -1, 1 - h, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, -1, -1}}

{{-1, 0, -1 + δ, ϵ, 0, φ + ω}, {1, -1, 0, 0, h, 0}, {-1 + β, γ, -1, 0, 0, 1 - ω},
{0, 0, 1, -1, 1 - h, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, -1, -1}}

MatrixForm[incfin]

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+\delta & \epsilon & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & -1 & 0 & 0 & h & 0 \\ -1+\beta & \gamma & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-h & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det[incfin]

$$-\beta+h\beta\gamma+\beta\delta-h\beta\gamma\delta-\epsilon+\beta\epsilon+\gamma\epsilon-h\beta\gamma\epsilon+\delta\epsilon-h\delta\epsilon-\beta\delta\epsilon+h\beta\delta\epsilon-\gamma\delta\epsilon+h\gamma\delta\epsilon+\beta\varphi+\epsilon\varphi-\beta\epsilon\varphi-\gamma\epsilon\varphi+\beta\omega-\gamma\omega-\delta\omega+\gamma\delta\omega+\epsilon\omega-\beta\epsilon\omega$$

FullSimplify[Det[incfin]]

$$(-1+\gamma)\ \epsilon\ (1+(-1+h)\ \delta-\varphi)+(\gamma\ (-1+\delta)-\delta+\epsilon)\ \omega+\beta\ (h\ (\delta\epsilon-\gamma\ (-1+\delta+\epsilon))-(-1+\epsilon)\ (-1+\delta+\varphi+\omega))$$

financierincome = $(-1+\gamma)\ \epsilon\ (1+(-1+h)\ \delta-\varphi)+(\gamma\ (-1+\delta)-\delta+\epsilon)\ \omega+\beta\ (h\ (\delta\epsilon-\gamma\ (-1+\delta+\epsilon))-(-1+\epsilon)\ (-1+\delta+\varphi+\omega))$ / Det[matrixalpha]

expfin = {{-1, 0, -1 + δ, ϵ, 0, 0}, {1, -1, 0, 0, 0, h}, {-1 + β, γ, -1, 0, 0, 0},
{0, 0, 1, -1, 0, 1 - h}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1}}

{{-1, 0, -1 + δ, ϵ, 0, 0}, {1, -1, 0, 0, 0, h}, {-1 + β, γ, -1, 0, 0, 0},
{0, 0, 1, -1, 0, 1 - h}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1}}

MatrixForm[expfin]

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+\delta & \epsilon & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & h \\ -1+\beta & \gamma & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1-h \\ 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\epsilon & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det[expfin]

$$h\beta\gamma - h\beta\gamma\delta + \gamma\epsilon - h\beta\gamma\epsilon + \delta\epsilon - h\delta\epsilon - \beta\delta\epsilon + h\beta\delta\epsilon - \gamma\delta\epsilon + h\gamma\delta\epsilon$$

FullSimplify[Det[expfin]]

$$-h\beta\gamma(-1+\delta) - ((-1+h\beta)\gamma - (-1+h)(-1+\beta+\gamma)\delta)\epsilon$$

financierexpenditure =
-hβγ(-1+δ) - ((-1+hβ)γ - (-1+h)(-1+β+γ)δ)ϵ / Det[matrixalpha]

Page 51 Cramer' Rule solutions and related partial derivatives (equations 16)

```
matrixalpha =
 {{-1, 0, δ - 1, ϵ, 0, ω + φ}, {1, -1, 0, 0, 0, 0}, {β - 1, γ, -1, 0, 0, υ + φ}, {0, 0, 1, -1,
          0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ϵ, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. β → 8 / 9 /. γ -> 7 / 8 /.
      δ → 6 / 7 /. ϵ → 5 / 6 /. ω → 1 / 2 /. φ -> 439 / 3168 /. υ -> 1145 / 3168
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, 0, \frac{2023}{3168}\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7}{8}, -1, 0, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0\}, \left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
Det[matrixalpha]
```

$$\frac{253109}{1368576}$$

```
inchou =
 -ϵ + h ϵ + δ ϵ - h δ ϵ + ϵ φ - h ϵ φ + h γ ϵ φ + h γ ω - h γ δ ω + ϵ ω - h ϵ ω - δ ϵ ω + h δ ϵ ω /. β → 8 / 9 /.
      γ -> 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ϵ → 5 / 6 /. ω → 1 / 2 /. φ -> 439 / 3168
```

$$\frac{7445}{133056} + \frac{114523\,h}{1064448}$$

```
householdincome = inchou / Det[matrixalpha]
```

$$\frac{1368576\left(\frac{7445}{133056} + \frac{114523\,h}{1064448}\right)}{253109}$$

```
Simplify[1368576 (7445/133056 + 114523 h/1064448)/253109]
```

$$\frac{9\,(59560 + 114523\,h)}{1771763}$$

```
D[9 (59560 + 114523 h)/1771763, h]
```

$$\frac{1030707}{1771763}$$

```
N[1030707/1771763]
```

0.581741

```
exphou =
 -h β + h β δ - ϵ + h β ϵ + δ ϵ - h δ ϵ + h β φ + ϵ φ - h β ϵ φ + h β ω - h δ ω + ϵ ω - h β ϵ ω - δ ϵ ω + h δ ϵ ω /.
      β → 8 / 9 /. γ -> 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ϵ → 5 / 6 /. ω → 1 / 2 /. φ -> 439 / 3168
```

$$\frac{7445}{133056} - \frac{11579\,h}{149688}$$

```
householdexpenditure = exphou / Det[matrixalpha]
```

$$\frac{1368576\left(\frac{7445}{133056} - \frac{11579\,h}{149688}\right)}{253109}$$

```
Simplify[1368576 (7445/133056 - 11579 h/149688)/253109]
```

$$-\frac{8\,(-67005 + 92632\,h)}{1771763}$$

```
D[-(8 (-67005 + 92632 h))/1771763, h]
```

$$-\frac{741056}{1771763}$$

```
N[-741056/1771763]
```

$$-0.418259$$

```
incbus =
 ϵ - h ϵ - β ϵ + h β ϵ + h β γ φ - ϵ φ + h ϵ φ + β ϵ φ - h β ϵ φ + γ ϵ φ - h γ ϵ φ - h γ ω + h β γ ω - ϵ ω +
       h ϵ ω + β ϵ ω - h β ϵ ω /. β → 8 / 9 /. γ -> 7 / 8 /.
     δ → 6 / 7 /. ϵ → 5 / 6 /. ω → 1 / 2 /. φ -> 439 / 3168
```

$$\frac{16735}{124416} - \frac{103109\,h}{1368576}$$

```
businessincome = incbus / Det[matrixalpha]
```

$$\frac{1368576\left(\frac{16735}{124416} - \frac{103109\,h}{1368576}\right)}{253109}$$

```
Simplify[(1368576 (16735/124416 - (103109 h)/1368576))/253109]
```

$$\frac{184085 - 103109\,h}{253109}$$

```
D[(184085 - 103109 h)/253109, h]
```

$$-\frac{103109}{253109}$$

```
N[-103109/253109]
```

$$-0.40737$$

```
expbus =
 -β + h β + β δ - h β δ + β φ - h β φ + h β γ φ + β ω - h β ω - γ ω + h β γ ω - δ ω + h δ ω + γ δ ω - h γ δ ω /.
       β → 8 / 9 /. γ -> 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ϵ → 5 / 6 /. ω → 1 / 2 /. φ -> 439 / 3168
```

$$-\frac{719}{14256} + \frac{3125\,h}{28512}$$

```
businessexpenditure = expbus / Det[matrixalpha]
```

$$\frac{1368576\left(-\frac{719}{14256} + \frac{3125\,h}{28512}\right)}{253109}$$

```
Simplify[(1368576 (-719/14256 + (3125 h)/28512))/253109]
```

$$\frac{48\,(-1438 + 3125\,h)}{253109}$$

```
D[(48 (-1438 + 3125 h))/253109, h]
```

$$\frac{150000}{253109}$$

```
N[150000/253109]
```

0.59263

```
incfin =
 -β + h β γ + β δ - h β γ δ - ϵ + β ϵ + γ ϵ - h β γ ϵ + δ ϵ - h δ ϵ - β δ ϵ + h β δ ϵ - γ δ ϵ + h γ δ ϵ + β φ +
       ϵ φ - β ϵ φ - γ ϵ φ + β ω - γ ω - δ ω + γ δ ω + ϵ ω - β ϵ ω /. β → 8/9 /.
     γ -> 7/8 /. δ → 6/7 /. ϵ → 5/6 /. ω → 1/2 /. φ -> 439/3168
```

$$-\frac{13523}{9580032}+\frac{13\,h}{1512}$$

```
financialincome = incfin / Det[matrixalpha]
```

$$\frac{1368576\left(-\frac{13523}{9580032}+\frac{13\,h}{1512}\right)}{253109}$$

```
Simplify[1368576 (-13523/9580032 + 13 h/1512) / 253109]
```

$$\frac{-13523+82368\,h}{1771763}$$

```
D[(-13523 + 82368 h)/1771763, h]
```

$$\frac{82368}{1771763}$$

```
N[82368/1771763]
```

0.0464893

```
expfin =
 h β γ - h β γ δ + γ ϵ - h β γ ϵ + δ ϵ - h δ ϵ - β δ ϵ + h β δ ϵ - γ δ ϵ + h γ δ ϵ /. β → 8/9 /. γ -> 7/8 /.
    δ → 6/7 /. ϵ → 5/6 /. ω → 1/2 /. φ -> 439/3168
```

$$\frac{185}{1008}+\frac{13\,h}{1512}$$

```
financialexpenditure = expfin / Det[matrixalpha]
```

$$\frac{1368576\left(\frac{185}{1008}+\frac{13\,h}{1512}\right)}{253109}$$

```
Simplify[1368576 (185/1008 + 13 h/1512) / 253109]
```

$$\frac{3168\,(555+26\,h)}{1771763}$$

```
D[3168 (555 + 26 h)/1771763, h]
```

$$\frac{82368}{1771763}$$

```
N[82368/1771763]
```

0.0464893

householdincome + businessincome + financialincome

$$\frac{1368576\left(\frac{16735}{124416}-\frac{103109\,h}{1368576}\right)}{253109}+\frac{1368576\left(-\frac{13523}{9580032}+\frac{13\,h}{1512}\right)}{253109}+\frac{1368576\left(\frac{7445}{133056}+\frac{114523\,h}{1064448}\right)}{253109}$$

Simplify[

$$\frac{1368576\left(\frac{16735}{124416}-\frac{103109\,h}{1368576}\right)}{253109}+\frac{1368576\left(-\frac{13523}{9580032}+\frac{13\,h}{1512}\right)}{253109}+\frac{1368576\left(\frac{7445}{133056}+\frac{114523\,h}{1064448}\right)}{253109}\Big]$$

$$\frac{8\,(226389+48914\,h)}{1771763}$$

householdexpenditure + businessexpenditure + financialexpenditure

$$\frac{1368576\left(\frac{7445}{133056}-\frac{11579\,h}{149688}\right)}{253109}+\frac{1368576\left(\frac{185}{1008}+\frac{13\,h}{1512}\right)}{253109}+\frac{1368576\left(-\frac{719}{14256}+\frac{3125\,h}{28512}\right)}{253109}$$

Simplify[$\frac{1368576\left(\frac{7445}{133056}-\frac{11579\,h}{149688}\right)}{253109}+\frac{1368576\left(\frac{185}{1008}+\frac{13\,h}{1512}\right)}{253109}+\frac{1368576\left(-\frac{719}{14256}+\frac{3125\,h}{28512}\right)}{253109}$**]**

$$\frac{8\,(226389+48914\,h)}{1771763}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ V

Οι ακόλουθοι υπολογισμοί με το Mathematica αναφέρονται στο Κεφάλαιο
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Σελίδες		Εξισώσεις
63	Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο και Λύση του Συστήματος Ανισοτήτων που Σχηματίζεται από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz του Υποδείγματος **20**	22
64-65	Εξεύρεση (με τον Κανόνα του Cramer) των Στατικών Ροών του Στοιχειώδους Μαθηματικού Υποδείγματος **20**	23-25
65-66	Οι Μερικές Παράγωγοι των Τομεακών Ροών της Στοιχειώδους Οικονομίας **Άλφα** ως προς το μερίδιο h	26
65	Οι Επαναλαμβανόμενες Αγοραπωλησίες στα Παζάρια Αγαθών της **Άλφα**	27

Page 63 Characteristic polynomial 22 and solution of Routh - Hurwitz conditions as a system of inequalities

```
alpha = {{-1 - λ, 0, δ - 1, ε, 0, ω + φ}, {1, -1 - λ, 0, 0, 0, 0},
      {β - 1, γ, -1 - λ, 0, 0, 1 - ω}, {0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ε, -1 - λ, 0},
      {0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ}} /. β → 8 / 9 /. γ → 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ε → 5 / 6
```

$$\left\{\left\{-1-\lambda,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ 0,\ \varphi+\omega\right\},\ \{1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7}{8},\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 1-\omega\right\},\right.$$
$$\left.\{0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{6},\ -1-\lambda,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda\}\right\}$$

```
MatrixForm[alpha]
```

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{7}{8} & -1-\lambda & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

```
Det[alpha]
```

$$\frac{83}{378}+\frac{809\,\lambda}{168}+\frac{14779\,\lambda^2}{1008}+\frac{30473\,\lambda^3}{1512}+\frac{944\,\lambda^4}{63}+$$
$$6\,\lambda^5+\lambda^6-\frac{109\,\varphi}{432}-\frac{25\,\lambda\,\varphi}{108}-\frac{\lambda^2\,\varphi}{8}+\frac{\omega}{1512}+\frac{127\,\lambda\,\omega}{1512}+\frac{\lambda^2\,\omega}{24}$$

```
polytria = 83/378 + 809 λ/168 + 14779 λ^2/1008 + 30473 λ^3/1512 +
   944 λ^4/63 + 6 λ^5 + λ^6 - 109 φ/432 - 25 λ φ/108 - λ^2 φ/8 + ω/1512 + 127 λ ω/1512 + λ^2 ω/24
```

$$\frac{83}{378}+\frac{809\,\lambda}{168}+\frac{14779\,\lambda^2}{1008}+\frac{30473\,\lambda^3}{1512}+\frac{944\,\lambda^4}{63}+$$
$$6\,\lambda^5+\lambda^6-\frac{109\,\varphi}{432}-\frac{25\,\lambda\,\varphi}{108}-\frac{\lambda^2\,\varphi}{8}+\frac{\omega}{1512}+\frac{127\,\lambda\,\omega}{1512}+\frac{\lambda^2\,\omega}{24}$$

```
Collect[polytria, λ]
```

$$\frac{83}{378}+\frac{30473\,\lambda^3}{1512}+\frac{944\,\lambda^4}{63}+6\,\lambda^5+\lambda^6-\frac{109\,\varphi}{432}+$$
$$\lambda^2\left(\frac{14779}{1008}-\frac{\varphi}{8}+\frac{\omega}{24}\right)+\lambda\left(\frac{809}{168}-\frac{25\,\varphi}{108}+\frac{127\,\omega}{1512}\right)+\frac{\omega}{1512}$$

```
alfa0 = Coefficient[polytria, λ, 6]
```

```
1
```

```
alfa1 = Coefficient[polytria, λ, 5]
```

```
6
```

```
alfa2 = Coefficient[polytria, λ, 4]
```

$$\frac{944}{63}$$

```
alfa3 = Coefficient[polytria, λ, 3]
```

$$\frac{30473}{1512}$$

```
alfa4 = Coefficient[polytria, λ, 2]
```

$$\frac{14779}{1008} - \frac{\varphi}{8} + \frac{\omega}{24}$$

```
Simplify[14779/1008 - φ/8 + ω/24]
```

$$\frac{14779 - 126\,\varphi + 42\,\omega}{1008}$$

```
alfa5 = Coefficient[polytria, λ, 1]
```

$$\frac{809}{168} - \frac{25\,\varphi}{108} + \frac{127\,\omega}{1512}$$

```
Simplify[809/168 - 25 φ/108 + 127 ω/1512]
```

$$\frac{7281 - 350\,\varphi + 127\,\omega}{1512}$$

```
alfa6 = Coefficient[polytria, λ, 0]
```

$$\frac{83}{378} - \frac{109\,\varphi}{432} + \frac{\omega}{1512}$$

```
Simplify[83/378 - 109 φ/432 + ω/1512]
```

$$\frac{664 - 763\,\varphi + 2\,\omega}{3024}$$

```
rh0 = alfa0
```

```
1
```

```
rh1 = alfa1
```

```
6
```

```
rh2 = Det[{{alfa1, alfa0}, {alfa3, alfa2}}]
```

$$\frac{105463}{1512}$$

```
N[105463/1512]
```

```
69.7507
```

```
rh3 = Det[{{alfa1, alfa0, 0}, {alfa3, alfa2, alfa1}, {alfa5, alfa4, alfa3}}]
```

$$\frac{2073151439}{2286144} + \frac{28\,\varphi}{9} - \frac{251\,\omega}{252}$$

```
2073151439/2286144 + 28 φ/9 - 251 ω/252 /. ω → 1/2 /. φ → 439/3168
```

$$\frac{22802983477}{25147584}$$

```
N[22802983477/25147584]
```

```
906.766
```

```
rh4 = Det[{{alfa1, alfa0, 0, 0}, {alfa3, alfa2, alfa1, alfa0},
   {alfa5, alfa4, alfa3, alfa2}, {0, alfa6, alfa5, alfa4}}]
```

$$\frac{20175631062677}{2304433152}+\frac{7712130785\,\varphi}{164602368}-\frac{196\,\varphi^2}{729}-\frac{65152506901\,\omega}{1152216576}+\frac{251\,\varphi\,\omega}{1458}-\frac{63001\,\omega^2}{2286144}$$

```
20175631062677/2304433152 + 7712130785 φ/164602368 - 196 φ^2/729 -
 65152506901 ω/1152216576 + 251 φ ω/1458 - 63001 ω^2/2286144 /.
  ω → 1/2 /. φ → 439/3168
```

$$\frac{16698365072430527}{1912021106688}$$

```
N[16698365072430527/1912021106688]
```

```
8733.36
```

```
rh5 = Det[{{alfa1, alfa0, 0, 0, 0},
   {alfa3, alfa2, alfa1, alfa0, 0}, {alfa5, alfa4, alfa3, alfa2, alfa1},
   {0, alfa6, alfa5, alfa4, alfa3}, {0, 0, 0, 0, alfa5}}]
```

$$\frac{16322085529705693}{387144769536}-\frac{112059688080335\,\varphi}{62219695104}-\frac{215819151353\,\varphi^2}{17777055744}+\frac{1225\,\varphi^3}{19683}+\frac{1613554339467617\,\omega}{3484302925824}+\frac{4443386894521\,\varphi\,\omega}{248878780416}-\frac{3277\,\varphi^2\,\omega}{52488}-\frac{8505558358051\,\omega^2}{1742151462912}+\frac{1715083\,\varphi\,\omega^2}{82301184}-\frac{8001127\,\omega^3}{3456649728}$$

```
16322085529705693/387144769536 - 112059688080335 φ/62219695104 -
 215819151353 φ^2/17777055744 + 1225 φ^3/19683 +
 1613554339467617 ω/3484302925824 + 4443386894521 φ ω/248878780416 -
 3277 φ^2 ω/52488 - 8505558358051 ω^2/1742151462912 +
 1715083 φ ω^2/82301184 - 8001127 ω^3/3456649728 /. ω → 1/2 /. φ → 439/3168
```

$$\frac{19298071746606467755 6801}{4579305846686613504}$$

```
N[192980717466064677556801/4579305846686613504]
```

```
42141.9
```

```
rh6 = alfa6
```

$$\frac{83}{378}-\frac{109\,\varphi}{432}+\frac{\omega}{1512}$$

```
83/378 - 109 φ/432 + ω/1512 /. ω → 1/2 /. φ → 439/3168
```

$$\frac{253109}{1368576}$$

```
N[253109/1368576]
```

```
0.184943
```

```
<< Algebra`InequalitySolve`
```

```
InequalitySolve[
 {22815507373/25147584 - 251 ω/252 > 0, 117266893831017065/13384147746816 - 716375217295 ω/12674382336 - 63001 ω^2/2286144 > 0,
  13434422531915103504011135/32055140926806294528 + 28264697833583211155 ω/60710494179557376 -
   187011604425883 ω^2/38327332184064 - 8001127 ω^3/3456649728 > 0, 1768595/9580032 + ω/1512 > 0}, {ω}]
```

$$-\frac{11456279}{201168} < \omega < -\frac{716375217295}{698555088} + \frac{\sqrt{\frac{3037909159534838615774 5}{22}}}{31752504}$$

```
N[-11456279/201168 < ω < -716375217295/698555088 + Sqrt[3037909159534838615774 5/22]/31752504]
```

$$-56.9488 < \omega < 144.792$$

```
2073151439/2286144 + 28 φ/9 - 251 ω/252 /. ω → 1/2
```

$$\frac{2072012903}{2286144} + \frac{28\,\varphi}{9}$$

```
20175631062677/2304433152 + 7712130785 φ/164602368 - 196 φ^2/729 - 65152506901 ω/1152216576 + 251 φ ω/1458 - 63001 ω^2/2286144 /. ω → 1/2
```

$$\frac{718230809983}{82301184} + \frac{7726299233\,\varphi}{164602368} - \frac{196\,\varphi^2}{729}$$

```
16322085529705693/387144769536 - 112059688080335 φ/62219695104 - 215819151353 φ^2/17777055744 +
 1225 φ^3/19683 + 1613554339467617 ω/3484302925824 + 4443386894521 φ ω/248878780416 - 3277 φ^2 ω/52488 -
 8505558358051 ω^2/1742151462912 + 1715083 φ ω^2/82301184 - 8001127 ω^3/3456649728 /. ω → 1/2
```

$$\frac{10550092367840287}{248878780416} - \frac{297343841514221\,\varphi}{165919186944} - \frac{216374091641\,\varphi^2}{17777055744} + \frac{1225\,\varphi^3}{19683}$$

```
83/378 - 109 φ/432 + ω/1512 /. ω → 1/2
```

$$\frac{95}{432} - \frac{109\,\varphi}{432}$$

```
InequalitySolve[{2072012903/2286144 + 28 φ/9 > 0, 718230809983/82301184 + 7726299233 φ/164602368 - 196 φ^2/729 > 0,
 10550092367840287/248878780416 - 297343841514221 φ/165919186944 - 216374091641 φ^2/17777055744 + 1225 φ^3/19683 > 0,
 95/432 - 109 φ/432 > 0}, {φ}]
```

$$\frac{7726299233}{88510464} - \frac{\sqrt{313979468840621036737}}{88510464} < \varphi < \frac{95}{109}$$

```
N[7726299233/88510464 - Sqrt[313979468840621036737]/88510464 < φ < 95/109]
```

$$-112.904 < \varphi < 0.87156$$

Pages 64 - 65 Cramer ' s Rule (equations 23, 24 and 25)

```
economy = {{-1, 0, δ - 1, ε, 0, ω + φ}, {1, -1, 0, 0, 0, 0},
      {β - 1, γ, -1, 0, 0, 1 - ω}, {0, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ε, -1, 0},
      {0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. β → 8 / 9 /. γ → 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ε → 5 / 6
```

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ 0,\ \varphi+\omega\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7}{8},\ -1,\ 0,\ 0,\ 1-\omega\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[economy]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{7}{8} & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[economy]
```

$$\frac{83}{378}-\frac{109\,\varphi}{432}+\frac{\omega}{1512}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{664-763\,\varphi+2\,\omega}{3024}$$

```
83/378 - 109 φ/432 + ω/1512 /. φ → 439 / 3168 /. ω → 1 / 2
```

$$\frac{253109}{1368576}$$

Household Income

```
ynhou = {{0, 0, δ - 1, ε, 0, ω + φ}, {h, -1, 0, 0, 0, 0},
      {0, γ, -1, 0, 0, 1 - ω}, {1 - h, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ε, -1, 0},
      {-1, 0, 0, 0, 1, -1}} /. β → 8 / 9 /. γ → 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ε → 5 / 6
```

$$\left\{\left\{0,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ 0,\ \varphi+\omega\right\},\ \{h,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ \frac{7}{8},\ -1,\ 0,\ 0,\ 1-\omega\right\},\ \{1-h,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[ynhou]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & \varphi+\omega \\ h & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{8} & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 1-h & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[ynhou]
```

$$-\frac{5}{42}+\frac{5\,h}{42}+\frac{5\,\varphi}{6}-\frac{5\,h\,\varphi}{48}+\frac{5\,\omega}{42}+\frac{h\,\omega}{168}$$

```
Simplify[-5/42 + 5 h/42 + 5 φ/6 - 5 h φ/48 + 5 ω/42 + h ω/168]
```

$$\frac{1}{336}\,(40\,(-1+7\,\varphi+\omega)+h\,(40-35\,\varphi+2\,\omega))$$

```
Simplify[1/336 (40 (-1 + 7 φ + ω) + h (40 - 35 φ + 2 ω)) / (664 - 763 φ + 2 ω)/3024]
```

$$\frac{9\,(40\,(-1+7\,\varphi+\omega)+h\,(40-35\,\varphi+2\,\omega))}{664-763\,\varphi+2\,\omega}$$

```
householdincome = k * 9 (40 (-1 + 7 φ + ω) + h (40 - 35 φ + 2 ω))/(664 - 763 φ + 2 ω) /. φ → 439/3168 /. ω → 1/2
```

$$\frac{28512\,(\frac{7445}{396}+\frac{114523\,h}{3168})\,k}{1771763}$$

```
Simplify[28512 (7445/396 + 114523 h/3168) k/1771763]
```

$$\frac{9\,(59560+114523\,h)\,k}{1771763}$$

Household Expenditure

```
exhou = {{-1, 0, δ - 1, ε, 0, ω + φ}, {1, h, 0, 0, 0, 0},
    {β - 1, 0, -1, 0, 0, 1 - ω}, {0, 1 - h, 1, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1 - ε, -1, 0},
    {0, -1, 0, 0, 1, -1}} /. β → 8/9 /. γ → 7/8 /. δ → 6/7 /. ε → 5/6
```

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ 0,\ \varphi+\omega\right\},\ \{1,\ h,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1-\omega\right\},\right.$$
$$\left.\{0,\ 1-h,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[exhou]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 1-h & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[exhou]
```

$$-\frac{5}{42}-\frac{19\,h}{189}+\frac{5\,\varphi}{6}+\frac{4\,h\,\varphi}{27}+\frac{5\,\omega}{42}+\frac{h\,\omega}{189}$$

```
Simplify[-5/42 - 19 h/189 + 5 φ/6 + 4 h φ/27 + 5 ω/42 + h ω/189]
```

$$\frac{1}{378}\,(45\,(-1+7\,\varphi+\omega)+2\,h\,(-19+28\,\varphi+\omega))$$

```
Simplify[1/378 (45 (-1 + 7 φ + ω) + 2 h (-19 + 28 φ + ω)) / (664 - 763 φ + 2 ω)/3024]
```

$$\frac{8\,(45\,(-1+7\,\varphi+\omega)+2\,h\,(-19+28\,\varphi+\omega))}{664-763\,\varphi+2\,\omega}$$

```
householdexpenditure =
k * (8 (45 (-1 + 7 φ + ω) + 2 h (-19 + 28 φ + ω))) / (664 - 763 φ + 2 ω) /. φ → 439 / 3168 /. ω → 1 / 2
```

$$\frac{25344 \left(\frac{7445}{352} - \frac{11579\,h}{396}\right) k}{1771763}$$

```
Simplify[25344 (7445/352 - 11579 h/396) k / 1771763]
```

$$-\frac{8 (-67005 + 92632\,h)\, k}{1771763}$$

Business Income

```
ynbus = {{-1, 0, 0, ε, 0, ω + φ}, {1, -1, h, 0, 0, 0},
        {β - 1, γ, 0, 0, 0, 1 - ω}, {0, 0, 1 - h, -1, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ε, -1, 0},
        {0, 0, -1, 0, 1, -1}} /. β → 8 / 9 /. γ → 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ε → 5 / 6
```

$$\left\{\left\{-1, 0, 0, \frac{5}{6}, 0, \varphi + \omega\right\}, \{1, -1, h, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7}{8}, 0, 0, 0, 1 - \omega\right\}, \{0, 0, 1 - h, -1, 0, 0\}, \left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6}, -1, 0\right\}, \{0, 0, -1, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[ynbus]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & \varphi + \omega \\ 1 & -1 & h & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{7}{8} & 0 & 0 & 0 & 1 - \omega \\ 0 & 0 & 1 - h & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[ynbus]
```

$$\frac{5}{54} - \frac{5\,h}{54} + \frac{275\,\varphi}{432} + \frac{61\,h\,\varphi}{432} - \frac{5\,\omega}{54} - \frac{h\,\omega}{216}$$

```
Simplify[5/54 - 5 h/54 + 275 φ/432 + 61 h φ/432 - 5 ω/54 - h ω/216]
```

$$\frac{1}{432} (5 (8 + 55 \varphi - 8 \omega) + h (61 \varphi - 2 (20 + \omega)))$$

```
Simplify[1/432 (5 (8 + 55 φ - 8 ω) + h (61 φ - 2 (20 + ω))) / (664 - 763 φ + 2 ω)/3024]
```

$$\frac{7 (5 (8 + 55 \varphi - 8 \omega) + h (61 \varphi - 2 (20 + \omega)))}{664 - 763 \varphi + 2 \omega}$$

```
businessincome = k * 7 (5 (8 + 55 φ - 8 ω) + h (61 φ - 2 (20 + ω))) / (664 - 763 φ + 2 ω) /. φ → 439 / 3168 /. ω → 1 / 2
```

$$\frac{3168 \left(\frac{16735}{288} - \frac{103109\,h}{3168}\right) k}{253109}$$

```
Simplify[3168 (16735/288 - 103109 h/3168) k / 253109]
```

$$-\frac{(-184085 + 103109\,h)\,k}{253109}$$

Business Expenditure

```
exbus = {{-1, 0, δ - 1, 0, 0, ω + φ}, {1, -1, 0, h, 0, 0},
    {β - 1, γ, -1, 0, 0, 1 - ω}, {0, 0, 1, 1 - h, 0, 0}, {0, 1 - γ, 0, 0, -1, 0},
    {0, 0, 0, -1, 1, -1}} /. β → 8/9 /. γ → 7/8 /. δ → 6/7 /. ε → 5/6
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{1}{7}, 0, 0, \varphi + \omega\right\}, \{1, -1, 0, h, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7}{8}, -1, 0, 0, 1 - \omega\right\}, \{0, 0, 1, 1 - h, 0, 0\}, \left\{0, \frac{1}{8}, 0, 0, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, -1, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[exbus]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & \varphi + \omega \\ 1 & -1 & 0 & h & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{7}{8} & -1 & 0 & 0 & 1 - \omega \\ 0 & 0 & 1 & 1 - h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[exbus]
```

$$-\frac{8}{63} + \frac{8\,h}{63} + \frac{8\,\varphi}{9} - \frac{h\,\varphi}{9} - \frac{47\,\omega}{504} - \frac{h\,\omega}{252}$$

```
Simplify[-8/63 + 8 h/63 + 8 φ/9 - h φ/9 - 47 ω/504 - h ω/252]
```

$$\frac{1}{504}\,(-64 + 448\,\varphi - 47\,\omega - 2\,h\,(-32 + 28\,\varphi + \omega))$$

```
Simplify[1/504 (-64 + 448 φ - 47 ω - 2 h (-32 + 28 φ + ω)) / (664 - 763 φ + 2 ω)/3024]
```

$$\frac{6\,(64 - 448\,\varphi + 47\,\omega + 2\,h\,(-32 + 28\,\varphi + \omega))}{763\,\varphi - 2\,(332 + \omega)}$$

```
businessexpenditure =
  k * 6 (64 - 448 φ + 47 ω + 2 h (-32 + 28 φ + ω)) / (763 φ - 2 (332 + ω)) /. φ → 439/3168 /. ω → 1/2
```

$$-\frac{19008\,(\frac{5033}{198} - \frac{21875\,h}{396})\,k}{1771763}$$

```
Simplify[19008 (-5033/198 + 21875 h/396) k / 1771763]
```

$$\frac{48\,(-1438 + 3125\,h)\,k}{253109}$$

Financier Income

```
ynfin = {{-1, 0, δ - 1, ε, 0, ω + φ}, {1, -1, 0, 0, h, 0},
        {β - 1, γ, -1, 0, 0, 1 - ω}, {0, 0, 1, -1, 1 - h, 0}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ε, 0, 0},
        {0, 0, 0, 0, -1, -1}} /. β → 8 / 9 /. γ → 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ε → 5 / 6
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, 0, \varphi+\omega\right\}, \{1, -1, 0, 0, h, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7}{8}, -1, 0, 0, 1-\omega\right\}, \{0, 0, 1, -1, 1-h, 0\}, \left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6}, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, -1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[ynfin]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & \varphi+\omega \\ 1 & -1 & 0 & 0 & h & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{7}{8} & -1 & 0 & 0 & 1-\omega \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1-h & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[ynfin]
```

$$-\frac{109}{3024}+\frac{13\,h}{1512}+\frac{109\,\varphi}{432}-\frac{\omega}{1512}$$

```
Simplify[-109/3024 + 13 h/1512 + 109 φ/432 - ω/1512]
```

$$\frac{-109+26\,h+763\,\varphi-2\,\omega}{3024}$$

```
Simplify[(-109 + 26 h + 763 φ - 2 ω)/3024 / (664 - 763 φ + 2 ω)/3024]
```

$$\frac{-109+26\,h+763\,\varphi-2\,\omega}{664-763\,\varphi+2\,\omega}$$

```
financierincome = k * (-109 + 26 h + 763 φ - 2 ω)/(664 - 763 φ + 2 ω) /. φ → 439 / 3168 /. ω → 1 / 2
```

$$\frac{3168\left(-\frac{13523}{3168}+26\,h\right)k}{1771763}$$

```
Simplify[3168 (-13523/3168 + 26 h) k/1771763]
```

$$\frac{(-13523+82368\,h)\,k}{1771763}$$

Financier Expenditure

```
exfin = {{-1, 0, δ - 1, ε, 0, 0}, {1, -1, 0, 0, 0, h},
        {β - 1, γ, -1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, -1, 0, 1 - h}, {0, 1 - γ, 0, 1 - ε, -1, 0},
        {0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. β → 8 / 9 /. γ → 7 / 8 /. δ → 6 / 7 /. ε → 5 / 6
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, 0, 0\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, h\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7}{8}, -1, 0, 0, 0\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 1-h\}, \left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[exfin]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & h \\ -\frac{1}{9} & \frac{7}{8} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1-h \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[exfin]
```

$$\frac{185}{1008} + \frac{13\,h}{1512}$$

```
Simplify[185/1008 + 13 h/1512]
```

$$\frac{555 + 26\,h}{3024}$$

```
Simplify[(555 + 26 h)/3024 / ((664 - 763 φ + 2 ω)/3024)]
```

$$\frac{555 + 26\,h}{664 - 763\,\varphi + 2\,\omega}$$

```
financierexpenditure = k * (555 + 26 h)/(664 - 763 φ + 2 ω) /. φ → 439/3168 /. ω → 1/2
```

$$\frac{3168\,(555 + 26\,h)\,k}{1771763}$$

```
Simplify[3168 (555 + 26 h) k/1771763]
```

$$\frac{3168\,(555 + 26\,h)\,k}{1771763}$$

```
<< Algebra`
```

```
InequalitySolve[{9 (59560 + 114523 h)/1771763 > 0, -8 (-67005 + 92632 h)/1771763 > 0,
  184085 - 103109 h/253109 > 0, 48 (-1438 + 3125 h)/253109 > 0,
  -13523 + 82368 h/1771763 > 0, 3168 (555 + 26 h)/1771763 > 0}, {h}]
```

$$\frac{1438}{3125} < h < \frac{67005}{92632}$$

```
N[1438/3125 < h < 67005/92632]
```

$$0.46016 < h < 0.723346$$

Pages 65 - 66 Partial derivatives with respect
to h (equations 26) and sector flows at h = 1 / 2 (Table V2)

Household Income

$$171360 * \frac{9\,(59560 + 114523\ /\ 2)}{1771763}$$

$$\frac{25738112880}{253109}$$

$$N\left[\frac{25738112880}{253109}\right]$$

101688.

Change of household income

$$D\left[\frac{9\,(59560 + 114523\,h)}{1771763},\ h\right]$$

$$\frac{1030707}{1771763}$$

$$171360 * \frac{1030707}{1771763} * 2\ /\ 101688$$

$$\frac{2102642280}{1072422833}$$

$$N\left[\frac{2102642280}{1072422833}\right]$$

1.96065

Household Expenditure

$$171360 * -\frac{8\,(-67005 + 92632\ /\ 2)}{1771763}$$

$$\frac{4051733760}{253109}$$

$$N\left[\frac{4051733760}{253109}\right]$$

16007.9

Change of household expenditure

$$D\left[-\frac{8\,(-67005 + 92632\,h)}{1771763},\ h\right]$$

$$-\frac{741056}{1771763}$$

$$171360 * -\frac{741056}{1771763} * 2\ /\ 16008$$

$$-\frac{1511754240}{168823703}$$

$$N\left[-\frac{1511754240}{168823703}\right]$$

-8.95463

Business Income

$$171360 * -\frac{(-184085 + 103109 / 2)}{253109}$$

$$\frac{22710426480}{253109}$$

$$N\left[\frac{22710426480}{253109}\right]$$

89725.9

Change of business income

$$D\left[-\frac{(-184085 + 103109\, h)}{253109}, h\right]$$

$$-\frac{103109}{253109}$$

$$171360 * -\frac{103109}{253109} * 2 / 89726$$

$$-\frac{148476960}{95422093}$$

$$N\left[-\frac{148476960}{95422093}\right]$$

-1.556

Business Expenditure

$$171360 * \frac{48 (-1438 + 3125 / 2)}{253109}$$

$$\frac{1024047360}{253109}$$

$$N\left[\frac{1024047360}{253109}\right]$$

4045.87

Change of business esxpenditure

$$D\left[\frac{48 (-1438 + 3125\, h)}{253109}, h\right]$$

$$\frac{150000}{253109}$$

$$171360 * \frac{150000}{253109} * 2 / 4046$$

$$\frac{216000000}{4302853}$$

$$N\left[\frac{216000000}{4302853}\right]$$

50.1993

Financier Income

$$171360 * \frac{(-13523 + 82368 / 2)}{1771763}$$

$$\frac{677141280}{253109}$$

$$N\left[\frac{677141280}{253109}\right]$$

2675.3

Change of financier income

$$D\left[\frac{(-13523 + 82368\, h)}{1771763}, h\right]$$

$$\frac{82368}{1771763}$$

$$171360 * \frac{82368}{1771763} * 2 / 2675$$

$$\frac{806547456}{135413315}$$

$$N\left[\frac{806547456}{135413315}\right]$$

5.95619

Financier Expenditure

$$171360 * \frac{3168\ (555 + 26 / 2)}{1771763}$$

$$\frac{44049899520}{253109}$$

$$N\left[\frac{44049899520}{253109}\right]$$

174035.

Change of financier expenditure

$$D\left[\frac{3168\ (555 + 26\, h)}{1771763}, h\right]$$

$$\frac{82368}{1771763}$$

$$171360 * \frac{82368}{1771763} * 2 / 174035$$

$$\frac{806547456}{8809964963}$$

$$N\left[\frac{806547456}{8809964963}\right]$$

0.0915495

Page 65 Steady-state market flows (equations 27)

Steady State - income and expenditure of each sector

Household Income

$$k * \frac{9\,(59560 + 114523\,h)}{1771763}$$

Household Expenditure

$$k * -\frac{8\,(-67005 + 92632\,h)}{1771763}$$

Business Income

$$k * -\frac{(-184085 + 103109\,h)}{253109}$$

Business Expenditure

$$k * \frac{48\,(-1438 + 3125\,h)}{253109}$$

Financier Income

$$k * \frac{(-13523 + 82368\,h)}{1771763}$$

Financier Expenditure

$$k * \frac{3168\,(555 + 26\,h)}{1771763}$$

Steady State - receipts and payments in each market

Labour Market

8 / 9 * Household Income

$$8 / 9 * k * \frac{9\,(59560 + 114523\,h)}{1771763} \;/.\; h \to 1 / 2$$

$$\frac{934572\,k}{1771763}$$

$$N\left[\frac{934572\,k}{1771763}\right]$$

$$0.527481\,k$$

5 / 6 * Business Expenditure + 1 / 2 * Financier Expenditure

$$5 / 6 * k * \frac{48\,(-1438 + 3125\,h)}{253109} + 1 / 2 * k * \frac{3168\,(555 + 26\,h)}{1771763}$$

$$\frac{1584\,(555 + 26\,h)\,k}{1771763} + \frac{40\,(-1438 + 3125\,h)\,k}{253109}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{1584\,(555 + 26\,h)\,k}{1771763} + \frac{40\,(-1438 + 3125\,h)\,k}{253109}\right]$$

$$\frac{8\,(59560 + 114523\,h)\,k}{1771763}$$

$$\frac{8\,(59560+114523\,h)\,k}{1771763}\ /.\ h\to 1/2\ /.\ k\to 171360000$$

$$\frac{22878322560000}{253109}$$

$$N\left[\frac{22878322560000}{253109}\right]$$

$$9.03892\times 10^{7}$$

Output Market

6 / 7 * Business Income

$$6/7*k*-\frac{(-184085+103109\,h)}{253109}\ /.\ h\to 1/2$$

$$\frac{795183\,k}{1771763}$$

$$N\left[\frac{795183\,k}{1771763}\right]$$

$$0.448809\,k$$

7 / 8 * Household Expenditure + 1145 / 3168 * Financier Expenditure

$$7/8*k*-\frac{8\,(-67005+92632\,h)}{1771763}+1145/3168*k*\frac{3168\,(555+26\,h)}{1771763}$$

$$\frac{1145\,(555+26\,h)\,k}{1771763}-\frac{(-67005+92632\,h)\,k}{253109}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{1145\,(555+26\,h)\,k}{1771763}-\frac{(-67005+92632\,h)\,k}{253109}\right]$$

$$-\frac{6\,(-184085+103109\,h)\,k}{1771763}$$

$$-\frac{6\,(-184085+103109\,h)\,k}{1771763}\ /.\ h\to 1/2\ /.\ k\to 171360000$$

$$\frac{19466079840000}{253109}$$

$$N\left[\frac{19466079840000}{253109}\right]$$

$$7.69079\times 10^{7}$$

Bond Market

1 / 9 * Household Income + 1 / 7 * Business Income + Financier Income

$$\text{Simplify}\left[1/9*k*\frac{9\,(59560+114523\,h)}{1771763}+1/7*k*-\frac{(-184085+103109\,h)}{253109}+k*\frac{(-13523+82368\,h)}{1771763}\right]$$

$$\frac{2\,(115061+46891\,h)\,k}{1771763}$$

$$\frac{2\,(115061 + 46891\,h)\,k}{1771763} \;/.\; h \to 1/2$$

$$\frac{277013\,k}{1771763}$$

$$N\left[\frac{277013\,k}{1771763}\right]$$

$$0.156349\,k$$

```
1 / 8 * Household Expenditure +
 1 / 6 * Business Expenditure + 439 / 3168 * Financier Expenditure
```

$$\text{Simplify}\left[1/8 * k * -\frac{8\,(-67005 + 92632\,h)}{1771763} + 1/6 * k * \frac{48\,(-1438 + 3125\,h)}{253109} + 439/3168 * k * \frac{3168\,(555 + 26\,h)}{1771763}\right]$$

$$\frac{2\,(115061 + 46891\,h)\,k}{1771763}$$

$$\frac{2\,(115061 + 46891\,h)\,k}{1771763} \;/.\; h \to 1/2 \;/.\; k \to 171360000$$

$$\frac{6781278240000}{253109}$$

$$N\left[\frac{6781278240000}{253109}\right]$$

$$2.67919 \times 10^{7}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ VI

Οι ακόλουθοι υπολογισμοί με το Mathematica αναφέρονται στο Κεφάλαιο
ΤΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΧΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΓΑΘΩΝ

Σελίδες		Εξισώσεις
81-84	Το Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο και οι Ορίζουσες των Routh-Hurwitz του Υποδείγματος **43**	43-48

Pages 81 - 84 Dynamic system and Routh - Hurwitz conditions (equations 43 - 48)

matrix44 = {{-1, 0, δ - 1, ϵ}, {1, -1, 0, 0}, {β - 1, γ, -1, 0}, {0, 0, 1, -1}}

{{-1, 0, -1 + δ, ϵ}, {1, -1, 0, 0}, {-1 + β, γ, -1, 0}, {0, 0, 1, -1}}

MatrixForm[matrix44]

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+\delta & \epsilon \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1+\beta & \gamma & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det[%]

$$\beta+\gamma+\delta-\beta\,\delta-\gamma\,\delta+\epsilon-\beta\,\epsilon-\gamma\,\epsilon$$

matrix47 = {{-1 - λ, 0, -1 + δ, ε}, {1, -1 - λ, 0, 0}, {-1 + β, γ, -1 - λ, 0}, {0, 0, 1, -1 - λ}}

{{-1 - λ, 0, -1 + δ, ε}, {1, -1 - λ, 0, 0}, {-1 + β, γ, -1 - λ, 0}, {0, 0, 1, -1 - λ}}

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -1+\delta & \varepsilon \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -1+\beta & \gamma & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Det[matrix47]

$$\beta+\gamma+\delta-\beta\,\delta-\gamma\,\delta+\varepsilon-\beta\,\varepsilon-\gamma\,\varepsilon+2\,\lambda+2\,\beta\,\lambda+\gamma\,\lambda+ 2\,\delta\,\lambda-2\,\beta\,\delta\,\lambda-\gamma\,\delta\,\lambda+\varepsilon\,\lambda-\beta\,\varepsilon\,\lambda+5\,\lambda^2+\beta\,\lambda^2+\delta\,\lambda^2-\beta\,\delta\,\lambda^2+4\,\lambda^3+\lambda^4$$

Simplify[%]

$$-\gamma\,(-1+\delta+\varepsilon-\lambda+\delta\,\lambda)-\beta\,(1+\lambda)\,(-1+\delta+\varepsilon-\lambda+\delta\,\lambda)+(1+\lambda)\,(\delta+\varepsilon+2\,\lambda+\delta\,\lambda+3\,\lambda^2+\lambda^3)$$

poly47 = β + γ + δ - β δ - γ δ + ε - β ε - γ ε + 2 λ + 2 β λ + γ λ + 2 δ λ - 2 β δ λ - γ δ λ + ε λ - β ε λ + 5 λ² + β λ² + δ λ² - β δ λ² + 4 λ³ + λ⁴

$$\beta+\gamma+\delta-\beta\,\delta-\gamma\,\delta+\varepsilon-\beta\,\varepsilon-\gamma\,\varepsilon+2\,\lambda+2\,\beta\,\lambda+\gamma\,\lambda+ 2\,\delta\,\lambda-2\,\beta\,\delta\,\lambda-\gamma\,\delta\,\lambda+\varepsilon\,\lambda-\beta\,\varepsilon\,\lambda+5\,\lambda^2+\beta\,\lambda^2+\delta\,\lambda^2-\beta\,\delta\,\lambda^2+4\,\lambda^3+\lambda^4$$

Collect[poly47, λ]

$$\beta+\gamma+\delta-\beta\,\delta-\gamma\,\delta+\varepsilon-\beta\,\varepsilon-\gamma\,\varepsilon+ (2+2\,\beta+\gamma+2\,\delta-2\,\beta\,\delta-\gamma\,\delta+\varepsilon-\beta\,\varepsilon)\,\lambda+(5+\beta+\delta-\beta\,\delta)\,\lambda^2+4\,\lambda^3+\lambda^4$$

alfa0 = Coefficient[poly47, λ, 4]

1

alfa1 = Coefficient[poly47, λ, 3]

4

alfa2 = Coefficient[poly47, λ, 2]

$$5+\beta+\delta-\beta\,\delta$$

```
alfa3 = Coefficient[poly47, λ, 1]
```

$$2 + 2\,\beta + \gamma + 2\,\delta - 2\,\beta\,\delta - \gamma\,\delta + \varepsilon - \beta\,\varepsilon$$

```
alfa4 = Coefficient[poly47, λ, 0]
```

$$\beta + \gamma + \delta - \beta\,\delta - \gamma\,\delta + \varepsilon - \beta\,\varepsilon - \gamma\,\varepsilon$$

```
rh0 = alfa0
```

$$1$$

```
rh1 = alfa1
```

$$4$$

```
rh2 = Det[{{alfa1, alfa0}, {alfa3, alfa2}}]
```

$$18 + 2\,\beta - \gamma + 2\,\delta - 2\,\beta\,\delta + \gamma\,\delta - \varepsilon + \beta\,\varepsilon$$

```
18 + 2 β - γ + 2 δ - 2 β δ + γ δ - ε + β ε == (18 + 2 β + 2 δ + γ δ + β ε) - (γ + 2 βδ + ε)
```

$$18 + 2\,\beta - \gamma + 2\,\delta - 2\,\beta\,\delta + \gamma\,\delta - \varepsilon + \beta\,\varepsilon = 18 + 2\,\beta - 2\,\beta\delta - \gamma + 2\,\delta + \gamma\,\delta - \varepsilon + \beta\,\varepsilon$$

```
Simplify[18 + 2 β + 2 δ + γ δ + β ε]
```

$$18 + (2 + \gamma)\,\delta + \beta\,(2 + \varepsilon)$$

```
Simplify[-(γ + 2 βδ + ε)]
```

$$-2\,\beta\delta - \gamma - \varepsilon$$

```
rh3 = Det[{{alfa1, alfa0, 0}, {alfa3, alfa2, alfa1}, {0, alfa4, alfa3}}]
```

$$36 + 24\,\beta + 4\,\beta^2 - \gamma^2 + 24\,\delta - 16\,\beta\,\delta - 8\,\beta^2\,\delta + 2\,\gamma^2\,\delta + 4\,\delta^2 - 8\,\beta\,\delta^2 + 4\,\beta^2\,\delta^2 - \gamma^2\,\delta^2 + 14\,\gamma\,\varepsilon + 2\,\beta\,\gamma\,\varepsilon + 2\,\gamma\,\delta\,\varepsilon - 2\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon - \varepsilon^2 + 2\,\beta\,\varepsilon^2 - \beta^2\,\varepsilon^2$$

```
36 + 24 β + 4 β^2 + 24 δ + 2 γ^2 δ + 4 δ^2 + 4 β^2 δ^2 + 14 γ ε + 2 β γ ε +
 2 γ δ ε + 2 β ε^2 - β^2 ε^2 - γ^2 - 16 β δ - 8 β^2 δ - 8 β δ^2 - γ^2 δ^2 - 2 β γ δ ε - ε^2
```

```
Simplify[36 + 24 β + 4 β^2 + 24 δ + 2 γ^2 δ + 4 δ^2 + 4 β^2 δ^2 + 14 γ ε + 2 β γ ε + 2 γ δ ε + 2 β ε^2]
```

$$2\,(18 + 2\,\delta^2 + 2\,\beta^2\,(1 + \delta^2) + 7\,\gamma\,\varepsilon + \delta\,(12 + \gamma^2 + \gamma\,\varepsilon) + \beta\,(12 + \gamma\,\varepsilon + \varepsilon^2))$$

```
Simplify[-β^2 ε^2 - γ^2 - 16 β δ - 8 β^2 δ - 8 β δ^2 - γ^2 δ^2 - 2 β γ δ ε - ε^2]
```

$$-8\,\beta\,\delta\,(2 + \delta) - \gamma^2\,(1 + \delta^2) - 2\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon - \varepsilon^2 - \beta^2\,(8\,\delta + \varepsilon^2)$$

```
rh4 = Det[{{alfa1, alfa0, 0, 0},
   {alfa3, alfa2, alfa1, alfa0}, {0, alfa4, alfa3, alfa2}, {0, 0, 0, alfa4}}]
```

$$(\beta + \gamma + \delta - \beta\,\delta - \gamma\,\delta + \varepsilon - \beta\,\varepsilon - \gamma\,\varepsilon)\,(36 + 24\,\beta + 4\,\beta^2 - \gamma^2 + 24\,\delta - 16\,\beta\,\delta - 8\,\beta^2\,\delta + 2\,\gamma^2\,\delta + 4\,\delta^2 - 8\,\beta\,\delta^2 + 4\,\beta^2\,\delta^2 - \gamma^2\,\delta^2 + 14\,\gamma\,\varepsilon + 2\,\beta\,\gamma\,\varepsilon + 2\,\gamma\,\delta\,\varepsilon - 2\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon - \varepsilon^2 + 2\,\beta\,\varepsilon^2 - \beta^2\,\varepsilon^2)$$

```
(β + γ + δ - β δ - γ δ + ε - β ε - γ ε)
 (36 + 24 β + 4 β^2 - γ^2 + 24 δ - 16 β δ - 8 β^2 δ + 2 γ^2 δ + 4 δ^2 - 8 β δ^2 + 4 β^2 δ^2 -
   γ^2 δ^2 + 14 γ ε + 2 β γ ε + 2 γ δ ε - 2 β γ δ ε - ε^2 + 2 β ε^2 - β^2 ε^2)
```

```
(36 + 24 β + 4 β^2 + 24 δ + 2 γ^2 δ + 4 δ^2 + 4 β^2 δ^2 + 14 γ ε + 2 β γ ε +
  2 γ δ ε + 2 β ε^2 - β^2 ε^2 - γ^2 - 16 β δ - 8 β^2 δ - 8 β δ^2 - γ^2 δ^2 - 2 β γ δ ε - ε^2)
```

```
Simplify[36 + 24 β + 4 β^2 + 24 δ + 2 γ^2 δ + 4 δ^2 + 4 β^2 δ^2 + 14 γ ε + 2 β γ ε + 2 γ δ ε + 2 β ε^2]
```

$$2\,(18 + 2\,\delta^2 + 2\,\beta^2\,(1 + \delta^2) + 7\,\gamma\,\varepsilon + \delta\,(12 + \gamma^2 + \gamma\,\varepsilon) + \beta\,(12 + \gamma\,\varepsilon + \varepsilon^2))$$

```
Simplify[-β^2 ε^2 - γ^2 - 16 β δ - 8 β^2 δ - 8 β δ^2 - γ^2 δ^2 - 2 β γ δ ε - ε^2]
```

$$-8\,\beta\,\delta\,(2 + \delta) - \gamma^2\,(1 + \delta^2) - 2\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon - \varepsilon^2 - \beta^2\,(8\,\delta + \varepsilon^2)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ VII

Οι ακόλουθοι υπολογισμοί με το Mathematica αναφέρονται στο Κεφάλαιο
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΤΥΧΕΣ ΤΩΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Σελίδες		Εξισώσεις
91-92	Ο Υπολογισμός του Εμβαδού ενός Τριγώνου Σύμφωνα με τον Τύπο της Αναλυτικής Γεωμετρίας	51

Pages 91 - 92 Area of a triangle (equations 51 & 52)

```
triangle =
 {{0.59342 k, 0.09342 k, 1}, {0.52360 k, 0.02360 k, 1}, {0.01561 k, 1.01561 k, 1}}
```

```
{{0.59342 k, 0.09342 k, 1}, {0.5236 k, 0.0236 k, 1}, {0.01561 k, 1.01561 k, 1}}
```

```
Abs[Det[triangle]]
```

```
0.10473 Abs[k]^2
```

```
0.10472999999999999` Abs[k]^2 /. k → 171360000
```

```
3.07532 × 10^15
```

```
{{y1, e1, 1}, {y2, e2, 1}, {y3, e3, 1}} /. y1 → 101688000 /. e1 → 16008000 /.
    y2 → 89725000 /. e2 → 4045000 /. y3 → 2675000 /. e3 → 174035000
```

```
{{101688000, 16008000, 1}, {89725000, 4045000, 1}, {2675000, 174035000, 1}}
```

```
Abs[Det[%]]
```

```
3074969520000000
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Χ

Οι ακόλουθοι υπολογισμοί με το Mathematica αναφέρονται στο Κεφάλαιο
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΟΝΟΜΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Σελίδες		Εξισώσεις ή Πίνακες
135-137	Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο και Λύση του Συστήματος Ανισοτήτων που Σχηματίζεται από τις Ορίζουσες των Routh-Hurwitz του Υποδείγματος	87-89
137-138	Λύση των Στατικών Εξισώσεων του Μοντέλου ως Συναρτήσεων του ζ και Υπολογισμός των Ελαστικοτήτων Ανταπόκρισης των Ετήσιων Ροών στο ζ	90 & 91
138-139	Η Λύση των Στατικών Εξισώσεων ως Ένα Σύστημα Ανισοτήτων και η Κατανομή των Ετήσιων Ροών Ανάμεσα στους Θεσμικούς Τομείς	90 & 92
139	Η Κατανομή των Επαναλαμβανόμενων Αγοραπωλησιών Ανάμεσα στα Παζάρια Αγαθών	93
140	Οι Συντελεστές του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου ως Συναρτήσεις των Φόρων Παρακράτησης και η Λύση των Αντίστοιχων Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Ένα Σύστημα Ανισοτήτων	94
141	Οι Ροές Στατικής Ισορροπίας ως Συναρτήσεις των Φορολογικών Συντελεστών και η Λύση τους ως Ένα Σύστημα Ανισοτήτων	95
141	Οι Ελαστικότητες Ανταπόκρισης των Τομεακών Ροών ως προς τον Φόρο Παρακράτησης στην Εργασία	96
142	Οι Ελαστικότητες Ανταπόκρισης των Τομεακών Ροών ως προς τον Φόρο Παρακράτησης στην Παραγωγή	97
143	Οι Συντελεστές του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου 88 ως Συναρτήσεις της Κατανομής των Δημόσιων Δαπανών και η Λύση των Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Σύστημα Ανισοτήτων	
143-144	Οι Ροές Ισορροπίας ως Συναρτήσεις της Κατανομής των Δημόσιων Δαπανών και η Λύση του Αντίστοιχου Συστήματος Ανισοτήτων	99
144	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή των Δημόσιων Δαπανών Μεταξύ Προϊόντων και Ομολόγων	X_4
145	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή των Δημόσιων Δαπανών Μεταξύ Υπηρεσιών και Ομολόγων	X_5
145	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή των Δημόσιων Δαπανών Μεταξύ Υπηρεσιών και Προϊόντων	X_6
146-147	Οι Ροές Ισορροπίας ως Συναρτήσεις της Κατανομής του Τραπεζικού Παθητικού και η Λύση του Αντίστοιχου Συστήματος Ανισοτήτων	100
147	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Κράτους και Επιχειρήσεων	X_7
148	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Νοικοκυριών και Κράτους	X_8
148	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Επιχειρήσεων και Νοικοκυριών	X_9

Pages 135 - 137 Characteristic Polynomial (equations 88 - 89) and Routh - Hurwitz Conditions of Beta

```
matrixbeta =
 {{-1 - λ, 1 / 8, -1 / 7, (1 - τw) 5 / 6 + 1 / 6, -1, (1 - τw) 1 / 2 + 7 / 20, 0, σw}, {1, -1 - λ, 0, 0,
       0, 0, 0, 0}, {-1 / 9, (1 - τu) 7 / 8 + 1 / 8, -1 - λ, 1 / 6, -1, (1 - τu) 3 / 20 + 7 / 20,
       0, σu}, {0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0, 0, 0}, {-1 / 9, 1 / 8, -1 / 7, 1 / 6, -1 - λ, 7 / 20,
       ζ - 1, 1 - σw - σu}, {0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0}, {-1 / 9, τu * 7 / 8 + 1 / 8,
       0, τw * 5 / 6 + 1 / 6, -1, τw * 1 / 2 + τu * 3 / 20 + 7 / 20, -1 - λ, 1 - σw - σu},
      {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ}} /. σw → 3 / 6 /. σu → 2 / 6 /. τw → 1 / 5 /. τu → 3 / 20
```

$$\left\{\left\{-1-\lambda,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ -1,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \{1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{139}{160},\ -1-\lambda,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{191}{400},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1-\lambda,\ \frac{7}{20},\ -1+\zeta,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{41}{160},\ 0,\ \frac{1}{3},\ -1,\ \frac{189}{400},\ -1-\lambda,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1-\lambda & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1-\lambda & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1-\lambda & \frac{7}{20} & -1+\zeta & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1-\lambda & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda
\end{pmatrix}$$

```
Det[matrixbeta]
```

$$-\frac{60619}{151200}+\frac{13669\,\zeta}{33600}-\frac{59963\,\lambda}{43200}+\frac{43735\,\zeta\,\lambda}{12096}+\frac{3413681\,\lambda^2}{907200}+\frac{3237581\,\zeta\,\lambda^2}{302400}+\frac{5276759\,\lambda^3}{226800}+$$
$$\frac{4700581\,\zeta\,\lambda^3}{302400}+\frac{3374447\,\lambda^4}{75600}+\frac{17947\,\zeta\,\lambda^4}{1440}+\frac{6808301\,\lambda^5}{151200}+\frac{19499\,\zeta\,\lambda^5}{3600}+\frac{65323\,\lambda^6}{2520}+\zeta\,\lambda^6+8\,\lambda^7+\lambda^8$$

```
polynom = Together[Det[matrixbeta]]
```

$$\frac{1}{907200}\,(-363714+369063\,\zeta-1259223\,\lambda+3280125\,\zeta\,\lambda+3413681\,\lambda^2+$$
$$9712743\,\zeta\,\lambda^2+21107036\,\lambda^3+14101743\,\zeta\,\lambda^3+40493364\,\lambda^4+11306610\,\zeta\,\lambda^4+$$
$$40849806\,\lambda^5+4913748\,\zeta\,\lambda^5+23516280\,\lambda^6+907200\,\zeta\,\lambda^6+7257600\,\lambda^7+907200\,\lambda^8)$$

```
beta0 = Coefficient[polynom, λ, 8]
```

```
1
```

```
beta1 = Coefficient[polynom, λ, 7]
```

```
8
```

```
beta2 = Coefficient[polynom, λ, 6]
```

$$\frac{23516280+907200\,\zeta}{907200}$$

```
beta3 = Coefficient[polynom, λ, 5]
```

$$\frac{40849806 + 4913748\,\zeta}{907200}$$

```
beta4 = Coefficient[polynom, λ, 4]
```

$$\frac{40493364 + 11306610\,\zeta}{907200}$$

```
beta5 = Coefficient[polynom, λ, 3]
```

$$\frac{21107036 + 14101743\,\zeta}{907200}$$

```
beta6 = Coefficient[polynom, λ, 2]
```

$$\frac{3413681 + 9712743\,\zeta}{907200}$$

```
beta7 = Coefficient[polynom, λ, 1]
```

$$\frac{-1259223 + 3280125\,\zeta}{907200}$$

```
beta8 = Coefficient[polynom, λ, 0]
```

$$\frac{-363714 + 369063\,\zeta}{907200}$$

```
InequalitySolve[(-363714 + 369063 ζ)/907200 > 0, ζ]
```

$$\zeta > \frac{121238}{123021}$$

```
rh1 = Det[{{beta0, 0}, {beta2, beta1}}]
```

$$8$$

```
rh2 = Det[{{beta1, beta0}, {beta3, beta2}}]
```

$$\frac{3506677}{21600} + \frac{9301\,\zeta}{3600}$$

```
rh3 = Det[{{beta1, beta0, 0}, {beta3, beta2, beta1}, {beta5, beta4, beta3}}]
```

$$\frac{15152724096977}{3265920000} + \frac{87737706881\,\zeta}{272160000} + \frac{181360199\,\zeta^2}{12960000}$$

```
rh4 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0},
   {beta5, beta4, beta3, beta2}, {beta7, beta6, beta5, beta4}}]
```

$$\frac{3348596725335431771}{27433728000000} + \frac{3622954409843069851\,\zeta}{164602368000000} + \frac{17406239763376511\,\zeta^2}{6858432000000} + \frac{17537687974451\,\zeta^3}{130636800000}$$

```
rh5 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0},
   {beta3, beta2, beta1, beta0, 0}, {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1},
   {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3}, {0, beta8, beta7, beta6, beta5}}]
```

$$\frac{9016651628449532866331853 91}{447981804748800000000} + \frac{3863479780641534317321247 7\,\zeta}{49775756083200000000} + \frac{2856935424974778515329559\,\zeta^2}{16591918694400000000} + \frac{748447771224339799237\,\zeta^3}{33183837388800000} + \frac{87297310900072444607\,\zeta^4}{65840947200000000}$$

```
rh6 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0}, {beta5, beta4,
    beta3, beta2, beta1, beta0}, {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2},
   {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4}, {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6}}]
```

$$\frac{9942353968889202421973750867682 31}{8128181865362227200000000}+\frac{7129707875766569843089107329950 33\zeta}{6773484887801856000000000}+$$
$$\frac{1614816140880972784860729459298 1\zeta^2}{3763047159889920000000000}+\frac{1527848655978890537269649390701 9\zeta^3}{1505218863955968000000000}+$$
$$\frac{4475251307252995195412128026 1\zeta^4}{3135872633241600000000000}+\frac{5939544668657507868770615 9\zeta^5}{6636767477760000000000}$$

```
rh7 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0, 0},
   {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0, 0}, {beta7, beta6, beta5, beta4,
    beta3, beta2, beta1}, {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4, beta3},
   {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6, beta5}, {0, 0, 0, 0, 0, beta8, beta7}}]
```

$$\frac{2099921308867848795116742030789309 7661}{5852290943060803584000000000000}+$$
$$\frac{2767960421959025285016985962587797081961\zeta}{1228981098042768752640000000000000}+$$
$$\frac{1879123187749522464729648697769323429 57\zeta^2}{8193207320285125017600000000000}+$$
$$\frac{8325270996455529818400498590860904 89\zeta^3}{8128181865362227200000000000}+\frac{4174015750820802558491921798190406 81\zeta^4}{1625636373072445440000000000000}+$$
$$\frac{7367011122505502207598653330357 77\zeta^5}{1935281396514816000000000000}+\frac{7991794659792031762261989 49\zeta^6}{3199870033920000000000}$$

```
rh8 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0, 0, 0},
   {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0},
   {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0},
   {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2},
   {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4},
   {0, 0, 0, 0, 0, beta8, beta7, beta6}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, beta8}}]
```

$$-\frac{1272951298222601261111817851644171687112159}{8848663905907935019008000000000000000}-$$
$$\frac{2813317575764396659138374326445756905083562 17\zeta}{3716438840481332707983360000000000000}-$$
$$\frac{4048154949145524267550310422408220371291 03\zeta^2}{1238812946827110902661120000000000000}+$$
$$\frac{7190567878291768350104641995215192411894773\zeta^3}{1376458829807901002956800000000000000}+$$
$$\frac{7711585024559495034962259296617951100573\zeta^4}{2457962196085537505280000000000000}+$$
$$\frac{1461553364487396323700225622693483831 1839\zeta^5}{1638641464057025003520000000000000}+$$
$$\frac{9418860520305052782521623214304083173\zeta^6}{6502545492289781760000000000000000}+\frac{1092398412046972821583591343388 1\zeta^7}{1075156331397120000000000000000}$$

```
<< Algebra`

InequalitySolve[{rh2 > 0, rh3 > 0, rh4 > 0, rh5 > 0, rh6 > 0, rh7 > 0, rh8 > 0}, {ζ}]
```

$$\zeta > \frac{121238}{123021}$$

```
N[ζ > 121238/123021]
```

$$\zeta > 0.985507$$

Pages 137 -
138 Cramer's Rule solution of system 87 and response elasticities of equations 90

```
MatrixForm[
 {{-1, 1/8, -1/7, (1 - τw) 5/6 + 1/6, -1, (1 - τw) 1/2 + 7/20, 0, σw}, {1, -1, 0, 0, 0, 0,
       0, 0}, {-1/9, (1 - τu) 7/8 + 1/8, -1, 1/6, -1, (1 - τu) 3/20 + 7/20, 0, σu},
      {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, ζ - 1, 1 - σw - σu},
      {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {-1/9, τu * 7/8 + 1/8, 0, τw * 5/6 + 1/6, -1,
       τw * 1/2 + τu * 3/20 + 7/20, -1, 1 - σw - σu}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /.
     σw → 3/6 /. σu → 2/6 /. τw → 1/5 /. τu → 3/20]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -1+\zeta & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$-\frac{60619}{151200}+\frac{13669\,\zeta}{33600}$$

```
-60619/151200 + 13669 ζ/33600 /. ζ → 99/100
```

$$\frac{7897}{4320000}$$

```
householdincome =
 {{0, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, 1/2}, {h k, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 139/160, -1, 1/6, -1,
      191/400, 0, 1/3}, {b k, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, ζ - 1, 1/6},
    {-k, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, 1/6},
    {(1 - h - b) k, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. h → 1/2 /. b → 4/10
```

$$\left\{\left\{0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \left\{\frac{k}{2}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \left\{\frac{2\,k}{5}, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -1+\zeta, \frac{1}{6}\right\}, \{-k, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\}, \left\{0, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \left\{\frac{k}{10}, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{k}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2k}{5} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -1+\zeta & \frac{1}{6} \\ -k & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ \frac{k}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$-\frac{2977\,k}{56000}+\frac{20189\,k\,\zeta}{336000}$$

household income

```
houinc = (-2977 k/56000 + 20189 k ζ/336000) / (-60619/151200 + 13669 ζ/33600)
```

$$\frac{-\frac{2977\,k}{56000}+\frac{20189\,k\,\zeta}{336000}}{-\frac{60619}{151200}+\frac{13669\,\zeta}{33600}}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{117\,k\,(-1374+1553\,\zeta)}{-1212380+1230210\,\zeta}$$

```
117 k (-1374 + 1553 ζ)/(-1212380 + 1230210 ζ) /. ζ → 99/100
```

$$\frac{1912599\,k}{552790}$$

```
D[117 k (-1374 + 1553 ζ)/(-1212380 + 1230210 ζ), ζ]
```

$$-\frac{143934570\,k\,(-1374+1553\,\zeta)}{(-1212380+1230210\,\zeta)^2}+\frac{181701\,k}{-1212380+1230210\,\zeta}$$

```
Together[%]
```

$$-\frac{225245592\,k}{(-121238+123021\,\zeta)^2}$$

```
elasticity = (-225245592 k/(-121238 + 123021 ζ)^2) * (ζ / (117 k (-1374 + 1553 ζ)/(-1212380 + 1230210 ζ))) /. ζ → 99/100
```

$$-\frac{63530808000}{301215271}$$

```
N[%]
```

```
-210.915
```

householdexpenditure =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ -1,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \{1,\ h\,k,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{191}{400},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \{0,\ b\,k,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20},\ \zeta-1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ -k,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ -1,\ \frac{189}{400},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ (1-h-b)\,k,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\} /.\ h \to 1/2 /.\ b \to 4/10$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ -1,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{1,\ \frac{k}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{191}{400},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \left\{0,\ \frac{2\,k}{5},\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20},\ -1+\zeta,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ -k,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{3},\ -1,\ \frac{189}{400},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \left\{0,\ \frac{k}{10},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\right\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2\,k}{5} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -1+\zeta & \frac{1}{6} \\ 0 & -k & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{k}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det[%]

$$\frac{55679\,k}{378000} - \frac{4013\,k\,\zeta}{28000}$$

household expenditure

houexp = $\left(\frac{55679\,k}{378000} - \frac{4013\,k\,\zeta}{28000}\right) \Big/ \left(-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}\right)$

$$\frac{\frac{55679\,k}{378000} - \frac{4013\,k\,\zeta}{28000}}{-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}}$$

Simplify[%]

$$\frac{k\,(222716 - 216702\,\zeta)}{-606190 + 615105\,\zeta}$$

$$\frac{k\,(222716 - 216702\,\zeta)}{-606190 + 615105\,\zeta} /.\ \zeta \to 99/100$$

$$\frac{818102\,k}{276395}$$

$$D\left[\frac{k\,(222716 - 216702\,\zeta)}{-606190 + 615105\,\zeta},\ \zeta\right]$$

$$-\frac{615105\,k\,(222716 - 216702\,\zeta)}{(-606190 + 615105\,\zeta)^2} - \frac{216702\,k}{-606190 + 615105\,\zeta}$$

```
Together[%]
```

$$-\frac{225245592\,k}{(-121238+123021\,\zeta)^2}$$

```
elasticity = (-225245592 k/(-121238 + 123021 ζ)^2) * (ζ / (k (222716 - 216702 ζ))/(-606190 + 615105 ζ)) /. ζ → 99/100
```

$$-\frac{5574828402000}{22611930229}$$

```
N[%]
```

```
-246.544
```

```
businessincome =
 {{-1, 1/8, 0, 5/6, -1, 3/4, 0, 1/2}, {1, -1, h k, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 139/160, 0, 1/6, -1,
    191/400, 0, 1/3}, {0, 0, b k, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8, 0, 1/6, -1, 7/20, ζ - 1, 1/6},
   {0, 0, -k, 0, 1, -1, 0, 0}, {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, 1/6},
   {0, 0, (1 - h - b) k, 0, 0, 0, 1, -1}} /. h → 1/2 /. b → 4/10
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, 0, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \left\{1, -1, \frac{k}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, 0, \frac{2\,k}{5}, -1, 0, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -1+\zeta, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, -k, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \left\{0, 0, \frac{k}{10}, 0, 0, 0, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2\,k}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -1+\zeta & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -k & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{k}{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{26221\,k}{432000} - \frac{23977\,k\,\zeta}{432000}$$

business income

```
businc = (26221 k/432000 - 23977 k ζ/432000) / (-60619/151200 + 13669 ζ/33600)
```

$$\frac{\frac{26221\,k}{432000} - \frac{23977\,k\,\zeta}{432000}}{-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{7\,k\,(26221-23977\,\xi)}{-1212380+1230210\,\xi}$$

```
7 k (26221 - 23977 ξ)
-1212380 + 1230210 ξ
/. ξ → 99 / 100
```

$$\frac{248377\,k}{78970}$$

```
D[7 k (26221 - 23977 ξ) / (-1212380 + 1230210 ξ), ξ]
```

$$-\frac{8611470\,k\,(26221-23977\,\xi)}{(-1212380+1230210\,\xi)^2}-\frac{167839\,k}{-1212380+1230210\,\xi}$$

```
Together[%]
```

$$-\frac{446334161\,k}{2\,(-121238+123021\,\xi)^2}$$

```
elasticity = (-446334161 k / (2 (-121238 + 123021 ξ)^2)) * (ξ / (7 k (26221 - 23977 ξ) / (-1212380 + 1230210 ξ)))
/. ξ → 99 / 100
```

$$-\frac{3156220138500}{13730032183}$$

```
N[%]
```

$$-229.877$$

```
businessexpenditure =
{{-1, 1/8, -1/7, 0, -1, 3/4, 0, 1/2}, {1, -1, 0, h k, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 139/160, -1, 0, -1,
  191/400, 0, 1/3}, {0, 0, 1, b k, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8, -1/7, 0, -1, 7/20, ξ - 1, 1/6},
 {0, 0, 0, -k, 1, -1, 0, 0}, {-1/9, 41/160, 0, 0, -1, 189/400, -1, 1/6},
 {0, 0, 0, (1 - h - b) k, 0, 0, 1, -1}} /. h → 1 / 2 /. b → 4 / 10
```

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ \frac{k}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{139}{160},\ -1,\ 0,\ -1,\ \frac{191}{400},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ \frac{2\,k}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ \frac{7}{20},\ -1+\xi,\ \frac{1}{6}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ -k,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\right\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{41}{160},\ 0,\ 0,\ -1,\ \frac{189}{400},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{k}{10},\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & 0 & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\,k}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & \frac{7}{20} & -1+\xi & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -k & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & 0 & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{222833\,k}{1008000} - \frac{659923\,k\,\zeta}{3024000}$$

business expenditure

```
busexp = ((222833 k)/1008000 - (659923 k ζ)/3024000) / (-(60619/151200) + (13669 ζ)/33600)
```

$$\frac{\frac{222833\,k}{1008000} - \frac{659923\,k\,\zeta}{3024000}}{-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{k\,(668499 - 659923\,\zeta)}{-1212380 + 1230210\,\zeta}$$

```
k (668499 - 659923 ζ) / (-1212380 + 1230210 ζ) /. ζ → 99 / 100
```

$$\frac{216789\,k}{78970}$$

```
D[k (668499 - 659923 ζ) / (-1212380 + 1230210 ζ), ζ]
```

$$-\frac{1230210\,k\,(668499 - 659923\,\zeta)}{(-1212380 + 1230210\,\zeta)^2} - \frac{659923\,k}{-1212380 + 1230210\,\zeta}$$

```
Together[%]
```

$$-\frac{446334161\,k}{2\,(-121238 + 123021\,\zeta)^2}$$

```
elasticity = (-(446334161 k)/(2 (-121238 + 123021 ζ)^2)) * (ζ / (k (668499 - 659923 ζ)/(-1212380 + 1230210 ζ))) /. ζ → 99 / 100
```

$$-\frac{1052073379500}{3994626377}$$

```
N[%]
```

```
-263.372
```

```
financialincome =
 {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, 0, 3/4, 0, 1/2}, {1, -1, 0, 0, h k, 0, 0, 0}, {-1/9, 139/160, -1, 1/6, 0,
    191/400, 0, 1/3}, {0, 0, 1, -1, b k, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, 0, 7/20, ζ - 1, 1/6},
   {0, 0, 0, 0, -k, -1, 0, 0}, {-1/9, 41/160, 0, 1/3, 0, 189/400, -1, 1/6},
   {0, 0, 0, 0, (1 - h - b) k, 0, 1, -1}} /. h → 1 / 2 /. b → 4 / 10
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, \frac{k}{2}, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, 0, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, 0, 1, -1, \frac{2\,k}{5}, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, 0, \frac{7}{20}, -1 + \zeta, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, -k, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, \frac{k}{10}, 0, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2k}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{20} & -1+\zeta & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$-\frac{1079\,k}{8400}+\frac{59587\,k\,\zeta}{453600}$$

financier income

```
fininc = (-1079 k/8400 + 59587 k ζ/453600) / (-60619/151200 + 13669 ζ/33600)
```

$$\frac{-\frac{1079\,k}{8400}+\frac{59587\,k\,\zeta}{453600}}{-\frac{60619}{151200}+\frac{13669\,\zeta}{33600}}$$

```
Simplify[(-1079 k/8400 + 59587 k ζ/453600) / (-60619/151200 + 13669 ζ/33600)]
```

$$\frac{2\,k\,(-58266+59587\,\zeta)}{-363714+369063\,\zeta}$$

```
2 k (-58266 + 59587 ζ)/(-363714 + 369063 ζ) /. ζ → 99/100
```

$$\frac{6906\,k}{7897}$$

```
D[2 k (-58266 + 59587 ζ)/(-363714 + 369063 ζ), ζ]
```

$$-\frac{738126\,k\,(-58266+59587\,\zeta)}{(-363714+369063\,\zeta)^2}+\frac{119174\,k}{-363714+369063\,\zeta}$$

```
Together[%]
```

$$-\frac{112534240\,k}{3\,(-121238+123021\,\zeta)^2}$$

```
elasticity = (-112534240 k/(3 (-121238 + 123021 ζ)^2)) * (ζ / (2 k (-58266 + 59587 ζ)/(-363714 + 369063 ζ))) /. ζ → 99/100
```

$$-\frac{8841976000}{63626129}$$

```
N[%]
```

```
-138.968
```

```
financialexpenditure =
 {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 0, 0, 1/2}, {1, -1, 0, 0, 0, h k, 0, 0}, {-1/9, 139/160, -1, 1/6, -1,
     0, 0, 1/3}, {0, 0, 1, -1, 0, b k, 0, 0}, {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 0, ζ - 1, 1/6},
    {0, 0, 0, 0, 1, -k, 0, 0}, {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 0, -1, 1/6},
    {0, 0, 0, 0, 0, (1 - h - b) k, 1, -1}} /. h → 1 / 2 /. b → 4 / 10
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, 0, 0, \frac{1}{2}\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, \frac{k}{2}, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, 0, 0, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, 0, 1, -1, 0, \frac{2k}{5}, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, 0, -1+\zeta, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -k, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, 0, -1, \frac{1}{6}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, \frac{k}{10}, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{2k}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & 0 & -1+\zeta & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$-\frac{80041\,k}{151200} + \frac{488237\,k\,\zeta}{907200}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{131\,k\,(-3666+3727\,\zeta)}{907200}$$

financier expenditure

```
finexp = (131 k (-3666 + 3727 ζ)) / 907200) / (-60619 / 151200 + 13669 ζ / 33600)
```

$$\frac{131\,k\,(-3666+3727\,\zeta)}{907200\left(-\frac{60619}{151200}+\frac{13669\,\zeta}{33600}\right)}$$

```
Simplify[131 k (-3666 + 3727 ζ) / (907200 (-60619 / 151200 + 13669 ζ / 33600))]
```

$$\frac{131\,k\,(-3666+3727\,\zeta)}{-363714+369063\,\zeta}$$

```
131 k (-3666 + 3727 ζ) / (-363714 + 369063 ζ) /. ζ → 99 / 100
```

$$\frac{14803\,k}{7897}$$

```
D[131 k (-3666 + 3727 ξ) / (907200 (-60619/151200 + 13669 ξ/33600)), ξ]
```

$$\frac{488237\,k}{907200\left(-\frac{60619}{151200}+\frac{13669\,\xi}{33600}\right)}-\frac{1790639\,k\,(-3666+3727\,\xi)}{30481920000\left(-\frac{60619}{151200}+\frac{13669\,\xi}{33600}\right)^2}$$

```
Together[%]
```

$$-\frac{112534240\,k}{3\,(-121238+123021\,\xi)^2}$$

```
elasticity = (-112534240 k / (3 (-121238 + 123021 ξ)^2)) * (ξ / (131 k (-3666 + 3727 ξ) / (907200 (-60619/151200 + 13669 ξ/33600)))) /. ξ → 99/100
```

$$-\frac{404976000}{6246527}$$

```
N[%]
```

```
-64.8322
```

```
governmentincome =
 {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, 1/2}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, h k, 0}, {-1/9, 139/160, -1, 1/6, -1,
    191/400, 0, 1/3}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, b k, 0}, {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, 0, 1/6},
   {0, 0, 0, 0, 1, -1, -k, 0}, {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, 0, 1/6},
   {0, 0, 0, 0, 0, 0, (1 - h - b) k, -1}} /. h → 1/2 /. b → 4/10
```

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ -1,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{k}{2},\ 0\right\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{139}{160},\ -1,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{191}{400},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{2\,k}{5},\ 0\right\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20},\ 0,\ \frac{1}{6}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ -k,\ 0\right\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{41}{160},\ 0,\ \frac{1}{3},\ -1,\ \frac{189}{400},\ 0,\ \frac{1}{6}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{k}{10},\ -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{2\,k}{5} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -k & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{1703\,k}{604800}$$

government income

```
govinc = (1703 k / 604800) / (-60619/151200 + 13669 ζ/33600)
```

$$\frac{1703\,k}{604800\left(-\frac{60619}{151200}+\frac{13669\,\zeta}{33600}\right)}$$

```
Simplify[1703 k / (604800 (-60619/151200 + 13669 ζ/33600))]
```

$$\frac{1703\,k}{-242476+246042\,\zeta}$$

```
1703 k / (-242476 + 246042 ζ) /. ζ → 99/100
```

$$\frac{85150\,k}{55279}$$

```
D[1703 k / (604800 (-60619/151200 + 13669 ζ/33600)), ζ]
```

$$-\frac{23278307\,k}{20321280000\left(-\frac{60619}{151200}+\frac{13669\,\zeta}{33600}\right)^2}$$

```
Together[%]
```

$$-\frac{209504763\,k}{2\,(-121238+123021\,\zeta)^2}$$

```
elasticity = (-209504763 k / (2 (-121238 + 123021 ζ)^2)) * (ζ / (1703 k / (604800 (-60619/151200 + 13669 ζ/33600)))) /. ζ → 99/100
```

$$-\frac{12179079}{55279}$$

```
N[%]
```

```
-220.32
```

```
governmentexpenditure =
 {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, 0}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, h k}, {-1/9, 139/160, -1, 1/6, -1,
     191/400, 0, 0}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, b k}, {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, ζ - 1, 0},
    {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, -k}, {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, (1 - h - b) k}} /. h → 1/2 /. b → 4/10
```

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ -1,\ \frac{3}{4},\ 0,\ 0\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{k}{2}\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{139}{160},\ -1,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{191}{400},\ 0,\ 0\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{2\,k}{5}\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20},\ -1+\zeta,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ -k\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{41}{160},\ 0,\ \frac{1}{3},\ -1,\ \frac{189}{400},\ -1,\ 0\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \frac{k}{10}\right\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2} \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2k}{5} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -1+\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -k \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{k}{10} \end{pmatrix}$$

Det[%]

$$\frac{14417\,k}{336000} - \frac{13669\,k\,\zeta}{336000}$$

Simplify[%]

$$\frac{k\,(14417 - 13669\,\zeta)}{336000}$$

government expenditure

govexp = $\left(\frac{k\,(14417 - 13669\,\zeta)}{336000}\right) \Big/ \left(-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}\right)$

$$\frac{k\,(14417 - 13669\,\zeta)}{336000\,\left(-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}\right)}$$

Simplify$\left[\frac{k\,(14417 - 13669\,\zeta)}{336000\,\left(-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}\right)}\right]$

$$\frac{9\,k\,(-14417 + 13669\,\zeta)}{1212380 - 1230210\,\zeta}$$

$\frac{9\,k\,(-14417 + 13669\,\zeta)}{1212380 - 1230210\,\zeta}$ /. $\zeta \to 99/100$

$$\frac{796221\,k}{552790}$$

D$\left[\frac{k\,(14417 - 13669\,\zeta)}{336000\,\left(-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}\right)}, \zeta\right]$

$$-\frac{13669\,k\,(14417 - 13669\,\zeta)}{11289600000\,\left(-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}\right)^2} - \frac{13669\,k}{336000\,\left(-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}\right)}$$

Together[%]

$$-\frac{209504763\,k}{2\,(-121238 + 123021\,\zeta)^2}$$

elasticity = $\left(-\frac{209504763\,k}{2\,(-121238 + 123021\,\zeta)^2}\right) * \left(\zeta \Big/ \frac{k\,(14417 - 13669\,\zeta)}{336000\,\left(-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}\right)}\right)$ /. $\zeta \to 99/100$

$$-\frac{1152276196500}{4890477851}$$

```
N[%]
```

```
-235.616
```

Aggregation of sector income

```
Together[ 117 k (-1374 + 1553 ξ) / (-1212380 + 1230210 ξ) +
   7 k (26221 - 23977 ξ) / (-1212380 + 1230210 ξ) + 2 k (-58266 + 59587 ξ) / (-363714 + 369063 ξ) + 1703 k / (-242476 + 246042 ξ) ]
```

$$\frac{-535704\,k + 616663\,k\,\xi}{15\,(-121238 + 123021\,\xi)}$$

```
(-535704 k + 616663 k ξ) / (15 (-121238 + 123021 ξ)) /. ξ → 99 / 100
```

$$\frac{2493079\,k}{276395}$$

```
N[2493079 k / 276395]
```

```
9.01999 k
```

Aggregation of sector expenditure

```
Together[ k (222716 - 216702 ξ) / (-606190 + 615105 ξ) +
   k (668499 - 659923 ξ) / (-1212380 + 1230210 ξ) + 131 k (-3666 + 3727 ξ) / (-363714 + 369063 ξ) + 9 k (-14417 + 13669 ξ) / (1212380 - 1230210 ξ) ]
```

$$\frac{-535704\,k + 616663\,k\,\xi}{15\,(-121238 + 123021\,\xi)}$$

```
(-535704 k + 616663 k ξ) / (15 (-121238 + 123021 ξ)) /. ξ → 99 / 100
```

$$\frac{2493079\,k}{276395}$$

```
N[2493079 k / 276395]
```

```
9.01999 k
```

Pages 138 - 139 Solution of inequalities (system 90)
and distribution of flow among sectors (equations 92)

Solution of inequalities

```
<< Algebra`
```

$$\text{InequalitySolve}\left[\left\{\frac{117\,(-1374+1553\,\zeta)}{-1212380+1230210\,\zeta}>0,\ \frac{7\,(26221-23977\,\zeta)}{-1212380+1230210\,\zeta}>0,\right.\right.$$
$$\frac{2\,(-58266+59587\,\zeta)}{-363714+369063\,\zeta}>0,\ \frac{1703}{-242476+246042\,\zeta}>0,\ \frac{(222716-216702\,\zeta)}{-606190+615105\,\zeta}>0,$$
$$\left.\left.\frac{(668499-659923\,\zeta)}{-1212380+1230210\,\zeta}>0,\ \frac{131\,(-3666+3727\,\zeta)}{-363714+369063\,\zeta}>0,\ \frac{9\,(-14417+13669\,\zeta)}{1212380-1230210\,\zeta}>0\right\},\ \{\zeta\}\right]$$

$$\frac{121238}{123021}<\zeta<\frac{668499}{659923}$$

$$N\left[\frac{121238}{123021}<\zeta<\frac{668499}{659923}\right]$$

$$0.985507<\zeta<1.013$$

Distribution of monetary flow among sectors

household income

$$N\left[\frac{117\,k\,(-1374+1553\,\zeta)}{-1212380+1230210\,\zeta}\right]\ /.\ \zeta\to 99/100$$

$$3.4599\,k$$

```
inhou = 3.4599015901156545`k
```

$$3.4599\,k$$

```
100 * 3.4599015901156545`k / (9.019985889759221`k)
```

$$38.3582$$

business income

$$N\left[\frac{7\,k\,(26221-23977\,\zeta)}{-1212380+1230210\,\zeta}\right]\ /.\ \zeta\to 99/100$$

$$3.14521\,k$$

```
inbus = 3.1452070406484016`k
```

$$3.14521\,k$$

```
100 * 3.1452070406484016`k / (9.019985889759221`k)
```

$$34.8693$$

financier income

```
N[2 k (-58266 + 59587 ξ) / (-363714 + 369063 ξ)] /. ξ → 99 / 100
```

```
0.874509 k
```

```
infin = 0.8745093073318975` k
```

```
0.874509 k
```

```
100 * 0.8745093073318975` k / (9.019985889759221` k)
```

```
9.69524
```

government income

```
N[1703 k / (-242476 + 246042 ξ)] /. ξ → 99 / 100
```

```
1.54037 k
```

```
ingov = 1.5403679516633981` k
```

```
1.54037 k
```

```
100 * 1.5403679516633981` k / (9.019985889759221` k)
```

```
17.0773
```

```
Aggregate income
```

```
Together[117 k (-1374 + 1553 ξ) / (-1212380 + 1230210 ξ) +
  7 k (26221 - 23977 ξ) / (-1212380 + 1230210 ξ) + 2 k (-58266 + 59587 ξ) / (-363714 + 369063 ξ) + 1703 k / (-242476 + 246042 ξ)]
```

$$\frac{-535704\,k + 616663\,k\,\xi}{15\,(-121238 + 123021\,\xi)}$$

```
(-535704 k + 616663 k ξ) / (15 (-121238 + 123021 ξ)) /. ξ → 99 / 100
```

$$\frac{2493079\,k}{276395}$$

```
N[2493079 k / 276395]
```

```
9.01999 k
```

household expenditure

```
N[k (222716 - 216702 ξ) / (-606190 + 615105 ξ)] /. ξ → 99 / 100
```

```
2.9599 k
```

```
houex = 2.9599015901156416` k
```

```
2.9599 k
```

```
100 * 2.9599015901156416` k / (9.019985889759221` k)
```

```
32.8149
```

business expenditure

```
N[ k (668499 - 659923 ξ) / (-1212380 + 1230210 ξ) ] /. ξ → 99 / 100
```

```
2.74521 k
```

```
busex = 2.7452070406483906` k
```

```
2.74521 k
```

```
100 * 2.7452070406483906` k / (9.019985889759221` k)
```

```
30.4347
```

financier expenditure

```
N[ 131 k (-3666 + 3727 ξ) / (-363714 + 369063 ξ) ] /. ξ → 99 / 100
```

```
1.87451 k
```

```
finex = 1.874509307331905` k
```

```
1.87451 k
```

```
100 * 1.874509307331905` k / (9.019985889759221` k)
```

```
20.7817
```

government expenditure

```
N[ 9 k (-14417 + 13669 ξ) / (1212380 - 1230210 ξ) ] /. ξ → 99 / 100
```

```
1.44037 k
```

```
govex = 1.4403679516634056` k
```

```
1.44037 k
```

```
100 * 1.4403679516634056` k / (9.019985889759221` k)
```

```
15.9686
```

```
Aggregate expenditure
```

```
Together[ k (222716 - 216702 ξ) / (-606190 + 615105 ξ) +
  k (668499 - 659923 ξ) / (-1212380 + 1230210 ξ) + 131 k (-3666 + 3727 ξ) / (-363714 + 369063 ξ) + 9 k (-14417 + 13669 ξ) / (1212380 - 1230210 ξ) ]
```

$$\frac{-535704\,k + 616663\,k\,\xi}{15\,(-121238 + 123021\,\xi)}$$

$$\frac{-535704\,k + 616663\,k\,\xi}{15\,(-121238 + 123021\,\xi)} \;/.\; \xi \to 99/100$$

$$\frac{2493079\,k}{276395}$$

$$N\left[\frac{2493079\,k}{276395}\right]$$

$$9.01999\,k$$

Page 139 Market - flow equilibrium (equations 93)

household income

```
inhou = 3.4599015901156545` k
```

3.4599 k

business income

```
inbus = 3.1452070406484016` k
```

3.14521 k

financier income

```
infin = 0.8745093073318975` k
```

0.874509 k

government income

```
ingov = 1.5403679516633981` k
```

1.54037 k

Aggregation of sector income

```
Together[inhou + inbus + infin + ingov]
```

9.01999 k

household expenditure

```
houex = 2.9599015901156416` k
```

2.9599 k

business expenditure

```
busex = 2.7452070406483906` k
```

2.74521 k

financier expenditure

```
finex = 1.874509307331905` k
```

1.87451 k

government expenditure

```
govex = 1.4403679516634056` k
```

1.44037 k

Aggregation of sector expenditure

```
Together[houex + busex + finex + govex]
```

```
9.01999 k
```

Market turnover analytically

```
labourmarket = 4 / 5 * 5 / 6 * busex + 4 / 5 * 1 / 2 * finex + 1 / 2 * govex
```

```
3.30013 k
```

```
100 * 3.300125725863392` k / (9.019985889759344` k)
```

```
36.5868
```

```
outputmarket = 17 / 20 * 7 / 8 * houex + 17 / 20 * 3 / 20 * finex + 1 / 3 * govex
```

```
2.92055 k
```

```
100 * 2.9205493948877947` k / (9.019985889759344` k)
```

```
32.3786
```

```
bondmarket = 1 / 8 * houex + 1 / 6 * busex + 7 / 20 * finex + 1 / 6 * govex
```

```
1.72366 k
```

```
100 * 1.723661788382588` k / (9.019985889759344` k)
```

```
19.1094
```

```
taxexchange = 3 / 20 * 7 / 8 * houex + 1 / 5 * 5 / 6 * busex + (3 / 20 * 3 / 20 + 1 / 5 * 1 / 2) * finex
```

```
1.07565 k
```

```
100 * 1.075648980625568` k / (9.019985889759344` k)
```

```
11.9252
```

Aggregation of market turnover

```
Together[labourmarket + outputmarket + bondmarket + taxexchange]
```

```
9.01999 k
```

```
100 * Together[labourmarket + outputmarket + bondmarket + taxexchange] /
  (9.019985889759344` k)
```

```
100.
```

Page 140 The coefficients of the characteristic polynomial 94 as functions of the withholding tax rates and solution of the corresponding Routh - Hurwitz conditions as systems of inequalities

```
matrixbeta =
 {{-1 - λ, 1 / 8, -1 / 7, (1 - τw) 5 / 6 + 1 / 6, -1, (1 - τw) 1 / 2 + 7 / 20, 0, σw}, {1, -1 - λ, 0, 0,
      0, 0, 0, 0}, {-1 / 9, (1 - τu) 7 / 8 + 1 / 8, -1 - λ, 1 / 6, -1, (1 - τu) 3 / 20 + 7 / 20,
      0, σu}, {0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0, 0, 0}, {-1 / 9, 1 / 8, -1 / 7, 1 / 6, -1 - λ, 7 / 20,
      ξ - 1, 1 - σw - σu}, {0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0}, {-1 / 9, τu * 7 / 8 + 1 / 8,
      0, τw * 5 / 6 + 1 / 6, -1, τw * 1 / 2 + τu * 3 / 20 + 7 / 20, -1 - λ, 1 - σw - σu},
     {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ}} /. σw → 3 / 6 /. σu → 2 / 6 /. ξ → 99 / 100
```

$$\left\{\left\{-1-\lambda,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \{1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8},\ -1-\lambda,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1-\lambda,\ \frac{7}{20},\ -\frac{1}{100},\ \frac{1}{6}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8},\ 0,\ \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6},\right.$$
$$\left.\left.-1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2},\ -1-\lambda,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1-\lambda & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8} & -1-\lambda & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1-\lambda & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8} & 0 & \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2} & -1-\lambda & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda
\end{pmatrix}$$

```
Det[matrixbeta]
```

$$-\frac{3973}{72000}+\frac{2932903\,\lambda}{1512000}+\frac{20993953\,\lambda^2}{1512000}+\frac{58060277\,\lambda^3}{1512000}+\frac{5390177\,\lambda^4}{94500}+\frac{6355571\,\lambda^5}{126000}+$$
$$\frac{339089\,\lambda^6}{12600}+8\,\lambda^7+\lambda^8+\frac{2329\,\tau u}{12000}+\frac{212071\,\lambda\,\tau u}{252000}+\frac{23399\,\lambda^2\,\tau u}{15750}+\frac{22031\,\lambda^3\,\tau u}{28000}-\frac{2831\,\lambda^4\,\tau u}{16800}-$$
$$\frac{2029\,\lambda^5\,\tau u}{14000}+\frac{1769\,\tau w}{10800}+\frac{120137\,\lambda\,\tau w}{151200}+\frac{395683\,\lambda^2\,\tau w}{226800}+\frac{504947\,\lambda^3\,\tau w}{453600}-\frac{6673\,\lambda^4\,\tau w}{75600}-$$
$$\frac{773\,\lambda^5\,\tau w}{5400}-\frac{7003\,\tau u\,\tau w}{43200}-\frac{48133\,\lambda\,\tau u\,\tau w}{43200}-\frac{45391\,\lambda^2\,\tau u\,\tau w}{14400}-\frac{40981\,\lambda^3\,\tau u\,\tau w}{14400}-\frac{35}{48}\,\lambda^4\,\tau u\,\tau w$$

```
polynom = Together[Det[matrixbeta]]
```

$$\frac{1}{4536000}\,(-250299+8798709\,\lambda+62981859\,\lambda^2+174180831\,\lambda^3+258728496\,\lambda^4+$$
$$228800556\,\lambda^5+122072040\,\lambda^6+36288000\,\lambda^7+4536000\,\lambda^8+880362\,\tau u+3817278\,\lambda\,\tau u+$$
$$6738912\,\lambda^2\,\tau u+3569022\,\lambda^3\,\tau u-764370\,\lambda^4\,\tau u-657396\,\lambda^5\,\tau u+742980\,\tau w+3604110\,\lambda\,\tau w+$$
$$7913660\,\lambda^2\,\tau w+5049470\,\lambda^3\,\tau w-400380\,\lambda^4\,\tau w-649320\,\lambda^5\,\tau w-735315\,\tau u\,\tau w-$$
$$5053965\,\lambda\,\tau u\,\tau w-14298165\,\lambda^2\,\tau u\,\tau w-12909015\,\lambda^3\,\tau u\,\tau w-3307500\,\lambda^4\,\tau u\,\tau w)$$

```
beta0 = Coefficient[polynom, λ, 8]
```

$$1$$

```
beta1 = Coefficient[polynom, λ, 7]
```

$$8$$

```
beta2 = Coefficient[polynom, λ, 6]
```

$$\frac{339089}{12600}$$

```
beta3 = Coefficient[polynom, λ, 5]
```

$$\frac{228800556 - 657396\,\tau u - 649320\,\tau w}{4536000}$$

```
beta4 = Coefficient[polynom, λ, 4]
```

$$\frac{258728496 - 764370\,\tau u - 400380\,\tau w - 3307500\,\tau u\,\tau w}{4536000}$$

```
beta5 = Coefficient[polynom, λ, 3]
```

$$\frac{174180831 + 3569022\,\tau u + 5049470\,\tau w - 12909015\,\tau u\,\tau w}{4536000}$$

```
beta6 = Coefficient[polynom, λ, 2]
```

$$\frac{62981859 + 6738912\,\tau u + 7913660\,\tau w - 14298165\,\tau u\,\tau w}{4536000}$$

```
beta7 = Coefficient[polynom, λ, 1]
```

$$\frac{8798709 + 3817278\,\tau u + 3604110\,\tau w - 5053965\,\tau u\,\tau w}{4536000}$$

```
beta8 = Coefficient[polynom, λ, 0]
```

$$\frac{-250299 + 880362\,\tau u + 742980\,\tau w - 735315\,\tau u\,\tau w}{4536000}$$

```
rh1 = Det[{{beta0, 0}, {beta2, beta1}}]
```

$$8$$

```
rh2 = Det[{{beta1, beta0}, {beta3, beta2}}]
```

$$\frac{20771549}{126000} + \frac{2029\,\tau u}{14000} + \frac{773\,\tau w}{5400}$$

```
rh3 = Det[{{beta1, beta0, 0}, {beta3, beta2, beta1}, {beta5, beta4, beta3}}]
```

$$\frac{78936934613479}{15876000000} + \frac{48773591\,\tau u}{98000000} - \frac{4116841\,\tau u^2}{196000000} - \frac{68918833\,\tau w}{37800000} + \frac{901830583\,\tau u\,\tau w}{37800000} - \frac{597529\,\tau w^2}{29160000}$$

```
rh4 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0},
   {beta5, beta4, beta3, beta2}, {beta7, beta6, beta5, beta4}}]
```

$$\frac{589238473227505343843}{4000752000000000} - \frac{263020025838875021\,\tau u}{111132000000000} - \frac{164105631744769\,\tau u^2}{37044000000000} +$$
$$\frac{11654776871\,\tau u^3}{3292800000000} - \frac{10977201348381824879\,\tau w}{3600676800000000} + \frac{812356313890565239\,\tau u\,\tau w}{160030080000000} +$$
$$\frac{205977447326291\,\tau u^2\,\tau w}{29635200000000} + \frac{4116841\,\tau u^3\,\tau w}{268800000} - \frac{839075457825107\,\tau w^2}{154314720000000} +$$
$$\frac{294647509145617\,\tau u\,\tau w^2}{34292160000000} - \frac{1844360693\,\tau u^2\,\tau w^2}{207360000} + \frac{3987311017\,\tau w^3}{2204496000000} + \frac{4182703\,\tau u\,\tau w^3}{279936000}$$

```
rh5 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0},
   {beta3, beta2, beta1, beta0, 0}, {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1},
   {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3}, {0, beta8, beta7, beta6, beta5}}]
```

$$\frac{1833266401854499088290987521 7}{60491370240000000000} - \frac{16900914699274512729751333 \tau u}{100818950400000000000} -$$
$$\frac{16551456306167336952847 \tau u^2}{37340352000000000000} - \frac{4453752252498127219 \tau u^3}{4978713600000000000} - \frac{2403015970355737 \tau u^4}{1382976000000000000} -$$
$$\frac{54123684601727208594687155 9 \tau w}{27221116608000000000000} + \frac{14848037134278555604724938 9 \tau u \tau w}{604913702400000000000} +$$
$$\frac{14904965868903577890844 7 \tau u^2 \tau w}{44808422400000000000} + \frac{124720567790750819 \tau u^3 \tau w}{9219840000000000} +$$
$$\frac{391970594520977 \tau u^4 \tau w}{33868800000000000} - \frac{45244243078616859576263 \tau w^2}{40831674912000000000} +$$
$$\frac{59338301437120498100907 7 \tau u \tau w^2}{120982740480000000000} - \frac{44889653475803891321249 \tau u^2 \tau w^2}{8961684480000000000} -$$
$$\frac{11825128681483615979 \tau u^3 \tau w^2}{426746880000000000} - \frac{168712261021 \tau u^4 \tau w^2}{3870720000000} - \frac{20930039850424852627 \tau w^3}{6999715699200000000} +$$
$$\frac{26589355648093293953 \tau u \tau w^3}{1296243648000000000} - \frac{3484209078618823523 \tau u^2 \tau w^3}{98761420800000000} + \frac{75583745559833 \tau u^3 \tau w^3}{2985984000000} -$$
$$\frac{1034651642897203 \tau w^4}{333319795200000000} + \frac{658125873263231 \tau u \tau w^4}{31744742400000000} - \frac{171411351643 \tau u^2 \tau w^4}{4031078400000}$$

```
rh6 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0}, {beta5, beta4,
    beta3, beta2, beta1, beta0}, {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2},
   {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4}, {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6}}]
```

$$\frac{24810853974870673127044501836092 33}{87107573145600000000000000} - \frac{364210800367283952291395844768197 \tau u}{21776893286400000000000000} -$$
$$\frac{43795053534625410071417415457 49 \tau u^2}{72589644288000000000000000} - \frac{15267496980577202158425037831 \tau u^3}{16131032064000000000000000} -$$
$$\frac{69924710395047912065623 \tau u^4}{24893568000000000000000} - \frac{1084882466061887053 09 \tau u^5}{49787136000000000000000} -$$
$$\frac{14909114618275867207331188084803 09 \tau w}{13719442770432000000000000} - \frac{42370343308009983361375939 3978543 \tau u \tau w}{54877771081728000000000000} +$$
$$\frac{22646909311530268521901505675959 \tau u^2 \tau w}{67750334668800000000000000} + \frac{11842268137802109994425259 57 \tau u^3 \tau w}{16937583667200000000000} +$$
$$\frac{46606783115175327790363727 \tau u^4 \tau w}{18819537408000000000000000} + \frac{863059724109880557 59 \tau u^5 \tau w}{3319142400000000000000} -$$
$$\frac{27271838071773014928039730561009 \tau w^2}{20579164155648000000000000} + \frac{76642783352358061689603083081606 3 \tau u \tau w^2}{16463331324518400000000000} -$$
$$\frac{13136669541465490795420919139382 1 \tau u^2 \tau w^2}{36585180721152000000000000} - \frac{10179098517120857062745339 77 \tau u^3 \tau w^2}{59256852480000000000000} -$$
$$\frac{29292677157204642578793 7 \tau u^4 \tau w^2}{358467379200000000000} - \frac{474193514553186630 07 \tau u^5 \tau w^2}{48771072000000000000} -$$
$$\frac{11661264532806342221954088799 3 \tau w^3}{52917850685952000000000000} + \frac{22764617334471568041911033 17 \tau u \tau w^3}{18374253710400000000000} -$$
$$\frac{72445128176141762756835391 97 \tau u^2 \tau w^3}{31358726332416000000000} + \frac{33286838291101932292414052 69 \tau u^3 \tau w^3}{23228686172160000000000} +$$
$$\frac{23875442555003044800826 3 \tau u^4 \tau w^3}{204838502400000000000} + \frac{6964472562518711 \tau u^5 \tau w^3}{55738368000000000} -$$
$$\frac{29604375642252703237404719 \tau w^4}{45358157730816000000000} + \frac{46627394492590190425760093 \tau u \tau w^4}{10079590606848000000000} -$$
$$\frac{45409284975749836730296 79 \tau u^2 \tau w^4}{37331817062400000000000} + \frac{20642136670930442226379 3 \tau u^3 \tau w^4}{14221644595200000000000} -$$
$$\frac{3120110648379788203 \tau u^4 \tau w^4}{42998169600000000} - \frac{1151458577443223639 \tau w^5}{215991227289600000000} +$$
$$\frac{684886859228985995203 \tau u \tau w^5}{1439941515264000000000} - \frac{677922844884342286 9 \tau u^2 \tau w^5}{507915878400000000000} + \frac{7075891510180913 \tau u^3 \tau w^5}{58047528960000000}$$

```
rh7 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0, 0},
    {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0, 0}, {beta7, beta6, beta5, beta4,
     beta3, beta2, beta1}, {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4, beta3},
    {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6, beta5}, {0, 0, 0, 0, 0, beta8, beta7}}]
```

$$\frac{65276179323651293806778597200064062 51}{10718314664400000000000000000} + \frac{17146562343828488677205993969694658817\tau u}{41158328311296000000000000000000} -$$
$$\frac{43504908483801783087616687121885287\tau u^2}{45731475901440000000000000000} -$$
$$\frac{11015681789114091440599200323426280 1\tau u^3}{22865737950720000000000000000} - \frac{51129826373256504417666892595909\tau u^4}{72589644288000000000000000000} -$$
$$\frac{38879681467377923759141014381\tau u^5}{18819537408000000000000000000} - \frac{20520815137626740773173 1\tau u^6}{12546358272000000000000000000} +$$
$$\frac{57265968664989227435831381354986 3879387\tau w}{17286497890744320000000000000000} -$$
$$\frac{23286057483727155714012727394661800942 63\tau u\,\tau w}{14816998192066560000000000000000} -$$
$$\frac{22708491899664053433490294290404937618 7\tau u^2\,\tau w}{34572995781488640000000000000000} +$$
$$\frac{54500262887917657123684854607478822 11\tau u^3\,\tau w}{19207219878604800000000000000000} +$$
$$\frac{28127716210548040853116415862359 27\tau u^4\,\tau w}{47425234268160000000000000000} + \frac{98647268254001985091284070553 51\tau u^5\,\tau w}{47425234268160000000000000000} +$$
$$\frac{15922999681271231809181 57\tau u^6\,\tau w}{75278149632000000000000000} + \frac{10164529865041982279922932280898745297 9\tau w^2}{62231392406679552000000000000000} -$$
$$\frac{90439286669792610202680352619844592193\tau u\,\tau w^2}{10371898734446592000000000000000} +$$
$$\frac{11367599352865707133526390895893756173 1\tau u^2\,\tau w^2}{69145991562977280000000000000000} -$$
$$\frac{24756420766850307978858135153991300 3\tau u^3\,\tau w^2}{46097327708651520000000000000} -$$
$$\frac{95495087246557306599557984711109 53\tau u^4\,\tau w^2}{51219253009612800000000000000} - \frac{66398671621877800790095358237\tau u^5\,\tau w^2}{81300401602560000000000000} -$$
$$\frac{40764834448087914029430 01\tau u^6\,\tau w^2}{43016085504000000000000000} - \frac{25554830371436401086567752788120448687\tau w^3}{28004126583005798400000000000000} +$$
$$\frac{79957754470744572319682021742432205279\tau u\,\tau w^3}{18669417722003865600000000000000} -$$
$$\frac{82120566743790375313239069299293622141\tau u^2\,\tau w^3}{12446278481335910400000000000000} +$$
$$\frac{62147944659385115664325842054428045 9\tau u^3\,\tau w^3}{19755997589422080000000000000000} +$$
$$\frac{71264334703627474778116903378792 7\tau u^4\,\tau w^3}{27438885540864000000000000000} + \frac{18528890770765635508674960952 1\tau u^5\,\tau w^3}{11614343086080000000000000000} +$$
$$\frac{93814340469174034482953\tau u^6\,\tau w^3}{52672757760000000000000} - \frac{36415360033299302121672305413411 3\tau w^4}{24003537071147827200000000000} +$$
$$\frac{11195566296467417787951236763229331\tau u\,\tau w^4}{10668238698287923200000000000000} -$$
$$\frac{13822922157784170013723219049709961\tau u^2\,\tau w^4}{50801136658513920000000000000000} +$$
$$\frac{53082977823794308695624439139026 09\tau u^3\,\tau w^4}{16933712219504640000000000000} -$$
$$\frac{84488277827909188655998561696763\tau u^4\,\tau w^4}{62717452664832000000000000000} - \frac{35536805667672894494304567 7\tau u^5\,\tau w^4}{22122558259200000000000000} -$$
$$\frac{7170055891947380119\tau u^6\,\tau w^4}{60197437440000000000} - \frac{77122044052460974348634815433 3\tau w^5}{17145383622248448000000000000} +$$
$$\frac{15451412276760901517208374986 9\tau u\,\tau w^5}{40822341957734400000000000000} - \frac{91665182956213023066320250063 1\tau u^2\,\tau w^5}{72573052369305600000000000000} +$$
$$\frac{10319655485749410229490134023 1\tau u^3\,\tau w^5}{48382034912870400000000000000} - \frac{28634469250255128816870478 7\tau u^4\,\tau w^5}{15359376162816000000000000} +$$
$$\frac{32122127752130342453 87\tau u^5\,\tau w^5}{46438023168000000000} - \frac{86129465770291948863312 7\tau w^6}{23327052547276800000000000000} +$$
$$\frac{83809314613559813162572 3\tau u\,\tau w^6}{22216240521216000000000000} - \frac{70408606016273165769675 17\tau u^2\,\tau w^6}{51837894549504000000000000} +$$
$$\frac{34249494165560697057253\tau u^3\,\tau w^6}{16456474460160000000000} - \frac{7284763800549008977\tau u^4\,\tau w^6}{62691331276800000000}$$

```
rh8 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0, 0, 0},
   {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0},
   {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0},
   {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2},
   {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4},
   {0, 0, 0, 0, 0, beta8, beta7, beta6}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, beta8}}]
```

$$
-\frac{2593422604528665902943313666758545203522 3}{771718655836800000000000000000000000} +
\frac{139836715899064686053091786757073196663544 3\,\tau u}{118535985536532480000000000000000000} +
\frac{803872224017715337110468232046434715053 39\,\tau u^2}{987799879471104000000000000000000000} +
\frac{167105302381474743127285544911392010 13\,\tau u^3}{205791641556480000000000000000000000} -
\frac{102195500067006884867314230028043777851 9\,\tau u^4}{109755542163456000000000000000000000} -
\frac{166574889795617255062259109473098743 7\,\tau u^5}{121950602403840000000000000000000000} -
\frac{150883993063146227791277447186 29\,\tau u^6}{376390748160000000000000000000000} -
\frac{477929784555326792607201499\,\tau u^7}{150556299264000000000000000000000} +
\frac{121881996092489259971728946316887599546215737\,\tau w}{124462784813359104000000000000000000000} -
\frac{619387031966778964166466905214125813324930599\,\tau u\,\tau w}{746776708880154624000000000000000000000} -
\frac{767441818458670978236460845470906657183270 53\,\tau u^2\,\tau w}{248925569626718208000000000000000000000} -
\frac{885970574779479241428057621138823170864 49\,\tau u^3\,\tau w}{592679927682662400000000000000000000000} +
\frac{172693034842282295734273771863346025590573\,\tau u^4\,\tau w}{276583966251909120000000000000000000000} +
\frac{388384403144838478318770853943572917253\,\tau u^5\,\tau w}{307315518057676800000000000000000000000} +
\frac{921211202514231949013084046416 69\,\tau u^6\,\tau w}{210778818969600000000000000000000} +
\frac{2368787243869641998649563811 1\,\tau u^7\,\tau w}{542002677350400000000000000000000} +
\frac{478180057697394168883504663371058274251378 1\,\tau w^2}{896132050656185548800000000000000000000} -
\frac{970187368021978845863053902473516906117804 3\,\tau u\,\tau w^2}{320047160948637696000000000000000000000} +
\frac{244206299195929805633079770529253684651309 07\,\tau u^2\,\tau w^2}{112016506332023193600000000000000000000} +
\frac{749256730547279825291722332604880796818874 1\,\tau u^3\,\tau w^2}{149355341776030924800000000000000000000} -
\frac{245986714250225710319353721009513842735649\,\tau u^4\,\tau w^2}{165950379751145472000000000000000000000} -
\frac{562030353488902688314130090702488627 27\,\tau u^5\,\tau w^2}{122926207223070720000000000000000000} -
\frac{196826913250138300049256379350464179\,\tau u^6\,\tau w^2}{102438506019225600000000000000000000} -
\frac{709638953174401972539316242437\,\tau u^7\,\tau w^2}{325201606410240000000000000000000} +
\frac{160240235250873705278110924493624738898251\,\tau w^3}{504074278494104371200000000000000000000} -
\frac{808999185400963496360731959024726806063009\,\tau u\,\tau w^3}{384056593138365235200000000000000000000} +
\frac{475095809204598320565337981505246190382618 3\,\tau u^2\,\tau w^3}{896132050656185548800000000000000000000} -
\frac{248867854543462498534956327593547341609153\,\tau u^3\,\tau w^3}{497851139253436416000000000000000000000} +
\frac{357521844792450369517499641123562848908 17\,\tau u^4\,\tau w^3}{248925569626718208000000000000000000000} +
\frac{555998066632006012496643529508636465 89\,\tau u^5\,\tau w^3}{691459915629772800000000000000000000} +
$$

$$\frac{77578748277644939712881951521198219\,\tau u^6\,\tau w^3}{175608867461529600000000000000000000} + \frac{92784731656091626130184311881\,\tau u^7\,\tau w^3}{185829489377280000000000000000000} -$$
$$\frac{37461090027166226499426581300601648592 69\,\tau w^4}{252037139247052185600000000000000000} +$$
$$\frac{20341288154696319815262703869039100332860 89\,\tau u\,\tau w^4}{241955653677170098176000000000000000000} -$$
$$\frac{28060708176825965310715965812442800022557 09\,\tau u^2\,\tau w^4}{161303769118113398784000000000000000000} +$$
$$\frac{40722151723314421138765194068750523046621\,\tau u^3\,\tau w^4}{268839615196855664640000000000000000} -$$
$$\frac{17032298331812699934190442391685268281 3\,\tau u^4\,\tau w^4}{426729547931516928000000000000000000} -$$
$$\frac{64386699126892845877495547144846754271\,\tau u^5\,\tau w^4}{948287884292259840000000000000000000} -$$
$$\frac{28600473721102225601770978486234 43\,\tau u^6\,\tau w^4}{501739621318656000000000000000000} - \frac{11830022217345073848443763 59\,\tau u^7\,\tau w^4}{227546313523200000000000000000} -$$
$$\frac{64354426663892175688510011790764124511\,\tau w^5}{259238200368396533760000000000000000} +$$
$$\frac{10171959102889698082046840873851303855 73\,\tau u\,\tau w^5}{518476400736793067520000000000000000} -$$
$$\frac{35393234192505577861853084456937070558 9\,\tau u^2\,\tau w^5}{576084889707547852800000000000000000} +$$
$$\frac{20869017895848569121265406845061831109 7\,\tau u^3\,\tau w^5}{219460910364780134400000000000000000} -$$
$$\frac{52937574027791219058581946587933078113\,\tau u^4\,\tau w^5}{731536367882600448000000000000000000} +$$
$$\frac{57370501759525630302359913201453551 9\,\tau u^5\,\tau w^5}{270939395512074240000000000000000000} +$$
$$\frac{37698112474831265127801981535 31\,\tau u^6\,\tau w^5}{955694516797440000000000000000} +$$
$$\frac{50211901411307502973357\,\tau u^7\,\tau w^5}{260052929740800000000000} - \frac{54556467688114398635938018586754 97\,\tau w^6}{740680572481132953600000000000000000} +$$
$$\frac{10260098356203744040553576664874303 9\,\tau u\,\tau w^6}{148136114496226590720000000000000000} -$$
$$\frac{47279529117033828490392704607504 37\,\tau u^2\,\tau w^6}{176352517257412608000000000000000000} +$$
$$\frac{17360729922231201068376777646270621\,\tau u^3\,\tau w^6}{313515586235400192000000000000000000} -$$
$$\frac{27199046805122176762359653785931 3\,\tau u^4\,\tau w^6}{418020781647200256000000000000000000} +$$
$$\frac{27555575634761890126750585096 61\,\tau u^5\,\tau w^6}{663525050233651200000000000000} - \frac{22495126064816878820445161\,\tau u^6\,\tau w^6}{200612260085760000000000000} -$$
$$\frac{15236302494764645753920016 63\,\tau w^7}{251932167510589440000000000000000} + \frac{13660058211895243032485151167\,\tau u\,\tau w^7}{201545734008471552000000000000000} -$$
$$\frac{19054755296805783230629101 8059\,\tau u^2\,\tau w^7}{671819113361571840000000000000000} + \frac{12564721431858095808729702337 1\,\tau u^3\,\tau w^7}{223939704453857280000000000000000} -$$
$$\frac{37516005285471912873522925 9\,\tau u^4\,\tau w^7}{710919696678912000000000000000} + \frac{51015200895244709865931\,\tau u^5\,\tau w^7}{270826551115776000000000000}$$

Varable tax rate on output sales

```
<< Algebra`
```

```
InequalitySolve[{rh1 > 0, rh2 > 0, rh3 > 0,
   rh4 > 0, rh5 > 0, rh6 > 0, rh7 > 0, rh8 > 0}, {τw, τu}] /. τw → 1 / 5
```

$$\frac{4843}{34919} < \tau u < \text{Root}[862105430059334757994477974680017710200446 9-$$
$$3861755035368757284208299589495547019103031\#1 -$$
$$1126334292085496306485917462505227287499 0\#1^2 -$$
$$1447918411413030855029890982103374845938\#1^3 -$$
$$1089199506242959184207131664602766496 3\#1^4 -$$
$$1837648874239296110522077925159358 3\#1^5 + 5387127616667936347299633302460\#1^6 \&, 3]$$

```
N[-62/247 < τu < Root[-347682439008013424116718 74 + 372163715924045360038609 #1 +
    28636146978924938168964 6 #1^2 + 25657866652240324698372 #1^3 +
    949114436578153514 28 #1^4 + 81242259225021819 #1^5 &, 3]]
```

$$-0.251012 < \tau u < 7.9936$$

```
rh1 =.

rh2 =.

rh3 =.

rh4 =.

rh5 =.

rh6 =.

rh7 =.

rh8 =.
```

Varable tax rate on wage payments

```
rh1 = Det[{{beta0, 0}, {beta2, beta1}}] /. τu → 3 / 20
```

$$8$$

```
rh2 = Det[{{beta1, beta0}, {beta3, beta2}}] /. τu → 3 / 20
```

$$\frac{59355109}{360000} + \frac{773\,\tau w}{5400}$$

```
rh3 =
 Det[{{beta1, beta0, 0}, {beta3, beta2, beta1}, {beta5, beta4, beta3}}] /. τu → 3 / 20
```

$$\frac{4510749274788433}{907200000000} + \frac{1327115089\,\tau w}{756000000} - \frac{597529\,\tau w^2}{29160000}$$

```
rh4 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0},
    {beta5, beta4, beta3, beta2}, {beta7, beta6, beta5, beta4}}] /. τu → 3 / 20
```

$$\frac{1343583465963616339080 17}{914457600000000000} - \frac{1882270974179352237563\,\tau w}{823011840000000000} -$$
$$\frac{15338760412555637\,\tau w^2}{3527193600000000} + \frac{35712515743\,\tau w^3}{8817984000000}$$

```
rh5 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0},
    {beta3, beta2, beta1, beta0, 0}, {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1},
    {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3}, {0, beta8, beta7, beta6, beta5}}] /. τu → 3 / 20
```

$$\frac{2077770907191405185099717664970 73}{691329945600000000000000000} - \frac{4030251326305636179449877824380 1\,\tau w}{248878780416000000000000000} - \frac{7244777464541344446444377597\,\tau w^2}{149327268249600000000000000} - \frac{7955921923463492143031\,\tau w^3}{1279948013568000000000} - \frac{50721416901548293\,\tau w^4}{53331167232000000000}$$

```
rh6 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0}, {beta5, beta4,
     beta3, beta2, beta1, beta0}, {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2},
    {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4}, {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6}}] /. τu → 3 / 20
```

$$\frac{1405208128255125928823532905105867303513}{49775756083200000000000000000000} - \frac{7494625646508813120512171884818594468 07\,\tau w}{62717452664832000000000000000000} - \frac{1066120434878742916629042855188760529 67\,\tau w^2}{15052188639559680000000000000000000} - \frac{9215055164542423601741103225511 7\,\tau w^3}{11284439629824000000000000000000} - \frac{8693067918239469530439189929 9\,\tau w^4}{46446753516355584000000000000} - \frac{1089587134243853501873 39\,\tau w^5}{13823438546534400000000000000}$$

```
rh7 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0, 0},
    {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0, 0}, {beta7, beta6, beta5, beta4,
     beta3, beta2, beta1}, {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4, beta3},
    {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6, beta5}, {0, 0, 0, 0, 0, beta8, beta7}}] /. τu → 3 / 20
```

$$\frac{3496556540842536063205744242654885057662 09}{57354780672000000000000000000000000} + \frac{1860171876606168696779233665140550617918412 7\,\tau w}{19755997589422080000000000000000000000} + \frac{7704774804599406078443926966647951145980175 3\,\tau w^2}{11379454611507118080000000000000000000000} - \frac{8353414718549740131439984673573499093839343 1\,\tau w^3}{20483018300712812544000000000000000000000} - \frac{1144193334058913355493554836320452476153\,\tau w^4}{25081246898832015360000000000000000000} - \frac{3622824858965062619387035103110729 3\,\tau w^5}{35113745658364821504000000000000000} - \frac{1902735663858630122438448 17\,\tau w^6}{42655181800734720000000000000000}$$

```
rh8 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0, 0, 0},
    {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0},
    {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0}, {0, beta8, beta7, beta6,
     beta5, beta4, beta3, beta2}, {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4},
    {0, 0, 0, 0, 0, beta8, beta7, beta6}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, beta8}}] /. τu → 3 / 20
```

$$-\frac{6562686971507355937030861369038953764725976721}{41295442083840000000000000000000000000000} +$$
$$\frac{385931203812603723362584305230440678138027578189013\tau w}{45517818446028472320000000000000000000000000} +$$
$$\frac{1061560538673340154655667288931112358970745806849997\tau w^2}{81932073202851250176000000000000000000000000} +$$
$$\frac{309910083113615722281206239270973573064419197802277\tau w^3}{29495546353026450063360000000000000000000000} -$$
$$\frac{1116193083786473846658418507762413210211368157709\tau w^4}{19663697568684300042240000000000000000000000} -$$
$$\frac{964807199366748460125366856587596626806329081\tau w^5}{15169138124413602889728000000000000000000000} -$$
$$\frac{436554968396403106241748759531636193869 1\tau w^6}{30338276248827205779456000000000000000000} -$$
$$\frac{22930057758726737468517982741487\tau w^7}{36854077075834798080000000000000000000}$$

```
InequalitySolve[
 {rh1 > 0, rh2 > 0, rh3 > 0, rh4 > 0, rh5 > 0, rh6 > 0, rh7 > 0, rh8 > 0}, {τw}]
```

$$\frac{112614}{602555} < \tau w < \text{Root}[-468269803164718348407463229367310202022107690465 88-$$
$$723234825624478389307766049006646080246678857760\#1 -$$
$$5200722993104599102949650702487367023536618327 5\#1^2 +$$
$$3132530519456152549289994252590062160189753662 5\#1^3 +$$
$$3504092085555422151199011686231385708218562 50\#1^4 +$$
$$7924929378986074479909139288054720343750 00\#1^5 +$$
$$3426351246693428192981035542127500000 00\#1^6 \&, 4]$$

```
N[112614/602555 < τw < Root[-468269803164718348407463229367310202022107690465 88-
    723234825624478389307766049006646080246678857760#1 -
    5200722993104599102949650702487367023536618327 5#1^2 +
    3132530519456152549289994252590062160189753662 5#1^3 +
    3504092085555422151199011686231385708218562 50#1^4 +
    7924929378986074479909139288054720343750 00#1^5 +
    3426351246693428192981035542127500000 00#1^6 &, 4]]
```

$$0.186894 < \tau w < 12.0986$$

Page 141 Cramer's Rule (equations 95) and solution of related inequalities

```
matrixbeta =
 {{-1, 1/8, -1/7, (1 - τw) 5/6 + 1/6, -1, (1 - τw) 1/2 + 7/20, 0, σw}, {1, -1, 0, 0, 0, 0,
      0, 0}, {-1/9, (1 - τu) 7/8 + 1/8, -1, 1/6, -1, (1 - τu) 3/20 + 7/20, 0, σu},
     {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, ξ - 1, 1 - σw - σu},
     {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {-1/9, τu * 7/8 + 1/8, 0,
      τw * 5/6 + 1/6, -1, τw * 1/2 + τu * 3/20 + 7/20, -1, 1 - σw - σu},
     {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. σw → 3/6 /. σu → 2/6 /. ξ → 99/100
```

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8},\ -1,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20},\ -\frac{1}{100},\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8},\ 0,\ \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8} & 0 & \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$-\frac{3973}{72000}+\frac{2329\,\tau u}{12000}+\frac{1769\,\tau w}{10800}-\frac{7003\,\tau u\,\tau w}{43200}$$

```
Simplify[-3973/72000 + 2329 τu/12000 + 1769 τw/10800 - 7003 τu τw/43200]
```

$$\frac{-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w}{216000}$$

```
householdincome =
 {{0, 1/8, -1/7, 1/6 + 5 (1 - τw)/6, -1, 7/20 + (1 - τw)/2, 0, 1/2}, {k/2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 1/8 + 7 (1 - τu)/8, -1, 1/6, -1, 7/20 + 3 (1 - τu)/20, 0, 1/3}, {4 k/10, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0},
  {0, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, -1/100, 1/6}, {-k, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 1/8 + 7 τu/8, 0, 1/6 + 5 τw/6, -1, 7/20 + 3 τu/20 + τw/2, -1, 1/6}, {k/10, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{0,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{\frac{k}{2},\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{0,\ \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8},\ -1,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \left\{\frac{2\,k}{5},\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{0,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20},\ -\frac{1}{100},\ \frac{1}{6}\right\},\ \{-k,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8},\ 0,\ \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \left\{\frac{k}{10},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\right\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6}+\frac{5(1-\tau w)}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{k}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}+\frac{7(1-\tau u)}{8} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3(1-\tau u)}{20} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2k}{5} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\ -k & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8}+\frac{7\tau u}{8} & 0 & \frac{1}{6}+\frac{5\tau w}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\ \frac{k}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det[%]

$$\frac{2449\,k}{1680000}+\frac{44299\,k\,\tau u}{840000}-\frac{709\,k\,\tau w}{84000}-\frac{15181\,k\,\tau u\,\tau w}{336000}$$

Simplify[$\frac{2449\,k}{1680000}+\frac{44299\,k\,\tau u}{840000}-\frac{709\,k\,\tau w}{84000}-\frac{15181\,k\,\tau u\,\tau w}{336000}$]

$$\frac{k\,(2449+\tau u\,(88598-75905\,\tau w)-14180\,\tau w)}{1680000}$$

housinc =

$$\frac{k\,(2449+\tau u\,(88598-75905\,\tau w)-14180\,\tau w)}{1680000}\Big/\frac{-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w}{216000}$$

$$\frac{9\,k\,(2449+\tau u\,(88598-75905\,\tau w)-14180\,\tau w)}{70\,(-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w)}$$

householdexpenditure =

$$\left\{\left\{-1,\,0,\,-\frac{1}{7},\,\frac{1}{6}+\frac{5(1-\tau w)}{6},\,-1,\,\frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2},\,0,\,\frac{1}{2}\right\},\,\{1,\,k/2,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,0,\,-1,\,\frac{1}{6},\,-1,\,\frac{7}{20}+\frac{3(1-\tau u)}{20},\,0,\,\frac{1}{3}\right\},\,\{0,\,2k/5,\,1,\,-1,\,0,\,0,\,0,\,0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,0,\,-\frac{1}{7},\,\frac{1}{6},\,-1,\,\frac{7}{20},\,-\frac{1}{100},\,\frac{1}{6}\right\},\,\{0,\,-k,\,0,\,0,\,1,\,-1,\,0,\,0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\,0,\,0,\,\frac{1}{6}+\frac{5\tau w}{6},\,-1,\,\frac{7}{20}+\frac{3\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2},\,-1,\,\frac{1}{6}\right\},\,\{0,\,k/10,\,0,\,0,\,0,\,0,\,1,\,-1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\,0,\,-\frac{1}{7},\,\frac{1}{6}+\frac{5(1-\tau w)}{6},\,-1,\,\frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2},\,0,\,\frac{1}{2}\right\},\,\left\{1,\,\frac{k}{2},\,0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,0,\,-1,\,\frac{1}{6},\,-1,\,\frac{7}{20}+\frac{3(1-\tau u)}{20},\,0,\,\frac{1}{3}\right\},\,\left\{0,\,\frac{2k}{5},\,1,\,-1,\,0,\,0,\,0,\,0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,0,\,-\frac{1}{7},\,\frac{1}{6},\,-1,\,\frac{7}{20},\,-\frac{1}{100},\,\frac{1}{6}\right\},\,\{0,\,-k,\,0,\,0,\,1,\,-1,\,0,\,0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\,0,\,0,\,\frac{1}{6}+\frac{5\tau w}{6},\,-1,\,\frac{7}{20}+\frac{3\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2},\,-1,\,\frac{1}{6}\right\},\,\left\{0,\,\frac{k}{10},\,0,\,0,\,0,\,0,\,1,\,-1\right\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6}+\frac{5(1-\tau w)}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3(1-\tau u)}{20} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2k}{5} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\ 0 & -k & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{6}+\frac{5\tau w}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{k}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{73201\,k}{2520000} - \frac{1163\,k\,\tau u}{26250} - \frac{8537\,k\,\tau w}{94500} + \frac{27119\,k\,\tau u\,\tau w}{756000}$$

```
Simplify[ 73201 k/2520000 - 1163 k τu/26250 - 8537 k τw/94500 + 27119 k τu τw/756000 ]
```

$$\frac{k\,(219603 - 682960\,\tau w + \tau u\,(-334944 + 271190\,\tau w))}{7560000}$$

```
housexp = k (219603 - 682960 τw + τu (-334944 + 271190 τw))/7560000 /
    (-11919 + 41922 τu + 35380 τw - 35015 τu τw)/216000
```

$$\frac{k\,(219603 - 682960\,\tau w + \tau u\,(-334944 + 271190\,\tau w))}{35\,(-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w)}$$

```
businessincome = {{-1, 1/8, 0, 1/6 + 5 (1 - τw)/6, -1, 7/20 + (1 - τw)/2, 0, 1/2},
  {1, -1, k/2, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8 + 7 (1 - τu)/8, 0, 1/6, -1, 7/20 + 3 (1 - τu)/20, 0, 1/3},
  {0, 0, 2 k/5, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8, 0, 1/6, -1, 7/20, -1/100, 1/6},
  {0, 0, -k, 0, 1, -1, 0, 0}, {-1/9, 1/8 + 7 τu/8, 0, 1/6 + 5 τw/6, -1, 7/20 + 3 τu/20 + τw/2, -1, 1/6},
  {0, 0, k/10, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6} + \frac{5\,(1 - \tau w)}{6}, -1, \frac{7}{20} + \frac{1 - \tau w}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \left\{1, -1, \frac{k}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8} + \frac{7\,(1 - \tau u)}{8}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20} + \frac{3\,(1 - \tau u)}{20}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, 0, \frac{2\,k}{5}, -1, 0, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, -k, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8} + \frac{7\,\tau u}{8}, 0, \frac{1}{6} + \frac{5\,\tau w}{6}, -1, \frac{7}{20} + \frac{3\,\tau u}{20} + \frac{\tau w}{2}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \left\{0, 0, \frac{k}{10}, 0, 0, 0, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} + \frac{5\,(1-\tau w)}{6} & -1 & \frac{7}{20} + \frac{1-\tau w}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -1 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} + \frac{7\,(1-\tau u)}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} + \frac{3\,(1-\tau u)}{20} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & \frac{2\,k}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & -k & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} + \frac{7\,\tau u}{8} & 0 & \frac{1}{6} + \frac{5\,\tau w}{6} & -1 & \frac{7}{20} + \frac{3\,\tau u}{20} + \frac{\tau w}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & \frac{k}{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{1507\,k}{80000} - \frac{13289\,k\,\tau u}{720000} - \frac{1639\,k\,\tau w}{27000} + \frac{1457\,k\,\tau u\,\tau w}{24000}$$

```
Simplify[ 1507 k/80000 - 13289 k τu/720000 - 1639 k τw/27000 + 1457 k τu τw/24000 ]
```

$$\frac{k\,(40689 - 131120\,\tau w + 3\,\tau u\,(-13289 + 43710\,\tau w))}{2160000}$$

businc =

$$\frac{k\,(40689 - 131120\,\tau w + 3\,\tau u\,(-13289 + 43710\,\tau w))}{2160000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000}$$

$$\frac{k\,(40689 - 131120\,\tau w + 3\,\tau u\,(-13289 + 43710\,\tau w))}{10\,(-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w)}$$

businessexpenditure =

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ \frac{7}{20} + \frac{1-\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ k/2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8} + \frac{7\,(1-\tau u)}{8},\ -1,\ 0,\ -1,\ \frac{7}{20} + \frac{3\,(1-\tau u)}{20},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ 2\,k/5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ \frac{7}{20},\ -\frac{1}{100},\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ -k,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8} + \frac{7\,\tau u}{8},\ 0,\ 0,\ -1,\ \frac{7}{20} + \frac{3\,\tau u}{20} + \frac{\tau w}{2},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ k/10,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ \frac{7}{20} + \frac{1-\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ \frac{k}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8} + \frac{7\,(1-\tau u)}{8},\ -1,\ 0,\ -1,\ \frac{7}{20} + \frac{3\,(1-\tau u)}{20},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ \frac{2\,k}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ \frac{7}{20},\ -\frac{1}{100},\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ -k,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8} + \frac{7\,\tau u}{8},\ 0,\ 0,\ -1,\ \frac{7}{20} + \frac{3\,\tau u}{20} + \frac{\tau w}{2},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{k}{10},\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\right\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & \frac{7}{20} + \frac{1-\tau w}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -1 & 0 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} + \frac{7\,(1-\tau u)}{8} & -1 & 0 & -1 & \frac{7}{20} + \frac{3\,(1-\tau u)}{20} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & \frac{2\,k}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & -k & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} + \frac{7\,\tau u}{8} & 0 & 0 & -1 & \frac{7}{20} + \frac{3\,\tau u}{20} + \frac{\tau w}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[%]

$$\frac{5891\,k}{144000} - \frac{13837\,k\,\tau u}{144000} - \frac{142\,k\,\tau w}{1125} + \frac{27119\,k\,\tau u\,\tau w}{216000}$$

Simplify[$\frac{5891\,k}{144000} - \frac{13837\,k\,\tau u}{144000} - \frac{142\,k\,\tau w}{1125} + \frac{27119\,k\,\tau u\,\tau w}{216000}$ **]**

$$\frac{k\,(17673 - 54528\,\tau w + \tau u\,(-41511 + 54238\,\tau w))}{432000}$$

busexp =

$$\frac{k\,(17673 - 54528\,\tau w + \tau u\,(-41511 + 54238\,\tau w))}{432000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000}$$

$$\frac{k\,(17673 - 54528\,\tau w + \tau u\,(-41511 + 54238\,\tau w))}{2\,(-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w)}$$

financialicome =

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6},\ 0,\ \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ k/2,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8},\ -1,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 2\,k/5,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{7}{20},\ -\frac{1}{100},\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -k,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8},\ 0,\ \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6},\ 0,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ k/10,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6},\ 0,\ \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{k}{2},\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8},\ -1,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ \frac{2\,k}{5},\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{7}{20},\ -\frac{1}{100},\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -k,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8},\ 0,\ \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6},\ 0,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2},\ -1,\ \frac{1}{6}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{k}{10},\ 0,\ 1,\ -1\right\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6} & 0 & \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -1 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8} & -1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2\,k}{5} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & -k & -1 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8} & 0 & \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6} & 0 & \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2} & -1 & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[%]

$$-\frac{6893\,k}{432000}+\frac{2317\,k\,\tau u}{36000}+\frac{503\,k\,\tau w}{10800}-\frac{611\,k\,\tau u\,\tau w}{12960}$$

Simplify$\left[-\frac{6893\,k}{432000}+\frac{2317\,k\,\tau u}{36000}+\frac{503\,k\,\tau w}{10800}-\frac{611\,k\,\tau u\,\tau w}{12960}\right]$

$$\frac{k\,(-20679+\tau u\,(83412-61100\,\tau w)+60360\,\tau w)}{1296000}$$

fininc =

$$\frac{k\,(-20679+\tau u\,(83412-61100\,\tau w)+60360\,\tau w)}{1296000}\Big/\frac{-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w}{216000}$$

$$\frac{k\,(-20679+\tau u\,(83412-61100\,\tau w)+60360\,\tau w)}{6\,(-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w)}$$

```
financialexpenditure =
 {{-1, 1/8, -1/7, 1/6 + 5 (1 - τw)/6, -1, 0, 0, 1/2}, {1, -1, 0, 0, 0, k/2, 0, 0},
  {-1/9, 1/8 + 7 (1 - τu)/8, -1, 1/6, -1, 0, 0, 1/3}, {0, 0, 1, -1, 0, 2 k/5, 0, 0},
  {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 0, -1/100, 1/6}, {0, 0, 0, 0, 1, -k, 0, 0},
  {-1/9, 1/8 + 7 τu/8, 0, 1/6 + 5 τw/6, -1, 0, -1, 1/6}, {0, 0, 0, 0, 0, k/10, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}+\frac{5(1-\tau w)}{6}, -1, 0, 0, \frac{1}{2}\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, \frac{k}{2}, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}+\frac{7(1-\tau u)}{8}, -1, \frac{1}{6}, -1, 0, 0, \frac{1}{3}\right\}, \left\{0, 0, 1, -1, 0, \frac{2k}{5}, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, 0, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -k, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}+\frac{7\tau u}{8}, 0, \frac{1}{6}+\frac{5\tau w}{6}, -1, 0, -1, \frac{1}{6}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, \frac{k}{10}, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6}+\frac{5(1-\tau w)}{6} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7(1-\tau u)}{8} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{2k}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & 0 & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\tau u}{8} & 0 & \frac{1}{6}+\frac{5\tau w}{6} & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$-\frac{30731\,k}{432000}+\frac{1163\,k\,\tau u}{4500}+\frac{142\,k\,\tau w}{675}-\frac{27119\,k\,\tau u\,\tau w}{129600}$$

```
Simplify[-30731 k/432000 + 1163 k τu/4500 + 142 k τw/675 - 27119 k τu τw/129600]
```

$$\frac{k(-92193+\tau u(334944-271190\,\tau w)+272640\,\tau w)}{1296000}$$

```
finexp = k (-92193 + τu (334944 - 271190 τw) + 272640 τw)/1296000 /
   (-11919 + 41922 τu + 35380 τw - 35015 τu τw)/216000
```

$$\frac{k(-92193+\tau u(334944-271190\,\tau w)+272640\,\tau w)}{1296000} \Big/ \frac{-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w}{216000}$$

$$\frac{k(-92193+\tau u(334944-271190\,\tau w)+272640\,\tau w)}{6(-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w)}$$

governmentincome =

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ k/2,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8},\ -1,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 2\,k/5,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20},\ 0,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ -k,\ 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8},\ 0,\ \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ k/10,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{k}{2},\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8},\ -1,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20},\ 0,\ \frac{1}{3}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{2\,k}{5},\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{7}{20},\ 0,\ \frac{1}{6}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ -k,\ 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8},\ 0,\ \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6},\ -1,\ \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2},\ 0,\ \frac{1}{6}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{k}{10},\ -1\right\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6}+\frac{5\,(1-\tau w)}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\,(1-\tau u)}{8} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\,(1-\tau u)}{20} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{2\,k}{5} & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & 0 & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -k & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\,\tau u}{8} & 0 & \frac{1}{6}+\frac{5\,\tau w}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\,\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & -1
\end{pmatrix}$$

Det[%]

$$\frac{137\,k}{50400}+\frac{137\,k\,\tau u}{11200}-\frac{31\,k\,\tau w}{3024}+\frac{631\,k\,\tau u\,\tau w}{60480}$$

Simplify[$\frac{137\,k}{50400}+\frac{137\,k\,\tau u}{11200}-\frac{31\,k\,\tau w}{3024}+\frac{631\,k\,\tau u\,\tau w}{60480}$]

$$\frac{k\,(822-3100\,\tau w+\tau u\,(3699+3155\,\tau w))}{302400}$$

govinc = $\frac{k\,(822-3100\,\tau w+\tau u\,(3699+3155\,\tau w))}{302400}\Big/\frac{-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w}{216000}$

$$\frac{5\,k\,(822-3100\,\tau w+\tau u\,(3699+3155\,\tau w))}{7\,(-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w)}$$

```
governmentexpenditure =
{{-1, 1/8, -1/7, 1/6 + 5 (1 - τw)/6, -1, 7/20 + (1 - τw)/2, 0, 0}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, k/2},
 {-1/9, 1/8 + 7 (1 - τu)/8, -1, 1/6, -1, 7/20 + 3 (1 - τu)/20, 0, 0}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 2 k/5},
 {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, -1/100, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, -k},
 {-1/9, 1/8 + 7 τu/8, 0, 1/6 + 5 τw/6, -1, 7/20 + 3 τu/20 + τw/2, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, k/10}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}+\frac{5(1-\tau w)}{6}, -1, \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2}, 0, 0\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{k}{2}\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}+\frac{7(1-\tau u)}{8}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}+\frac{3(1-\tau u)}{20}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, \frac{2k}{5}\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, -k\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}+\frac{7\tau u}{8}, 0, \frac{1}{6}+\frac{5\tau w}{6}, -1, \frac{7}{20}+\frac{3\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2}, -1, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \frac{k}{10}\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6}+\frac{5(1-\tau w)}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2} & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2} \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7(1-\tau u)}{8} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3(1-\tau u)}{20} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2k}{5} \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -k \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\tau u}{8} & 0 & \frac{1}{6}+\frac{5\tau w}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{k}{10}
\end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{13837\,k}{1680000}-\frac{1507\,k\,\tau u}{210000}-\frac{2237\,k\,\tau w}{84000}+\frac{26857\,k\,\tau u\,\tau w}{1008000}$$

```
Simplify[13837 k/1680000 - 1507 k τu/210000 - 2237 k τw/84000 + 26857 k τu τw/1008000]
```

$$\frac{k\,(41511-134220\,\tau w+\tau u\,(-36168+134285\,\tau w))}{5040000}$$

```
govexp =
k (41511 - 134220 τw + τu (-36168 + 134285 τw))/5040000 / (-11919 + 41922 τu + 35380 τw - 35015 τu τw)/216000
```

$$\frac{3\,k\,(41511-134220\,\tau w+\tau u\,(-36168+134285\,\tau w))}{70\,(-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w)}$$

```
<< Algebra`
```

```
{housinc > 0, housexp > 0, businc > 0, busexp > 0,
  fininc > 0, finexp > 0, govinc > 0, govexp > 0} /. τu → 3 / 20
```

$$\left\{\frac{9\,k\,(2449+\frac{3}{20}\,(88598-75905\,\tau w)-14180\,\tau w)}{70\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}>0,\right.$$

$$\frac{k\,(219603-682960\,\tau w+\frac{3}{20}\,(-334944+271190\,\tau w))}{35\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}>0,$$

$$\frac{k\,(40689-131120\,\tau w+\frac{9}{20}\,(-13289+43710\,\tau w))}{10\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}>0,$$

$$\frac{k\,(17673-54528\,\tau w+\frac{3}{20}\,(-41511+54238\,\tau w))}{2\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}>0,$$

$$\frac{k\,(-20679+\frac{3}{20}\,(83412-61100\,\tau w)+60360\,\tau w)}{6\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}>0,$$

$$\frac{k\,(-92193+\frac{3}{20}\,(334944-271190\,\tau w)+272640\,\tau w)}{6\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}>0,$$

$$\frac{5\,k\,(822-3100\,\tau w+\frac{3}{20}\,(3699+3155\,\tau w))}{7\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}>0,$$

$$\left.\frac{3\,k\,(41511-134220\,\tau w+\frac{3}{20}\,(-36168+134285\,\tau w))}{70\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}>0\right\}$$

```
InequalitySolve[{9 (2449 + 3/20 (88598 - 75905 τw) - 14180 τw)/(70 (-56307/10 + 120511 τw/4)) > 0,
  (219603 - 682960 τw + 3/20 (-334944 + 271190 τw))/(35 (-56307/10 + 120511 τw/4)) > 0,
  (40689 - 131120 τw + 9/20 (-13289 + 43710 τw))/(10 (-56307/10 + 120511 τw/4)) > 0,
  (17673 - 54528 τw + 3/20 (-41511 + 54238 τw))/(2 (-56307/10 + 120511 τw/4)) > 0,
  (-20679 + 3/20 (83412 - 61100 τw) + 60360 τw)/(6 (-56307/10 + 120511 τw/4)) > 0,
  (-92193 + 3/20 (334944 - 271190 τw) + 272640 τw)/(6 (-56307/10 + 120511 τw/4)) > 0,
  5 (822 - 3100 τw + 3/20 (3699 + 3155 τw))/(7 (-56307/10 + 120511 τw/4)) > 0,
  3 (41511 - 134220 τw + 3/20 (-36168 + 134285 τw))/(70 (-56307/10 + 120511 τw/4)) > 0}, {τw}]
```

$$\frac{112614}{602555}<\tau w<\frac{76309}{309282}$$

```
N[112614/602555 < τw < 76309/309282]
```

$$0.186894<\tau w<0.24673$$

```
{housinc > 0, housexp > 0, businc > 0, busexp > 0,
  fininc > 0, finexp > 0, govinc > 0, govexp > 0} /. τw → 1 / 5
```

$$\left\{\frac{9\,k\,(-387+73417\,\tau u)}{70\,(-4843+34919\,\tau u)}>0,\ \frac{k\,(83011-280706\,\tau u)}{35\,(-4843+34919\,\tau u)}>0,\right.$$
$$\frac{k\,(14465-13641\,\tau u)}{10\,(-4843+34919\,\tau u)}>0,\ \frac{k\,(\frac{33837}{5}-\frac{153317\,\tau u}{5})}{2\,(-4843+34919\,\tau u)}>0,\ \frac{k\,(-8607+71192\,\tau u)}{6\,(-4843+34919\,\tau u)}>0,$$
$$\left.\frac{k\,(-37665+280706\,\tau u)}{6\,(-4843+34919\,\tau u)}>0,\ \frac{5\,k\,(202+4330\,\tau u)}{7\,(-4843+34919\,\tau u)}>0,\ \frac{3\,k\,(14667-9311\,\tau u)}{70\,(-4843+34919\,\tau u)}>0\right\}$$

```
InequalitySolve[{9 (-387 + 73417 τu) / (70 (-4843 + 34919 τu)) > 0, (83011 - 280706 τu) / (35 (-4843 + 34919 τu)) > 0,
  (14465 - 13641 τu) / (10 (-4843 + 34919 τu)) > 0, (33837/5 - 153317 τu/5) / (2 (-4843 + 34919 τu)) > 0, (-8607 + 71192 τu) / (6 (-4843 + 34919 τu)) > 0,
  (-37665 + 280706 τu) / (6 (-4843 + 34919 τu)) > 0, 5 (202 + 4330 τu) / (7 (-4843 + 34919 τu)) > 0, 3 (14667 - 9311 τu) / (70 (-4843 + 34919 τu)) > 0}, {τu}]
```

$$\frac{4843}{34919}<\tau u<\frac{33837}{153317}$$

```
N[4843/34919 < τu < 33837/153317]
```

$$0.138692<\tau u<0.2207$$

Household income

$$\text{housinc} = \frac{k\,(2449 + \tau u\,(88598 - 75905\,\tau w) - 14180\,\tau w)}{1680000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$\frac{9\,k\,(2449 + \frac{3}{20}\,(88598 - 75905\,\tau w) - 14180\,\tau w)}{70\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}$$

$$\text{FullSimplify}\Big[\frac{9\,k\,(2449 + \frac{3}{20}\,(88598 - 75905\,\tau w) - 14180\,\tau w)}{70\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}\Big]$$

$$-\frac{9\,k\,(-314774 + 511315\,\tau w)}{70\,(-112614 + 602555\,\tau w)}$$

$$-\frac{9\,k\,(-314774 + 511315\,\tau w)}{70\,(-112614 + 602555\,\tau w)} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$\frac{1912599\,k}{552790}$$

$$D\Big[-\frac{9\,k\,(-314774 + 511315\,\tau w)}{70\,(-112614 + 602555\,\tau w)},\ \tau w\Big]$$

$$\frac{1084599\,k\,(-314774 + 511315\,\tau w)}{14\,(-112614 + 602555\,\tau w)^2} - \frac{131481\,k}{2\,(-112614 + 602555\,\tau w)}$$

$$\text{FullSimplify}\Big[\frac{1084599\,k\,(-314774 + 511315\,\tau w)}{14\,(-112614 + 602555\,\tau w)^2} - \frac{131481\,k}{2\,(-112614 + 602555\,\tau w)}\Big]$$

$$-\frac{118878678144\,k}{7\,(112614 - 602555\,\tau w)^2}$$

$$\text{partderivhouinc} = -\frac{118878678144\,k}{7\,(112614 - 602555\,\tau w)^2} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$-\frac{118878678144\,k}{436538263}$$

$$N\Big[-\frac{118878678144\,k}{436538263}\Big]$$

$$-272.321\,k$$

$$\text{elasthouinc} = \Big\{-\frac{118878678144\,k}{436538263} * 1/5\Big\} \Big/ \frac{1912599\,k}{552790}$$

$$\Big\{-\frac{26417484032}{1678199367}\Big\}$$

$$N\Big[\Big\{-\frac{26417484032}{1678199367}\Big\}\Big]$$

$$\{-15.7416\}$$

Household expenditure

$$\text{housexp} = \frac{k\,(219603 - 682960\,\tau w + \tau u\,(-334944 + 271190\,\tau w))}{7560000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$\frac{k\,(219603 - 682960\,\tau w + \frac{3}{20}\,(-334944 + 271190\,\tau w))}{35\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}$$

$$\text{FullSimplify}\Big[\frac{k\,(219603 - 682960\,\tau w + \frac{3}{20}\,(-334944 + 271190\,\tau w))}{35\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}\Big]$$

$$-\frac{2\,k\,(-1693614 + 6422815\,\tau w)}{35\,(-112614 + 602555\,\tau w)}$$

$$-\frac{2\,k\,(-1693614 + 6422815\,\tau w)}{35\,(-112614 + 602555\,\tau w)} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$\frac{818102\,k}{276395}$$

$$D\Big[-\frac{2\,k\,(-1693614 + 6422815\,\tau w)}{35\,(-112614 + 602555\,\tau w)},\ \tau w\Big]$$

$$-\frac{367018\,k}{-112614 + 602555\,\tau w} + \frac{241022\,k\,(-1693614 + 6422815\,\tau w)}{7\,(-112614 + 602555\,\tau w)^2}$$

$$\text{FullSimplify}\Big[-\frac{367018\,k}{-112614 + 602555\,\tau w} + \frac{241022\,k\,(-1693614 + 6422815\,\tau w)}{7\,(-112614 + 602555\,\tau w)^2}\Big]$$

$$-\frac{118878678144\,k}{7\,(112614 - 602555\,\tau w)^2}$$

$$\text{partderivhousexp} = -\frac{118878678144\,k}{7\,(112614 - 602555\,\tau w)^2} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$-\frac{118878678144\,k}{436538263}$$

$$N\Big[-\frac{118878678144\,k}{436538263}\Big]$$

$$-272.321\,k$$

$$\text{elasthousexp} = \Big\{-\frac{118878678144\,k}{436538263} * 1/5\Big\} \Big/ \frac{818102\,k}{276395}$$

$$\Big\{-\frac{59439339072}{3230275747}\Big\}$$

$$N\Big[\Big\{-\frac{59439339072}{3230275747}\Big\}\Big]$$

$$\{-18.4007\}$$

Business income

$$\text{businc} = \frac{k\,(40689 - 131120\,\tau w + 3\,\tau u\,(-13289 + 43710\,\tau w))}{2160000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$\frac{k\,(40689 - 131120\,\tau w + \frac{9}{20}\,(-13289 + 43710\,\tau w))}{10\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{k\,(40689 - 131120\,\tau w + \frac{9}{20}\,(-13289 + 43710\,\tau w))}{10\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}\right]$$

$$\frac{k\,(694179 - 2229010\,\tau w)}{-1126140 + 6025550\,\tau w}$$

$$\frac{k\,(694179 - 2229010\,\tau w)}{-1126140 + 6025550\,\tau w}\ /.\ \tau w \to 1/5$$

$$\frac{248377\,k}{78970}$$

$$D\left[\frac{k\,(694179 - 2229010\,\tau w)}{-1126140 + 6025550\,\tau w},\ \tau w\right]$$

$$-\frac{6025550\,k\,(694179 - 2229010\,\tau w)}{(-1126140 + 6025550\,\tau w)^2} - \frac{2229010\,k}{-1126140 + 6025550\,\tau w}$$

$$\text{FullSimplify}\left[-\frac{6025550\,k\,(694179 - 2229010\,\tau w)}{(-1126140 + 6025550\,\tau w)^2} - \frac{2229010\,k}{-1126140 + 6025550\,\tau w}\right]$$

$$-\frac{33452659041\,k}{2\,(112614 - 602555\,\tau w)^2}$$

$$\text{partderivbusinc} = -\frac{33452659041\,k}{2\,(112614 - 602555\,\tau w)^2}\ /.\ \tau w \to 1/5$$

$$-\frac{33452659041\,k}{124725218}$$

$$N\left[-\frac{33452659041\,k}{124725218}\right]$$

$$-268.211\,k$$

$$\text{elastbusinc} = \left\{-\frac{33452659041\,k}{124725218} * 1/5\right\} \Big/ \frac{248377\,k}{78970}$$

$$\left\{-\frac{33452659041}{1961433169}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{33452659041}{1961433169}\right\}\right]$$

$$\{-17.0552\}$$

Business expenditure

$$\text{busexp} = \frac{k\,(17673 - 54528\,\tau w + \tau u\,(-41511 + 54238\,\tau w))}{432000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000}\ /.\ \tau u \to 3/20$$

$$\frac{k\,(17673 - 54528\,\tau w + \frac{3}{20}\,(-41511 + 54238\,\tau w))}{2\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{k\,(17673 - 54528\,\tau w + \frac{3}{20}\,(-41511 + 54238\,\tau w))}{2\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}\right]$$

$$\frac{3\,k\,(-76309 + 309282\,\tau w)}{225228 - 1205110\,\tau w}$$

$$\frac{3\,k\,(-76309+309282\,\tau w)}{225228-1205110\,\tau w}\ /.\ \tau w\to 1/5$$

$$\frac{216789\,k}{78970}$$

$$D\Big[\frac{3\,k\,(-76309+309282\,\tau w)}{225228-1205110\,\tau w},\ \tau w\Big]$$

$$\frac{927846\,k}{225228-1205110\,\tau w}+\frac{3615330\,k\,(-76309+309282\,\tau w)}{(225228-1205110\,\tau w)^2}$$

$$\text{FullSimplify}\Big[\frac{927846\,k}{225228-1205110\,\tau w}+\frac{3615330\,k\,(-76309+309282\,\tau w)}{(225228-1205110\,\tau w)^2}\Big]$$

$$-\frac{33452659041\,k}{2\,(112614-602555\,\tau w)^2}$$

$$\text{partderivbusexp}=-\frac{33452659041\,k}{2\,(112614-602555\,\tau w)^2}\ /.\ \tau w\to 1/5$$

$$-\frac{33452659041\,k}{124725218}$$

$$N\Big[-\frac{33452659041\,k}{124725218}\Big]$$

$$-268.211\,k$$

$$\text{elastbusexp}=\Big\{-\frac{33452659041\,k}{124725218}*1/5\Big\}\Big/\frac{216789\,k}{78970}$$

$$\Big\{-\frac{11150886347}{570660911}\Big\}$$

$$N\Big[\Big\{-\frac{11150886347}{570660911}\Big\}\Big]$$

$$\{-19.5403\}$$

Financier income

$$\text{fininc}=\frac{k\,(-20679+\tau u\,(83412-61100\,\tau w)+60360\,\tau w)}{1296000}\Big/\frac{-11919+41922\,\tau u+35380\,\tau w-35015\,\tau u\,\tau w}{216000}\ /.\ \tau u\to 3/20$$

$$\frac{k\,(-20679+\frac{3}{20}\,(83412-61100\,\tau w)+60360\,\tau w)}{6\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}$$

$$\text{FullSimplify}\Big[\frac{k\,(-20679+\frac{3}{20}\,(83412-61100\,\tau w)+60360\,\tau w)}{6\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}\Big]$$

$$\frac{2\,k\,(-13612+85325\,\tau w)}{-112614+602555\,\tau w}$$

$$\frac{2\,k\,(-13612+85325\,\tau w)}{-112614+602555\,\tau w}\ /.\ \tau w\to 1/5$$

$$\frac{6906\,k}{7897}$$

```
D[2 k (-13612 + 85325 τw) / (-112614 + 602555 τw), τw]
```

$$-\frac{1205110\,k\,(-13612+85325\,\tau w)}{(-112614+602555\,\tau w)^2}+\frac{170650\,k}{-112614+602555\,\tau w}$$

```
FullSimplify[-1205110 k (-13612 + 85325 τw) / (-112614 + 602555 τw)^2 + 170650 k / (-112614 + 602555 τw)]
```

$$-\frac{2813621780\,k}{(112614-602555\,\tau w)^2}$$

```
partderivfininc = -2813621780 k / (112614 - 602555 τw)^2 /. τw → 1 / 5
```

$$-\frac{2813621780\,k}{62362609}$$

```
N[-2813621780 k / 62362609]
```

```
-45.1171 k
```

Financier expenditure

```
elastfininc = {-2813621780 k / 62362609 * 1 / 5} / (6906 k / 7897)
```

$$\left\{-\frac{281362178}{27268341}\right\}$$

```
N[{-281362178 / 27268341}]
```

```
{-10.3183}
```

```
finexp = k (-92193 + τu (334944 - 271190 τw) + 272640 τw) / 1296000 /
    (-11919 + 41922 τu + 35380 τw - 35015 τu τw) / 216000 /. τu → 3 / 20
```

$$\frac{k\left(-92193+\frac{3}{20}\,(334944-271190\,\tau w)+272640\,\tau w\right)}{6\left(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4}\right)}$$

```
FullSimplify[k (-92193 + 3/20 (334944 - 271190 τw) + 272640 τw) / (6 (-56307/10 + 120511 τw/4))]
```

$$\frac{k\,(-139838+773205\,\tau w)}{-112614+602555\,\tau w}$$

```
k (-139838 + 773205 τw) / (-112614 + 602555 τw) /. τw → 1 / 5
```

$$\frac{14803\,k}{7897}$$

$$\frac{14803\,k}{7897}$$

```
D[k (-139838 + 773205 τw) / (-112614 + 602555 τw), τw]
```

$$\frac{773205\,k}{-112614+602555\,\tau w}-\frac{602555\,k\,(-139838+773205\,\tau w)}{(-112614+602555\,\tau w)^2}$$

```
FullSimplify[ 773205 k / (-112614 + 602555 τw) - 602555 k (-139838 + 773205 τw) / (-112614 + 602555 τw)^2 ]
```

$$-\frac{2813621780\,k}{(112614-602555\,\tau w)^2}$$

```
partderivfinexp = - 2813621780 k / (112614 - 602555 τw)^2 /. τw → 1 / 5
```

$$-\frac{2813621780\,k}{62362609}$$

```
N[ - 2813621780 k / 62362609 ]
```

$$-45.1171\,k$$

```
elastfinexp = { - 2813621780 k / 62362609 * 1 / 5 } / 14803 k / 7897
```

$$\left\{-\frac{562724356}{116899291}\right\}$$

```
N[ { - 562724356 / 116899291 } ]
```

$$\{-4.81375\}$$

Government income

```
govinc = k (822 - 3100 τw + τu (3699 + 3155 τw)) / 302400 /
    (-11919 + 41922 τu + 35380 τw - 35015 τu τw) / 216000 /. τu → 3 / 20
```

$$\frac{5\,k\,(822-3100\,\tau w+\frac{3}{20}\,(3699+3155\,\tau w))}{7\,(-\frac{56307}{10}+\frac{120511\,\tau w}{4})}$$

```
FullSimplify[ 5 k (822 - 3100 τw + 3/20 (3699 + 3155 τw)) / 7 (-56307/10 + 120511 τw/4) ]
```

$$\frac{5\,k\,(-27537+52535\,\tau w)}{788298-4217885\,\tau w}$$

```
5 k (-27537 + 52535 τw) / (788298 - 4217885 τw) /. τw → 1 / 5
```

$$\frac{85150\,k}{55279}$$

```
D[ 5 k (-27537 + 52535 τw) / (788298 - 4217885 τw), τw ]
```

$$\frac{262675\,k}{788298-4217885\,\tau w}+\frac{21089425\,k\,(-27537+52535\,\tau w)}{(788298-4217885\,\tau w)^2}$$

```
FullSimplify[ 262675 k / (788298 - 4217885 τw) + 21089425 k (-27537 + 52535 τw) / (788298 - 4217885 τw)^2 ]
```

$$-\frac{53381902725\,k}{7\,(112614-602555\,\tau w)^2}$$

$$\text{partderivgovinc} = -\frac{53381902725\,k}{7\,(112614 - 602555\,\tau w)^2} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$-\frac{53381902725\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{53381902725\,k}{436538263}\right]$$

$$-122.285\,k$$

$$\text{elastgovinc} = \left\{-\frac{53381902725\,k}{436538263} * 1/5\right\} \Big/ \frac{85150\,k}{55279}$$

$$\left\{-\frac{2135276109}{134485910}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{2135276109}{134485910}\right\}\right]$$

$$\{-15.8773\}$$

Government expenditure

$$\text{govexp} = \frac{k\,(41511 - 134220\,\tau w + \tau u\,(-36168 + 134285\,\tau w))}{5040000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$\frac{3\,k\,(41511 - 134220\,\tau w + \frac{3}{20}\,(-36168 + 134285\,\tau w))}{70\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{3\,k\,(41511 - 134220\,\tau w + \frac{3}{20}\,(-36168 + 134285\,\tau w))}{70\,(-\frac{56307}{10} + \frac{120511\,\tau w}{4})}\right]$$

$$-\frac{9\,k\,(-240572 + 760515\,\tau w)}{70\,(-112614 + 602555\,\tau w)}$$

$$-\frac{9\,k\,(-240572 + 760515\,\tau w)}{70\,(-112614 + 602555\,\tau w)} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$\frac{796221\,k}{552790}$$

$$D\left[-\frac{9\,k\,(-240572 + 760515\,\tau w)}{70\,(-112614 + 602555\,\tau w)},\ \tau w\right]$$

$$-\frac{195561\,k}{2\,(-112614 + 602555\,\tau w)} + \frac{1084599\,k\,(-240572 + 760515\,\tau w)}{14\,(-112614 + 602555\,\tau w)^2}$$

$$\text{FullSimplify}\left[-\frac{195561\,k}{2\,(-112614 + 602555\,\tau w)} + \frac{1084599\,k\,(-240572 + 760515\,\tau w)}{14\,(-112614 + 602555\,\tau w)^2}\right]$$

$$-\frac{53381902725\,k}{7\,(112614 - 602555\,\tau w)^2}$$

$$\text{partderivgovexp} = -\frac{53381902725\,k}{7\,(112614 - 602555\,\tau w)^2} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$-\frac{53381902725\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{53381902725\,k}{436538263}\right]$$

$$-122.285\,k$$

$$\text{elastgovexp} = \left\{-\frac{53381902725\,k}{436538263} * 1/5\right\} \Big/ \frac{796221\,k}{552790}$$

$$\left\{-\frac{11862645050}{698639693}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{11862645050}{698639693}\right\}\right]$$

$$\{-16.9796\}$$

Aggregate income and expenditure

Together[housinc + businc + fininc + govinc]

$$\frac{7163389\,k - 10886155\,k\,\tau w}{70\,(-112614 + 602555\,\tau w)}$$

Together[housexp + busexp + finexp + govexp]

$$\frac{7163389\,k - 10886155\,k\,\tau w}{70\,(-112614 + 602555\,\tau w)}$$

Page 142 Response elasticities of
sector flows with respect to the tax rate on output

Household income

$$\text{housinc} = \frac{k\,(2449 + \tau u\,(88598 - 75905\,\tau w) - 14180\,\tau w)}{1680000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$\frac{9\,k\,(-387 + 73417\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\frac{9\,k\,(-387 + 73417\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$\frac{1912599\,k}{552790}$$

$$D\left[\frac{9\,k\,(-387 + 73417\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)},\ \tau u\right]$$

$$\frac{660753\,k}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)} - \frac{314271\,k\,(-387 + 73417\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{660753\,k}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)} - \frac{314271\,k\,(-387 + 73417\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2}\right]$$

$$-\frac{219885993\,k}{5\,(4843 - 34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{partderivhousinc} = -\frac{219885993\,k}{5\,(4843 - 34919\,\tau u)^2} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$-\frac{17590879440\,k}{62362609}$$

$$N\left[-\frac{17590879440\,k}{62362609}\right]$$

$$-282.074\,k$$

$$\text{elahousinc} = \left\{-\frac{17590879440\,k}{62362609} * 3/20\right\} \Big/ \frac{1912599\,k}{552790}$$

$$\left\{-\frac{6840897560}{559399789}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{6840897560}{559399789}\right\}\right]$$

$$\{-12.229\}$$

Household expenditure

$$\text{housexp} = \frac{k\,(219603 - 682960\,\tau w + \tau u\,(-334944 + 271190\,\tau w))}{7560000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$\frac{k\,(83011 - 280706\,\tau u)}{35\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\frac{k\,(83011 - 280706\,\tau u)}{35\,(-4843 + 34919\,\tau u)} /. \tau u \to 3/20$$

$$\frac{818102\,k}{276395}$$

$$D\left[\frac{k\,(83011 - 280706\,\tau u)}{35\,(-4843 + 34919\,\tau u)}, \tau u\right]$$

$$-\frac{34919\,k\,(83011 - 280706\,\tau u)}{35\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2} - \frac{280706\,k}{35\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\text{FullSimplify}\left[-\frac{34919\,k\,(83011 - 280706\,\tau u)}{35\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2} - \frac{280706\,k}{35\,(-4843 + 34919\,\tau u)}\right]$$

$$-\frac{219885993\,k}{5\,(4843 - 34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{partderivhousexp} = -\frac{219885993\,k}{5\,(4843 - 34919\,\tau u)^2} /. \tau u \to 3/20$$

$$-\frac{17590879440\,k}{62362609}$$

$$N\left[-\frac{17590879440\,k}{62362609}\right]$$

$$-282.074\,k$$

$$\text{elahousexp} = \left\{-\frac{17590879440\,k}{62362609} * 3/20\right\} \Big/ \frac{818102\,k}{276395}$$

$$\left\{-\frac{2430318870}{170014513}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{2430318870}{170014513}\right\}\right]$$

$$\{-14.2948\}$$

Business income

$$\text{businc} = \frac{k\,(40689 - 131120\,\tau w + 3\,\tau u\,(-13289 + 43710\,\tau w))}{2160000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} /. \tau w \to 1/5$$

$$\frac{k\,(14465 - 13641\,\tau u)}{10\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\frac{k\,(14465 - 13641\,\tau u)}{10\,(-4843 + 34919\,\tau u)} /. \tau u \to 3/20$$

$$\frac{248377\,k}{78970}$$

$$D\left[\frac{k\,(14465 - 13641\,\tau u)}{10\,(-4843 + 34919\,\tau u)}, \tau u\right]$$

$$-\frac{34919\,k\,(14465 - 13641\,\tau u)}{10\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2} - \frac{13641\,k}{10\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

```
FullSimplify[-(34919 k (14465 - 13641 τu))/(10 (-4843 + 34919 τu)^2) - (13641 k)/(10 (-4843 + 34919 τu))]
```

$$-\frac{219519986\,k}{5\,(4843-34919\,\tau u)^2}$$

```
partderivbusinc = -(219519986 k)/(5 (4843 - 34919 τu)^2) /. τu → 3/20
```

$$-\frac{17561598880\,k}{62362609}$$

```
N[-(17561598880 k)/62362609]
```

$$-281.605\,k$$

```
elabusinc = {-(17561598880 k)/62362609 * 3/20} / (248377 k)/78970
```

$$\left\{-\frac{26342398320}{1961433169}\right\}$$

```
N[{-26342398320/1961433169}]
```

$$\{-13.4302\}$$

Business expenditure

```
busexp = (k (17673 - 54528 τw + τu (-41511 + 54238 τw)))/432000 /
    (-11919 + 41922 τu + 35380 τw - 35015 τu τw)/216000 /. τw → 1/5
```

$$\frac{k\left(\frac{33837}{5}-\frac{153317\,\tau u}{5}\right)}{2\,(-4843+34919\,\tau u)}$$

```
FullSimplify[(k (33837/5 - (153317 τu)/5))/(2 (-4843 + 34919 τu))]
```

$$\frac{k\,(33837-153317\,\tau u)}{-48430+349190\,\tau u}$$

```
(k (33837 - 153317 τu))/(-48430 + 349190 τu) /. τu → 3/20
```

$$\frac{216789\,k}{78970}$$

```
D[(k (33837 - 153317 τu))/(-48430 + 349190 τu), τu]
```

$$-\frac{349190\,k\,(33837-153317\,\tau u)}{(-48430+349190\,\tau u)^2}-\frac{153317\,k}{-48430+349190\,\tau u}$$

```
FullSimplify[-(349190 k (33837 - 153317 τu))/(-48430 + 349190 τu)^2 - (153317 k)/(-48430 + 349190 τu)]
```

$$-\frac{219519986\,k}{5\,(4843-34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{partderivbusexp} = -\frac{219519986\,k}{5\,(4843 - 34919\,\tau u)^2} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$-\frac{17561598880\,k}{62362609}$$

$$N\left[-\frac{17561598880\,k}{62362609}\right]$$

$$-281.605\,k$$

$$\text{elabusexp} = \left\{-\frac{17561598880\,k}{62362609} * 3/20\right\} \Big/ \frac{216789\,k}{78970}$$

$$\left\{-\frac{8780799440}{570660911}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{8780799440}{570660911}\right\}\right]$$

$$\{-15.3871\}$$

Financier income

$$\text{fininc} = \frac{k\,(-20679 + \tau u\,(83412 - 61100\,\tau w) + 60360\,\tau w)}{1296000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$\frac{k\,(-8607 + 71192\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\frac{k\,(-8607 + 71192\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$\frac{6906\,k}{7897}$$

$$D\left[\frac{k\,(-8607 + 71192\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)},\ \tau u\right]$$

$$\frac{35596\,k}{3\,(-4843 + 34919\,\tau u)} - \frac{34919\,k\,(-8607 + 71192\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{35596\,k}{3\,(-4843 + 34919\,\tau u)} - \frac{34919\,k\,(-8607 + 71192\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2}\right]$$

$$-\frac{44235023\,k}{6\,(4843 - 34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{partderivfininc} = -\frac{44235023\,k}{6\,(4843 - 34919\,\tau u)^2} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$-\frac{8847004600\,k}{187087827}$$

$$N\left[-\frac{8847004600\,k}{187087827}\right]$$

$$-47.288\,k$$

$$\text{elafininc} = \left\{-\frac{8847004600\,k}{187087827} * 3/20\right\} \Big/ \frac{6906\,k}{7897}$$

$$\left\{-\frac{221175115}{27268341}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{221175115}{27268341}\right\}\right]$$

$$\{-8.11106\}$$

Financier expenditure

$$\text{finexp} = \frac{k\,(-92193 + \tau u\,(334944 - 271190\,\tau w) + 272640\,\tau w)}{1296000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} /.\ \tau w \to 1/5$$

$$\frac{k\,(-37665 + 280706\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\frac{k\,(-37665 + 280706\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)} /.\ \tau u \to 3/20$$

$$\frac{14803\,k}{7897}$$

$$D\left[\frac{k\,(-37665 + 280706\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)},\ \tau u\right]$$

$$\frac{140353\,k}{3\,(-4843 + 34919\,\tau u)} - \frac{34919\,k\,(-37665 + 280706\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{FullSimplify}\left[\frac{140353\,k}{3\,(-4843 + 34919\,\tau u)} - \frac{34919\,k\,(-37665 + 280706\,\tau u)}{6\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2}\right]$$

$$-\frac{44235023\,k}{6\,(4843 - 34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{partderivfinexp} = -\frac{44235023\,k}{6\,(4843 - 34919\,\tau u)^2} /.\ \tau u \to 3/20$$

$$-\frac{8847004600\,k}{187087827}$$

$$N\left[-\frac{8847004600\,k}{187087827}\right]$$

$$-47.288\,k$$

$$\text{elafinexp} = \left\{-\frac{8847004600\,k}{187087827} * 3/20\right\} \Big/ \frac{14803\,k}{7897}$$

$$\left\{-\frac{442350230}{116899291}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{442350230}{116899291}\right\}\right]$$

$$\{-3.78403\}$$

Government income

$$\text{govinc} = \frac{k\,(822 - 3100\,\tau w + \tau u\,(3699 + 3155\,\tau w))}{302400} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$\frac{5\,k\,(202 + 4330\,\tau u)}{7\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\frac{5\,k\,(202 + 4330\,\tau u)}{7\,(-4843 + 34919\,\tau u)} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$\frac{85150\,k}{55279}$$

$$D\left[\frac{5\,k\,(202 + 4330\,\tau u)}{7\,(-4843 + 34919\,\tau u)},\ \tau u\right]$$

$$-\frac{174595\,k\,(202 + 4330\,\tau u)}{7\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2} + \frac{21650\,k}{7\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\text{FullSimplify}\left[-\frac{174595\,k\,(202 + 4330\,\tau u)}{7\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2} + \frac{21650\,k}{7\,(-4843 + 34919\,\tau u)}\right]$$

$$-\frac{20017020\,k}{(4843 - 34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{partderivgovinc} = -\frac{20017020\,k}{(4843 - 34919\,\tau u)^2} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$-\frac{8006808000\,k}{62362609}$$

$$N\left[-\frac{8006808000\,k}{62362609}\right]$$

$$-128.391\,k$$

$$\text{elagovinc} = \left\{-\frac{8006808000\,k}{62362609} * 3/20\right\} \Big/ \frac{85150\,k}{55279}$$

$$\left\{-\frac{168142968}{13448591}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{168142968}{13448591}\right\}\right]$$

$$\{-12.5026\}$$

Government expenditure

$$\text{govexp} = \frac{k\,(41511 - 134220\,\tau w + \tau u\,(-36168 + 134285\,\tau w))}{5040000} \Big/ \frac{-11919 + 41922\,\tau u + 35380\,\tau w - 35015\,\tau u\,\tau w}{216000} \;/.\; \tau w \to 1/5$$

$$\frac{3\,k\,(14667 - 9311\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\frac{3\,k\,(14667 - 9311\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)} \;/.\; \tau u \to 3/20$$

$$\frac{796221\,k}{552790}$$

$$D\left[\frac{3\,k\,(14667 - 9311\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)},\ \tau u\right]$$

$$-\frac{104757\,k\,(14667 - 9311\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2} - \frac{27933\,k}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)}$$

$$\text{FullSimplify}\left[-\frac{104757\,k\,(14667 - 9311\,\tau u)}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)^2} - \frac{27933\,k}{70\,(-4843 + 34919\,\tau u)}\right]$$

$$-\frac{20017020\,k}{(4843 - 34919\,\tau u)^2}$$

$$\text{partderivgovexp} = -\frac{20017020\,k}{(4843 - 34919\,\tau u)^2}\ /.\ \tau u \to 3/20$$

$$-\frac{8006808000\,k}{62362609}$$

$$N\left[-\frac{8006808000\,k}{62362609}\right]$$

$$-128.391\,k$$

$$\text{elagovexp} = \left\{-\frac{8006808000\,k}{62362609} * 3/20\right\} \Big/ \frac{796221\,k}{552790}$$

$$\left\{-\frac{9341276000}{698639693}\right\}$$

$$N\left[\left\{-\frac{9341276000}{698639693}\right\}\right]$$

$$\{-13.3707\}$$

Page 143 The coefficients of characteristic polynomial 88 as functions of the distribution of govenment expenditure and solution of the corresponding Routh - Hurwitz conditions as a system of inequalities

```
matrixgamma = {{-1 - λ, 1 / 8, -1 / 7, (1 - τw) 5 / 6 + 1 / 6, -1, (1 - τw) 1 / 2 + 7 / 20, 0, σw},
    {1, -1 - λ, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1 / 9, (1 - τu) 7 / 8 + 1 / 8, -1 - λ,
     1 / 6, -1, (1 - τu) 3 / 20 + 7 / 20, 0, σu}, {0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0, 0, 0},
    {-1 / 9, 1 / 8, -1 / 7, 1 / 6, -1 - λ, 7 / 20, ξ - 1, σs}, {0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ, 0, 0},
    {-1 / 9, τu * 7 / 8 + 1 / 8, 0, τw * 5 / 6 + 1 / 6, -1, τw * 1 / 2 + τu * 3 / 20 + 7 / 20, -1 - λ, σs},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1 - λ}} /. τw → 1 / 5 /. τu → 3 / 20 /. ξ → 99 / 100
```

$$\left\{\left\{-1-\lambda,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{5}{6},\ -1,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \sigma w\right\},\ \{1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{139}{160},\ -1-\lambda,\ \frac{1}{6},\ -1,\ \frac{191}{400},\ 0,\ \sigma u\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ -1-\lambda,\ \frac{7}{20},\ -\frac{1}{100},\ \sigma s\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{41}{160},\ 0,\ \frac{1}{3},\ -1,\ \frac{189}{400},\ -1-\lambda,\ \sigma s\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1-\lambda\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \sigma w \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1-\lambda & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \sigma u \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1-\lambda & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1-\lambda & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

```
Det[matrixgamma]
```

$$\frac{1543793}{10080000}+\frac{1195879\,\lambda}{403200}+\frac{484639919\,\lambda^2}{30240000}+\frac{176168417\,\lambda^3}{4320000}+\frac{177375883\,\lambda^4}{3024000}+\frac{386833471\,\lambda^5}{7560000}+$$
$$\frac{341189\,\lambda^6}{12600}+8\,\lambda^7+\lambda^8+\frac{25159\,\sigma s}{100800}+\frac{5837\,\lambda\,\sigma s}{11200}-\frac{469247\,\lambda^2\,\sigma s}{151200}-\frac{680311\,\lambda^3\,\sigma s}{75600}-$$
$$\frac{243737\,\lambda^4\,\sigma s}{25200}-5\,\lambda^5\,\sigma s-\lambda^6\,\sigma s-\frac{3011\,\sigma u}{12600}-\frac{8087\,\lambda\,\sigma u}{6720}-\frac{87503\,\lambda^2\,\sigma u}{43200}-\frac{237859\,\lambda^3\,\sigma u}{151200}-$$
$$\frac{31\,\lambda^4\,\sigma u}{63}-\frac{4567\,\sigma w}{20160}-\frac{39763\,\lambda\,\sigma w}{43200}-\frac{142711\,\lambda^2\,\sigma w}{151200}-\frac{2173\,\lambda^3\,\sigma w}{10800}+\frac{271\,\lambda^4\,\sigma w}{1440}+\frac{\lambda^5\,\sigma w}{9}$$

```
polynom = Together[Det[matrixgamma]]
```

$$\frac{1}{30240000}\,(4631379+89690925\,\lambda+484639919\,\lambda^2+1233178919\,\lambda^3+1773758830\,\lambda^4+1547333884\,\lambda^5+$$
$$818853600\,\lambda^6+241920000\,\lambda^7+30240000\,\lambda^8+7547700\,\sigma s+15759900\,\lambda\,\sigma s-93849400\,\lambda^2\,\sigma s-$$
$$272124400\,\lambda^3\,\sigma s-292484400\,\lambda^4\,\sigma s-151200000\,\lambda^5\,\sigma s-30240000\,\lambda^6\,\sigma s-7226400\,\sigma u-$$
$$36391500\,\lambda\,\sigma u-61252100\,\lambda^2\,\sigma u-47571800\,\lambda^3\,\sigma u-14880000\,\lambda^4\,\sigma u-6850500\,\sigma w-$$
$$27834100\,\lambda\,\sigma w-28542200\,\lambda^2\,\sigma w-6084400\,\lambda^3\,\sigma w+5691000\,\lambda^4\,\sigma w+3360000\,\lambda^5\,\sigma w)$$

```
beta0 = Coefficient[polynom, λ, 8]
```

```
1
```

```
beta1 = Coefficient[polynom, λ, 7]
```

```
8
```

beta2 = Coefficient[polynom, λ, 6]

$$\frac{818853600 - 30240000\,\sigma s}{30240000}$$

beta3 = Coefficient[polynom, λ, 5]

$$\frac{1547333884 - 151200000\,\sigma s + 3360000\,\sigma w}{30240000}$$

beta4 = Coefficient[polynom, λ, 4]

$$\frac{1773758830 - 292484400\,\sigma s - 14880000\,\sigma u + 5691000\,\sigma w}{30240000}$$

beta5 = Coefficient[polynom, λ, 3]

$$\frac{1233178919 - 272124400\,\sigma s - 47571800\,\sigma u - 6084400\,\sigma w}{30240000}$$

beta6 = Coefficient[polynom, λ, 2]

$$\frac{484639919 - 93849400\,\sigma s - 61252100\,\sigma u - 28542200\,\sigma w}{30240000}$$

beta7 = Coefficient[polynom, λ, 1]

$$\frac{89690925 + 15759900\,\sigma s - 36391500\,\sigma u - 27834100\,\sigma w}{30240000}$$

beta8 = Coefficient[polynom, λ, 0]

$$\frac{4631379 + 7547700\,\sigma s - 7226400\,\sigma u - 6850500\,\sigma w}{30240000}$$

rh1 = Det[{{beta0, 0}, {beta2, beta1}}]

8

rh2 = Det[{{beta1, beta0}, {beta3, beta2}}]

$$\frac{178696247}{1080000} - 3\,\sigma s - \frac{\sigma w}{9}$$

rh3 = Det[{{beta1, beta0, 0}, {beta3, beta2, beta1}, {beta5, beta4, beta3}}]

$$\frac{41138803364323337}{8164800000000} - \frac{60729027\,\sigma s}{140000} + 15\,\sigma s^2 + \frac{357341\,\sigma u}{18900} - \frac{32491471\,\sigma w}{34020000} + \frac{2\,\sigma s\,\sigma w}{9} - \frac{\sigma w^2}{81}$$

rh4 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0},
{beta5, beta4, beta3, beta2}, {beta7, beta6, beta5, beta4}}]

$$\frac{372894680519011687813795 1}{24690355200000000000} - \frac{1029143655696557018267\,\sigma s}{29393280000000000} + \frac{652400509557373\,\sigma s^2}{190512000000} -$$
$$\frac{185984\,\sigma s^3}{1575} + \frac{4990660021360308509\,\sigma u}{2057529600000000} - \frac{209949050514211\,\sigma s\,\sigma u}{1143072000000} - \frac{19163\,\sigma s^2\,\sigma u}{7200} -$$
$$\frac{127692590281\,\sigma u^2}{22861440000} + \frac{64918026672994476929\,\sigma w}{82301184000000000} - \frac{5691434131933\,\sigma s\,\sigma w}{47628000000} + \frac{3098597\,\sigma s^2\,\sigma w}{1360800} -$$
$$\frac{713109091\,\sigma u\,\sigma w}{571536000} + \frac{89059\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w}{1360800} - \frac{54668944901\,\sigma w^2}{48988800000} + \frac{74947\,\sigma s\,\sigma w^2}{408240} + \frac{31\,\sigma u\,\sigma w^2}{5103} - \frac{271\,\sigma w^3}{116640}$$

```
rh5 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0},
   {beta3, beta2, beta1, beta0, 0}, {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1},
   {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3}, {0, beta8, beta7, beta6, beta5}}]
```

$$\frac{39137700369451546901770555991688 73}{12443939020800000000000000000} - \frac{19133217461898492894546752095 67\,\sigma s}{1244393902080000000000000} +$$
$$\frac{45773428855979632091029854 59\,\sigma s^2}{15554923776000000000000} - \frac{36924906792664879780 3\,\sigma s^3}{14402707200000000} + \frac{391524963971\,\sigma s^4}{476280000} +$$
$$\frac{34598337524887966767760789 4087\,\sigma u}{31109847552000000000000000} - \frac{64982916890555372620837382 9\,\sigma s\,\sigma u}{3110984755200000000000000} +$$
$$\frac{2548871874314364 01\,\sigma s^2\,\sigma u}{864162432000000} + \frac{289012679947\,\sigma s^3\,\sigma u}{3810240000} - \frac{17406990460639459262188 1\,\sigma u^2}{311098475520000000000} +$$
$$\frac{17227585715847673349\,\sigma s\,\sigma u^2}{172832486400000000} + \frac{4558092017\,\sigma s^2\,\sigma u^2}{1088640000} + \frac{30372831831648379\,\sigma u^3}{3456649728000000} +$$
$$\frac{31439494294988548764913664278 33\,\sigma w}{37331817062400000000000000} - \frac{24607105841455003891764335 9\,\sigma s\,\sigma w}{1036994918400000000000000} +$$
$$\frac{10462636500511462133\,\sigma s^2\,\sigma w}{4800902400000000} - \frac{5360458681931\,\sigma s^3\,\sigma w}{102876480000} + \frac{26706206053778669524144 9\,\sigma u\,\sigma w}{592568524800000000000} +$$
$$\frac{33636912767474017\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w}{823011840000000} - \frac{461465319967\,\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w}{205752960000} + \frac{2719099362107957\,\sigma u^2\,\sigma w}{576108288000000} -$$
$$\frac{21183484681\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w}{205752960000} + \frac{13244520177975299273849 41\,\sigma w^2}{62219695104000000000000} - \frac{179272935503355521\,\sigma s\,\sigma w^2}{18517766400000000} -$$
$$\frac{341548031071\,\sigma s^2\,\sigma w^2}{308629440000} + \frac{12051676806653639\,\sigma u\,\sigma w^2}{7407106560000000} - \frac{3789425707\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^2}{19289340000} -$$
$$\frac{7373629\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{771573600} - \frac{1509314690288059\,\sigma w^3}{3703553280000000} + \frac{440165539\,\sigma s\,\sigma w^3}{8817984000} - \frac{6098051\,\sigma u\,\sigma w^3}{17635968000} - \frac{7294699\,\sigma w^4}{8817984000}$$

```
rh6 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0}, {beta5, beta4,
    beta3, beta2, beta1, beta0}, {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2},
   {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4}, {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6}}]
```

$$\frac{38352427980435370473845662602193910459819}{12543490532966400000000000000000000} - \frac{1062240787660945204874096957932791034603\,\sigma s}{37630471598899200000000000000000} + \frac{8484848606340019893304890179013904621\,\sigma s^2}{940761789972480000000000000000} - \frac{649768399802961872258063398627498 7\,\sigma s^3}{47038089498624000000000000} + \frac{44980824671995306752275047 9\,\sigma s^4}{435537865728000000000} - \frac{428337266165202803\,\sigma s^5}{144027072000000} + \frac{59897282617778277342419814913816731706 9\,\sigma u}{37630471598899200000000000000000000} - \frac{7151096931346568239607762286809679 79\,\sigma s\,\sigma u}{18815235799449600000000000000000} - \frac{3868558736577884856818914527559 7\,\sigma s^2\,\sigma u}{15679363166208000000000000000} + \frac{4617425102232614906760334 7\,\sigma s^3\,\sigma u}{3733181706240000000000} - \frac{11544332547541553\,\sigma s^4\,\sigma u}{15362887680000} - \frac{2761193517074720306699907664987061\,\sigma u^2}{13439454142464000000000000000} + \frac{2357227856563032502918695641167\,\sigma s\,\sigma u^2}{34843029258240000000000000} + \frac{2232293230420934099881 61\,\sigma s^2\,\sigma u^2}{622196951040000000000} - \frac{7820556123603161\,\sigma s^3\,\sigma u^2}{76814438400000} + \frac{7925396444516396804774738010 1\,\sigma u^3}{940761789972480000000000000} - \frac{6709102093640599250201 81\,\sigma s\,\sigma u^3}{5807171543040000000000} - \frac{2273083566356857\,\sigma s^2\,\sigma u^3}{329204736000000} - \frac{1514668520134010419745 9\,\sigma u^4}{1045290877747200000000} + \frac{1222700470598611154407477553249874900 97\,\sigma w}{41811635109888000000000000000000} - \frac{6922903396592882056130575372983416159\,\sigma s\,\sigma w}{56445707398348800000000000000000} + \frac{1852569772272944473545806566127 59\,\sigma s^2\,\sigma w}{940761789972480000000000000} - \frac{3865459039350077144869256 9\,\sigma s^3\,\sigma w}{2903585771520000000000} + \frac{8782579942114831691\,\sigma s^4\,\sigma w}{31109847552000000} + \frac{6293749187149700062700857673303950 9\,\sigma u\,\sigma w}{11289141479669760000000000000000} + \frac{5885832155335407020817781387549\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w}{940761789972480000000000000} - \frac{6302259724060233168126210 1\,\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w}{52264543887360000000000} + \frac{122811471510326119\,\sigma s^3\,\sigma u\,\sigma w}{4147979673600000} + \frac{4966488970006052739234130771\,\sigma u^2\,\sigma w}{37630471598899200000000000000} - \frac{3979511796463221894669673\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w}{52264543887360000000000} - \frac{240602100373781\,\sigma s^2\,\sigma u^2\,\sigma w}{296284262400000} - \frac{3355066625957312254249\,\sigma u^3\,\sigma w}{209058175549440000000} + \frac{10564032215006801\,\sigma s\,\sigma u^3\,\sigma w}{62219695104000000} + \frac{3502127011379933671354209782171364 1\,\sigma w^2}{28222853699174400000000000000000} - \frac{4253046217814441021267657534745 7\,\sigma s\,\sigma w^2}{18815235799449600000000000000} + \frac{7393724824024156283769 73\,\sigma s^2\,\sigma w^2}{78396815831040000000000} + \frac{26033711270689667\,\sigma s^3\,\sigma w^2}{3809369088000000} - \frac{1128805178645945555091043774207\,\sigma u\,\sigma w^2}{75260943197798400000000000} - \frac{1872959408747816047635 01\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^2}{22399090237440000000000} + \frac{77777514109166887\,\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w^2}{62219695104000000} - \frac{6778025080030407556880 9\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{7839681583104000000000} + \frac{36603627570821\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{99551512166400} + \frac{3677169052709\,\sigma u^3\,\sigma w^2}{233323856640000} - \frac{1721927221960146054078072568 09\,\sigma w^3}{37630471598899200000000000000} + \frac{2788681084825059354403 3\,\sigma s\,\sigma w^3}{3733181706240000000000} - \frac{6038828782521079\,\sigma s^2\,\sigma w^3}{20739898368000000} - \frac{2474653378663339369 07\,\sigma u\,\sigma w^3}{1493272682496000000000} + \frac{3839849490082541\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^3}{62219695104000000} + \frac{118956371091359\,\sigma u^2\,\sigma w^3}{12443939020800000} - \frac{4424315292766713372 59\,\sigma w^4}{22399090237440000000000} + \frac{61728192346183\,\sigma s\,\sigma w^4}{5333116723200000} + \frac{3721627236361\,\sigma u\,\sigma w^4}{1066623344640000} + \frac{2329652374951\,\sigma w^5}{5333116723200000}$$

```
rh7 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0, 0},
   {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0, 0}, {beta7, beta6, beta5, beta4,
    beta3, beta2, beta1}, {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4, beta3},
   {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6, beta5}, {0, 0, 0, 0, 0, beta8, beta7}}]
```

$$\frac{5974095712337086728788090856592868285658816 43}{80636724854784000000000000000000000000} -$$
$$\frac{2213514161600124406024169245384742608980318709\sigma s}{27093939551207424000000000000000000000} +$$
$$\frac{4942522260614440182469741508573883003530 03\sigma s^2}{16724654043955200000000000000000000} -$$
$$\frac{2344467185761616851883484697006071910528 7\sigma s^3}{45156565918679040000000000000000000} +$$
$$\frac{3229720797255452010172561969867528289 9\sigma s^4}{67734848878018560000000000000000} - \frac{1336047415022613082116404624983\sigma s^5}{62717452664832000000000000} +$$
$$\frac{725611026800083095131\sigma s^6}{2073989836800000000} - \frac{1902868077203631988833082850363496429647453 03\sigma u}{27093939551207424000000000000000000000} +$$
$$\frac{5072536677407157570912158714840178946734919 9\sigma s\,\sigma u}{42146128190767104000000000000000000000} -$$
$$\frac{2923749152253909846516705910221097684380 71\sigma s^2\,\sigma u}{63219192286150656000000000000000000} +$$
$$\frac{3657356751926461717098573553958987617\sigma s^3\,\sigma u}{47414394214612992000000000000000} -$$
$$\frac{1566874347861741439916030392817 33\sigma s^4\,\sigma u}{26341330119229440000000000} + \frac{1984115473936713764328 77\sigma s^5\,\sigma u}{116143430860800000000} -$$
$$\frac{9072337934107712827637643431278082417311 39\sigma u^2}{14048709396922368000000000000000000000} +$$
$$\frac{1865314448143601049667002365206388941 21\sigma s\,\sigma u^2}{25287676914460262400000000000000000} +$$
$$\frac{3145519013446926629443880424403272979\sigma s^2\,\sigma u^2}{63219192286150656000000000000000000} -$$
$$\frac{5733237521359047086752068843197\sigma s^3\,\sigma u^2}{52682660238458880000000000} + \frac{1085957841089510926861\sigma s^4\,\sigma u^2}{1935723847680000000} +$$
$$\frac{6033952375683410488422100677212745487 09\sigma u^3}{31609596143075328000000000000000000000} -$$
$$\frac{4434259258891855183036379094995285209\sigma s\,\sigma u^3}{94828788429225984000000000000000000} -$$
$$\frac{8971616804642389153090836428 89\sigma s^2\,\sigma u^3}{17560886746152960000000000} + \frac{2018002813610209048029 7\sigma s^3\,\sigma u^3}{232286861721600000000} -$$
$$\frac{7329505651186939215719719944628601\sigma u^4}{94828788429225984000000000000000} + \frac{4562068246571616980224096977 79\sigma s\,\sigma u^4}{52682660238458880000000000000} +$$
$$\frac{2235047917366849922 57\sigma s^2\,\sigma u^4}{33138383738800000000} + \frac{1489323477382077501092457259\sigma u^5}{10536532047691776000000000} +$$
$$\frac{1202067704823743568644644918030145140354 1243\sigma w}{30104377279119360000000000000000000000} +$$
$$\frac{1806768389558114512006768130770106454376 43\sigma s\,\sigma w}{58058441895444480000000000000000000} -$$
$$\frac{5146544900344075595425309557966078385531 9\sigma s^2\,\sigma w}{27093939551207424000000000000000000000} +$$
$$\frac{3773084050662033388603463862281705878 9\sigma s^3\,\sigma w}{10160227331702784000000000000000000} -$$
$$\frac{2370259956737312869825364010673\sigma s^4\,\sigma w}{75260943197798400000000000} + \frac{4334356959045959703619 57\sigma s^5\,\sigma w}{447981804748800000000} -$$
$$\frac{2295462563138998366680312002782699822462074 71\sigma u\,\sigma w}{11379454611507118080000000000000000000} +$$
$$\frac{1325649897920612569659078858338958274294 7\sigma s\,\sigma u\,\sigma w}{18062626367471616000000000000000000} -$$
$$\frac{3751657896944239790787192877704729490 3\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w}{47414394214612992000000000000000000} +$$
$$\frac{3421222725548769586116649641089\sigma s^3\,\sigma u\,\sigma w}{15804798071537664000000000000} + \frac{2017782817992737513583 31\sigma s^4\,\sigma u\,\sigma w}{895963609497600000000} +$$
$$\frac{6567197180091424681717074600686294769131\sigma u^2\,\sigma w}{37931515371690393600000000000000000000} -$$

$$\frac{6277226385594805460071033975811664043\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w}{6321919228615065600000000000000000} +$$
$$\frac{7876075353498387509671130650 3\,\sigma s^2\,\sigma u^2\,\sigma w}{131706650596147200000000000} + \frac{8855628271389860028682 3\,\sigma s^3\,\sigma u^2\,\sigma w}{2090581755494400000000} -$$
$$\frac{9412007083270900628487128590847263 9\,\sigma u^3\,\sigma w}{1625636373072445440000000000000000} + \frac{1054978332941406733080231817\,\sigma s\,\sigma u^3\,\sigma w}{8780443373076480000000000} +$$
$$\frac{2061112456010508292406 3\,\sigma s^2\,\sigma u^3\,\sigma w}{3135872633241600000000} + \frac{2145026434018734903900919559\,\sigma u^4\,\sigma w}{790239903576883200000000000} -$$
$$\frac{1038726360553015119001\,\sigma s\,\sigma u^4\,\sigma w}{6271745266483200000000} - \frac{1419919419866909573654346986644768462774393\,\sigma w^2}{13546969775603712000000000000000000000} +$$
$$\frac{5305651213151338042574134214595878819125 3\,\sigma s\,\sigma w^2}{1219227279804334080000000000000000000} -$$
$$\frac{1113742156086982118773663634121655080 1\,\sigma s^2\,\sigma w^2}{1625636373072445440000000000000000} +$$
$$\frac{2472530666892419380431703145257\,\sigma s^3\,\sigma w^2}{5644570739834880000000000000} - \frac{8120014654824106004899\,\sigma s^4\,\sigma w^2}{99555151216640000000000} +$$
$$\frac{6929046517784910714848593587516360762953\,\sigma u\,\sigma w^2}{3413836383452135424000000000000000000} -$$
$$\frac{1437968611457418026381087573369717275 3\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^2}{2844863652876779520000000000000000} +$$
$$\frac{3954285887075755079327384361 71\,\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w^2}{4938999397355520000000000000} - \frac{7106583296934799133792 3\,\sigma s^3\,\sigma u\,\sigma w^2}{3763047159889920000000} +$$
$$\frac{5126140559749007768574968872906517\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{4064090932681113600000000000000000} +$$
$$\frac{3896070945551777387970802 93\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{8063672485478400000000000} + \frac{1970947107320306261597\,\sigma s^2\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{3135872633241600000000} +$$
$$\frac{1424195722732509010073914 61\,\sigma u^3\,\sigma w^2}{6504032128204800000000000} - \frac{1457857433985646195769\,\sigma s\,\sigma u^3\,\sigma w^2}{3135872633241600000000} -$$
$$\frac{361563875376362509\,\sigma u^4\,\sigma w^2}{23519044749312000000} - \frac{3771267811268106625458967576269784776 41\,\sigma w^3}{24384545596086681600000000000000000000} -$$
$$\frac{1030596397670460706186680980012559 97\,\sigma s\,\sigma w^3}{4064090932681113600000000000000000} +$$
$$\frac{2043924285555498030955821895 03\,\sigma s^2\,\sigma w^3}{1693371221950464000000000000} - \frac{1537561289257867411837\,\sigma s^3\,\sigma w^3}{251989765171200000000} +$$
$$\frac{1027831788570333000653121587757370 49\,\sigma u\,\sigma w^3}{5689727305753559040000000000000000} -$$
$$\frac{7457379318413596551345496 93\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^3}{1935281396514816000000000000} - \frac{6339729410983938604633\,\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w^3}{18815235799449600000000} +$$
$$\frac{8657986134193884003206547 73\,\sigma u^2\,\sigma w^3}{9676406982574080000000000} - \frac{6136113982084701845537\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w^3}{18815235799449600000000} -$$
$$\frac{2463370923934147405 91\,\sigma u^3\,\sigma w^3}{11289141479669760000000} + \frac{6525388134093516642776988331457347\,\sigma w^4}{1625636373072445440000000000000000} -$$
$$\frac{9802615699987293642984863 3\,\sigma s\,\sigma w^4}{2015918121369600000000000000} + \frac{1269106803794883053 83\,\sigma s^2\,\sigma w^4}{1343945414246400000000} +$$
$$\frac{1925549059061625511402388 03\,\sigma u\,\sigma w^4}{11289141479669760000000000} - \frac{8829194733063453953\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^4}{1279948013568000000000} -$$
$$\frac{1591822821249945127\,\sigma u^2\,\sigma w^4}{134394541424640000000} + \frac{1296418337527596722002609 7\,\sigma w^5}{96764069825740800000000000} -$$
$$\frac{593587968787090127\,\sigma s\,\sigma w^5}{115195321221120000000} - \frac{2706831873570532531\,\sigma u\,\sigma w^5}{806367248547840000000} - \frac{945463542656755 33\,\sigma w^6}{2303906424422400000000}$$

```
rh8 = Det[{{beta1, beta0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0, 0, 0},
   {beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0, 0, 0},
   {beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2, beta1, beta0},
   {0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4, beta3, beta2},
   {0, 0, 0, beta8, beta7, beta6, beta5, beta4},
   {0, 0, 0, 0, 0, beta8, beta7, beta6}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, beta8}}]
```

$$\frac{9222767142036008132295953147772073909322081192918 99}{8128181865362227200000000000000000000000000000} +$$
$$\frac{3265897478435203294345207008580046305874312602744 79\,\sigma s}{5462138213523416678400000000000000000000000000} -$$

$$\frac{5416103517135339679740618550898317798274081090198 9\sigma s^2}{3413836383452135424000000000000000000000000} +$$
$$\frac{3744354463710895673010552586873961537274801666 1\sigma s^3}{5689727305753559040000000000000000000000000} -$$
$$\frac{3339626181244295661586582291072637747769510 17\sigma s^4}{2731069106761708339200000000000000000000} +$$
$$\frac{7902895843941151181262137750306345328507 41\sigma s^5}{6827672766904270848000000000000000000} -$$
$$\frac{3327487048364753605482611662252809 7\sigma s^6}{6321919228615065600000000000000} + \frac{1825564782326329059040082 9\sigma s^7}{2090581755494400000000000} -$$
$$\frac{5128938430381907700028056241082384102863778603126503\sigma u}{2731069106761708339200000000000000000000000000} +$$
$$\frac{7499223661420403576733112471041076095592011395536363\sigma s\,\sigma u}{3823496749466391674880000000000000000000000000} -$$
$$\frac{6074728188748759743658376649716363598316285409267\sigma s^2\,\sigma u}{1274498916488797224960000000000000000000000000} +$$
$$\frac{7819559928093470245453802813363146463253328 57\sigma s^3\,\sigma u}{3823496749466391674880000000000000000000000} +$$
$$\frac{8300776239129995550200805544535573661070 79\sigma s^4\,\sigma u}{1194842734208247398400000000000000000000} -$$
$$\frac{2520955064205522215424051270390164579\sigma s^5\,\sigma u}{2655206076018327552000000000000000} + \frac{3210431271774396536260706 3\sigma s^6\,\sigma u}{9365806264614912000000 0} +$$
$$\frac{6038923155614983624230017545363842993018451929168 31\sigma u^2}{3823496749466391674880000000000000000000000000} -$$
$$\frac{7713290925396175855790202889517868656076718007 59\sigma s\,\sigma u^2}{2548997832977594449920000000000000000000000} +$$
$$\frac{7208610875794592897331362042726456970586703693\sigma s^2\,\sigma u^2}{6372494582443986124800000000000000000000000} -$$
$$\frac{3318385394068371923013395479734202168491457\sigma s^3\,\sigma u^2}{1911748374733195837440000000000000000000} +$$
$$\frac{3075888047024728156041932725591401889\sigma s^4\,\sigma u^2}{2655206076018327552000000000000000} - \frac{7850101385451239477453468 09\sigma s^5\,\sigma u^2}{2926814457692160000000000} +$$
$$\frac{5010177447926832391604576187591858068471938 4759\sigma u^3}{3186247291221993062400000000000000000000000} -$$
$$\frac{3244924253973205981538552878997363257131196 1\sigma s\,\sigma u^3}{2389685468416494796800000000000000000000} -$$
$$\frac{1255579631012815929754696619883632278421311\sigma s^2\,\sigma u^3}{9558741873665979187200000000000000000000} +$$
$$\frac{1320372860693356700342269623265923107\sigma s^3\,\sigma u^3}{5310412152036655104000000000000000} -$$
$$\frac{2631316969263504210353539937\sigma s^4\,\sigma u^3}{2341451566153728000000000} -$$
$$\frac{1118381934985372034969970692376449654256661 9\sigma u^4}{2389685468416494796800000000000000000000} +$$
$$\frac{2240996344619752595221156352844233430077 3\sigma s\,\sigma u^4}{2389685468416494796800000000000000000000} +$$
$$\frac{7685799283168800110477896574382015 7\sigma s^2\,\sigma u^4}{5310412152036655104000000000000000} -$$
$$\frac{8934688367106087028960741 9\sigma s^3\,\sigma u^4}{4682903132307456000000000} + \frac{6379372091749903230097722825304742471\sigma u^5}{3413836383452135424000000000000000000} -$$
$$\frac{4557807761984463294732274095570751\sigma s\,\sigma u^5}{2655206076018327552000000000000000} -$$
$$\frac{6729729279191585116858 27\sigma s^2\,\sigma u^5}{4181163510988800000000000} - \frac{4484352990397435355789388806849\sigma u^6}{1327603038009163776000000000000} -$$
$$\frac{1472214615374645758408953143397123894093932181141263\sigma w}{9103563689205694464000000000000000000000000000} +$$
$$\frac{1637073363639344012220072323881846711911392087539 83\sigma s\,\sigma w}{8193207320285125017600000000000000000000000000} -$$
$$\frac{7267260705523662918437155767215192455732044635 93\sigma s^2\,\sigma w}{1170458188612160716800000000000000000000000000} +$$
$$\frac{6217994638869171210024910837945477315910576863\sigma s^3\,\sigma w}{8193207320285125017600000000000000000000000000} -$$
$$\frac{4127779492412923331668729521523218634540 93\sigma s^4\,\sigma w}{2048301830071281254400000000000000000000} -$$

$$\frac{2189885219638116901863597918346416 1\,\sigma s^5\,\sigma w}{75863030743380787200000000000000}+\frac{732583386911607216323613700 3\,\sigma s^6\,\sigma w}{45156565918679040000000000}+$$
$$\frac{3760974033006570948997334620346441239560278831730 77\,\sigma u\,\sigma w}{11470490248399175024640000000000000000000000000}-$$
$$\frac{4429051387528368422822072599346492381896756723281 1\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w}{11470490248399175024640000000000000000000000000}+$$
$$\frac{6395466619155815796115404962547886019530142311 9\,\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w}{38234967494663916748800000000000000000000000}-$$
$$\frac{4060565457195178949645036714894165657766497 9\,\sigma s^3\,\sigma u\,\sigma w}{14338112810498968780800000000000000000000}+$$
$$\frac{4799811693763551457385375663760622103\,\sigma s^4\,\sigma u\,\sigma w}{22758909223014236160000000000000000}-$$
$$\frac{3552919030344454476697500355 51\,\sigma s^5\,\sigma u\,\sigma w}{63219192286150656000000000}+$$
$$\frac{3618888389336642924802638478175611410361292003681\,\sigma u^2\,\sigma w}{57352451241995875123200000000000000000000000}-$$
$$\frac{7237610642050906436372643979121826830953253071\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w}{38234967494663916748800000000000000000000000}+$$
$$\frac{2867664011410772880180336821909396010949 7\,\sigma s^2\,\sigma u^2\,\sigma w}{54621382135234166784000000000000000000}+$$
$$\frac{2046632218509995864925325141695669329\,\sigma s^3\,\sigma u^2\,\sigma w}{79656182280549826560000000000000000}-$$
$$\frac{6153377683977903996192550 27\,\sigma s^4\,\sigma u^2\,\sigma w}{36125252734943232000000000}-$$
$$\frac{4903850797366649896282988540055001348813920 07\,\sigma u^3\,\sigma w}{57352451241995875123200000000000000000000000}+$$
$$\frac{1896065253186579790856236418070625077214111\,\sigma s\,\sigma u^3\,\sigma w}{57352451241995875123200000000000000000000}+$$
$$\frac{5806811446289835154720875807981 1\,\sigma s^2\,\sigma u^3\,\sigma w}{15172606148676157440000000000000000}-$$
$$\frac{1780421609559486426372868910 3\,\sigma s^3\,\sigma u^3\,\sigma w}{63219192286150656000000000}+$$
$$\frac{2846196398999731004358494742927650334 83\,\sigma u^4\,\sigma w}{89613205065618554880000000000000000000}-$$
$$\frac{1324833744825107589901531437511411 9\,\sigma s\,\sigma u^4\,\sigma w}{31862472912219930624000000000000000}-$$
$$\frac{9918500930309184610931248 51\,\sigma s^2\,\sigma u^4\,\sigma w}{31609596143075328000000000}-$$
$$\frac{3087036917886323646730001858765 63\,\sigma u^5\,\sigma w}{31862472912219930624000000000000}+\frac{3127605071625128523312011\,\sigma s\,\sigma u^5\,\sigma w}{79023990357688320000000000}-$$
$$\frac{7272104439398589453470387657000775482722880634187\,\sigma w^2}{68276727669042708480000000000000000000000000}-$$
$$\frac{2765035454533973020199241235765671027239327247 01\,\sigma s\,\sigma w^2}{30724527451069218816000000000000000000000000}+$$
$$\frac{3247177806929954669571896304186901114768107461\,\sigma s^2\,\sigma w^2}{61449054902138437632000000000000000000000}-$$
$$\frac{5492490667522009551999373885286603769634 61\,\sigma s^3\,\sigma w^2}{54621382135234166784000000000000000000}+$$
$$\frac{9348645502678335627408394204665572 51\,\sigma s^4\,\sigma w^2}{11379454611507118080000000000000000}-$$
$$\frac{2163363127026937511322586165 9\,\sigma s^5\,\sigma w^2}{90313131837358080000000000}+$$
$$\frac{1522182755419036044986095937744158239199861131547\,\sigma u\,\sigma w^2}{21507169215748453171200000000000000000000000}-$$
$$\frac{4654468388203054861484420982623187737846620060 9\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^2}{17205735372598762536960000000000000000000000}+$$
$$\frac{3169466378640400561555737990662157186117881\,\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w^2}{95587418736659791872000000000000000000}-$$
$$\frac{2864019184634949582005508682836569 03\,\sigma s^3\,\sigma u\,\sigma w^2}{31862472912219930624000000000000000}-$$
$$\frac{3436601813148634477933796785 1\,\sigma s^4\,\sigma u\,\sigma w^2}{94828788429225984000000000}-$$
$$\frac{1509916893059840528804297317082320752232825289\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{34411470745197525073920000000000000000000000}+$$

$$\frac{6683731767159980739905181653999704924860 31\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{191174837473319583744000000000000000000} -$$
$$\frac{3263394409313208496470462834098 81\,\sigma s^2\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{10371898734446592000000000000000} -$$
$$\frac{9342953169480169249793869187\,\sigma s^3\,\sigma u^2\,\sigma w^2}{189657576858451968000000000} +$$
$$\frac{3990634534006862969277632376218246673289\,\sigma u^3\,\sigma w^2}{38234967494663916748800000000000000000} -$$
$$\frac{5316350766981575478833213118684787\,\sigma s\,\sigma u^3\,\sigma w^2}{15931236456109965312000000000000} -$$
$$\frac{1981462280117057065855997 9\,\sigma s^2\,\sigma u^3\,\sigma w^2}{11289141479669760000000000} - \frac{4534112787148779659740016705533 31\,\sigma u^4\,\sigma w^2}{3982809114027491328000000000000000} +$$
$$\frac{2745819001162866506181207 37\,\sigma s\,\sigma u^4\,\sigma w^2}{189657576858451968000000000} + \frac{1088668828758227514599\,\sigma u^5\,\sigma w^2}{296339963841331200000000} +$$
$$\frac{8329246763758281994942607490392170789560370321 1\,\sigma w^3}{351137456583648215040000000000000000000000} -$$
$$\frac{5407852573856255194732424322678179836021675 9\,\sigma s\,\sigma w^3}{54621382135234166784000000000000000000} +$$
$$\frac{1267943941840707487834857935855553631866329\,\sigma s^2\,\sigma w^3}{819320732028512501760000000000000000000} -$$
$$\frac{2054973940956510309565371441054000 1\,\sigma s^3\,\sigma w^3}{213364773965758464000000000000} + \frac{1968741594689935335930047887\,\sigma s^4\,\sigma w^3}{116116883790888960000000000} -$$
$$\frac{2391666828714184695269563554544734053887847\,\sigma u\,\sigma w^3}{38234967494663916748800000000000000000000} +$$
$$\frac{1792490053373637544159004990096201736904 31\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^3}{14338112810498968780800000000000000000000} -$$
$$\frac{3365138010670979561105727088711017 89\,\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w^3}{15931236456109965312000000000000000} +$$
$$\frac{1607977929012861614370901678 9\,\sigma s^3\,\sigma u\,\sigma w^3}{284486365287677952000000000} -$$
$$\frac{2018012097066276411179616536721883951421\,\sigma u^2\,\sigma w^3}{28676225620997937561600000000000000000} -$$
$$\frac{5948679199109406049636869559144 3\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w^3}{75863030743380787200000000000} -$$
$$\frac{2717065527974430615248706 49\,\sigma s^2\,\sigma u^2\,\sigma w^3}{189657576858451968000000000} - \frac{3394327755668259723197540268114391\,\sigma u^3\,\sigma w^3}{47793709368329895936000000000000} +$$
$$\frac{1011655307354859442720172993\,\sigma s\,\sigma u^3\,\sigma w^3}{56897273057535590400000000} + \frac{1237099650849726057500401\,\sigma u^4\,\sigma w^3}{142243182643838976000000000} +$$
$$\frac{4381398887443085482156545843809918259194 9\,\sigma w^4}{12289810980427687526400000000000000000} +$$
$$\frac{3644385231858658306456190435736572565 37\,\sigma s\,\sigma w^4}{54621382135234166784000000000000000000} -$$
$$\frac{4871996632986665071622413549683953\,\sigma s^2\,\sigma w^4}{17069181917260677120000000000000} + \frac{8162031858089386805916557 3\,\sigma s^3\,\sigma w^4}{58058441895444480000000000} -$$
$$\frac{3202460178056100612204109296332791847 99\,\sigma u\,\sigma w^4}{63724945824439861248000000000000000} +$$
$$\frac{1672849865070860201113532696574289\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^4}{68276727669042708480000000000000} + \frac{7701747013508728049928 47\,\sigma s^2\,\sigma u\,\sigma w^4}{21073064095383552000000000} -$$
$$\frac{1663470100272337702339388101445 69\,\sigma u^2\,\sigma w^4}{68276727669042708480000000000000} + \frac{1657749624118431093063303 83\,\sigma s\,\sigma u^2\,\sigma w^4}{189657576858451968000000000} +$$
$$\frac{8845989066738194571806269\,\sigma u^3\,\sigma w^4}{113794546115071180800000000} - \frac{2973420051617232000572048639525620918 9\,\sigma w^5}{32772829281140500070400000000000000000} +$$
$$\frac{1106291933959141995837265916788 7\,\sigma s\,\sigma w^5}{97538182384346726400000000000000} -$$
$$\frac{9216708949131850377944 17\,\sigma s^2\,\sigma w^5}{40640909326811136000000000} - \frac{1430150911111853111738406573399 1\,\sigma u\,\sigma w^5}{34138363834521354240000000000000} +$$
$$\frac{2604319229467435956624719\,\sigma s\,\sigma u\,\sigma w^5}{16256363730724454400000000} + \frac{1416489054550109847284 99\,\sigma u^2\,\sigma w^5}{40640909326811136000000000} -$$
$$\frac{5933003187479367311747718 6959\,\sigma w^6}{19507636476869345280000000000000} + \frac{2473047080753627536534 3\,\sigma s\,\sigma w^6}{23223376758177792000000000} +$$
$$\frac{6978151986841368318154 9\,\sigma u\,\sigma w^6}{81281818653622272000000000} + \frac{4317931999313401592 11\,\sigma w^7}{46446753516355584000000000}$$

```
<< Algebra`

{rh1 > 0, rh2 > 0, rh3 > 0, rh4 > 0, rh5 > 0, rh6 > 0, rh7 > 0, rh8 > 0} /. σw → 1 / 2 /. σu → 2 / 6
```

$$\left\{\text{True},\ \frac{178636247}{1080000}-3\,\sigma s>0,\right.$$
$$\frac{41186336291803337}{8164800000000}-\frac{546421243\,\sigma s}{1260000}+15\,\sigma s^2>0,\ \frac{375861980882170083771330 1}{24690355200000000000}-$$
$$\frac{72288843430229270678 69\,\sigma s}{205752960000000000}+\frac{217482797895791\,\sigma s^2}{63504000000}-\frac{185984\,\sigma s^3}{1575}>0,$$
$$\frac{36111451292154154117458433093399207}{11199545118720000000000000000}-\frac{581019351465981818582690518648 1\,\sigma s}{3733181706240000000000000}+$$
$$\frac{45958187983120435065644454 59\,\sigma s^2}{15554923776000000000000}-\frac{123086714685883582601\,\sigma s^3}{4800902400000000}+\frac{391524963971\,\sigma s^4}{476280000}>$$
$$0,\ \frac{33091912309090823981564830181203313125329769}{10160227331702784000000000000000000000}-$$
$$\frac{46715939166111050269558332788725354549 7\,\sigma s}{16127344970956800000000000000000}+$$
$$\frac{85695904110666412307243084439291647 21\,\sigma s^2}{94076178997248000000000000000}-$$
$$\frac{92994614198686537817377595163214 1\,\sigma s^3}{67197270712320000000000000}+$$
$$\frac{14977736263005280966087349 3\,\sigma s^4}{1451792885760000000000}-\frac{428337266165202803\,\sigma s^5}{144027072000000}>0,$$
$$\frac{14032201167714189180370687335247837570332259172777}{19202829656918261760000000000000000000000000}-$$
$$\frac{12144472857609223969190998836426777484996359433\,\sigma s}{160023580474318848000000000000000000000}+$$
$$\frac{21365139630399255348708224437911957455918923\,\sigma s^2}{79023990357688320000000000000000000}-$$
$$\frac{13510652868449206428770400062466078399884 81\,\sigma s^3}{28448636528767795200000000000000000}+$$
$$\frac{20925057462859694554386847943110305029 3\,\sigma s^4}{47414394214612992000000000000000}-$$
$$\frac{42333094592614350547771659166 1\,\sigma s^5}{20905817554944000000000000}+\frac{725611026800083095131\,\sigma s^6}{2073989836800000000}>0,$$
$$-\frac{16876121410575991615745594908169852058549068471582887367}{58069356882520823562240000000000000000000000000000}+$$
$$\frac{91435415654012501686655550082531494690013811886899527\,\sigma s}{43014338431496906342400000000000000000000000000}-$$
$$\frac{12915483018783280010031182851836588108008557889163871\,\sigma s^2}{64521507647245359513600000000000000000000000000}+$$
$$\frac{59677646219406273008849796193762723361940918278507\,\sigma s^3}{86028676862993812684800000000000000000000000}-$$
$$\frac{22996513831606438058887886142140116612978705 79\,\sigma s^4}{19117483747331958374400000000000000000000}+$$
$$\frac{53030252726972068876904422253674418480651 87\,\sigma s^5}{47793709368329895936000000000000000000}-$$
$$\frac{10679905025553390594246976038272699\,\sigma s^6}{21073064095383552000000000000000}+\frac{18255647823263290590400829\,\sigma s^7}{209058175549440000000000}>0\Big\}$$

$$\text{InequalitySolve}\Big[\Big\{\frac{178636247}{1080000}-3\,\sigma s>0,\ \frac{41186336291803337}{8164800000000}-\frac{546421243\,\sigma s}{1260000}+15\,\sigma s^2>0,\ \frac{37586198088217008377133 01}{24690355200000000000}-\frac{722888434302292706786 9\,\sigma s}{205752960000000000}+\frac{217482797895791\,\sigma s^2}{63504000000}-\frac{185984\,\sigma s^3}{1575}>0,\ \frac{3611145129215415411745843309339920 7}{11199545118720000000000000000}-\frac{581019351465981818582690518648 1\,\sigma s}{37331817062400000000000000}+\frac{459581879831204350656444545 9\,\sigma s^2}{15554923776000000000000}-\frac{123086714685883582601\,\sigma s^3}{4800902400000000}+\frac{391524963971\,\sigma s^4}{476280000}>0,\ \frac{33091912309090823981564830181203313125329769}{10160227331702784000000000000000000000}-\frac{467159391661110502695583327887253545497\,\sigma s}{16127344970956800000000000000000}+\frac{856959041106664123072430844392916472 1\,\sigma s^2}{94076178997248000000000000000}-\frac{929946141986865378173775951632141\,\sigma s^3}{67197270712320000000000000}+\frac{149777362630052809660873493\,\sigma s^4}{145179288576000000000}-\frac{428337266165202803\,\sigma s^5}{144027072000000}>0,\ \frac{14032201167714189180370687335247837570332259172777}{19202829656918261760000000000000000000000}-\frac{121444728576092239691909988364267774849963594 33\,\sigma s}{16002358047431884800000000000000000000}+\frac{213651396303992553487082244379119574559189 23\,\sigma s^2}{79023990357688320000000000000000000}-\frac{135106528684492064287704000624660783998848 1\,\sigma s^3}{28448636528767795200000000000000000}+\frac{209250574628596945543868479431103050293\,\sigma s^4}{47414394214612992000000000000000}-\frac{423330945926143505477716591661\,\sigma s^5}{209058175549440000000000}+\frac{7256110268000830951 31\,\sigma s^6}{2073989836800000000}>0,\ -\frac{168761214105759916157455949081698520585490684715828873 67}{58069356882520823562240000000000000000000000000000}+\frac{914354156540125016866555008253149469001381188689952 7\,\sigma s}{43014338431496906342400000000000000000000000}-\frac{129154830187832800100311828518365881080085578891638 71\,\sigma s^2}{64521507647245359513600000000000000000000000}+\frac{596776462194062730088497961937627233619409182785 07\,\sigma s^3}{86028676862993812684800000000000000000000}-\frac{229965138316064380588878861421401166129787057 9\,\sigma s^4}{19117483747331958374400000000000000000}+\frac{530302527269720688769044222536744184806518 7\,\sigma s^5}{47793709368329895936000000000000000000}-\frac{106799050255533905942469760382726 99\,\sigma s^6}{21073064095383552000000000000000}+\frac{182556478232632905904008 29\,\sigma s^7}{209058175549440000000000}>0\Big\},\{\sigma s\}\Big]$$

$$\frac{1202671}{7547700} < \sigma s < \text{Root}[1403220116771418918037068733524783757033225917277 7-$$
$$1457336742913106876302919860371213298199563131960 0\#1 +$$
$$5191728930187019049736098538412605661788298289000\#1^2 -$$
$$9119690686203214339420020042164602919922246750 00\#1^3 +$$
$$8474648272458176294526673416959673536866500 0000\#1^4 -$$
$$3888464070709998555215017981042949400000000000\#1^5 +$$
$$6718347745774039128112417699200000000000000000\#1^6 \&, 1]$$

$$N\left[\frac{1202671}{7547700} < \sigma s < \text{Root}[1403220116771418918037068733524783757033225917277 7-\right.$$
$$1457336742913106876302919860371213298199563131960 0\#1 +$$
$$5191728930187019049736098538412605661788298289000\#1^2 -$$
$$9119690686203214339420020042164602919922246750 00\#1^3 +$$
$$8474648272458176294526673416959673536866500 0000\#1^4 -$$
$$3888464070709998555215017981042949400000000000\#1^5 +$$
$$\left.6718347745774039128112417699200000000000000000\#1^6 \&, 1]\right]$$

$$0.159343 < \sigma s < 1.84183$$

$$\{rh2 > 0,\ rh3 > 0,\ rh4 > 0,\ rh5 > 0,\ rh6 > 0,\ rh7 > 0,\ rh8 > 0\} /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma s \to 1/6$$

$$\left\{\text{True},\ \frac{5792592320766191}{1166400000000} + \frac{357341\,\sigma u}{18900} > 0,\right.$$
$$\frac{73401790725588522006529}{503884800000000000} + \frac{100535794697596841\,\sigma u}{41990400000000} - \frac{127692590281\,\sigma u^2}{22861440000} > 0,$$
$$\frac{67131728318529060712097091372 7843}{22856214528000000000000000} + \frac{503838370113757934855040700843\,\sigma u}{46664771328000000000000000} -$$
$$\frac{16813470231031320222718 1\,\sigma u^2}{311098475520000000000} + \frac{30372831831648379\,\sigma u^3}{3456649728000000} > 0,$$
$$\frac{56981729133116473034912289288446027063988 1}{20735157819801600000000000000000000} +$$
$$\frac{17283714693887023164535842727893724637 57\,\sigma u}{11289141479669760000000000000000} -$$
$$\frac{30443411359780224591237670612563 17\,\sigma u^2}{15679363166208000000000000000} +$$
$$\frac{76671274878390474186246866401\,\sigma u^3}{940761789972480000000000} - \frac{151466852013401041974 59\,\sigma u^4}{1045290877747200000000} > 0,$$
$$\frac{35412255268838298674127730396300125520428988439}{55984926113464320000000000000000000000000} -$$
$$\frac{44553824275932485645874382223274300252946495 81\,\sigma u}{73153636788260044800000000000000000000000} -$$
$$\frac{71039537690553639632391371734651954408740109\,\sigma u^2}{11379454611507118080000000000000000000000} +$$
$$\frac{25634958946325264739251027948053638094 03\,\sigma u^3}{14224318264383897600000000000000000000} -$$
$$\frac{70623351618719284238563071217549 01\,\sigma u^4}{948287884292259840000000000000} + \frac{14893234773820775010924572 59\,\sigma u^5}{10536532047691776000000000} > 0,$$
$$\frac{87258594550583806158645983787184816992253141403782681}{16929841656711610368000000000000000000000000000000} -$$
$$\frac{11511949766792870140234548264785890049181555215473488 1\,\sigma u}{73738865882566125158400000000000000000000000000} +$$
$$\frac{14499834169242258833954279769301590463399050917864087\,\sigma u^2}{10323441223559257522176000000000000000000000000} +$$
$$\frac{32400840017966062400036707712431615511212966971 7\,\sigma u^3}{21507169215748453171200000000000000000000000} -$$
$$\frac{12884690678616215777745729915861098390 1149\,\sigma u^4}{29502289733536972800000000000000000000} +$$
$$\frac{42804618147654564379473761561480473397\,\sigma u^5}{23896854684164947968000000000000000} -$$
$$\frac{44843529903974353557893888068 49\,\sigma u^6}{13276030380091637760000000000000} > 0\}$$

$$\text{InequalitySolve}\Big[\Big\{\frac{5792592320766191}{1166400000000}+\frac{357341\,\sigma u}{18900}>0,\ \frac{7340179072558852200 6529}{503884800000000000}+\frac{100535794697596841\,\sigma u}{41990400000000}-\frac{127692590281\,\sigma u^2}{22861440000}>0,\ \frac{671317283185290607120970913727843}{228562145280000000000000000}+\frac{503838370113757934855040700843\,\sigma u}{466647713280000000000000000}-\frac{16813470231031320222718 1\,\sigma u^2}{311098475520000000000}+\frac{30372831831648379\,\sigma u^3}{3456649728000000}>0,\ \frac{569817291331164730349122892884460270639881}{207351578198016000000000000000000000}+\frac{172837146938870231645358427278937246375 7\,\sigma u}{112891414796697600000000000000000000}-\frac{304434113597802245912376706125631 7\,\sigma u^2}{156793631662080000000000000000000}+\frac{766712748783904741862468664 01\,\sigma u^3}{940761789972480000000000000}-\frac{15146685201340104197459\,\sigma u^4}{1045290877747200000000}>0,\ \frac{354122552688382986741277303963001255204289884 39}{559849261134643200000000000000000000000000}-\frac{445538242759324856458743822232743002529464958 1\,\sigma u}{731536367882600448000000000000000000000000}-\frac{710395376905536396323913717346519544087401 09\,\sigma u^2}{113794546115071180800000000000000000000000}+\frac{256349589463252647392510279480536380940 3\,\sigma u^3}{142243182643838976000000000000000000000}-\frac{706233516187192842385630712175490 1\,\sigma u^4}{948287884292259840000000000000}+\frac{14893234773820775010924572 59\,\sigma u^5}{1053653204769177600000000000}>0,\ \frac{872585945505838061586459837871848169922531414037826 81}{169298416567116103680000000000000000000000000000}-\frac{115119497667928701402345482647858900491815552154734881\,\sigma u}{737388658825661251584000000000000000000000000000}+\frac{144998341692422588339542797693015904633990509178640 87\,\sigma u^2}{103234412235592575221760000000000000000000000000}+\frac{324008400179660624000367077124316155112129669717\,\sigma u^3}{215071692157484531712000000000000000000000000}-\frac{128846906786162157777457299158610983901149\,\sigma u^4}{295022897335369728000000000000000000000}+\frac{428046181476545643794737615614804733 97\,\sigma u^5}{23896854684164947968000000000000000000}-\frac{448435299039743535578938880 6849\,\sigma u^6}{132760303800916377600000000000}>0\Big\},\{\sigma u\}\Big]$$

$$\text{Root}\big[2429280711442307289045162305186188610701428606915 4-2339075774486455496408405066721900763279691030025\#1-2397584397056185337593208796044503461294978678 75\#1^2+6921438915507821479597777545974482285388100000\#1^3-2860245740558131011661804384310734905000000 00\#1^4+5428584075057672491482006709055000000000000\#1^5\ \&,\ 1\big]<\sigma u<\frac{2464079}{7226400}$$

```
N[Root[2429280711442307289045162305186188610701428606915 4-
    2339075774486455496408405066721900763279691030025#1 -
    2397584397056185337593208796044503461294978678 75#1^2 +
    6921438915507821479597777545974482285388100000#1^3 -
    2860245740558131011661804384310734905000000000#1^4 +
    5428584075057672491482006709055000000000000#1^5 &, 1] < σu < 2464079/7226400]
```

$$-11.8405 < \sigma u < 0.340983$$

```
{rh1 > 0, rh2 > 0, rh3 > 0, rh4 > 0, rh5 > 0, rh6 > 0, rh7 > 0, rh8 > 0} /. σs → 1 / 6 /. σu → 2 / 6
```

$$\left\{\text{True},\ \frac{178156247}{1080000}-\frac{\sigma w}{9}>0,\ \frac{40603376325883337}{8164800000000}-\frac{31231471\,\sigma w}{34020000}-\frac{\sigma w^2}{81}>0,\right.$$
$$\frac{1202298868967545299738857}{8230118400000000000}+\frac{63250169287829772929\,\sigma w}{82301184000000000}-\frac{53070804901\,\sigma w^2}{48988800000}-\frac{271\,\sigma w^3}{116640}>0,$$
$$\frac{3284571592541533139482154975967375 7}{11199545118720000000000000000}+\frac{42918135967603976351068840591 9\,\sigma w}{53331167232000000000000000}+$$
$$\frac{5421898859002270934687\,\sigma w^2}{25604812800000000000}-\frac{1478929966128059\,\sigma w^3}{3703553280000000}-\frac{7294699\,\sigma w^4}{8817984000}>0,$$
$$\frac{2704876055446518273028799140255391221912 2719}{10160227331702784000000000000000000000}+$$
$$\frac{1026369792546549637754301404101112425873\,\sigma w}{37630471598899200000000000000000}+$$
$$\frac{1690688391467052232802050441313423 3\,\sigma w^2}{14111426849587200000000000000000}-\frac{1695999836802942700004285128 09\,\sigma w^3}{37630471598899200000000000000}-$$
$$\frac{1451684722489952757 53\,\sigma w^4}{746636341248000000000}+\frac{2329652374951\,\sigma w^5}{5333116723200000}>0,$$
$$\frac{1142257702553585940580784983468140343923442906752 7}{19202829656918261760000000000000000000000}+$$
$$\frac{2941840278603519721560958466942558265298064706 7\,\sigma w}{76811318627673047040000000000000000000000}-$$
$$\frac{2316387352090404317627624477806711550719969\,\sigma w^2}{23707197107306496000000000000000000000}-$$
$$\frac{2602256726626262116320854869702397492387\,\sigma w^3}{17069181917260677120000000000000000000}+$$
$$\frac{6485656824839179571532680794145347\,\sigma w^4}{16256363730724454400000000000000000}+$$
$$\frac{4257602594900984433668699\,\sigma w^5}{32254689941913600000000000}-\frac{94546354265675533\,\sigma w^6}{230390642442240000000}>0,$$
$$\frac{3975661059211129920183698977725383043095516816797068 1783}{58069356882520823562240000000000000000000000000000}-$$
$$\frac{3027622952506859895449818599579507016653422174528290097\,\sigma w}{23227742753008329424896000000000000000000000000000}-$$
$$\frac{5420296884602138908500778388888480229339314028555 97\,\sigma w^2}{55304149411924593868800000000000000000000000000}+$$
$$\frac{1141619908995415886263633376067592136846736606411 7\,\sigma w^3}{51617206117796287610880000000000000000000000000}+$$
$$\frac{4014173695714147959693944559864403573623 79\,\sigma w^4}{11470490248399175024640000000000000000000}-$$
$$\frac{2957020385578571859159798004310224918 9\,\sigma w^5}{32772829281140500070400000000000000000}-$$
$$\left.\frac{5842555312454085579690999295 9\,\sigma w^6}{19507636476869345280000000000000}+\frac{4317931999313401592 11\,\sigma w^7}{46446753516355584000000000}>0\right\}$$

$$\text{InequalitySolve}\Big[\Big\{\frac{178156247}{1080000}-\frac{\sigma w}{9}>0,\ \frac{40603376325883337}{8164800000000}-\frac{31231471\,\sigma w}{34020000}-\frac{\sigma w^2}{81}>0,$$
$$\frac{1202298868967545299738857}{8230118400000000000}+\frac{63250169287829772929\,\sigma w}{82301184000000000}-\frac{53070804901\,\sigma w^2}{48988800000}-\frac{271\,\sigma w^3}{116640}>0,$$
$$\frac{32845715925415331394821549759673757}{11199545118720000000000000000}+\frac{42918135967603976351068840591 9\,\sigma w}{53331167232000000000000000}+$$
$$\frac{5421898859002270934687\,\sigma w^2}{25604812800000000000}-\frac{1478929966128059\,\sigma w^3}{3703553280000000}-\frac{7294699\,\sigma w^4}{8817984000}>0,$$
$$\frac{270487605544651827302879914025539122191227 19}{10160227331702784000000000000000000000}+$$
$$\frac{10263697925465496377543014041011124258 73\,\sigma w}{37630471598899200000000000000000}+$$
$$\frac{16906883914670522328020504413134233\,\sigma w^2}{14111426849587200000000000000000}-\frac{16959998368029427000042851280 9\,\sigma w^3}{37630471598899200000000000000000}-$$
$$\frac{145168472248995275753\,\sigma w^4}{746636341248000000000}+\frac{2329652374951\,\sigma w^5}{5331116723200000}>0,$$
$$\frac{114225770255358594058078498346814034392344290675 27}{19202829656918261760000000000000000000000000}+$$
$$\frac{29418402786035197215609584669425582652980647067\,\sigma w}{76811318627673047040000000000000000000000}-$$
$$\frac{23163873520904043176276244778067115507199 69\,\sigma w^2}{23707197107306496000000000000000000000}-$$
$$\frac{26022567266262621163208548697023974923 87\,\sigma w^3}{17069181917260677120000000000000000000}+$$
$$\frac{64856568248391795715326807941453 47\,\sigma w^4}{16256363730724454400000000000000000}+$$
$$\frac{42576025949009844336686 99\,\sigma w^5}{32254689941913600000000000}-\frac{94546354265675533\,\sigma w^6}{230390642442240000000}>0,$$
$$\frac{39756610592111299201836989777253830430955168167970681783}{58069356882520823562240000000000000000000000000000}-$$
$$\frac{30276229525068598954498185995795070166534221745282900 97\,\sigma w}{23227742753008329424896000000000000000000000000000}-$$
$$\frac{54202968846021389085007783888884802293393140285559 7\,\sigma w^2}{55304149411924593868800000000000000000000000000}+$$
$$\frac{11416199089954158862636337606759213684673660641 17\,\sigma w^3}{51617206117796287610880000000000000000000000000}+$$
$$\frac{40141736957141479596939445598644035736237 9\,\sigma w^4}{11470490248399175024640000000000000000000}-$$
$$\frac{29570203855785718591597980043102249189\,\sigma w^5}{32772829281140500070400000000000000000}-$$
$$\frac{58425553124540855796909992959\,\sigma w^6}{19507636476869345280000000000000}+\frac{43179319999313401592 11\,\sigma w^7}{46446753516355558400000000}>0\Big\},\ \{\sigma w\}\Big]$$

$$\text{Root}[-1142257702553585940580784983468140343923442906752 7-$$
$$7354600696508799303902396167356395663245161766 75\#1+$$
$$1876273755193227497278375827023436356083174890 00\#1^2+$$
$$2927538817454544880860961728415197178935375 00\#1^3-$$
$$7661182124341280868872979188084191143750000\#1^4-$$
$$2534763704874301082584659949650000000000\#1^5+$$
$$7880344081689790000017000000000000000\#1^6\ \&,\ 1]<\sigma w<\frac{3480529}{6850500}$$

$$N\left[\text{Root}\left[-1142257702553585940580784983468140343923442906752 7-\right.\right.$$
$$73546006965087993039023961673563956632451617667 5\#1+$$
$$18762737551932274972783758270234363560831748900 0\#1^2+$$
$$29275388174545448808609617284151971789353750 0\#1^3-$$
$$76611821243412808688729791880841911437500 00\#1^4-$$
$$25347637048743010825846599496500000000000\#1^5+$$
$$\left.\left.78803440816897900000170000000000000000\#1^6\ \&,\ 1\right]<\sigma w<\frac{3480529}{6850500}\right]$$

$$-6.11054 < \sigma w < 0.508069$$

Pages 143 -
144 Cramer's Rule equations 99 and solution of related system of inequalities

$$\text{economybeta} = \left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \sigma w\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \sigma u\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \sigma s\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \sigma s\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \sigma w\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \sigma u\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \sigma s\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \sigma s\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

MatrixForm[economybeta]

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \sigma w \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \sigma u \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det[%]

$$\frac{1543793}{10080000} + \frac{25159\,\sigma s}{100800} - \frac{3011\,\sigma u}{12600} - \frac{4567\,\sigma w}{20160}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{1543793}{10080000} + \frac{25159\,\sigma s}{100800} - \frac{3011\,\sigma u}{12600} - \frac{4567\,\sigma w}{20160}\right]$$

$$\frac{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w}{10080000}$$

$$\text{detbeta} = \frac{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w}{10080000}$$

$$\frac{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w}{10080000}$$

$$\frac{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w}{10080000} \;/.\; \sigma w \to 1/2 \;/.\; \sigma u \to 2/6 \;/.\; \sigma s \to 1/6$$

$$\frac{7897}{4320000}$$

```
householdincome = {{0, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, σw}, {k/2, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 139/160, -1, 1/6, -1, 191/400, 0, σu}, {2 k/5, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0},
  {0, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, -1/100, σs}, {-k, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, σs}, {k/10, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \sigma w\right\}, \left\{\frac{k}{2}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \sigma u\right\}, \left\{\frac{2k}{5}, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \sigma s\right\}, \{-k, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\}, \left\{0, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \sigma s\right\}, \left\{\frac{k}{10}, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \sigma w \\ \frac{k}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \sigma u \\ \frac{2k}{5} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \sigma s \\ -k & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \sigma s \\ \frac{k}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{663447\,k}{11200000} + \frac{486363\,k\,\sigma s}{5600000} - \frac{475227\,k\,\sigma u}{5600000} - \frac{62559\,k\,\sigma w}{800000}$$

```
Simplify[663447 k/11200000 + 486363 k σs/5600000 - 475227 k σu/5600000 - 62559 k σw/800000]
```

$$\frac{3\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,\sigma u - 291942\,\sigma w)}{11200000}$$

```
housinc = 3 k (221149 + 324242 σs - 316818 σu - 291942 σw)/11200000 / detbeta
```

```
General::spell1 : Possible spelling error: new symbol name "σu" is similar to existing symbol "σs".

General::spell : Possible spelling error: new symbol name "σw" is similar to existing symbols {σs, σu}.
```

$$\frac{3\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,\sigma u - 291942\,\sigma w)}{11200000\,detbeta}$$

```
27 k (221149 + 324242 σs - 316818 σu - 291942 σw)/(10 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1/2 /. σu → 2/6 /. σs → 1/6
```

$$\frac{1912599\,k}{552790}$$

```
householdexpenditure = {{-1, 0, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, σw}, {1, k/2, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -1, 1/6, -1, 191/400, 0, σu}, {0, 2 k/5, 1, -1, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -1/7, 1/6, -1, 7/20, -1/100, σs}, {0, -k, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {-1/9, 0, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, σs}, {0, k/10, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \sigma w\right\}, \left\{1, \frac{k}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{9}, 0, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \sigma u\right\}, \left\{0, \frac{2k}{5}, 1, -1, 0, 0, 0, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{9}, 0, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \sigma s\right\}, \{0, -k, 0, 0, 1, -1, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, 0, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \sigma s\right\}, \left\{0, \frac{k}{10}, 0, 0, 0, 0, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \sigma w \\ 1 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \sigma u \\ 0 & \frac{2k}{5} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \sigma s \\ 0 & -k & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \sigma s \\ 0 & \frac{k}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$-\frac{124853\,k}{7200000} - \frac{1912483\,k\,\sigma s}{50400000} + \frac{1744957\,k\,\sigma u}{50400000} + \frac{1767533\,k\,\sigma w}{50400000}$$

```
Simplify[-124853 k/7200000 - 1912483 k σs/50400000 + 1744957 k σu/50400000 + 1767533 k σw/50400000]
```

$$\frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,\sigma u + 1767533\,\sigma w)}{50400000}$$

```
housexp = k (-873971 - 1912483 σs + 1744957 σu + 1767533 σw)/50400000 / detbeta
```

$$\frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,\sigma u + 1767533\,\sigma w)}{50400000\,\text{detbeta}}$$

```
k (-873971 - 1912483 σs + 1744957 σu + 1767533 σw)/(5 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1/2 /. σu → 2/6 /. σs → 1/6
```

$$\frac{818102\,k}{276395}$$

```
businessincome = {{-1, 1/8, 0, 5/6, -1, 3/4, 0, σw}, {1, -1, k/2, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 139/160, 0, 1/6, -1, 191/400, 0, σu}, {0, 0, 2 k/5, -1, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 1/8, 0, 1/6, -1, 7/20, -1/100, σs}, {0, 0, -k, 0, 1, -1, 0, 0},
  {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, σs}, {0, 0, k/10, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, 0, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \sigma w\right\}, \left\{1, -1, \frac{k}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \sigma u\right\}, \left\{0, 0, \frac{2k}{5}, -1, 0, 0, 0, 0\right\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \sigma s\right\}, \{0, 0, -k, 0, 1, -1, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \sigma s\right\}, \left\{0, 0, \frac{k}{10}, 0, 0, 0, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \sigma w \\ 1 & -1 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \sigma u \\ 0 & 0 & \frac{2k}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \sigma s \\ 0 & 0 & -k & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \sigma s \\ 0 & 0 & \frac{k}{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{229223\,k}{14400000} + \frac{215089\,k\,\sigma s}{14400000} - \frac{217231\,k\,\sigma u}{14400000} - \frac{219737\,k\,\sigma w}{14400000}$$

```
Simplify[229223 k/14400000 + 215089 k σs/14400000 - 217231 k σu/14400000 - 219737 k σw/14400000]
```

$$\frac{k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,\sigma u - 219737\,\sigma w)}{14400000}$$

```
busінc = k (229223 + 215089 σs - 217231 σu - 219737 σw)/14400000 / detbeta
```

$$\frac{k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,\sigma u - 219737\,\sigma w)}{14400000\,\text{detbeta}}$$

```
7 k (229223 + 215089 σs - 217231 σu - 219737 σw)/(10 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1/2 /. σu → 2/6 /. σs → 1/6
```

$$\frac{248377\,k}{78970}$$

```
businessexpenditure = {{-1, 1/8, -1/7, 0, -1, 3/4, 0, σw}, {1, -1, 0, k/2, 0, 0, 0, 0},
   {-1/9, 139/160, -1, 0, -1, 191/400, 0, σu}, {0, 0, 1, 2 k/5, 0, 0, 0, 0},
   {-1/9, 1/8, -1/7, 0, -1, 7/20, -1/100, σs}, {0, 0, 0, -k, 1, -1, 0, 0},
   {-1/9, 41/160, 0, 0, -1, 189/400, -1, σs}, {0, 0, 0, k/10, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, 0, -1, \frac{3}{4}, 0, \sigma w\right\}, \left\{1, -1, 0, \frac{k}{2}, 0, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, 0, -1, \frac{191}{400}, 0, \sigma u\right\}, \left\{0, 0, 1, \frac{2k}{5}, 0, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, 0, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \sigma s\right\}, \{0, 0, 0, -k, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, 0, -1, \frac{189}{400}, -1, \sigma s\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{k}{10}, 0, 0, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \sigma w \\ 1 & -1 & 0 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & 0 & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \sigma u \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2k}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & -k & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & 0 & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$-\frac{1523537\,k}{33600000} - \frac{2852659\,k\,\sigma s}{33600000} + \frac{2704861\,k\,\sigma u}{33600000} + \frac{2531947\,k\,\sigma w}{33600000}$$

```
Simplify[-1523537 k/33600000 - 2852659 k σs/33600000 + 2704861 k σu/33600000 + 2531947 k σw/33600000]
```

$$\frac{k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,\sigma u + 2531947\,\sigma w)}{33600000}$$

```
busexp = k (-1523537 - 2852659 σs + 2704861 σu + 2531947 σw)/33600000 / detbeta
```

$$\frac{k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,\sigma u + 2531947\,\sigma w)}{33600000\,\text{detbeta}}$$

```
3 k (-1523537 - 2852659 σs + 2704861 σu + 2531947 σw)/(10 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1/2 /. σu → 2/6 /. σs → 1/6
```

$$\frac{216789\,k}{78970}$$

```
financialincome = {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, 0, 3/4, 0, σw}, {1, -1, 0, 0, k/2, 0, 0, 0},
  {-1/9, 139/160, -1, 1/6, 0, 191/400, 0, σu}, {0, 0, 1, -1, 2 k/5, 0, 0, 0},
  {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, 0, 7/20, -1/100, σs}, {0, 0, 0, 0, -k, -1, 0, 0},
  {-1/9, 41/160, 0, 1/3, 0, 189/400, -1, σs}, {0, 0, 0, 0, k/10, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, 0, \frac{3}{4}, 0, \sigma w\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, \frac{k}{2}, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, 0, \frac{191}{400}, 0, \sigma u\right\}, \left\{0, 0, 1, -1, \frac{2k}{5}, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, 0, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \sigma s\right\}, \{0, 0, 0, 0, -k, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{189}{400}, -1, \sigma s\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, \frac{k}{10}, 0, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \sigma w \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{191}{400} & 0 & \sigma u \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2k}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{189}{400} & -1 & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{120077\,k}{2240000} + \frac{203543\,k\,\sigma s}{2240000} - \frac{186337\,k\,\sigma u}{2240000} - \frac{1589537\,k\,\sigma w}{20160000}$$

```
Simplify[120077 k/2240000 + 203543 k σs/2240000 - 186337 k σu/2240000 - 1589537 k σw/20160000]
```

$$\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,\sigma u - 1589537\,\sigma w)}{20160000}$$

```
fininc = k (1080693 + 1831887 σs - 1677033 σu - 1589537 σw)/20160000 / detbeta
```

$$\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,\sigma u - 1589537\,\sigma w)}{20160000\,\text{detbeta}}$$

```
k (1080693 + 1831887 σs - 1677033 σu - 1589537 σw)/(2 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1/2 /. σu → 2/6 /. σs → 1/6
```

$$\frac{6906\,k}{7897}$$

```
financialexpenditure = {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 0, 0, σw}, {1, -1, 0, 0, 0, k/2, 0, 0},
  {-1/9, 139/160, -1, 1/6, -1, 0, 0, σu}, {0, 0, 1, -1, 0, 2 k/5, 0, 0},
  {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 0, -1/100, σs}, {0, 0, 0, 0, 1, -k, 0, 0},
  {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 0, -1, σs}, {0, 0, 0, 0, 0, k/10, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, 0, 0, \sigma w\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, \frac{k}{2}, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, 0, 0, \sigma u\right\}, \left\{0, 0, 1, -1, 0, \frac{2k}{5}, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, 0, -\frac{1}{100}, \sigma s\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -k, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, 0, -1, \sigma s\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, \frac{k}{10}, 1, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & 0 & 0 & \sigma w \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & 0 & 0 & \sigma u \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{2k}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & 0 & -\frac{1}{100} & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & -1 & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{4168279\,k}{20160000} + \frac{6863687\,k\,\sigma s}{20160000} - \frac{6494633\,k\,\sigma u}{20160000} - \frac{2052179\,k\,\sigma w}{6720000}$$

```
Simplify[4168279 k/20160000 + 6863687 k σs/20160000 - 6494633 k σu/20160000 - 2052179 k σw/6720000]
```

$$\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,\sigma u - 6156537\,\sigma w)}{20160000}$$

```
finexp = k (4168279 + 6863687 σs - 6494633 σu - 6156537 σw)/20160000 / detbeta
```

$$\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,\sigma u - 6156537\,\sigma w)}{20160000\,\text{detbeta}}$$

```
k (4168279 + 6863687 σs - 6494633 σu - 6156537 σw)/(2 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1/2 /. σu → 2/6 /. σs → 1/6
```

$$\frac{14803\,k}{7897}$$

```
governmentincome = {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, σw}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, k/2, 0},
  {-1/9, 139/160, -1, 1/6, -1, 191/400, 0, σu}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, 2k/5, 0},
  {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, 0, σs}, {0, 0, 0, 0, 1, -1, -k, 0},
  {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, 0, σs}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, k/10, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \sigma w\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, 0, \frac{k}{2}, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \sigma u\right\}, \left\{0, 0, 1, -1, 0, 0, \frac{2k}{5}, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, 0, \sigma s\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, -k, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, 0, \sigma s\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{k}{10}, -1\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \sigma w \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \sigma u \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{2k}{5} & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & 0 & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -k & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & 0 & \sigma s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{10} & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{4523\,k}{252000} + \frac{25159\,k\,\sigma s}{1008000} - \frac{3011\,k\,\sigma u}{126000} - \frac{4567\,k\,\sigma w}{201600}$$

```
Simplify[4523 k/252000 + 25159 k σs/1008000 - 3011 k σu/126000 - 4567 k σw/201600]
```

$$\frac{k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,\sigma u - 22835\,\sigma w)}{1008000}$$

```
govinc = k (18092 + 25159 σs - 24088 σu - 22835 σw)/1008000 / detbeta
```

$$\frac{k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,\sigma u - 22835\,\sigma w)}{1008000\,\text{detbeta}}$$

```
10 k (18092 + 25159 σs - 24088 σu - 22835 σw)/(1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw) /. σw → 1/2 /. σu → 2/6 /. σs → 1/6
```

$$\frac{85150\,k}{55279}$$

```
governmentexpenditure = {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, 0}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, k/2},
  {-1/9, 139/160, -1, 1/6, -1, 191/400, 0, 0}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 2 k/5},
  {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, -1/100, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, -k},
  {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, k/10}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, 0\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{k}{2}\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, \frac{2k}{5}\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, -k\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \frac{k}{10}\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{2} \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2k}{5} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -k \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{k}{10} \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{88469\,k}{33600000}$$

```
govexp = 88469 k / 33600000 / detbeta
```

$$\frac{88469\,k}{33600000\,detbeta}$$

```
265407 k / (10 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1/2 /. σu → 2/6 /. σs → 1/6
```

$$\frac{796221\,k}{552790}$$

```
Together[housinc + businc + fininc + govinc]
```

$$\frac{14788249\,k + 21935492\,k\,\sigma s - 20868668\,k\,\sigma u - 19651778\,k\,\sigma w}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)}$$

```
(14788249 k + 21935492 k σs - 20868668 k σu - 19651778 k σw) / (10 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1/2 /. σu → 2/6 /.
 σs → 1/6
```

$$\frac{2493079\,k}{276395}$$

```
Together[housexp + busexp + finexp + govexp]
```

$$\frac{14788249\,k + 21935492\,k\,\sigma s - 20868668\,k\,\sigma u - 19651778\,k\,\sigma w}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)}$$

```
(14788249 k + 21935492 k σs - 20868668 k σu - 19651778 k σw) /
    (10 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1 / 2 /. σu → 2 / 6 /.
  σs → 1 / 6
```

$$\frac{2493079\,k}{276395}$$

```
<< Algebra`

{housinc > 0, housexp > 0, businc > 0, busexp > 0,
   fininc > 0, finexp > 0, govinc > 0, govexp > 0} /. σu → 2 / 6 /. σs → 1 / 6
```

$$\left\{\frac{27\,k\,(\frac{508750}{3} - 291942\,\sigma w)}{10\,(\frac{3480529}{3} - 2283500\,\sigma w)} > 0,\ \frac{k\,(-\frac{3666395}{6} + 1767533\,\sigma w)}{5\,(\frac{3480529}{3} - 2283500\,\sigma w)} > 0,\right.$$
$$\frac{7\,k\,(\frac{1155965}{6} - 219737\,\sigma w)}{10\,(\frac{3480529}{3} - 2283500\,\sigma w)} > 0,\ \frac{3\,k\,(-\frac{6584159}{6} + 2531947\,\sigma w)}{10\,(\frac{3480529}{3} - 2283500\,\sigma w)} > 0,\ \frac{k\,(\frac{1653993}{2} - 1589537\,\sigma w)}{2\,(\frac{3480529}{3} - 2283500\,\sigma w)} > 0,$$
$$\left.\frac{k\,(\frac{18884095}{6} - 6156537\,\sigma w)}{2\,(\frac{3480529}{3} - 2283500\,\sigma w)} > 0,\ \frac{10\,k\,(\frac{85535}{6} - 22835\,\sigma w)}{\frac{3480529}{3} - 2283500\,\sigma w} > 0,\ \frac{265407\,k}{10\,(\frac{3480529}{3} - 2283500\,\sigma w)} > 0\right\}$$

```
InequalitySolve[
  {27 (508750/3 - 291942 σw) / (10 (3480529/3 - 2283500 σw)) > 0,
   (-3666395/6 + 1767533 σw) / (5 (3480529/3 - 2283500 σw)) > 0,
   7 (1155965/6 - 219737 σw) / (10 (3480529/3 - 2283500 σw)) > 0,
   3 (-6584159/6 + 2531947 σw) / (10 (3480529/3 - 2283500 σw)) > 0,
   (1653993/2 - 1589537 σw) / (2 (3480529/3 - 2283500 σw)) > 0,
   (18884095/6 - 6156537 σw) / (2 (3480529/3 - 2283500 σw)) > 0,
   10 (85535/6 - 22835 σw) / (3480529/3 - 2283500 σw) > 0,
   265407 / (10 (3480529/3 - 2283500 σw)) > 0}, {σw}]
```

$$\frac{6584159}{15191682} < \sigma w < \frac{3480529}{6850500}$$

```
N[6584159/15191682 < σw < 3480529/6850500]
```

$$0.433406 < \sigma w < 0.508069$$

```
{housinc > 0, housexp > 0, businc > 0, busexp > 0,
   fininc > 0, finexp > 0, govinc > 0, govexp > 0} /. σw → 1 / 2 /. σs → 1 / 6
```

$$\left\{\frac{27\,k\,(\frac{387655}{3} - 316818\,\sigma u)}{10\,(\frac{2464079}{3} - 2408800\,\sigma u)} > 0,\ \frac{k\,(-\frac{926855}{3} + 1744957\,\sigma u)}{5\,(\frac{2464079}{3} - 2408800\,\sigma u)} > 0,\right.$$
$$\frac{7\,k\,(\frac{465608}{3} - 217231\,\sigma u)}{10\,(\frac{2464079}{3} - 2408800\,\sigma u)} > 0,\ \frac{3\,k\,(-\frac{2199020}{3} + 2704861\,\sigma u)}{10\,(\frac{2464079}{3} - 2408800\,\sigma u)} > 0,\ \frac{k\,(591239 - 1677033\,\sigma u)}{2\,(\frac{2464079}{3} - 2408800\,\sigma u)} > 0,$$
$$\left.\frac{k\,(\frac{6701875}{3} - 6494633\,\sigma u)}{2\,(\frac{2464079}{3} - 2408800\,\sigma u)} > 0,\ \frac{10\,k\,(\frac{32603}{3} - 24088\,\sigma u)}{\frac{2464079}{3} - 2408800\,\sigma u} > 0,\ \frac{265407\,k}{10\,(\frac{2464079}{3} - 2408800\,\sigma u)} > 0\right\}$$

```
InequalitySolve[
 {27 (387655/3 - 316818 σu)/(10 (2464079/3 - 2408800 σu)) > 0, (-926855/3 + 1744957 σu)/(5 (2464079/3 - 2408800 σu)) > 0, 7 (465608/3 - 217231 σu)/(10 (2464079/3 - 2408800 σu)) > 0,
  3 (-2199020/3 + 2704861 σu)/(10 (2464079/3 - 2408800 σu)) > 0, (591239 - 1677033 σu)/(2 (2464079/3 - 2408800 σu)) > 0, (6701875/3 - 6494633 σu)/(2 (2464079/3 - 2408800 σu)) > 0,
  10 (32603/3 - 24088 σu)/(2464079/3 - 2408800 σu) > 0, 265407/(10 (2464079/3 - 2408800 σu)) > 0}, {σu}]
```

$$\frac{2199020}{8114583} < \sigma u < \frac{2464079}{7226400}$$

```
N[2199020/8114583 < σu < 2464079/7226400]
```

$$0.270996 < \sigma u < 0.340983$$

```
{housinc > 0, housexp > 0, businc > 0, busexp > 0,
   fininc > 0, finexp > 0, govinc > 0, govexp > 0} /. σw → 1 / 2 /. σu → 2 / 6
```

$$\left\{\frac{27\,k\,(-30428+324242\,\sigma s)}{10\,(-\frac{1202671}{3}+2515900\,\sigma s)} > 0,\ \frac{k\,(\frac{3548687}{6}-1912483\,\sigma s)}{5\,(-\frac{1202671}{3}+2515900\,\sigma s)} > 0,\right.$$
$$\frac{7\,k\,(\frac{281665}{6}+215089\,\sigma s)}{10\,(-\frac{1202671}{3}+2515900\,\sigma s)} > 0,\ \frac{3\,k\,(\frac{3864341}{6}-2852659\,\sigma s)}{10\,(-\frac{1202671}{3}+2515900\,\sigma s)} > 0,$$
$$\frac{k\,(-\frac{546173}{2}+1831887\,\sigma s)}{2\,(-\frac{1202671}{3}+2515900\,\sigma s)} > 0,\ \frac{k\,(-\frac{6449203}{6}+6863687\,\sigma s)}{2\,(-\frac{1202671}{3}+2515900\,\sigma s)} > 0,$$
$$\left.\frac{10\,k\,(-\frac{8129}{6}+25159\,\sigma s)}{-\frac{1202671}{3}+2515900\,\sigma s} > 0,\ \frac{265407\,k}{10\,(-\frac{1202671}{3}+2515900\,\sigma s)} > 0\right\}$$

```
InequalitySolve[{27 (-30428 + 324242 σs)/(10 (-1202671/3 + 2515900 σs)) > 0, (3548687/6 - 1912483 σs)/(5 (-1202671/3 + 2515900 σs)) > 0,
  7 (281665/6 + 215089 σs)/(10 (-1202671/3 + 2515900 σs)) > 0, 3 (3864341/6 - 2852659 σs)/(10 (-1202671/3 + 2515900 σs)) > 0,
  (-546173/2 + 1831887 σs)/(2 (-1202671/3 + 2515900 σs)) > 0, (-6449203/6 + 6863687 σs)/(2 (-1202671/3 + 2515900 σs)) > 0,
  10 (-8129/6 + 25159 σs)/(-1202671/3 + 2515900 σs) > 0, 265407/(10 (-1202671/3 + 2515900 σs)) > 0}, {σs}]
```

$$\frac{1202671}{7547700} < \sigma s < \frac{3864341}{17115954}$$

```
N[1202671/7547700 < σs < 3864341/17115954]
```

$$0.159343 < \sigma s < 0.225774$$

Page 144 Derivatives of sector flows (Table X4)
with respect to the redistribution of government expenditure

Household income

$$\text{housinc} = \frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,\sigma u - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{27\,k\,(221149 - 316818\,\sigma u + 324242\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{27\,k\,(221149 - 316818\,\sigma u + 324242\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{12389479029792\,k}{15278839205}$$

$$N\left[\frac{12389479029792\,k}{15278839205}\right]$$

$$810.891\,k$$

Household expenditure

$$\text{housexp} = \frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,\sigma u + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{k\,(-873971 + 1744957\,\sigma u - 1912483\,(1 - \sigma u - \sigma w) + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(-873971 + 1744957\,\sigma u - 1912483\,(1 - \sigma u - \sigma w) + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{12389479029792\,k}{15278839205}$$

$$N\left[\frac{12389479029792\,k}{15278839205}\right]$$

$$810.891\,k$$

Business income

$$\text{businc} = \frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,\sigma u - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{7\,k\,(229223 - 217231\,\sigma u + 215089\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{7\,k\,(229223 - 217231\,\sigma u + 215089\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{1752035741019\,k}{2182691315}$$

$$N\left[\frac{1752035741019\,k}{2182691315}\right]$$

$$802.695\,k$$

Business expenditure

$$\text{busexp} = \frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,\sigma u + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{3\,k\,(-1523537 + 2704861\,\sigma u - 2852659\,(1 - \sigma u - \sigma w) + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{3\,k\,(-1523537 + 2704861\,\sigma u - 2852659\,(1 - \sigma u - \sigma w) + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{1752035741019\,k}{2182691315}$$

$$N\left[\frac{1752035741019\,k}{2182691315}\right]$$

$$802.695\,k$$

Financier income

$$\text{fininc} = \frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,\sigma u - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{k\,(1080693 - 1677033\,\sigma u + 1831887\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(1080693 - 1677033\,\sigma u + 1831887\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{58905491208\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{58905491208\,k}{436538263}\right]$$

$$134.938\,k$$

Financier expenditure

$$\text{finexp} = \frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,\sigma u - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{k\,(4168279 - 6494633\,\sigma u + 6863687\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(4168279 - 6494633\,\sigma u + 6863687\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{58905491208\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{58905491208\,k}{436538263}\right]$$

$$134.938\,k$$

Government income

$$\text{govinc} = \frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,\sigma u - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{10\,k\,(18092 - 24088\,\sigma u + 25159\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 22835\,\sigma w)}{1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w}$$

$$D\left[\frac{10\,k\,(18092 - 24088\,\sigma u + 25159\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 22835\,\sigma w)}{1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{1146414920220\,k}{3055767841}$$

$$N\left[\frac{1146414920220\,k}{3055767841}\right]$$

375.164 k

Government expenditure

$$govexp = \frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} /. \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{265407\,k}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{265407\,k}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{1146414920220\,k}{3055767841}$$

$$N\left[\frac{1146414920220\,k}{3055767841}\right]$$

375.164 k

Household income

$$housinc = \frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,\sigma u - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} /. \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 3/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{43397229384\,k}{2182691315}$$

$$N\left[-\frac{43397229384\,k}{2182691315}\right]$$

-19.8824 k

Household expenditure

$$housexp = \frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,\sigma u + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} /. \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,(1 - \sigma s - \sigma w) + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,(1 - \sigma s - \sigma w) + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 3/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{43397229384\,k}{2182691315}$$

$$N\left[-\frac{43397229384\,k}{2182691315}\right]$$

$$-19.8824\,k$$

Business Income

$$\text{businc} = \frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,\sigma u - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 3/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{6698607273\,k}{311813045}$$

$$N\left[-\frac{6698607273\,k}{311813045}\right]$$

$$-21.4828\,k$$

Business Expenditure

$$\text{busexp} = \frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,\sigma u + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,(1 - \sigma s - \sigma w) + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,(1 - \sigma s - \sigma w) + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 3/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{6698607273\,k}{311813045}$$

$$N\left[-\frac{6698607273\,k}{311813045}\right]$$

$$-21.4828\,k$$

Financier Income

$$\text{fininc} = \frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,\sigma u - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 3/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{1559531532\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{1559531532\,k}{436538263}\right]$$

$$-3.5725\,k$$

Financier Expenditure

$$\text{finexp} = \frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,\sigma u - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 3/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{1559531532\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{1559531532\,k}{436538263}\right]$$

$$-3.5725\,k$$

Government Income

$$\text{govinc} = \frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,\sigma u - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w}$$

$$D\left[\frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 3/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{4275706770\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{4275706770\,k}{436538263}\right]$$

$$-9.79458\,k$$

Government Expenditure

$$\text{govexp} = \frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma w\right] /. \sigma w \to 3/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{4275706770\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{4275706770\,k}{436538263}\right]$$

$$-9.79458\,k$$

Page 145 Derivatives of sector flows (Table X5)
with respect to the redistribution of government expenditure

Household income

$$\text{housinc} = \frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,\sigma u - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{27\,k\,(221149 - 316818\,\sigma u + 324242\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{27\,k\,(221149 - 316818\,\sigma u + 324242\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma u\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{2538651927096\,k}{3055767841}$$

$$N\left[\frac{2538651927096\,k}{3055767841}\right]$$

830.774 k

Household expenditure

$$\text{housexp} = \frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,\sigma u + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{k\,(-873971 + 1744957\,\sigma u - 1912483\,(1 - \sigma u - \sigma w) + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(-873971 + 1744957\,\sigma u - 1912483\,(1 - \sigma u - \sigma w) + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma u\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{2538651927096\,k}{3055767841}$$

$$N\left[\frac{2538651927096\,k}{3055767841}\right]$$

830.774 k

Business income

$$\text{busInc} = \frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,\sigma u - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{7\,k\,(229223 - 217231\,\sigma u + 215089\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{7\,k\,(229223 - 217231\,\sigma u + 215089\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma u\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{359785198386\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{359785198386\,k}{436538263}\right]$$

824.178 k

Business expenditure

$$\text{busexp} = \frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,\sigma u + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{3\,k\,(-1523537 + 2704861\,\sigma u - 2852659\,(1 - \sigma u - \sigma w) + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{3\,k\,(-1523537 + 2704861\,\sigma u - 2852659\,(1 - \sigma u - \sigma w) + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma u\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{359785198386\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{359785198386\,k}{436538263}\right]$$

$$824.178\,k$$

Financier income

$$\text{fininc} = \frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,\sigma u - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{k\,(1080693 - 1677033\,\sigma u + 1831887\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(1080693 - 1677033\,\sigma u + 1831887\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma u\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{60465022740\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{60465022740\,k}{436538263}\right]$$

$$138.51\,k$$

Financier expenditure

$$\text{finexp} = \frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,\sigma u - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{k\,(4168279 - 6494633\,\sigma u + 6863687\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(4168279 - 6494633\,\sigma u + 6863687\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma u\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{60465022740\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{60465022740\,k}{436538263}\right]$$

$$138.51\,k$$

Government income

$$\text{govinc} = \frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,\sigma u - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w} \;/.\; \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{10\,k\,(18092 - 24088\,\sigma u + 25159\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 22835\,\sigma w)}{1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w}$$

$$D\left[\frac{10\,k\,(18092 - 24088\,\sigma u + 25159\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 22835\,\sigma w)}{1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w}, \sigma u\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{1176344867610\,k}{3055767841}$$

$$N\left[\frac{1176344867610\,k}{3055767841}\right]$$

$$384.959\,k$$

Government expenditure

$$govexp = \frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} /. \sigma s \to 1 - \sigma w - \sigma u$$

$$\frac{265407\,k}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{265407\,k}{10\,(1543793 - 2408800\,\sigma u + 2515900\,(1 - \sigma u - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma u\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma u \to 2/6$$

$$\frac{1176344867610\,k}{3055767841}$$

$$N\left[\frac{1176344867610\,k}{3055767841}\right]$$

$$384.959\,k$$

Household income

$$housinc = \frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,\sigma u - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} /. \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 291942\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 316818\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 291942\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 316818\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma u\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$\frac{43397229384\,k}{2182691315}$$

$$N\left[\frac{43397229384\,k}{2182691315}\right]$$

$$19.8824\,k$$

Household expenditure

$$housexp = \frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,\sigma u + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} /. \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1767533\,(1 - \sigma s - \sigma u) + 1744957\,\sigma u)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1767533\,(1 - \sigma s - \sigma u) + 1744957\,\sigma u)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma u\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$\frac{43397229384\,k}{2182691315}$$

$$N\left[\frac{43397229384\,k}{2182691315}\right]$$

$$19.8824\,k$$

Business income

$$\text{businc} = \frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,\sigma u - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} /. \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 219737\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 217231\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 219737\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 217231\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma u\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$\frac{6698607273\,k}{311813045}$$

$$N\left[\frac{6698607273\,k}{311813045}\right]$$

$$21.4828\,k$$

Business expenditure

$$\text{busexp} = \frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,\sigma u + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} /. \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2531947\,(1 - \sigma s - \sigma u) + 2704861\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2531947\,(1 - \sigma s - \sigma u) + 2704861\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma u\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$\frac{6698607273\,k}{311813045}$$

$$N\left[\frac{6698607273\,k}{311813045}\right]$$

$$21.4828\,k$$

Financier income

$$\text{fininc} = \frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,\sigma u - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} /. \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1589537\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 1677033\,\sigma u)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1589537\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 1677033\,\sigma u)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma u\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$\frac{1559531532\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{1559531532\,k}{436538263}\right]$$

$$3.5725\,k$$

Financier expenditure

$$\text{finexp} = \frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,\sigma u - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6156537\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 6494633\,\sigma u)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6156537\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 6494633\,\sigma u)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma u\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$\frac{1559531532\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{1559531532\,k}{436538263}\right]$$

$$3.5725\,k$$

Government income

$$\text{govinc} = \frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,\sigma u - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 22835\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 24088\,\sigma u)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u}$$

$$D\left[\frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 22835\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 24088\,\sigma u)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u}, \sigma u\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$\frac{4275706770\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{4275706770\,k}{436538263}\right]$$

$$9.79458\,k$$

Government expenditure

$$\text{govexp} = \frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma u\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$\frac{4275706770\,k}{436538263}$$

$$N\left[\frac{4275706770\,k}{436538263}\right]$$

$$9.79458\,k$$

Page 145 Derivatives of sector flows (Table X6)
with respect to the redistribution of government expenditure

Household income

$$\text{housinc} = \frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,\sigma u - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 291942\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 316818\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 291942\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 316818\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma s\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{12389479029792\,k}{15278839205}$$

$$N\left[-\frac{12389479029792\,k}{15278839205}\right]$$

$$-810.891\,k$$

Household expenditure

$$\text{housexp} = \frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,\sigma u + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1767533\,(1 - \sigma s - \sigma u) + 1744957\,\sigma u)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1767533\,(1 - \sigma s - \sigma u) + 1744957\,\sigma u)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma s\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{12389479029792\,k}{15278839205}$$

$$N\left[-\frac{12389479029792\,k}{15278839205}\right]$$

$$-810.891\,k$$

Business income

$$\text{businc} = \frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,\sigma u - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 219737\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 217231\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 219737\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 217231\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma s\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{1752035741019\,k}{2182691315}$$

$$N\left[-\frac{1752035741019\,k}{2182691315}\right]$$

$$-802.695\,k$$

Business expenditure

$$\text{busexp} = \frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,\sigma u + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2531947\,(1 - \sigma s - \sigma u) + 2704861\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2531947\,(1 - \sigma s - \sigma u) + 2704861\,\sigma u)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma s\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{1752035741019\,k}{2182691315}$$

$$N\left[-\frac{1752035741019\,k}{2182691315}\right]$$

$$-802.695\,k$$

Financier income

$$\text{fininc} = \frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,\sigma u - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1589537\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 1677033\,\sigma u)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1589537\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 1677033\,\sigma u)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma s\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{58905491208\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{58905491208\,k}{436538263}\right]$$

$$-134.938\,k$$

Financier expenditure

$$\text{finexp} = \frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,\sigma u - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6156537\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 6494633\,\sigma u)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

$$D\left[\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6156537\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 6494633\,\sigma u)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}, \sigma s\right] /. \sigma u \to 2/6 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{58905491208\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{58905491208\,k}{436538263}\right]$$

$$-134.938\,k$$

Government income

$$\text{govinc} = \frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,\sigma u - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w} \;/.\; \sigma w \to 1 - \sigma u - \sigma s$$

$$\frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 22835\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 24088\,\sigma u)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u}$$

```
D[ (10 k (18092 + 25159 σs - 22835 (1 - σs - σu) - 24088 σu)) / (1543793 + 2515900 σs - 2283500 (1 - σs - σu) - 2408800 σu), σs] /. σu → 2 / 6 /. σs → 1 / 6
```

$$-\frac{1146414920220\,k}{3055767841}$$

```
N[-(1146414920220 k) / 3055767841]
```

$$-375.164\,k$$

Government expenditure

```
govexp = (265407 k) / (10 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σw → 1 - σu - σs
```

$$\frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2283500\,(1 - \sigma s - \sigma u) - 2408800\,\sigma u)}$$

```
D[ (265407 k) / (10 (1543793 + 2515900 σs - 2283500 (1 - σs - σu) - 2408800 σu)), σs] /. σu → 2 / 6 /. σs → 1 / 6
```

$$-\frac{1146414920220\,k}{3055767841}$$

```
N[-(1146414920220 k) / 3055767841]
```

$$-375.164\,k$$

Household income

```
housinc = (27 k (221149 + 324242 σs - 316818 σu - 291942 σw)) / (10 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σu → 1 - σw - σs
```

$$\frac{27\,k\,(221149 + 324242\,\sigma s - 316818\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 291942\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

```
D[ (27 k (221149 + 324242 σs - 316818 (1 - σs - σw) - 291942 σw)) / (10 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 (1 - σs - σw) - 2283500 σw)), σs] /. σw → 1 / 2 /. σs → 1 / 6
```

$$-\frac{2538651927096\,k}{3055767841}$$

```
N[-(2538651927096 k) / 3055767841]
```

$$-830.774\,k$$

Household expenditure

```
housexp = (k (-873971 - 1912483 σs + 1744957 σu + 1767533 σw)) / (5 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 σu - 2283500 σw)) /. σu → 1 - σw - σs
```

$$\frac{k\,(-873971 - 1912483\,\sigma s + 1744957\,(1 - \sigma s - \sigma w) + 1767533\,\sigma w)}{5\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

```
D[ (k (-873971 - 1912483 σs + 1744957 (1 - σs - σw) + 1767533 σw)) / (5 (1543793 + 2515900 σs - 2408800 (1 - σs - σw) - 2283500 σw)), σs] /. σw → 1 / 2 /. σs → 1 / 6
```

$$-\frac{2538651927096\,k}{3055767841}$$

$$N\left[-\frac{2538651927096\,k}{3055767841}\right]$$

$$-830.774\,k$$

Business income

$$\text{businc} = \frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,\sigma u - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{7\,k\,(229223 + 215089\,\sigma s - 217231\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 219737\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma s\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{359785198386\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{359785198386\,k}{436538263}\right]$$

$$-824.178\,k$$

Business expenditure

$$\text{busexp} = \frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,\sigma u + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,(1 - \sigma s - \sigma w) + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{3\,k\,(-1523537 - 2852659\,\sigma s + 2704861\,(1 - \sigma s - \sigma w) + 2531947\,\sigma w)}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma s\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{359785198386\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{359785198386\,k}{436538263}\right]$$

$$-824.178\,k$$

Financier income

$$\text{fininc} = \frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,\sigma u - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(1080693 + 1831887\,\sigma s - 1677033\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 1589537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma s\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{60465022740\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{60465022740\,k}{436538263}\right]$$

$$-138.51\,k$$

Financier expenditure

$$\text{finexp} = \frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,\sigma u - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{k\,(4168279 + 6863687\,\sigma s - 6494633\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 6156537\,\sigma w)}{2\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma s\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{60465022740\,k}{436538263}$$

$$N\left[-\frac{60465022740\,k}{436538263}\right]$$

$$-138.51\,k$$

Government income

$$\text{govinc} = \frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,\sigma u - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w}$$

$$D\left[\frac{10\,k\,(18092 + 25159\,\sigma s - 24088\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 22835\,\sigma w)}{1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w}, \sigma s\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{1176344867610\,k}{3055767841}$$

$$N\left[-\frac{1176344867610\,k}{3055767841}\right]$$

$$-384.959\,k$$

Government expenditure

$$\text{govexp} = \frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,\sigma u - 2283500\,\sigma w)} \;/.\; \sigma u \to 1 - \sigma w - \sigma s$$

$$\frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}$$

$$D\left[\frac{265407\,k}{10\,(1543793 + 2515900\,\sigma s - 2408800\,(1 - \sigma s - \sigma w) - 2283500\,\sigma w)}, \sigma s\right] /. \sigma w \to 1/2 /. \sigma s \to 1/6$$

$$-\frac{1176344867610\,k}{3055767841}$$

$$N\left[-\frac{1176344867610\,k}{3055767841}\right]$$

$$-384.959\,k$$

Pages 146 - 147 Cramer's Rule system 100 and solution of the related inequalities

```
matrixbeta = {{-1, 1/8, -1/7, (1 - τw) 5/6 + 1/6, -1, (1 - τw) 1/2 + 7/20, 0, σw},
  {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, (1 - τu) 7/8 + 1/8, -1, 1/6, -1, (1 - τu) 3/20 + 7/20, 0, σu},
  {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, ζ - 1, 1 - σw - σu},
  {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {-1/9, τu*7/8 + 1/8, 0, τw*5/6 + 1/6, -1,
   τw*1/2 + τu*3/20 + 7/20, -1, 1 - σw - σu}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6} + \frac{5\,(1-\tau w)}{6}, -1, \frac{7}{20} + \frac{1-\tau w}{2}, 0, \sigma w\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8} + \frac{7\,(1-\tau u)}{8}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20} + \frac{3\,(1-\tau u)}{20}, 0, \sigma u\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -1+\zeta, 1-\sigma u-\sigma w\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8} + \frac{7\,\tau u}{8}, 0, \frac{1}{6} + \frac{5\,\tau w}{6}, -1, \frac{7}{20} + \frac{3\,\tau u}{20} + \frac{\tau w}{2}, -1, 1-\sigma u-\sigma w\right\},$$
$$\left.\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[matrixbeta]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6}+\frac{5(1-\tau w)}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{1-\tau w}{2} & 0 & \sigma w \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7(1-\tau u)}{8} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3(1-\tau u)}{20} & 0 & \sigma u \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -1+\zeta & 1-\sigma u-\sigma w \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8}+\frac{7\tau u}{8} & 0 & \frac{1}{6}+\frac{5\tau w}{6} & -1 & \frac{7}{20}+\frac{3\tau u}{20}+\frac{\tau w}{2} & -1 & 1-\sigma u-\sigma w \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
MatrixForm[
 {{-1, 1/8, -1/7, (1 - τw) 5/6 + 1/6, -1, (1 - τw) 1/2 + 7/20, 0, σw}, {1, -1, 0, 0, 0, 0,
       0, 0}, {-1/9, (1 - τu) 7/8 + 1/8, -1, 1/6, -1, (1 - τu) 3/20 + 7/20, 0, σu},
      {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, ζ - 1, 1 - σw - σu},
      {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {-1/9, τu*7/8 + 1/8, 0, τw*5/6 + 1/6, -1,
       τw*1/2 + τu*3/20 + 7/20, -1, 1 - σw - σu}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /.
    σw → 3/6 /. σu → 2/6 /. τw → 1/5 /. τu → 3/20]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -1+\zeta & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$-\frac{60619}{151200} + \frac{13669\,\zeta}{33600}$$

```
<< Algebra`
```

```
InequalitySolve[-60619/151200 + 13669 ξ/33600 > 0, ξ]
```

$$\xi > \frac{121238}{123021}$$

$$\xi > \frac{121238}{123021}$$

```
N[121238/123021]
```

```
0.985507
```

```
beta =
 {{-1, 1/8, -1/7, (1 - τw) 5/6 + 1/6, -1, (1 - τw) 1/2 + 7/20, 0, σw}, {1, -1, 0, 0, 0, 0,
        0, 0}, {-1/9, (1 - τu) 7/8 + 1/8, -1, 1/6, -1, (1 - τu) 3/20 + 7/20, 0, σu},
       {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, ξ - 1, 1 - σw - σu},
       {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {-1/9, τu * 7/8 + 1/8, 0, τw * 5/6 + 1/6, -1,
        τw * 1/2 + τu * 3/20 + 7/20, -1, 1 - σw - σu}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /.
      σw → 3/6 /. σu → 2/6 /. τw → 1/5 /. τu → 3/20 /. ξ → 99/100
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
householdincome = {{0, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, 1/2}, {h k, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
   {0, 139/160, -1, 1/6, -1, 191/400, 0, 1/3}, {b k, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0},
   {0, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, -1/100, 1/6}, {-k, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
   {0, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, 1/6}, {g k, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{h\,k, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{0, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{b\,k, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{0, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{-k, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{g\,k, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[{{0, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, 1/2}, {h k, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 139/160, -1, 1/6, -1, 191/400, 0, 1/3}, {b k, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0},
  {0, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, -1/100, 1/6}, {-k, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, 1/6}, {g k, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ h\,k & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ b\,k & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\ -k & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ g\,k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{782431\,k}{1680000} - \frac{48313\,b\,k}{105000} - \frac{109793\,g\,k}{336000} - \frac{1630823\,h\,k}{3360000}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$-\frac{(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{3360000}$$

household income

```
ynho = -(-1564862 + 1546016 b + 1097930 g + 1630823 h) k / 3360000 / (7897/4320000)
```

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{55279}$$

```
householdexpenditure = {{-1, 0, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, 1/2}, {1, h k, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -1, 1/6, -1, 191/400, 0, 1/3}, {0, b k, 1, -1, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -1/7, 1/6, -1, 7/20, -1/100, 1/6}, {0, -k, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {-1/9, 0, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, 1/6}, {0, g k, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, h\,k, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, 0, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, b\,k, 1, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, 0, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, -k, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, 0, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{0, g\,k, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[householdexpenditure]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & h\,k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & b\,k & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\ 0 & -k & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & g\,k & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[householdexpenditure]
```

$$\frac{782431\,k}{1680000} - \frac{48313\,b\,k}{105000} - \frac{109793\,g\,k}{336000} - \frac{7366343\,h\,k}{15120000}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$-\frac{(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{15120000}$$

household expenditure

$$\text{exho} = -\frac{(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{15120000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{55279}$$

$$\text{businessincome} = \left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, 0, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, -1, h\,k, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, b\,k, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, -k, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, g\,k, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, 0, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, -1, h\,k, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, b\,k, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, -k, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, g\,k, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[businessincome]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & h\,k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & b\,k & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -k & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & g\,k & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[businessincome]
```

$$\frac{1990537\,k}{4320000} - \frac{1964969\,b\,k}{4320000} - \frac{1819\,g\,k}{5625} - \frac{83201\,h\,k}{172800}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$-\frac{(-1990537 + 1964969\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)\,k}{4320000}$$

business income

$$\text{buin} = -\frac{(-1990537 + 1964969\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)\,k}{4320000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1990537 + 1964969\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$\text{businessexpenditure} = \left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, 0, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, -1, 0, h\,k, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, 0, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 1, b\,k, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, 0, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, -k, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, 0, -1, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, g\,k, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, 0, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, -1, 0, h\,k, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, 0, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 1, b\,k, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, 0, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, -k, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, 0, -1, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, g\,k, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[businessexpenditure]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & h\,k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & 0 & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & b\,k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -k & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & 0 & -1 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & g\,k & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[businessexpenditure]
```

$$\frac{1990537\,k}{4320000} - \frac{328811\,b\,k}{720000} - \frac{1819\,g\,k}{5625} - \frac{83201\,h\,k}{172800}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$-\frac{(-1990537 + 1972866\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)\,k}{4320000}$$

business expenditure

$$\text{buex} = -\frac{(-1990537 + 1972866\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)\,k}{4320000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1990537 + 1972866\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$\text{financialincome} = \left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, -1, 0, 0, h\,k, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, 0, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 1, -1, b\,k, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, 0, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, -k, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, g\,k, 0, 1, -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, -1, 0, 0, h\,k, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, 0, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 1, -1, b\,k, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, 0, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, -k, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{189}{400}, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, g\,k, 0, 1, -1\}\right\}$$

MatrixForm[financialincome]

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & h\,k & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b\,k & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{189}{400} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g\,k & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Det[financialincome]

$$\frac{517457\,k}{6480000} - \frac{4231\,b\,k}{54000} - \frac{9637\,g\,k}{172800} - \frac{214297\,h\,k}{2592000}$$

FullSimplify[%]

$$-\frac{(-1034914 + 1015440\,b + 722775\,g + 1071485\,h)\,k}{12960000}$$

financier income

$$\text{fiin} = -\frac{(-1034914 + 1015440\,b + 722775\,g + 1071485\,h)\,k}{12960000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1034914 + 1015440\,b + 722775\,g + 1071485\,h)\,k}{23691}$$

```
financialexpenditure = {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 0, 0, 1/2}, {1, -1, 0, 0, 0, h k, 0, 0},
  {-1/9, 139/160, -1, 1/6, -1, 0, 0, 1/3}, {0, 0, 1, -1, 0, b k, 0, 0},
  {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 0, -1/100, 1/6}, {0, 0, 0, 0, 1, -k, 0, 0},
  {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 0, -1, 1/6}, {0, 0, 0, 0, 0, g k, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, 0, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, h k, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, 0, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, b k, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, 0, -\frac{1}{100}, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -k, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, 0, -1, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, g k, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[financialexpenditure]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & h k & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & b k & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & 0 & -\frac{1}{100} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -k & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g k & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[financialexpenditure]
```

$$\frac{211721\,k}{2592000} - \frac{4231\,b\,k}{54000} - \frac{9637\,g\,k}{172800} - \frac{214297\,h\,k}{2592000}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$-\frac{(-211721 + 203088\,b + 144555\,g + 214297\,h)\,k}{2592000}$$

financier expenditure

```
fiex = -(-211721 + 203088 b + 144555 g + 214297 h) k / 2592000 / 7897/4320000
```

$$-\frac{5\,(-211721 + 203088\,b + 144555\,g + 214297\,h)\,k}{23691}$$

```
governmentincome = {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, 1/2}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, hk, 0},
  {-1/9, 139/160, -1, 1/6, -1, 191/400, 0, 1/3}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, bk, 0},
  {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, 0, 1/6}, {0, 0, 0, 0, 1, -1, -k, 0},
  {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, 0, 1/6}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, gk, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{2}\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0, hk, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, \frac{1}{3}\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, bk, 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, 0, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, -k, 0\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, 0, \frac{1}{6}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, gk, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[governmentincome]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & hk & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & bk & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -k & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & gk & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[governmentincome]
```

$$\frac{5441\,k}{25200} - \frac{597\,bk}{2800} - \frac{45761\,gk}{302400} - \frac{631\,hk}{2800}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$-\frac{(-65292 + 64476\,b + 45761\,g + 68148\,h)\,k}{302400}$$

government income

```
goin = -(-65292 + 64476 b + 45761 g + 68148 h) k / 302400 / (7897/4320000)
```

$$-\frac{100\,(-65292 + 64476\,b + 45761\,g + 68148\,h)\,k}{55279}$$

```
governmentexpenditure = {{-1, 1/8, -1/7, 5/6, -1, 3/4, 0, 0}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, h k},
  {-1/9, 139/160, -1, 1/6, -1, 191/400, 0, 0}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, b k},
  {-1/9, 1/8, -1/7, 1/6, -1, 7/20, -1/100, 0}, {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, -k},
  {-1/9, 41/160, 0, 1/3, -1, 189/400, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, g k}}
```

$$\left\{\left\{-1, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{5}{6}, -1, \frac{3}{4}, 0, 0\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, h\,k\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{139}{160}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{191}{400}, 0, 0\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, b\,k\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{6}, -1, \frac{7}{20}, -\frac{1}{100}, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, -k\},$$
$$\left.\left\{-\frac{1}{9}, \frac{41}{160}, 0, \frac{1}{3}, -1, \frac{189}{400}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, g\,k\}\right\}$$

```
MatrixForm[governmentexpenditure]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{6} & -1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h\,k \\ -\frac{1}{9} & \frac{139}{160} & -1 & \frac{1}{6} & -1 & \frac{191}{400} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & b\,k \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{6} & -1 & \frac{7}{20} & -\frac{1}{100} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -k \\ -\frac{1}{9} & \frac{41}{160} & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{189}{400} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g\,k \end{pmatrix}$$

```
Det[governmentexpenditure]
```

$$\frac{5441\,k}{25200} - \frac{597\,b\,k}{2800} - \frac{1543793\,g\,k}{10080000} - \frac{631\,h\,k}{2800}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$-\frac{(2149200\,b + 1543793\,g + 400\,(-5441 + 5679\,h))\,k}{10080000}$$

government expenditure

```
goex = -(2149200 b + 1543793 g + 400 (-5441 + 5679 h)) k / 10080000 / 7897/4320000
```

$$-\frac{(2149200\,b + 1543793\,g + 400\,(-5441 + 5679\,h))\,k}{10080000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{3\,(2149200\,b + 1543793\,g + 400\,(-5441 + 5679\,h))\,k}{55279}$$

```
<< Algebra`
```

```
InequalitySolve[{-(9 (-1564862 + 1546016 b + 1097930 g + 1630823 h))/55279 > 0,
  -(2 (-7041879 + 6957072 b + 4940685 g + 7366343 h))/55279 > 0,
  -(-1990537 + 1964969 b + 1396992 g + 2080025 h)/7897 > 0,
  -(-1990537 + 1972866 b + 1396992 g + 2080025 h)/7897 > 0,
  -(-1034914 + 1015440 b + 722775 g + 1071485 h)/23691 > 0,
  -(5 (-211721 + 203088 b + 144555 g + 214297 h))/23691 > 0,
  -(100 (-65292 + 64476 b + 45761 g + 68148 h))/55279 > 0,
  -(3 (2149200 b + 1543793 g + 400 (-5441 + 5679 h)))/55279 > 0}, {h}] /. b → 4/10 /. g → 1/10
```

$$h < \frac{3874469}{7572000} \&\& h < \frac{1112921}{2142970} \&\& h < \frac{1160303}{2142970} \&\& h < \frac{4183313}{8154115} \&\&$$
$$h < \frac{5308457}{10400125} \&\& h < \frac{5324251}{10400125} \&\& h < \frac{69851}{136296} \&\& h < \frac{37649817}{73663430}$$

```
N[h < 3874469/7572000 && h < 1112921/2142970 && h < 1160303/2142970 && h < 4183313/8154115 &&
  h < 5308457/10400125 && h < 5324251/10400125 && h < 69851/136296 && h < 37649817/73663430]
```

```
h < 0.511684 && h < 0.519336 && h < 0.541446 && h < 0.513031 &&
 h < 0.510422 && h < 0.511941 && h < 0.512495 && h < 0.511106
```

```
Min[0.5116837031167459`, 0.5193357816488332`,
 0.5414462171658959`, 0.5130309052545862`, 0.5104224228074182`,
 0.5119410584007403`, 0.5124948641192698`, 0.5111059449716094`]
```

```
0.510422
```

```
InequalitySolve[{-(9 (-1564862 + 1546016 b + 1097930 g + 1630823 h))/55279 > 0,
  -(2 (-7041879 + 6957072 b + 4940685 g + 7366343 h))/55279 > 0,
  -(-1990537 + 1964969 b + 1396992 g + 2080025 h)/7897 > 0,
  -(-1990537 + 1972866 b + 1396992 g + 2080025 h)/7897 > 0,
  -(-1034914 + 1015440 b + 722775 g + 1071485 h)/23691 > 0,
  -(5 (-211721 + 203088 b + 144555 g + 214297 h))/23691 > 0,
  -(100 (-65292 + 64476 b + 45761 g + 68148 h))/55279 > 0,
  -(3 (2149200 b + 1543793 g + 400 (-5441 + 5679 h)))/55279 > 0}, {b}] /. h → 5/10 /. g → 1/10
```

$$b < \frac{2864639}{6957072} \&\& b < \frac{8108253}{19649690} \&\& b < \frac{2954069}{7164000} \&\&$$
$$b < \frac{266419}{644760} \&\& b < \frac{71149}{169240} \&\& b < \frac{30039}{67696} \&\& b < \frac{1279315}{3092032} \&\& b < \frac{2702751}{6576220}$$

$$N\left[b < \frac{2864639}{6957072} \&\& b < \frac{8108253}{19649690} \&\& b < \frac{2954069}{7164000} \&\& b < \frac{266419}{644760} \&\& b < \frac{71149}{169240} \&\& b < \frac{30039}{67696} \&\& b < \frac{1279315}{3092032} \&\& b < \frac{2702751}{6576220}\right]$$

```
b < 0.411759 && b < 0.41264 && b < 0.412349 && b < 0.413206 &&
 b < 0.420403 && b < 0.443734 && b < 0.413746 && b < 0.410989
```

```
Min[0.41175928609047024`, 0.41264025030420326`,
 0.4123491066443328`, 0.4132064644208698`, 0.42040297801938076`,
 0.4437337508863153`, 0.41374571802620413`, 0.4109885314055795`]
```

```
0.410989
```

$$\text{InequalitySolve}\left[\left\{-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)}{55279} > 0,\ -\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)}{55279} > 0,\ -\frac{(-1990537 + 1964969\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)}{7897} > 0,\ -\frac{(-1990537 + 1972866\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)}{7897} > 0,\ -\frac{(-1034914 + 1015440\,b + 722775\,g + 1071485\,h)}{23691} > 0,\ -\frac{5\,(-211721 + 203088\,b + 144555\,g + 214297\,h)}{23691} > 0,\ -\frac{100\,(-65292 + 64476\,b + 45761\,g + 68148\,h)}{55279} > 0,\ -\frac{3\,(2149200\,b + 1543793\,g + 400\,(-5441 + 5679\,h))}{55279} > 0\right\}, \{g\}\right] /. h \to 5/10 /. b \to 4/10$$

$$g < \frac{5758787}{49406850} \&\& g < \frac{27138}{228805} \&\& g < \frac{537927}{4656640} \&\& g < \frac{1645369}{13969920} \&\& g < \frac{1310441}{10979300} \&\& g < \frac{61997}{481850} \&\& g < \frac{77791}{481850} \&\& g < \frac{180920}{1543793}$$

$$N\left[g < \frac{5758787}{49406850} \&\& g < \frac{27138}{228805} \&\& g < \frac{537927}{4656640} \&\& g < \frac{1645369}{13969920} \&\& g < \frac{1310441}{10979300} \&\& g < \frac{61997}{481850} \&\& g < \frac{77791}{481850} \&\& g < \frac{180920}{1543793}\right]$$

```
g < 0.116558 && g < 0.118608 && g < 0.115518 && g < 0.117779 &&
 g < 0.119356 && g < 0.128665 && g < 0.161442 && g < 0.117192
```

```
Min[0.11655847316718228`, 0.11860754791197745`,
 0.115518270684442`, 0.11777941462800073`, 0.11935560554862332`,
 0.12866452215419735`, 0.16144235758015 98`, 0.11719187740843494`]
```

```
0.115518
```

Page 147 Derivatives of sector flows (Table X7)
with respect to the redistribution of bank liabilities

Household income

$$\text{houinc} = -\frac{(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{3360000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{55279}$$

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{55279} \;/.\; b \to 1 - h - g$$

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1097930\,g + 1546016\,(1 - g - h) + 1630823\,h)\,k}{55279}$$

$$D\left[-\frac{9\,(-1564862 + 1097930\,g + 1546016\,(1 - g - h) + 1630823\,h)\,k}{55279}, h\right]$$

$$-\frac{763263\,k}{55279}$$

N[%]

-13.8075 k

$$D\left[-\frac{9\,(-1564862 + 1097930\,g + 1546016\,(1 - g - h) + 1630823\,h)\,k}{55279}, g\right]$$

$$\frac{4032774\,k}{55279}$$

$$N\left[\frac{4032774\,k}{55279}\right]$$

72.9531 k

Household expenditure

$$\text{houexp} = -\frac{(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{15120000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{55279}$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{55279} \;/.\; b \to 1 - h - g$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 4940685\,g + 6957072\,(1 - g - h) + 7366343\,h)\,k}{55279}$$

$$D\left[-\frac{2\,(-7041879 + 4940685\,g + 6957072\,(1 - g - h) + 7366343\,h)\,k}{55279}, h\right]$$

$$-\frac{818542\,k}{55279}$$

$$N\left[-\frac{818542\,k}{55279}\right]$$

-14.8075 k

$$D\left[-\frac{2\,(-7041879+4940685\,g+6957072\,(1-g-h)+7366343\,h)\,k}{55279},\,g\right]$$

$$\frac{4032774\,k}{55279}$$

$$N\left[\frac{4032774\,k}{55279}\right]$$

$$72.9531\,k$$

Business income

$$\text{businc} = -\frac{(-1990537+1964969\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{4320000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1990537+1964969\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$-\frac{(-1990537+1964969\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{7897}\;/.\;b\to 1-h-g$$

$$-\frac{(-1990537+1396992\,g+1964969\,(1-g-h)+2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$D\left[-\frac{(-1990537+1396992\,g+1964969\,(1-g-h)+2080025\,h)\,k}{7897},\,h\right]$$

$$-\frac{115056\,k}{7897}$$

$$N\left[-\frac{115056\,k}{7897}\right]$$

$$-14.5696\,k$$

$$D\left[-\frac{(-1990537+1396992\,g+1964969\,(1-g-h)+2080025\,h)\,k}{7897},\,g\right]$$

$$\frac{567977\,k}{7897}$$

$$N\left[\frac{567977\,k}{7897}\right]$$

$$71.9231\,k$$

Business expenditure

$$\text{busexp} = -\frac{(-1990537+1972866\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{4320000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1990537+1972866\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$-\frac{(-1990537+1972866\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{7897}\;/.\;b\to 1-h-g$$

$$-\frac{(-1990537+1396992\,g+1972866\,(1-g-h)+2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$D\left[-\frac{(-1990537+1396992\,g+1972866\,(1-g-h)+2080025\,h)\,k}{7897},\,h\right]$$

$$-\frac{107159\,k}{7897}$$

$$N\left[-\frac{107159\,k}{7897}\right]$$

$$-13.5696\,k$$

$$D\left[-\frac{(-1990537+1396992\,g+1972866\,(1-g-h)+2080025\,h)\,k}{7897},\,g\right]$$

$$\frac{575874\,k}{7897}$$

$$N\left[\frac{575874\,k}{7897}\right]$$

$$72.9231\,k$$

Financier income

$$\text{fininc} = -\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,g+1071485\,h)\,k}{12960000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,g+1071485\,h)\,k}{23691}$$

$$-\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,g+1071485\,h)\,k}{23691}\;/.\;b\to 1-h-g$$

$$-\frac{(-1034914+722775\,g+1015440\,(1-g-h)+1071485\,h)\,k}{23691}$$

$$D\left[-\frac{(-1034914+722775\,g+1015440\,(1-g-h)+1071485\,h)\,k}{23691},\,h\right]$$

$$-\frac{56045\,k}{23691}$$

$$N\left[-\frac{56045\,k}{23691}\right]$$

$$-2.36567\,k$$

$$D\left[-\frac{(-1034914+722775\,g+1015440\,(1-g-h)+1071485\,h)\,k}{23691},\,g\right]$$

$$\frac{97555\,k}{7897}$$

$$N\left[\frac{97555\,k}{7897}\right]$$

$$12.3534\,k$$

Financier expenditure

$$\text{finexp} = -\frac{(-211721+203088\,b+144555\,g+214297\,h)\,k}{2592000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{5\,(-211721+203088\,b+144555\,g+214297\,h)\,k}{23691}$$

$$-\frac{5\,(-211721+203088\,b+144555\,g+214297\,h)\,k}{23691}\;/.\;b\to 1-h-g$$

$$-\frac{5\,(-211721+144555\,g+203088\,(1-g-h)+214297\,h)\,k}{23691}$$

```
D[-(5 (-211721 + 144555 g + 203088 (1 - g - h) + 214297 h) k)/23691, h]
```

$$-\frac{56045\,k}{23691}$$

```
N[-56045 k/23691]
```

```
-2.36567 k
```

```
D[-(5 (-211721 + 144555 g + 203088 (1 - g - h) + 214297 h) k)/23691, g]
```

$$\frac{97555\,k}{7897}$$

```
N[97555 k/7897]
```

```
12.3534 k
```

Government income

```
govinc = -((-65292 + 64476 b + 45761 g + 68148 h) k)/302400 / (7897/4320000)
```

$$-\frac{100\,(-65292 + 64476\,b + 45761\,g + 68148\,h)\,k}{55279}$$

```
-(100 (-65292 + 64476 b + 45761 g + 68148 h) k)/55279 /. b -> 1 - h - g
```

$$-\frac{100\,(-65292 + 45761\,g + 64476\,(1 - g - h) + 68148\,h)\,k}{55279}$$

```
D[-(100 (-65292 + 45761 g + 64476 (1 - g - h) + 68148 h) k)/55279, h]
```

$$-\frac{367200\,k}{55279}$$

```
N[-367200 k/55279]
```

```
-6.64267 k
```

```
D[-(100 (-65292 + 45761 g + 64476 (1 - g - h) + 68148 h) k)/55279, g]
```

$$\frac{1871500\,k}{55279}$$

```
N[1871500 k/55279]
```

```
33.8555 k
```

Government expenditure

```
govexp = -((2149200 b + 1543793 g + 400 (-5441 + 5679 h)) k)/10080000 / (7897/4320000)
```

$$-\frac{3\,(2149200\,b + 1543793\,g + 400\,(-5441 + 5679\,h))\,k}{55279}$$

```
-(3 (2149200 b + 1543793 g + 400 (-5441 + 5679 h)) k)/55279 /. b -> 1 - h - g
```

```
-(3 (1543793 g + 2149200 (1 - g - h) + 400 (-5441 + 5679 h)) k)/55279
```

```
D[-(3 (1543793 g + 2149200 (1 - g - h) + 400 (-5441 + 5679 h)) k)/55279, h]
```

```
-(367200 k)/55279
```

```
N[-(367200 k)/55279]
```

```
-6.64267 k
```

```
D[-(3 (1543793 g + 2149200 (1 - g - h) + 400 (-5441 + 5679 h)) k)/55279, g]
```

```
(1816221 k)/55279
```

```
N[(1816221 k)/55279]
```

```
32.8555 k
```

Page 148 Derivatives of sector flows (Table X8)
with respect to the redistribution of bank liabilities

Household income

$$\text{houinc} = -\frac{(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{3360000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{55279}$$

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{55279} /. h \to 1 - b - g$$

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1630823\,(1 - b - g) + 1097930\,g)\,k}{55279}$$

$$D\left[-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1630823\,(1 - b - g) + 1097930\,g)\,k}{55279}, b\right]$$

$$\frac{763263\,k}{55279}$$

$$N\left[\frac{763263\,k}{55279}\right]$$

$$13.8075\,k$$

$$D\left[-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1630823\,(1 - b - g) + 1097930\,g)\,k}{55279}, g\right]$$

$$\frac{4796037\,k}{55279}$$

$$N\left[\frac{4796037\,k}{55279}\right]$$

$$86.7606\,k$$

Household expenditure

$$\text{houexp} = -\frac{(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{15120000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{55279}$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{55279} /. h \to 1 - b - g$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 7366343\,(1 - b - g) + 4940685\,g)\,k}{55279}$$

$$D\left[-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 7366343\,(1 - b - g) + 4940685\,g)\,k}{55279}, b\right]$$

$$\frac{818542\,k}{55279}$$

$$N\left[\frac{818542\,k}{55279}\right]$$

$$14.8075\,k$$

```
D[-(2 (-7041879 + 6957072 b + 7366343 (1 - b - g) + 4940685 g) k)/55279, g]
```

$$\frac{4851316\,k}{55279}$$

```
N[4851316 k/55279]
```

87.7606 k

Business income

```
businc = -((-1990537 + 1964969 b + 1396992 g + 2080025 h) k)/4320000 / (7897/4320000)
```

$$-\frac{(-1990537 + 1964969\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)\,k}{7897}$$

```
-((-1990537 + 1964969 b + 1396992 g + 2080025 h) k)/7897 /. h → 1 - b - g
```

$$-\frac{(-1990537 + 1964969\,b + 2080025\,(1 - b - g) + 1396992\,g)\,k}{7897}$$

```
D[-((-1990537 + 1964969 b + 2080025 (1 - b - g) + 1396992 g) k)/7897, b]
```

$$\frac{115056\,k}{7897}$$

```
N[115056 k/7897]
```

14.5696 k

```
D[-((-1990537 + 1964969 b + 2080025 (1 - b - g) + 1396992 g) k)/7897, g]
```

$$\frac{683033\,k}{7897}$$

```
N[683033 k/7897]
```

86.4927 k

Business expenditure

```
busexp = -((-1990537 + 1972866 b + 1396992 g + 2080025 h) k)/4320000 / (7897/4320000)
```

$$-\frac{(-1990537 + 1972866\,b + 1396992\,g + 2080025\,h)\,k}{7897}$$

```
-((-1990537 + 1972866 b + 1396992 g + 2080025 h) k)/7897 /. h → 1 - b - g
```

$$-\frac{(-1990537 + 1972866\,b + 2080025\,(1 - b - g) + 1396992\,g)\,k}{7897}$$

```
D[-((-1990537 + 1972866 b + 2080025 (1 - b - g) + 1396992 g) k)/7897, b]
```

$$\frac{107159\,k}{7897}$$

$$N\left[\frac{107159\,k}{7897}\right]$$

$$13.5696\,k$$

$$D\left[-\frac{(-1990537+1972866\,b+2080025\,(1-b-g)+1396992\,g)\,k}{7897},\,g\right]$$

$$\frac{683033\,k}{7897}$$

$$N\left[\frac{683033\,k}{7897}\right]$$

$$86.4927\,k$$

Financier income

$$\text{fininc} = -\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,g+1071485\,h)\,k}{12960000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,g+1071485\,h)\,k}{23691}$$

$$-\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,g+1071485\,h)\,k}{23691}\ /.\ h\to 1-b-g$$

$$-\frac{(-1034914+1015440\,b+1071485\,(1-b-g)+722775\,g)\,k}{23691}$$

$$D\left[-\frac{(-1034914+1015440\,b+1071485\,(1-b-g)+722775\,g)\,k}{23691},\,b\right]$$

$$\frac{56045\,k}{23691}$$

$$N\left[\frac{56045\,k}{23691}\right]$$

$$2.36567\,k$$

$$D\left[-\frac{(-1034914+1015440\,b+1071485\,(1-b-g)+722775\,g)\,k}{23691},\,g\right]$$

$$\frac{348710\,k}{23691}$$

$$N\left[\frac{348710\,k}{23691}\right]$$

$$14.7191\,k$$

Financier expenditure

$$\text{finexp} = -\frac{(-211721+203088\,b+144555\,g+214297\,h)\,k}{2592000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{5\,(-211721+203088\,b+144555\,g+214297\,h)\,k}{23691}$$

$$-\frac{5\,(-211721+203088\,b+144555\,g+214297\,h)\,k}{23691}\ /.\ h\to 1-b-g$$

$$-\frac{5\,(-211721+203088\,b+214297\,(1-b-g)+144555\,g)\,k}{23691}$$

```
D[-(5 (-211721 + 203088 b + 214297 (1 - b - g) + 144555 g) k)/23691, b]
```

$$\frac{56045\,k}{23691}$$

```
N[56045 k/23691]
```

$$2.36567\,k$$

```
D[-(5 (-211721 + 203088 b + 214297 (1 - b - g) + 144555 g) k)/23691, g]
```

$$\frac{348710\,k}{23691}$$

```
N[348710 k/23691]
```

$$14.7191\,k$$

Government income

```
govinc = -((-65292 + 64476 b + 45761 g + 68148 h) k)/302400 / 7897/4320000
```

$$-\frac{100\,(-65292 + 64476\,b + 45761\,g + 68148\,h)\,k}{55279}$$

```
-(100 (-65292 + 64476 b + 45761 g + 68148 h) k)/55279 /. h → 1 - b - g
```

$$-\frac{100\,(-65292 + 64476\,b + 68148\,(1 - b - g) + 45761\,g)\,k}{55279}$$

```
D[-(100 (-65292 + 64476 b + 68148 (1 - b - g) + 45761 g) k)/55279, b]
```

$$\frac{367200\,k}{55279}$$

```
N[367200 k/55279]
```

$$6.64267\,k$$

```
D[-(100 (-65292 + 64476 b + 68148 (1 - b - g) + 45761 g) k)/55279, g]
```

$$\frac{2238700\,k}{55279}$$

```
N[2238700 k/55279]
```

$$40.4982\,k$$

Government expenditure

```
govexp = -((2149200 b + 1543793 g + 400 (-5441 + 5679 h)) k)/10080000 / 7897/4320000
```

$$-\frac{3\,(2149200\,b + 1543793\,g + 400\,(-5441 + 5679\,h))\,k}{55279}$$

$$-\frac{3\,(2149200\,b+1543793\,g+400\,(-5441+5679\,h))\,k}{55279}\ /.\ h\to 1-b-g$$

$$-\frac{3\,(2149200\,b+400\,(-5441+5679\,(1-b-g))+1543793\,g)\,k}{55279}$$

$$D\left[-\frac{3\,(2149200\,b+400\,(-5441+5679\,(1-b-g))+1543793\,g)\,k}{55279},\ b\right]$$

$$\frac{367200\,k}{55279}$$

$$N\left[\frac{367200\,k}{55279}\right]$$

$$6.64267\,k$$

$$D\left[-\frac{3\,(2149200\,b+400\,(-5441+5679\,(1-b-g))+1543793\,g)\,k}{55279},\ g\right]$$

$$\frac{2183421\,k}{55279}$$

$$N\left[\frac{2183421\,k}{55279}\right]$$

$$39.4982\,k$$

Page 148 Derivatives of sector flows (Table X9)
with respect to the redistribution of bank liabilities

Household income

$$\text{houinc} = -\frac{(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{3360000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{55279}$$

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,g + 1630823\,h)\,k}{55279} /. g \to 1 - h - b$$

$$-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,(1 - b - h) + 1630823\,h)\,k}{55279}$$

$$D\left[-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,(1 - b - h) + 1630823\,h)\,k}{55279}, h\right]$$

$$-\frac{4796037\,k}{55279}$$

$$N\left[-\frac{4796037\,k}{55279}\right]$$

$$-86.7606\,k$$

$$D\left[-\frac{9\,(-1564862 + 1546016\,b + 1097930\,(1 - b - h) + 1630823\,h)\,k}{55279}, b\right]$$

$$-\frac{4032774\,k}{55279}$$

$$N\left[-\frac{4032774\,k}{55279}\right]$$

$$-72.9531\,k$$

Household expenditure

$$\text{houexp} = -\frac{(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{15120000} \Big/ \frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{55279}$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,g + 7366343\,h)\,k}{55279} /. g \to 1 - h - b$$

$$-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,(1 - b - h) + 7366343\,h)\,k}{55279}$$

$$D\left[-\frac{2\,(-7041879 + 6957072\,b + 4940685\,(1 - b - h) + 7366343\,h)\,k}{55279}, h\right]$$

$$-\frac{4851316\,k}{55279}$$

$$N\left[-\frac{4851316\,k}{55279}\right]$$

$$-87.7606\,k$$

$$D\left[-\frac{2\,(-7041879+6957072\,b+4940685\,(1-b-h)+7366343\,h)\,k}{55279},\,b\right]$$

$$-\frac{4032774\,k}{55279}$$

$$N\left[-\frac{4032774\,k}{55279}\right]$$

$$-72.9531\,k$$

Business income

$$\text{businc} = -\frac{(-1990537+1964969\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{4320000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1990537+1964969\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$-\frac{(-1990537+1964969\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{7897}\ /.\ g\to 1-h-b$$

$$-\frac{(-1990537+1964969\,b+1396992\,(1-b-h)+2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$D\left[-\frac{(-1990537+1964969\,b+1396992\,(1-b-h)+2080025\,h)\,k}{7897},\,h\right]$$

$$-\frac{683033\,k}{7897}$$

$$N\left[-\frac{683033\,k}{7897}\right]$$

$$-86.4927\,k$$

$$D\left[-\frac{(-1990537+1964969\,b+1396992\,(1-b-h)+2080025\,h)\,k}{7897},\,b\right]$$

$$-\frac{567977\,k}{7897}$$

$$N\left[-\frac{567977\,k}{7897}\right]$$

$$-71.9231\,k$$

Business expenditure

$$\text{busexp} = -\frac{(-1990537+1972866\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{4320000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1990537+1972866\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$-\frac{(-1990537+1972866\,b+1396992\,g+2080025\,h)\,k}{7897}\ /.\ g\to 1-h-b$$

$$-\frac{(-1990537+1972866\,b+1396992\,(1-b-h)+2080025\,h)\,k}{7897}$$

$$D\left[-\frac{(-1990537+1972866\,b+1396992\,(1-b-h)+2080025\,h)\,k}{7897},\,h\right]$$

$$-\frac{683033\,k}{7897}$$

$$N\left[-\frac{683033\,k}{7897}\right]$$

$$-86.4927\,k$$

$$D\left[-\frac{(-1990537+1972866\,b+1396992\,(1-b-h)+2080025\,h)\,k}{7897},\,b\right]$$

$$-\frac{575874\,k}{7897}$$

$$N\left[-\frac{575874\,k}{7897}\right]$$

$$-72.9231\,k$$

Financier income

$$\text{fininc} = -\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,g+1071485\,h)\,k}{12960000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,g+1071485\,h)\,k}{23691}$$

$$-\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,g+1071485\,h)\,k}{23691}\ /.\ g\to 1-h-b$$

$$-\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,(1-b-h)+1071485\,h)\,k}{23691}$$

$$D\left[-\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,(1-b-h)+1071485\,h)\,k}{23691},\,h\right]$$

$$-\frac{348710\,k}{23691}$$

$$N\left[-\frac{348710\,k}{23691}\right]$$

$$-14.7191\,k$$

$$D\left[-\frac{(-1034914+1015440\,b+722775\,(1-b-h)+1071485\,h)\,k}{23691},\,b\right]$$

$$-\frac{97555\,k}{7897}$$

$$N\left[-\frac{97555\,k}{7897}\right]$$

$$-12.3534\,k$$

Financier expenditure

$$\text{finexp} = -\frac{(-211721+203088\,b+144555\,g+214297\,h)\,k}{2592000}\Big/\frac{7897}{4320000}$$

$$-\frac{5\,(-211721+203088\,b+144555\,g+214297\,h)\,k}{23691}$$

$$-\frac{5\,(-211721+203088\,b+144555\,g+214297\,h)\,k}{23691}\ /.\ g\to 1-h-b$$

$$-\frac{5\,(-211721+203088\,b+144555\,(1-b-h)+214297\,h)\,k}{23691}$$

```
D[-(5 (-211721 + 203088 b + 144555 (1 - b - h) + 214297 h) k)/23691, h]
```

$$-\frac{348710\,k}{23691}$$

```
N[-348710 k/23691]
```

$$-14.7191\,k$$

```
D[-(5 (-211721 + 203088 b + 144555 (1 - b - h) + 214297 h) k)/23691, b]
```

$$-\frac{97555\,k}{7897}$$

```
N[-97555 k/7897]
```

$$-12.3534\,k$$

Government income

```
govinc = -((-65292 + 64476 b + 45761 g + 68148 h) k)/302400 / (7897/4320000)
```

$$-\frac{100\,(-65292 + 64476\,b + 45761\,g + 68148\,h)\,k}{55279}$$

```
-(100 (-65292 + 64476 b + 45761 g + 68148 h) k)/55279 /. g → 1 - h - b
```

$$-\frac{100\,(-65292 + 64476\,b + 45761\,(1 - b - h) + 68148\,h)\,k}{55279}$$

```
D[-(100 (-65292 + 64476 b + 45761 (1 - b - h) + 68148 h) k)/55279, h]
```

$$-\frac{2238700\,k}{55279}$$

```
N[-2238700 k/55279]
```

$$-40.4982\,k$$

```
D[-(100 (-65292 + 64476 b + 45761 (1 - b - h) + 68148 h) k)/55279, b]
```

$$-\frac{1871500\,k}{55279}$$

```
N[-1871500 k/55279]
```

$$-33.8555\,k$$

Government expenditure

```
govexp = -((2149200 b + 1543793 g + 400 (-5441 + 5679 h)) k)/10080000 / (7897/4320000)
```

$$-\frac{3\,(2149200\,b + 1543793\,g + 400\,(-5441 + 5679\,h))\,k}{55279}$$

$$-\frac{3\,(2149200\,b+1543793\,g+400\,(-5441+5679\,h))\,k}{55279}\ /.\ g\to 1-h-b$$

$$-\frac{3\,(2149200\,b+1543793\,(1-b-h)+400\,(-5441+5679\,h))\,k}{55279}$$

$$D\left[-\frac{3\,(2149200\,b+1543793\,(1-b-h)+400\,(-5441+5679\,h))\,k}{55279},\ h\right]$$

$$-\frac{2183421\,k}{55279}$$

$$N\left[-\frac{2183421\,k}{55279}\right]$$

$$-39.4982\,k$$

$$D\left[-\frac{3\,(2149200\,b+1543793\,(1-b-h)+400\,(-5441+5679\,h))\,k}{55279},\ b\right]$$

$$-\frac{1816221\,k}{55279}$$

$$N\left[-\frac{1816221\,k}{55279}\right]$$

$$-32.8555\,k$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ XI

Οι ακόλουθοι υπολογισμοί με το Mathematica αναφέρονται στο Κεφάλαιο
ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΕΘΝΩΝ ΣΥΝΑΛΛΑΓΩΝ

Σελίδες		Εξισώσεις ή Πίνακες
159	Η Αντικατάσταση των Συντελεστών Τομεακών Συμπεριφορών της Δέλτα στο Παγκόσμιο Οικονομικό Μοντέλο **116**	118
161-162	Οι Συντελεστές του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου ως Συναρτήσεις των Τραπεζικών Δαπανών και η Λύση των Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Σύστημα Ανισοτήτων	120-121
164	Οι Ροές Ισορροπίας ως Συναρτήσεις της Κατανομής του Διεθνούς Τραπεζικού Παθητικού και η Λύση τους ως Σύστημα Ανισοτήτων	XI5
165	Οι Ροές Ισορροπίας και η Κατανομή τους Ανάμεσα στους Θεσμικούς Τομείς των Δύο Χωρών της Δέλτα	123-124
165	Η Κατανομή των Επαναλαμβανόμενων Αγοραπωλησιών Ανάμεσα στα Παζάρια Αγαθών των Δύο Χωρών της Δέλτα	125-126
166	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών ως προς την Ανακατανομή του Διεθνούς Τραπεζικού Παθητικού Μεταξύ Νοικοκυριών και Επιχειρήσεων	XI6
176	Αντικατάσταση των Συντελεστών Τομεακών Συμπεριφορών της Ζήτα στο Παγκόσμιο Οικονομικό Μοντέλο **116**	137
177	Υπολογισμός των Συντελεστών του Χαρακτηριστικού Πολυώνυμου και η Λύση των Συνθηκών Routh-Hurwitz ως Σύστημα Ανισοτήτων ως προς το γ, όταν $\alpha = {}^{1}/_{2}$, $\alpha = {}^{3}/_{4}$, $\alpha = {}^{7}/_{8}$, $\alpha = {}^{127}/_{128}$.	XI9
178-179	Λύση του Συστήματος των Στατικών Ροών με τον Κανόνα του Cramer και τα Όρια των Παραμέτρων α και γ όπου όλες οι Ροές είναι Θετικές	XI10
179-180	Τα Έσοδα και τα Έξοδα των Θεσμικών Τομέων των Δύο Χωρών και οι Διεθνείς Εισπράξεις και Πληρωμές της Ζήτα	140 XI11
181	Η Κατανομή των Ετήσιων Εσόδων και Εξόδων Ανάμεσα στους Θεσμικούς Τομείς των Δύο Χωρών	141-142
182-183	Υπολογισμός της Κατανομής των Επαναλαμβανόμενων Αγοραπωλησιών Ανάμεσα στα Παζάρια Αγαθών της Παγκόσμιας Οικονομίας Ζήτα	144-145
186	Λύση (με τον Κανόνα του Cramer) του Συστήματος των Στατικών Ροών ως Συναρτήσεων της Συναλλαγματικής Ισοτιμίας ξ	XI15
187	Οι Ετήσιες Ροές των Τομέων των Δύο Χωρών ως Συναρτήσεις της Συναλλαγματικής Ισοτιμίας ξ και η Λύση του Αντίστοιχου Συστήματος Ανισοτήτων	
188	Οι Παράγωγοι των Τομεακών Ροών των Δύο Χωρών ως προς τη Συναλλαγματική Ισοτιμία ξ	XI16

Page 159 Estimation of differential equation
system 118 by using the behavioural coefficients in Table XI3

equation for dy1h / dt

```
{β2h1w * e2h + β1b1w * e1b + β2b1w * e2b + βf1w * ef + (βfs * ef)
                                α2hs * y2h - α1bs * y1b - α2bs * y2b -
                                y1h} /. α1h1w → 7 / 10 /. α1hs → 3 / 10 /.
                            β1h2w → 1 / 12 /. β1h1u → 4 / 12 /. β1h2u →
                           3 / 12 /. β1hs → 4 / 12 /. a2h2w → 5 / 8 /.
                        α2hs → 3 / 8 /. β2h1w → 5 / 15 /. β2h1u → 3 / 15 /.
                     β2h2u → 4 / 15 /. β2hs → 3 / 15 /. α1b1u → 4 / 7 /.
                  α1bs → 3 / 7 /. β1b1w → 4 / 16 /. β1b2w → 3 / 16 /.
               β1b2u → 5 / 16 /. β1bs → 4 / 16 /. α2b2u → 5 / 9 /.
            α2bs → 4 / 9 /. β2b1w → 2 / 16 /. β2b2w → 6 / 16 /.
         β2b1u → 5 / 16 /. β2bs -> 3 / 16 /. afs →
        1 /. βf1w → η /
        10 /.
     βf2w → 2 η / 10 /. βf1u → 3 η / 10 /.
   βf2u →
    4
     η /
      10 /. βfs → (1 -
     η)
```

$$\left\{\frac{e1b}{4}+\frac{e2b}{8}+\frac{e2h}{3}-\frac{3\,y1b}{7}-y1h-\frac{4\,y2b}{9}-\frac{3\,y2h}{8}+ef\,(1-\eta)+\frac{ef\,\eta}{10}\right\}$$

FullSimplify[%]

$$\left\{\frac{e1b}{4}+\frac{e2b}{8}+\frac{e2h}{3}+ef-\frac{3\,y1b}{7}-y1h-\frac{4\,y2b}{9}-\frac{3\,y2h}{8}-\frac{9\,ef\,\eta}{10}\right\}$$

equation for dy2h / dt

```
{β1h2w * e1h + β1b2w * e1b + β2b2w * e2b + βf2w * ef + (βfs * ef) - α1hs * y1h - α1bs * y1b - α2bs *
    y2b - y2h} /. α1h1w → 7 / 10 /. α1hs → 3 / 10 /.
  β1h2w → 1 / 12 /. β1h1u → 4 / 12 /. β1h2u →
   3 / 12 /. β1hs → 4 / 12 /. a2h2w → 5 / 8 /.
 α2hs → 3 / 8 /. β2h1w → 5 / 15 /. β2h1u → 3 / 15 /.
 β2h2u → 4 / 15 /. β2hs → 3 / 15 /. α1b1u → 4 / 7 /.
 α1bs → 3 / 7 /. β1b1w → 4 / 16 /. β1b2w → 3 / 16 /.
 β1b2u → 5 / 16 /. β1bs → 4 / 16 /. α2b2u → 5 / 9 /.
 α2bs → 4 / 9 /. β2b1w → 2 / 16 /. β2b2w → 6 / 16 /.
  β2b1u → 5 / 16 /. β2bs -> 3 / 16 /. afs →
   1 /. βf1w → η /
    10 /.
  βf2w → 2 η / 10 /. βf1u → 3 η / 10 /.
 βf2u →
  4
   η /
 10 /. βfs → (1 - η)
```

$$\left\{\frac{3\,e1b}{16}+\frac{e1h}{12}+\frac{3\,e2b}{8}-\frac{3\,y1b}{7}-\frac{3\,y1h}{10}-\frac{4\,y2b}{9}-y2h+ef\,(1-\eta)+\frac{ef\,\eta}{5}\right\}$$

FullSimplify[%]

$$\left\{\frac{3\,e1b}{16}+\frac{e1h}{12}+\frac{3\,e2b}{8}+ef-\frac{3\,y1b}{7}-\frac{3\,y1h}{10}-\frac{4\,y2b}{9}-y2h-\frac{4\,ef\,\eta}{5}\right\}$$

equation for dy1b / dt

```
{β1h1u * e1h + β2h1u * e2h + β2b1u * e2b + βf1u * e1f + (βfs * ef) - α1hs * y1h - α2hs * y2h - α2bs *
    y2b - y1b} /. α1h1w → 7 / 10 /. α1hs → 3 / 10 /.
  β1h2w → 1 / 12 /. β1h1u → 4 / 12 /. β1h2u →
   3 / 12 /. β1hs → 4 / 12 /. a2h2w → 5 / 8 /.
 α2hs → 3 / 8 /. β2h1w → 5 / 15 /. β2h1u → 3 / 15 /.
 β2h2u → 4 / 15 /. β2hs → 3 / 15 /. α1b1u → 4 / 7 /.
 α1bs → 3 / 7 /. β1b1w → 4 / 16 /. β1b2w → 3 / 16 /.
 β1b2u → 5 / 16 /. β1bs → 4 / 16 /. α2b2u → 5 / 9 /.
 α2bs → 4 / 9 /. β2b1w → 2 / 16 /. β2b2w → 6 / 16 /.
  β2b1u → 5 / 16 /. β2bs -> 3 / 16 /. afs →
   1 /. βf1w → η /
    10 /.
  βf2w → 2 η / 10 /. βf1u → 3 η / 10 /.
 βf2u →
  4
   η /
 10 /. βfs → (1 - η)
```

$$\left\{\frac{e1h}{3}+\frac{5\,e2b}{16}+\frac{e2h}{5}-y1b-\frac{3\,y1h}{10}-\frac{4\,y2b}{9}-\frac{3\,y2h}{8}+ef\,(1-\eta)+\frac{3\,e1f\,\eta}{10}\right\}$$

FullSimplify[%]

$$\left\{\frac{e1h}{3}+\frac{5\,e2b}{16}+\frac{e2h}{5}+ef-y1b-\frac{3\,y1h}{10}-\frac{4\,y2b}{9}-\frac{3\,y2h}{8}+\frac{3\,e1f\,\eta}{10}-ef\,\eta\right\}$$

equation for dy2b / dt

```
{β1h2u * e1h + β2h2u * e2h + β1b2u * e1b + βf2u * ef + (βfs * ef) ·
                α1hs * y1h - α2hs * y2h - α1bs * y1b -
                y2b} /. α1h1w → 7 / 10 /. α1hs → 3 / 10 /.
                β1h2w → 1 / 12 /. β1h1u → 4 / 12 /. β1h2u →
                3 / 12 /. β1hs → 4 / 12 /. a2h2w → 5 / 8 /.
              α2hs → 3 / 8 /. β2h1w → 5 / 15 /. β2h1u → 3 / 15 /.
              β2h2u → 4 / 15 /. β2hs → 3 / 15 /. α1b1u → 4 / 7 /.
              α1bs → 3 / 7 /. β1b1w → 4 / 16 /. β1b2w → 3 / 16 /.
              β1b2u → 5 / 16 /. β1bs → 4 / 16 /. α2b2u → 5 / 9 /.
              α2bs → 4 / 9 /. β2b1w → 2 / 16 /. β2b2w → 6 / 16 /.
                 β2b1u → 5 / 16 /. β2bs -> 3 / 16 /. afs →
                                1 /. βf1w → η /
                                   10 /.
                        βf2w → 2 η / 10 /. βf1u → 3 η / 10 /.
                                   βf2u →
                                     4
                                    η /
                              10 /. βfs → (1 -
                                    η)
```

$$\left\{\frac{5\,e1b}{16}+\frac{e1h}{4}+\frac{4\,e2h}{15}-\frac{3\,y1b}{7}-\frac{3\,y1h}{10}-y2b-\frac{3\,y2h}{8}+ef\,(1-\eta)+\frac{2\,ef\,\eta}{5}\right\}$$

FullSimplify[%]

$$\left\{\frac{5\,e1b}{16}+\frac{e1h}{4}+\frac{4\,e2h}{15}+ef-\frac{3\,y1b}{7}-\frac{3\,y1h}{10}-y2b-\frac{3\,y2h}{8}-\frac{3\,ef\,\eta}{5}\right\}$$

equation for dyf / dt

```
{ (β1hs * e1h + β1bs * e1b + β2hs * e2h + β2bs * e2b) - yf} /. α1h1
                                  7 / 10 /. α1hs → 3 / 10 /. β1h2w → 1 / 12 /.
                               β1h1u → 4 / 12 /. β1h2u → 3 / 12 /. β1hs → 4 / 12 /.
                            a2h2w → 5 / 8 /. α2hs → 3 / 8 /. β2h1w → 5 / 15 /.
                          β2h1u → 3 / 15 /. β2h2u → 4 / 15 /. β2hs → 3 / 15 /.
                        α1b1u → 4 / 7 /. α1bs → 3 / 7 /. β1b1w → 4 / 16 /.
                     β1b2w → 3 / 16 /. β1b2u → 5 / 16 /. β1bs → 4 / 16 /.
                  α2b2u → 5 / 9 /. α2bs → 4 / 9 /. β2b1w → 2 / 16 /.
               β2b2w → 6 / 16 /. β2b1u → 5 / 16 /. β2bs -> 3 /
               16 /.
            afs → 1 /. βf1w → η / 10 /. βf2w → 2
            η /
             10 /.
          βf1u → 3 η / 10 /. βf2u →
          4
           η /
            10 /. βfs → (1 - η)
```

$$\left\{\frac{e1b}{4}+\frac{e1h}{3}+\frac{3\,e2b}{16}+\frac{e2h}{5}-yf\right\}$$

FullSimplify[%]

$$\left\{\frac{e1b}{4}+\frac{e1h}{3}+\frac{3\,e2b}{16}+\frac{e2h}{5}-yf\right\}$$

Pages 161 - 162 Estimation of characteristic polynomial (Equations 120 - 121) and Routh - Hurwitz Conditions (Table XI4)

```
deltamatrix = {{-1, 0, -3/8, 1/3, -3/7, 1/4, -4/9, 1/8, 0, (10 - 9 η)/10},
  {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-3/10, 1/12, -1, 0, -3/7,
   3/16, -4/9, 3/8, 0, (5 - 4 η)/5}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-3/10, 1/3, -3/8, 1/5, -1, 0, -4/9, 5/16, 0, (10 - 7 η)/10},
  {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-3/10, 1/4, -3/8, 4/15, -3/7,
   5/16, -1, 0, 0, (5 - 3 η)/5}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/4, 0, 3/16, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{10}(10-9\eta)\right\},\right.$$
$$\{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{12}, -1, 0, -\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, 0, \frac{1}{5}(5-4\eta)\right\},$$
$$\{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, -1, 0, -\frac{4}{9}, \frac{5}{16}, 0, \frac{1}{10}(10-7\eta)\right\},$$
$$\{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{16}, -1, 0, 0, \frac{1}{5}(5-3\eta)\right\},$$
$$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{16}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[deltamatrix]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{10}(10-9\eta) \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{5}(5-4\eta) \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{10}(10-7\eta) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{5}(5-3\eta) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{5991827}{19353600} + \frac{97166093\,\eta}{193536000}$$

```
deltaL = deltamatrix - L IdentityMatrix[10];
```

```
MatrixForm[deltaL]
```

$$\begin{pmatrix}
-1-L & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{10}(10-9\eta) \\
1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1-L & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{5}(5-4\eta) \\
0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1-L & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{10}(10-7\eta) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1-L & 0 & 0 & \frac{1}{5}(5-3\eta) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1-L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L
\end{pmatrix}$$

```
pol = Det[deltaL]
```

$$\frac{5991827}{19353600}+\frac{32708989\,L}{5806080}+\frac{1841626781\,L^2}{58060800}+\frac{918998053\,L^3}{9676800}+\frac{2587335523\,L^4}{14515200}+\frac{260666881\,L^5}{1161216}+\frac{8388461\,L^6}{43200}+\frac{13850063\,L^7}{120960}+\frac{74101\,L^8}{1680}+10\,L^9+L^{10}+\frac{97166093\,\eta}{193536000}+\frac{203009687\,L\,\eta}{72576000}+\frac{1339494413\,L^2\,\eta}{193536000}+\frac{2793152323\,L^3\,\eta}{290304000}+\frac{886533\,L^4\,\eta}{112000}+\frac{263267\,L^5\,\eta}{72000}+\frac{299\,L^6\,\eta}{400}$$

```
Expand[pol]
```

$$\frac{5991827}{19353600}+\frac{32708989\,L}{5806080}+\frac{1841626781\,L^2}{58060800}+\frac{918998053\,L^3}{9676800}+\frac{2587335523\,L^4}{14515200}+\frac{260666881\,L^5}{1161216}+\frac{8388461\,L^6}{43200}+\frac{13850063\,L^7}{120960}+\frac{74101\,L^8}{1680}+10\,L^9+L^{10}+\frac{97166093\,\eta}{193536000}+\frac{203009687\,L\,\eta}{72576000}+\frac{1339494413\,L^2\,\eta}{193536000}+\frac{2793152323\,L^3\,\eta}{290304000}+\frac{886533\,L^4\,\eta}{112000}+\frac{263267\,L^5\,\eta}{72000}+\frac{299\,L^6\,\eta}{400}$$

```
Simplify[5991827/19353600 + 32708989 L/5806080 + 1841626781 L^2/58060800 +
  918998053 L^3/9676800 + 2587335523 L^4/14515200 + 260666881 L^5/1161216 + 8388461 L^6/43200 +
  13850063 L^7/120960 + 74101 L^8/1680 + 10 L^9 + L^10 + 97166093 η/193536000 + 203009687 L η/72576000 +
  1339494413 L^2 η/193536000 + 2793152323 L^3 η/290304000 + 886533 L^4 η/112000 + 263267 L^5 η/72000 + 299 L^6 η/400]
```

$$\frac{1}{580608000}\left(66480302400\,L^7+25609305600\,L^8+5806080000\,L^9+580608000\,L^{10}+13440\,L^6(8388461+32292\,\eta)+3\,(59918270+97166093\,\eta)+4\,L\,(817724725+406019374\,\eta)+4\,L^5\,(32583360125+530746272\,\eta)+8\,L^4\,(12936677615+574473384\,\eta)+L^2\,(18416267810+4018483239\,\eta)+L^3\,(55139883180+5586304646\,\eta)\right)$$

```
a0 = Coefficient[pol, L, 10]
```

$$1$$

```
a1 = Coefficient[pol, L, 9]
```

$$10$$

```
a2 = Coefficient[pol, L, 8]
```

$$\frac{74101}{1680}$$

```
a3 = Coefficient[pol, L, 7]
```

$$\frac{13850063}{120960}$$

```
a4 = Coefficient[pol, L, 6]
```

$$\frac{8388461}{43200} + \frac{299\,\eta}{400}$$

```
a5 = Coefficient[pol, L, 5]
```

$$\frac{260666881}{1161216} + \frac{263267\,\eta}{72000}$$

```
a6 = Coefficient[pol, L, 4]
```

$$\frac{2587335523}{14515200} + \frac{886533\,\eta}{112000}$$

```
a7 = Coefficient[pol, L, 3]
```

$$\frac{918998053}{9676800} + \frac{2793152323\,\eta}{290304000}$$

```
a8 = Coefficient[pol, L, 2]
```

$$\frac{1841626781}{58060800} + \frac{1339494413\,\eta}{193536000}$$

```
a9 = Coefficient[pol, L, 1]
```

$$\frac{32708989}{5806080} + \frac{203009687\,\eta}{72576000}$$

```
a10 = Coefficient[pol, L, 0]
```

$$\frac{5991827}{19353600} + \frac{97166093\,\eta}{193536000}$$

```
rh0 = a0
```

```
1
```

```
rh1 = a1
```

```
10
```

```
rh2 = Det[{{a1, a0}, {a3, a2}}]
```

$$\frac{39502657}{120960}$$

```
rh3 = Det[{{a1, a0, 0}, {a3, a2, a1}, {a5, a4, a3}}]
```

$$\frac{295851207206591}{14631321600} - \frac{274933\,\eta}{7200}$$

```
<< Algebra`InequalitySolve`
```

```
InequalitySolve[rh3 > 0, η]
```

$$\eta < \frac{295851207206591}{558699047424}$$

```
rh4 = Det[{{a1, a0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0}, {a5, a4, a3, a2}, {a7, a6, a5, a4}}]
```

$$\frac{3604762604336261962751}{2212255825920000} - \frac{2655687212311401893\,\eta}{175575859200000} - \frac{75588154489\,\eta^2}{5184000000}$$

```
InequalitySolve[rh4 > 0, η]
```

$$\frac{5\left(-2655687212311401893-\sqrt{9982351065141518491224313392838681177}\right)}{25600800867570432}<\eta<\frac{5\left(-2655687212311401893+\sqrt{9982351065141518491224313392838681177}\right)}{25600800867570432}$$

```
N[5 (-2655687212311401893 - Sqrt[9982351065141518491224313392838681177])/25600800867570432 < η <
  5 (-2655687212311401893 + Sqrt[9982351065141518491224313392838681177])/25600800867570432]
```

$$-1135.74<\eta<98.3951$$

```
rh5 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1}, {a7, a6, a5, a4, a3}, {a9, a8, a7, a6, a5}}]
```

$$\frac{9300507028121995645143591328 1}{733973388900433920000}-\frac{1116187198663084637733925446 67\eta}{35679261960437760000000}-\frac{9347846868539049527879\eta^2}{3160365465600000000}-\frac{19899866667855563\eta^3}{373248000000000}$$

```
InequalitySolve[rh5 > 0, η]
```

$$\eta<\text{Root}\left[-203448591240168654737516060302187 5+5022842393983880869802664510015 0\#1+47490053403176304097474241280\#1^2+85601436610267446633005875 2\#1^3\&,1\right]$$

```
N[η < Root[
   -203448591240168654737516060302187 5 + 5022842393983880869802664510015 0 #1 +
    47490053403176304097474241280 #1^2 + 85601436610267446633005875 2 #1^3 &, 1]]
```

$$\eta<38.1782$$

```
rh6 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, a10, a9, a8, a7, a6}}]
```

$$\frac{1361905656896784440815662181 1423973765077}{18644098435493262262272000000 00}-\frac{7458907929975114143997399243 69393788 87\eta}{22195355280349121740800000000 0}-\frac{1107416324240517581382988199800068 07\eta^2}{43157635267345514496000000000 0}-\frac{1528852969201484687422377493568 9\eta^3}{61164449075036160000000000 0}-\frac{9545777739522490242009 23\eta^4}{3009871872000000000000}$$

```
InequalitySolve[rh6 > 0, η]
```

$$\text{Root}\left[-851191035560490275509788863213998360317 3125+3915926663236934925598634602939317391567 50\#1+2990024075449397469734068139460183789 00\#1^2+2912648368685132507702119810547982768 0\#1^3+3695597923009313523431472213934817 28\#1^4\&,1\right]<\eta<\text{Root}\left[-851191035560490275509788863213998360317 3125+3915926663236934925598634602939317391567 50\#1+2990024075449397469734068139460183789 00\#1^2+2912648368685132507702119810547982768 0\#1^3+3695597923009313523431472213934817 28\#1^4\&,2\right]$$

```
N[Root[-85119103556049027550978886321399836031731 25+
     39159266632369349255986346029393173915675 0#1 +
     29900240754493974697340681394601837890 0#1^2 +
     29126483686851325077021198105479827680#1^3 +
     36955979230093135234314722139348172 8#1^4 &, 1] <
  η < Root[-85119103556049027550978886321399836031731 25+
     39159266632369349255986346029393173915675 0#1 +
     29900240754493974697340681394601837890 0#1^2 +
     29126483686851325077021198105479827680#1^3 +
     36955979230093135234314722139348172 8#1^4 &, 2]]
```

$$-137.671 < \eta < 20.5935$$

```
rh7 = Det[
  {{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3},
   {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}}]
```

$$\frac{52280779790434404869134846240573676575939667359757}{216498254088697440311464427520000000000} -$$
$$\frac{4786125690957307650714573670838565148558564336087\eta}{309283220126710629016377753600000000000} -$$
$$\frac{1903092458018171685603169312560374930497139758 7\eta^2}{45103802935145300064888422400000000000} -$$
$$\frac{3326425818009246139249438342318156239427536 71\eta^3}{62644170743257361201233920000000000000} -$$
$$\frac{2229165404946964017946069036354830976993 1\eta^4}{17756284224279297392640000000000000} -$$
$$\frac{6338936010971379005750929338424 1\eta^5}{34951113757163520000000000000}$$

```
InequalitySolve[rh7 > 0, η]
```

```
η < Root[-65350974738043006086418557800717095719924584199696250+
    41878599795876441943752519619837445049887437940761 25#1 +
    11418554748109030113619015875362249582982838552200#1^2 +
    14370159533799943321557573638814434954326958587 20#1^3 +
    33974620770180480718955320340322524727112757376#1^4 +
    49081718421419313853471047146840382878564352 0#1^5 &, 1]
```

```
N[η < Root[-65350974738043006086418557800717095719924584199696250+
     41878599795876441943752519619837445049887437940761 25#1 +
     11418554748109030113619015875362249582982838552200#1^2 +
     14370159533799943321557573638814434954326958587 20#1^3 +
     33974620770180480718955320340322524727112757376#1^4 +
     49081718421419313853471047146840382878564352 0#1^5 &, 1]]
```

$$\eta < 13.8224$$

```
rh8 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4},
   {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}}]
```

$$\frac{1439381430636894459852390967383529884511434464742999457319 9}{41900206103310147808119579444510720000000000000} -$$
$$\frac{1864702177594078369575406642507482564766841419082966472 77\eta}{99762395484071780495522808201216000000000000000} -$$
$$\frac{6229284796967274866511410977060295728780295997257847241\eta^2}{17102124940126590942089624263065600000000000000} -$$
$$\frac{3234442863851302441933810014308951699626775742091157196 7\eta^3}{87292096048562807933582457176064000000000000000} -$$
$$\frac{2089338514326728507270060246522067546815283756478180 27\eta^4}{12123902228967056657442007941120000000000000000} -$$
$$\frac{1495804193637597291943811875607210573218757567143 9\eta^5}{34364802236301181001819750400000000000000000000} -$$
$$\frac{4613652036381127901250882187743566317599 7\eta^6}{67642987521063990067200000000000000000}$$

```
InequalitySolve[rh8 > 0, η]
```

```
Root[-17992267882961180748154887092294123556392930809287493216498 7500+
    97896864323689114402708848731642834650259174501855739820425 00#1 +
    19077184690712279278691196117247155669389656491602157175562 5#1^2 +
    19406657183107814651602860085853710197760654452546943180200#1^3 +
    90259423818914671514066602649753318022420258279857387664 0#1^4 +
    22797491883062874822623959043654472058004155330537494144#1^5 +
    35723025086881376975790243013813409317877360744054784 0#1^6 &, 1] < η <
 Root[-17992267882961180748154887092294123556392930809287493216498 7500+
    97896864323689114402708848731642834650259174501855739820425 00#1 +
    19077184690712279278691196117247155669389656491602157175562 5#1^2 +
    19406657183107814651602860085853710197760654452546943180200#1^3 +
    90259423818914671514066602649753318022420258279857387664 0#1^4 +
    22797491883062874822623959043654472058004155330537494144#1^5 +
    35723025086881376975790243013813409317877360744054784 0#1^6 &, 2]
```

```
N[Root[-17992267882961180748154887092294123556392930809287493216498 7500+
     97896864323689114402708848731642834650259174501855739820425 00#1 +
     19077184690712279278691196117247155669389656491602157175562 5#1^2 +
     19406657183107814651602860085853710197760654452546943180200#1^3 +
     90259423818914671514066602649753318022420258279857387664 0#1^4 +
     22797491883062874822623959043654472058004155330537494144#1^5 +
     35723025086881376975790243013813409317877360744054784 0#1^6 &, 1] < η <
  Root[-17992267882961180748154887092294123556392930809287493216498 7500+
     97896864323689114402708848731642834650259174501855739820425 00#1 +
     19077184690712279278691196117247155669389656491602157175562 5#1^2 +
     19406657183107814651602860085853710197760654452546943180200#1^3 +
     90259423818914671514066602649753318022420258279857387664 0#1^4 +
     22797491883062874822623959043654472058004155330537494144#1^5 +
     35723025086881376975790243013813409317877360744054784 0#1^6 &, 2]]
```

$$-40.9026 < \eta < 11.2055$$

```
rh9 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
   {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1},
   {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5},
   {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9}}]
```

$$\frac{5799586960573824448075787394141915010165397192998901966838394732 43}{4054599144205116383096115463686413352960000000000000} +$$
$$\frac{8498158471090429836584518236714863644472014366348837105688189875 93\eta}{1216379743261534914928834639105924005888000000000000000} -$$
$$\frac{6148032699393589682563799063322246261360131614077475966602941773 3\eta^2}{1216379743261534914928834639105924005888000000000000000} -$$
$$\frac{9328270176271405285740951181091077509614540322408021028856208080 69\eta^3}{1216379743261534914928834639105924005888000000000000000} -$$
$$\frac{1428006696500614716572654912258950099588022802927839251366270875 1\eta^4}{2534124465128197739435072164804008345600000000000000000} -$$
$$\frac{9841013647062444566159819605494663536927631828568313138817234 7\eta^5}{3519617312678052415882044673338900480000000000000000000} -$$
$$\frac{2890218531428183162897442822510156059642354850330546816 79\eta^6}{3990495819362871219820912328048640000000000000000000} -$$
$$\frac{1848477691006087102618279099087325572755973227 77\eta^7}{1570962387945196845797474304000000000000000000}$$

```
InequalitySolve[rh9 > 0, η]
```

```
η < Root[
  -43496902204303683360568405456064362576240478947491764751287960493225000-
    21245396177726074591461295591787159111180035915872092764220474689825 00
     #1 +
    153700817484839742064094976583056156534003290351936899165073544332 50#1^2 +
    233206754406785132143523779527276937740363508060200525721405202017 25#1^3 +
    171360803580073765988718589471074011950562736351340710163952505012 0#1^4 +
    850263579106195210516208413914738929590547389988302255193809078 08#1^5 +
    220248525143778412291967050800821940493833722898469254064118592 0#1^6 +
    357814234838494505658147821998544183401605227816201342607360 00#1^7 &, 1]
```

```
N[η < Root[
   -43496902204303683360568405456064362576240478947491764751287960493225000-
     21245396177726074591461295591787159111180035915872092764220474689825 00
      #1 +
     153700817484839742064094976583056156534003290351936899165073544332 50
      #1^2 +
     233206754406785132143523779527276937740363508060200525721405202017 25
      #1^3 +
     171360803580073765988718589471074011950562736351340710163952505012 0#1^4 +
     850263579106195210516208413914738929590547389988302255193809078 08#1^5 +
     220248525143778412291967050800821940493833722898469254064118592 0#1^6 +
     357814234838494505658147821998544183401605227816201342607360 00#1^7 &, 1]]
```

$\eta < 10.5926$

```
rh10 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
   {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2},
   {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6},
   {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10}}]
```

```
General::spell1 :
 Possible spelling error: new symbol name "rh10" is similar to existing symbol "rh0". More…
```

$$\frac{34750121739214176821240600954479168189614301366735031775255398194431849617847108999728814043188898023800136946784665600000000000000000}{}+$$
$$(21768613916193362949983369888937542731421832544191095322644643566321681401\eta)/29426658748983052661958367589250513550442496000000000000000000+$$
$$(13700817691636659624714256355063559347935666908085147943238253766776735993\eta^2)/39235544998644070215944490119000684733923328000000000000000000-$$
$$\frac{12044938834282252436357167095265795270960754977808572845300941680968936 7\eta^3}{24522215624152543884965306324375427958702080000000000000000000}-$$
$$(13535173415171786647953032370887762258879471398198593505288282854937393159\eta^4)/33630467141694917327952420102000586914791424000000000000000000000-$$
$$(14299935836880578438236864638822790913915553601883330026799808246889536 11\eta^5)/49044431248305087769930612648750855917404160000000000000000000000-$$
$$\frac{9714870493242140170597294538416753869046171973481969001787341599040871\eta^6}{68117265622645955236014739789931744329728000000000000000000000000}-$$
$$\frac{2836446624958293280999232056252702749215821372200428283027037414 7\eta^7}{77230459889621264439926008832122159104000000000000000000000000}-$$
$$\frac{1796093552327227229791082504418752917236851609550100026 1\eta^8}{30403777671336161674825998689894400000000000000000000000}$$

```
InequalitySolve[rh10 > 0, η]
```

$$-\frac{59918270}{97166093} < \eta < \text{Root}[$$
$$-43496902204303683360568405456064362576240478947491764751287960493225000-$$
$$212453961777260745914612955917871591111800359158720927642204746898250 0\#1+$$
$$153700817484839742064094976583056156534003290351936899165073544332 50\#1^2+$$
$$233206754406785132143523779527276937740363508060200525721405202017 25\#1^3+$$
$$171360803580073765988718589471074011950562736351340710163952505012 0\#1^4+$$
$$850263579106195210516208413914738929590547389988302255193809078 08\#1^5+$$
$$220248525143778412291967050800821940493833722898469254064118592 0\#1^6+$$
$$357814234838494505658147821998544183401605227816201342607360 00\#1^7\&, 1]$$

```
N[-59918270/97166093 < η < Root[
   -43496902204303683360568405456064362576240478947491764751287960493225000-
     212453961777260745914612955917871591111800359158720927642204746898250 0
      #1 +
     153700817484839742064094976583056156534003290351936899165073544332 50
      #1^2 +
     233206754406785132143523779527276937740363508060200525721405202017 25
      #1^3 +
     171360803580073765988718589471074011950562736351340710163952505012 0
      #1^4 +
     850263579106195210516208413914738929590547389988302255193809078 08
      #1^5 +
     220248525143778412291967050800821940493833722898469254064118592 0
      #1^6 +
     357814234838494505658147821998544183401605227816201342607360 00
      #1^7 &, 1]]
```

$$-0.616658 < \eta < 10.5926$$

Page 164 Cramer's Rule (Table XI5) and solution of the corresponding system of inequalities

deltamatrix =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{3}{8},\ 1/3,\ -\frac{3}{7},\ \frac{1}{4},\ -\frac{4}{9},\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{(10-9\eta)}{10}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ 1/12,\ -1,\ 0,\ -\frac{3}{7},\ \frac{3}{16},\ -\frac{4}{9},\ \frac{3}{8},\ 0,\ \frac{5-4\eta}{5}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{3},\ -\frac{3}{8},\ \frac{1}{5},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{9},\ 5/16,\ 0,\ \frac{(10-7\eta)}{10}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{4},\ -\frac{3}{8},\ \frac{4}{15},\ -\frac{3}{7},\ 5/16,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{(5-3\eta)}{5}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{3}{16},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}\ /.\ \eta \to 1/10$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{3}{8},\ \frac{1}{3},\ -\frac{3}{7},\ \frac{1}{4},\ -\frac{4}{9},\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{91}{100}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{12},\ -1,\ 0,\ -\frac{3}{7},\ \frac{3}{16},\ -\frac{4}{9},\ \frac{3}{8},\ 0,\ \frac{23}{25}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{3},\ -\frac{3}{8},\ \frac{1}{5},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{9},\ \frac{5}{16},\ 0,\ \frac{93}{100}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{4},\ -\frac{3}{8},\ \frac{4}{15},\ -\frac{3}{7},\ \frac{5}{16},\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{47}{50}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{3}{16},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[deltamatrix]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{91}{100} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{23}{25} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{93}{100} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[deltamatrix]

$$\frac{99478399}{276480000}$$

```
inchoualfa =
 {{0, 0, -3/8, 1/3, -3/7, 1/4, -4/9, 1/8, 0, (10 - 9 η)/10}, {μ1H, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 1/12, -1, 0, -3/7, 3/16, -4/9, 3/8, 0, (5 - 4 η)/5}, {μ2H, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 1/3, -3/8, 1/5, -1, 0, -4/9, 5/16, 0, (10 - 7 η)/10},
  {μ1B, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1/4, -3/8, 4/15, -3/7, 5/16, -1, 0, 0, (5 - 3 η)/5},
  {1 - μ1H - μ2H - μ1B, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/4, 0, 3/16, -1, 0},
  {-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. μ1H → 1/8 /. μ1B → 2/10 /. η → 1/10
```

$$\left\{\left\{0, 0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{91}{100}\right\}, \left\{\frac{1}{8}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{0, \frac{1}{12}, -1, 0, -\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, 0, \frac{23}{25}\right\}, \{\mu 2H, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{0, \frac{1}{3}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, -1, 0, -\frac{4}{9}, \frac{5}{16}, 0, \frac{93}{100}\right\}, \left\{\frac{1}{5}, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{0, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{16}, -1, 0, 0, \frac{47}{50}\right\}, \left\{\frac{27}{40} - \mu 2H, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\right\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{16}, -1, 0\right\}, \{-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{91}{100} \\ \frac{1}{8} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{23}{25} \\ \mu 2H & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{93}{100} \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\ \frac{27}{40} - \mu 2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[inchoualfa]
```

$$\frac{273000673}{967680000} - \frac{249229\,\mu 2H}{4300800}$$

```
inchouena = (Det[inchoualfa]) / 99478399/276480000
```

$$\frac{276480000\left(\frac{273000673}{967680000} - \frac{249229\,\mu 2H}{4300800}\right)}{99478399}$$

```
Simplify[%]
```

$$-\frac{2\,(-273000673 + 56076525\,\mu 2H)}{696348793}$$

```
exphoualfa =
 {{-1, 0, -3/8, 1/3, -3/7, 1/4, -4/9, 1/8, 0, (10 - 9 η)/10}, {1, μ1H, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
     {-3/10, 0, -1, 0, -3/7, 3/16, -4/9, 3/8, 0, (5 - 4 η)/5}, {0, μ2H, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
     {-3/10, 0, -3/8, 1/5, -1, 0, -4/9, 5/16, 0, (10 - 7 η)/10}, {0, μ1B, 0, 0, 1,
      -1, 0, 0, 0, 0}, {-3/10, 0, -3/8, 4/15, -3/7, 5/16, -1, 0, 0, (5 - 3 η)/5},
     {0, 1 - μ1H - μ2H - μ1B, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1/5, 0, 1/4, 0, 3/16, -1, 0},
     {0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. μ1H → 1/8 /. μ1B → 2/10 /. η → 1/10
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{91}{100}\right\}, \left\{1, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, 0, -1, 0, -\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, 0, \frac{23}{25}\right\}, \{0, \mu 2H, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, 0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, -1, 0, -\frac{4}{9}, \frac{5}{16}, 0, \frac{93}{100}\right\}, \left\{0, \frac{1}{5}, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, 0, -\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{16}, -1, 0, 0, \frac{47}{50}\right\}, \left\{0, \frac{27}{40} - \mu 2H, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\right\},$$
$$\left.\left\{0, 0, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{16}, -1, 0\right\}, \{0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{91}{100} \\
1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{23}{25} \\
0 & \mu 2H & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{93}{100} \\
0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\
0 & \frac{27}{40} - \mu 2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[exphoualfa]
```

$$\frac{48955493}{206438400} - \frac{249229\,\mu 2H}{4300800}$$

```
exphouena = (Det[exphoualfa]) / 99478399/276480000
```

$$\frac{276480000\left(\frac{48955493}{206438400} - \frac{249229\,\mu 2H}{4300800}\right)}{99478399}$$

```
Simplify[%]
```

$$-\frac{75\,(-48955493 + 11962992\,\mu 2H)}{5570790344}$$

```
inchoubeta =
{{-1, 0, 0, 1/3, -3/7, 1/4, -4/9, 1/8, 0, (10 - 9 η)/10}, {1, -1, μ1H, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-3/10, 1/12, 0, 0, -3/7, 3/16, -4/9, 3/8, 0, (5 - 4 η)/5}, {0, 0, μ2H, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-3/10, 1/3, 0, 1/5, -1, 0, -4/9, 5/16, 0, (10 - 7 η)/10}, {0, 0, μ1B, 0, 1,
  -1, 0, 0, 0, 0}, {-3/10, 1/4, 0, 4/15, -3/7, 5/16, -1, 0, 0, (5 - 3 η)/5},
 {0, 0, 1 - μ1H - μ2H - μ1B, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/4, 0, 3/16, -1, 0},
 {0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. μ1H → 1/8 /. μ1B → 2/10 /. η → 1/10
```

$$\left\{\left\{-1, 0, 0, \frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{91}{100}\right\}, \left\{1, -1, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{12}, 0, 0, -\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, 0, \frac{23}{25}\right\}, \{0, 0, \mu 2H, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, -1, 0, -\frac{4}{9}, \frac{5}{16}, 0, \frac{93}{100}\right\}, \left\{0, 0, \frac{1}{5}, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{4}, 0, \frac{4}{15}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{16}, -1, 0, 0, \frac{47}{50}\right\}, \left\{0, 0, \frac{27}{40} - \mu 2H, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\right\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{16}, -1, 0\right\}, \{0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{91}{100} \\ 1 & -1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{23}{25} \\ 0 & 0 & \mu 2H & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{93}{100} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\ 0 & 0 & \frac{27}{40} - \mu 2H & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[inchoubeta]
```

$$\frac{17243483}{64512000} + \frac{33373421\,\mu 2H}{241920000}$$

```
inchoudyo = (Det[inchoubeta]) / 99478399/276480000
```

$$\frac{276480000\left(\frac{17243483}{64512000} + \frac{33373421\,\mu 2H}{241920000}\right)}{99478399}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{2\,(258652245 + 133493684\,\mu 2H)}{696348793}$$

```
exphoubeta =
 {{-1, 0, -3/8, 0, -3/7, 1/4, -4/9, 1/8, 0, (10 - 9 η)/10}, {1, -1, 0, μ1H, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {-3/10, 1/12, -1, 0, -3/7, 3/16, -4/9, 3/8, 0, (5 - 4 η)/5}, {0, 0, 1, μ2H, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {-3/10, 1/3, -3/8, 0, -1, 0, -4/9, 5/16, 0, (10 - 7 η)/10}, {0, 0, 0, μ1B, 1,
     -1, 0, 0, 0, 0}, {-3/10, 1/4, -3/8, 0, -3/7, 5/16, -1, 0, 0, (5 - 3 η)/5},
    {0, 0, 0, 1 - μ1H - μ2H - μ1B, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1/3, 0, 0, 0, 1/4, 0, 3/16, -1, 0},
    {0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. μ1H → 1/8 /. μ1B → 2/10 /. η → 1/10
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{3}{8}, 0, -\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{91}{100}\right\}, \left\{1, -1, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{12}, -1, 0, -\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, 0, \frac{23}{25}\right\}, \{0, 0, 1, \mu 2H, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{8}, 0, -1, 0, -\frac{4}{9}, \frac{5}{16}, 0, \frac{93}{100}\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{1}{5}, 1, -1, 0, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, 0, -\frac{3}{7}, \frac{5}{16}, -1, 0, 0, \frac{47}{50}\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{27}{40} - \mu 2H, 0, 0, 1, -1, 0, 0\right\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{16}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{91}{100} \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{23}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \mu 2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & 0 & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{93}{100} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{27}{40} - \mu 2H & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[exphoubeta]
```

$$\frac{17243483}{64512000} - \frac{636091\,\mu 2H}{2867200}$$

```
exphoudyo = (Det[exphoubeta]) / 99478399/276480000
```

$$\frac{276480000\left(\frac{17243483}{64512000} - \frac{636091\,\mu 2H}{2867200}\right)}{99478399}$$

```
Simplify[%]
```

$$-\frac{15\,(-34486966 + 28624095\,\mu 2H)}{696348793}$$

```
incbusalfa =
 {{-1, 0, -3/8, 1/3, 0, 1/4, -4/9, 1/8, 0, (10 - 9 η)/10}, {1, -1, 0, 0, μ1H, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-3/10, 1/12, -1, 0, 0, 3/16, -4/9, 3/8, 0, (5 - 4 η)/5}, {0, 0, 1, -1, μ2H, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-3/10, 1/3, -3/8, 1/5, 0, 0, -4/9, 5/16, 0, (10 - 7 η)/10}, {0, 0, 0, 0, μ1B,
   -1, 0, 0, 0, 0}, {-3/10, 1/4, -3/8, 4/15, 0, 5/16, -1, 0, 0, (5 - 3 η)/5},
  {0, 0, 0, 0, 1 - μ1H - μ2H - μ1B, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/4, 0, 3/16, -1, 0},
  {0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, -1}} /. μ1H → 1/8 /. μ1B → 2/10 /. η → 1/10
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{91}{100}\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{12}, -1, 0, 0, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, 0, \frac{23}{25}\right\}, \{0, 0, 1, -1, \mu2H, 0, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, 0, 0, -\frac{4}{9}, \frac{5}{16}, 0, \frac{93}{100}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, -1, 0, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, 0, \frac{5}{16}, -1, 0, 0, \frac{47}{50}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, \frac{27}{40} - \mu2H, 0, 1, -1, 0, 0\right\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{16}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{91}{100} \\
1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{23}{25} \\
0 & 0 & 1 & -1 & \mu2H & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{93}{100} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & 0 & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{40} - \mu2H & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[incbusalfa]
```

$$\frac{208665149}{552960000} + \frac{113813\,\mu2H}{6912000}$$

```
incbusena = (Det[incbusalfa]) / 99478399/276480000
```

$$\frac{276480000\left(\frac{208665149}{552960000} + \frac{113813\,\mu2H}{6912000}\right)}{99478399}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{7\,(29809307 + 1300720\,\mu2H)}{198956798}$$

```
expbusalfa =
 {{-1, 0, -3/8, 1/3, -3/7, 0, -4/9, 1/8, 0, (10 - 9 η)/10}, {1, -1, 0, 0, 0, μ1H, 0, 0, 0, 0},
  {-3/10, 1/12, -1, 0, -3/7, 0, -4/9, 3/8, 0, (5 - 4 η)/5}, {0, 0, 1, -1, 0, μ2H, 0, 0, 0, 0},
  {-3/10, 1/3, -3/8, 1/5, -1, 0, -4/9, 5/16, 0, (10 - 7 η)/10},
  {0, 0, 0, 0, 1, μ1B, 0, 0, 0, 0}, {-3/10, 1/4, -3/8, 4/15, -3/7, 0, -1, 0, 0, (5 - 3 η)/5},
  {0, 0, 0, 0, 0, 1 - μ1H - μ2H - μ1B, 1, -1, 0, 0}, {0, 1/3, 0, 1/5, 0, 0, 0, 3/16, -1, 0},
  {0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, -1}} /. μ1H → 1/8 /. μ1B → 2/10 /. η → 1/10
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, 0, -\frac{4}{9}, \frac{1}{8}, 0, \frac{91}{100}\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{12}, -1, 0, -\frac{3}{7}, 0, -\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, 0, \frac{23}{25}\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, \mu 2H, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, -1, 0, -\frac{4}{9}, \frac{5}{16}, 0, \frac{93}{100}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 1, \frac{1}{5}, 0, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, -\frac{3}{7}, 0, -1, 0, 0, \frac{47}{50}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, \frac{27}{40} - \mu 2H, 1, -1, 0, 0\right\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, 0, 0, \frac{3}{16}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{91}{100} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{23}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \mu 2H & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{93}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{40} - \mu 2H & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[expbusalfa]
```

$$\frac{844368947}{2764800000} + \frac{113813\,\mu 2H}{6912000}$$

```
expbusena = (Det[expbusalfa]) / 99478399/276480000
```

$$\frac{276480000\left(\frac{844368947}{2764800000} + \frac{113813\,\mu 2H}{6912000}\right)}{99478399}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{844368947 + 45525200\,\mu 2H}{994783990}$$

```
incbusbeta =
 {{-1, 0, -3/8, 1/3, -3/7, 1/4, 0, 1/8, 0, (10 - 9 η)/10}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, μ1H, 0, 0, 0},
  {-3/10, 1/12, -1, 0, -3/7, 3/16, 0, 3/8, 0, (5 - 4 η)/5}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, μ2H, 0, 0, 0},
  {-3/10, 1/3, -3/8, 1/5, -1, 0, 0, 5/16, 0, (10 - 7 η)/10}, {0, 0, 0, 0, 1, -1,
   μ1B, 0, 0, 0}, {-3/10, 1/4, -3/8, 4/15, -3/7, 5/16, 0, 0, 0, (5 - 3 η)/5},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1 - μ1H - μ2H - μ1B, -1, 0, 0}, {0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/4, 0, 3/16, -1, 0},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, -1}} /. μ1H → 1/8 /. μ1B → 2/10 /. η → 1/10
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{91}{100}\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{12}, -1, 0, -\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, 0, \frac{3}{8}, 0, \frac{23}{25}\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, \mu 2H, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, -1, 0, 0, \frac{5}{16}, 0, \frac{93}{100}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 1, -1, \frac{1}{5}, 0, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{16}, 0, 0, 0, \frac{47}{50}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{27}{40} - \mu 2H, -1, 0, 0\right\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{16}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{91}{100} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{23}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \mu 2H & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1 & 0 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{93}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & 0 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{40} - \mu 2H & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[incbusbeta]
```

$$\frac{1291813209}{2867200000} - \frac{8918059\,\mu 2H}{71680000}$$

```
incbusdyo = (Det[incbusbeta]) / 99478399/276480000
```

$$\frac{276480000\left(\frac{1291813209}{2867200000} - \frac{8918059\,\mu 2H}{71680000}\right)}{99478399}$$

```
Simplify[%]
```

$$-\frac{27\,(-1291813209 + 356722360\,\mu 2H)}{27853951720}$$

```
expbusbeta =
{{-1, 0, -3/8, 1/3, -3/7, 1/4, -4/9, 0, 0, (10 - 9 η)/10}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, μ1H, 0, 0},
 {-3/10, 1/12, -1, 0, -3/7, 3/16, -4/9, 0, 0, (5 - 4 η)/5}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, μ2H, 0, 0},
 {-3/10, 1/3, -3/8, 1/5, -1, 0, -4/9, 0, 0, (10 - 7 η)/10}, {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, μ1B, 0, 0},
 {-3/10, 1/4, -3/8, 4/15, -3/7, 5/16, -1, 0, 0, (5 - 3 η)/5},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1 - μ1H - μ2H - μ1B, 0, 0}, {0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/4, 0, 0, -1, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, -1}} /. μ1H → 1/8 /. μ1B → 2/10 /. η → 1/10
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, -\frac{4}{9}, 0, 0, \frac{91}{100}\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{12}, -1, 0, -\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, 0, 0, \frac{23}{25}\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, \mu 2H, 0, 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, -1, 0, -\frac{4}{9}, 0, 0, \frac{93}{100}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, \frac{1}{5}, 0, 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{16}, -1, 0, 0, \frac{47}{50}\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \frac{27}{40} - \mu 2H, 0, 0\right\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{91}{100} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{23}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \mu 2H & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & 0 & 0 & \frac{93}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{27}{40} - \mu 2H & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[expbusbeta]
```

$$\frac{18608263}{89600000} + \frac{1138903\,\mu 2H}{4838400}$$

```
expbusdyo = (Det[expbusbeta]) / 99478399/276480000
```

$$\frac{276480000\left(\frac{18608263}{89600000} + \frac{1138903\,\mu 2H}{4838400}\right)}{99478399}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{4\,(502423101 + 569451500\,\mu 2H)}{3481743965}$$

incfinalfa =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{3}{8},\ 1/3,\ -\frac{3}{7},\ \frac{1}{4},\ -\frac{4}{9},\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{(10-9\eta)}{10}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \mu 1H,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ 1/12,\ -1,\ 0,\ -\frac{3}{7},\ \frac{3}{16},\ -\frac{4}{9},\ \frac{3}{8},\ 0,\ \frac{5-4\eta}{5}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,$$
$$\mu 2H,\ 0\},\ \left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{3},\ -\frac{3}{8},\ \frac{1}{5},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{9},\ 5/16,\ 0,\ \frac{(10-7\eta)}{10}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,$$
$$1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \mu 1B,\ 0\},\ \left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{4},\ -\frac{3}{8},\ \frac{4}{15},\ -\frac{3}{7},\ 5/16,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{(5-3\eta)}{5}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1-\mu 1H-\mu 2H-\mu 1B,\ 0\},\ \left\{0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{3}{16},\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1\}\right\}\ /.\ \mu 1H \to 1/8\ /.\ \mu 1B \to 2/10\ /.\ \eta \to 1/10$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{3}{8},\ \frac{1}{3},\ -\frac{3}{7},\ \frac{1}{4},\ -\frac{4}{9},\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{91}{100}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{8},\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{12},\ -1,\ 0,\ -\frac{3}{7},\ \frac{3}{16},\ -\frac{4}{9},\ \frac{3}{8},\ 0,\ \frac{23}{25}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \mu 2H,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{3},\ -\frac{3}{8},\ \frac{1}{5},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{9},\ \frac{5}{16},\ 0,\ \frac{93}{100}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10},\ \frac{1}{4},\ -\frac{3}{8},\ \frac{4}{15},\ -\frac{3}{7},\ \frac{5}{16},\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{47}{50}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ \frac{27}{40}-\mu 2H,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ \frac{3}{16},\ 0,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{91}{100} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & \frac{23}{25} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu 2H & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & \frac{93}{100} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\
-\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & \frac{47}{50} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{27}{40}-\mu 2H & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[incfinalfa]

$$\frac{319716563}{1290240000}-\frac{1867\,\mu 2H}{120960}$$

incfinsec = (Det[incfinalfa]) / $\frac{99478399}{276480000}$

$$\frac{276480000\left(\frac{319716563}{1290240000}-\frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{99478399}$$

Simplify[%]

$$\frac{959149689-59744000\,\mu 2H}{1392697586}$$

```
expfinalfa = {{-1, 0, -3/8, 1/3, -3/7, 1/4, -4/9, 1/8, 0, 0},
    {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, μ1H}, {-3/10, 1/12, -1, 0, -3/7, 3/16, -4/9, 3/8, 0, 0},
    {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, μ2H}, {-3/10, 1/3, -3/8, 1/5, -1, 0, -4/9, 5/16, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, μ1B}, {-3/10, 1/4, -3/8, 4/15, -3/7, 5/16, -1, 0, 0, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 1 - μ1H - μ2H - μ1B}, {0, 1/3, 0, 1/5, 0, 1/4, 0, 3/16, -1, 0},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}} /. μ1H → 1/8 /. μ1B → 2/10 /. η → 1/10
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{3}{8}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{7}, \frac{1}{4}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{8}, 0, 0\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{8}\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{12}, -1, 0, -\frac{3}{7}, \frac{3}{16}, -\frac{4}{9}, \frac{3}{8}, 0, 0\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \mu 2H\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, -1, 0, -\frac{4}{9}, \frac{5}{16}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, \frac{1}{5}\right\},$$
$$\left\{-\frac{3}{10}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{4}{15}, -\frac{3}{7}, \frac{5}{16}, -1, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, \frac{27}{40} - \mu 2H\right\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{3}{16}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{4} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{12} & -1 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{3}{16} & -\frac{4}{9} & \frac{3}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu 2H \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{5} & -1 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{4}{15} & -\frac{3}{7} & \frac{5}{16} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{27}{40} - \mu 2H \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[expfinalfa]
```

$$\frac{94073891}{154828800} - \frac{1867\,\mu 2H}{120960}$$

```
expfinsec = (Det[expfinalfa]) / 99478399/276480000
```

$$\frac{276480000\left(\frac{94073891}{154828800} - \frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{99478399}$$

```
Simplify[%]
```

$$-\frac{25\,(-94073891 + 2389760\,\mu 2H)}{1392697586}$$

```
<< Algebra`InequalitySolve`

InequalitySolve[
 {Det[inchoualfa] > 0 && Det[inchoubeta] > 0 && Det[incbusalfa] > 0 && Det[incbusbeta] >
    0 && Det[incfinalfa] > 0 && Det[exphoualfa] > 0 && Det[exphoubeta] > 0 &&
   Det[expbusalfa] > 0 && Det[expbusbeta] > 0 && Det[expfinalfa] > 0}, {μ2H}]
```

$$-\frac{502423101}{569451500} < \mu 2H < \frac{34486966}{28624095}$$

$$N\left[-\frac{502423101}{569451500} < \mu 2H < \frac{34486966}{28624095}\right]$$

$$-0.882293 < \mu 2H < 1.20482$$

```
FullSimplify[Det[inchoualfa] + Det[inchoubeta] +
  Det[incbusalfa] + Det[incbusbeta] + Det[incfinalfa]]
```

$$\frac{125807304723 - 3358305400\,\mu 2H}{77414400000}$$

```
FullSimplify[Det[exphoualfa] + Det[exphoubeta] +
  Det[expbusalfa] + Det[expbusbeta] + Det[expfinalfa]]
```

$$\frac{125807304723 - 3358305400\,\mu 2H}{77414400000}$$

```
FullSimplify[inchouena + inchoudyo + incbusena + incbusdyo + incfinsec]
```

$$\frac{125807304723 - 3358305400\,\mu 2H}{27853951720}$$

```
FullSimplify[exphouena + exphoudyo + expbusena + expbusdyo + expfinsec]
```

$$\frac{125807304723 - 3358305400\,\mu 2H}{27853951720}$$

Page 165 Distribution of income - expenditure flows among institutional sectors (Equations 123 - 124)

$$\text{inchouena} = \frac{1935360000\left(\frac{24507739}{120960000} - \frac{902861\,\mu 2H}{12902400}\right)}{890680979} \text{ /. } \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{1473694891}{3562723916}$$

$$N\left[\frac{1473694891}{3562723916}\right]$$

0.413643

```
100 * 0.41364274239205456` / 2.634422478275468`
```

15.7015

$$\text{exphouena} = \left(\frac{249589957}{1720320000} - \frac{902861\,\mu 2H}{12902400}\right) \Big/ \frac{890680979}{1935360000} \text{ /. } \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{2056708803}{7125447832}$$

$$N\left[\frac{2056708803}{7125447832}\right]$$

0.288643

```
100 * 0.28864274239205456` / 2.634422478275468`
```

10.9566

$$\text{inchoudyo} = \left(\frac{2312083}{12902400} + \frac{43656463\,\mu 2H}{241920000}\right) \Big/ \frac{890680979}{1935360000} \text{ /. } \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{2039657491}{4453404895}$$

$$N\left[\frac{2039657491}{4453404895}\right]$$

0.458

```
100 * 0.45799956192844665` / 2.634422478275468`
```

17.3852

$$\text{exphoudyo} = \frac{1935360000\left(\frac{2312083}{12902400} - \frac{7219057\,\mu 2H}{25804800}\right)}{890680979} \text{ /. } \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{2016498615}{7125447832}$$

$$N\left[\frac{2016498615}{7125447832}\right]$$

0.283

```
100 * 0.28299956192844666` / 2.634422478275468`
```

10.7424

$$\text{incbusena} = \frac{1935360000\left(\frac{75652199}{276480000} + \frac{60013\,\mu 2H}{2304000}\right)}{890680979} /. \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{538387304}{890680979}$$

$$N\left[\frac{538387304}{890680979}\right]$$

```
0.604467
```

```
100 * 0.6044670501490523` / 2.634422478275468`
```

```
22.945
```

$$\text{expbusena} = \frac{1935360000\left(\frac{489441439}{2150400000} + \frac{60013\,\mu 2H}{2304000}\right)}{890680979} /. \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{4493192061}{8906809790}$$

$$N\left[\frac{4493192061}{8906809790}\right]$$

```
0.504467
```

```
100 * 0.5044670501490524` / 2.634422478275468`
```

```
19.1491
```

$$\text{incbusdyo} = \frac{1935360000\left(\frac{3538979333}{8601600000} - \frac{33213931\,\mu 2H}{215040000}\right)}{890680979} /. \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{3719792043}{4453404895}$$

$$N\left[\frac{3719792043}{4453404895}\right]$$

```
0.835269
```

```
100 * 0.8352692222475316` / 2.634422478275468`
```

```
31.706
```

$$\text{expbusdyo} = \frac{1935360000\left(\frac{132490739}{2419200000} + \frac{1479389\,\mu 2H}{4838400}\right)}{890680979} /. \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{1047749106}{4453404895}$$

$$N\left[\frac{1047749106}{4453404895}\right]$$

```
0.235269
```

```
100 * 0.23526922224753158` / 2.634422478275468`
```

```
8.93058
```

$$\text{incfinsec} = \frac{1935360000\left(\frac{195304439}{1290240000} - \frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{890680979} \text{ /. } \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{575458117}{1781361958}$$

$$N\left[\frac{575458117}{1781361958}\right]$$

```
0.323044
```

```
100 * 0.3230439015583828` / 2.634422478275468`
```

```
12.2624
```

$$\text{expfinsec} = \frac{1935360000\left(\frac{94691011}{154828800} - \frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{890680979} \text{ /. } \mu 2H \to 14/80$$

$$\frac{2356820075}{1781361958}$$

$$N\left[\frac{2356820075}{1781361958}\right]$$

```
1.32304
```

```
100 * 1.3230439015583828` / 2.634422478275468`
```

```
50.2214
```

```
FullSimplify[inchouena + inchoudyo + incbusena + incbusdyo + incfinsec]
```

$$\frac{46928599841}{17813619580}$$

$$N\left[\frac{46928599841}{17813619580}\right]$$

```
2.63442
```

```
FullSimplify[exphouena + exphoudyo + expbusena + expbusdyo + expfinsec]
```

$$\frac{46928599841}{17813619580}$$

$$N\left[\frac{46928599841}{17813619580}\right]$$

```
2.63442
```

Page 165 Market equilibrium equation 125 and turnover distribution equation 126

equation for w1h

```
{β2h1w * e2h + β1b1w * e1b + β2b1w * e2b + βf1w * ef} /. α1h1w →
                                7 / 10 /. α1hs → 3 / 10 /. β1h2w → 1 / 12 /.
                            β1h1u → 4 / 12 /. β1h2u → 3 / 12 /. β1hs → 4 / 12 /
                        a2h2w → 5 / 8 /. α2hs → 3 / 8 /. β2h1w → 5 / 15 /.
                    β2h1u → 3 / 15 /. β2h2u → 4 / 15 /. β2hs → 3 / 15 /.
                α1b1u → 4 / 7 /. α1bs → 3 / 7 /. β1b1w → 4 / 16 /.
            β1b2w → 3 / 16 /. β1b2u → 5 / 16 /. β1bs → 4 / 16 /.
        α2b2u → 5 / 9 /. α2bs → 4 / 9 /. β2b1w → 2 / 16 /.
    β2b2w → 6 / 16 /. β2b1u → 5 / 16 /. β2bs -> 3 / 16 /.
  afs → 1 /. βf1w → η / 10 /. βf2w → 2
  η /
   10 /.
 βf1u → 3 η / 10 /. βf2u → 4
 η /
  10 /. βfs → (1 -
 η) /. η → 1 / 10
```

$$\left\{\frac{e1b}{4}+\frac{e2b}{8}+\frac{e2h}{3}+\frac{ef}{100}\right\}$$

$$\left\{\frac{e1b}{4}+\frac{e2b}{8}+\frac{e2h}{3}+\frac{ef}{100}\right\} /. e1b \to 0.504467 /. e2h \to 0.283 /. e2b \to 0.235269 /. ef \to 1.32304$$

{0.263089}

w1h = {0.2630891083333333`}

{0.263089}

100 * {0.2630891083333333`} / 2.63442`

{9.9866}

equation for w2h

```
{β1h2w * e1h + β1b2w * e1b + β2b2w * e2b + βf2w * ef} /. α1h1w → 7 / 10 /. α1hs → 3 / 10 /.
                                β1h2w → 1 / 12 /. β1h1u → 4 / 12 /. β1h2u →
                                3 / 12 /. β1hs → 4 / 12 /. a2h2w → 5 / 8 /.
                            α2hs → 3 / 8 /. β2h1w → 5 / 15 /. β2h1u → 3 / 15 /.
                            β2h2u → 4 / 15 /. β2hs → 3 / 15 /. α1b1u → 4 / 7 /.
                            α1bs → 3 / 7 /. β1b1w → 4 / 16 /. β1b2w → 3 / 16 /.
                            β1b2u → 5 / 16 /. β1bs → 4 / 16 /. α2b2u → 5 / 9 /.
                            α2bs → 4 / 9 /. β2b1w → 2 / 16 /. β2b2w → 6 / 16 /.
                            β2b1u → 5 / 16 /. β2bs -> 3 / 16 /. afs → 1 /.
                            βf1w → η / 10 /. βf2w → 2 η / 10 /. βf1u → 3
                                                                η /
                                                               10 /.
                                                    βf2u → 4 η / 10 /. βfs → (1 -
                                                               η) /. η → 1 / 10
```

$$\left\{\frac{3\,e1b}{16}+\frac{e1h}{12}+\frac{3\,e2b}{8}+\frac{ef}{50}\right\}$$

$$\left\{\frac{3\,e1b}{16}+\frac{e1h}{12}+\frac{3\,e2b}{8}+\frac{ef}{50}\right\}\text{ /. e1h} \to 0.288643\text{ /. e1b} \to 0.504467\text{ /. e2h} \to 0.283\text{ /. e2b} \to 0.235269\text{ /. ef} \to 1.32304$$

```
{0.233328}
```

```
w2h = {0.23332782083333334`}
```

```
{0.233328}
```

```
100 * {0.23332782083333334`} / 2.63442`
```

```
{8.8569}
```

equation for u1b

$$\{\beta 1h1u * e1h + \beta 2h1u * e2h + \beta 2b1u * e2b + \beta f1u * ef\}\text{ /. }\alpha 1h1w \to 7/10\text{ /. }\alpha 1hs \to 3/10\text{ /. }\beta 1h2w \to 1/12\text{ /. }\beta 1h1u \to 4/12\text{ /. }\beta 1h2u \to 3/12\text{ /. }\beta 1hs \to 4/12\text{ /. a2h2w} \to 5/8\text{ /. }\alpha 2hs \to 3/8\text{ /. }\beta 2h1w \to 5/15\text{ /. }\beta 2h1u \to 3/15\text{ /. }\beta 2h2u \to 4/15\text{ /. }\beta 2hs \to 3/15\text{ /. }\alpha 1b1u \to 4/7\text{ /. }\alpha 1bs \to 3/7\text{ /. }\beta 1b1w \to 4/16\text{ /. }\beta 1b2w \to 3/16\text{ /. }\beta 1b2u \to 5/16\text{ /. }\beta 1bs \to 4/16\text{ /. }\alpha 2b2u \to 5/9\text{ /. }\alpha 2bs \to 4/9\text{ /. }\beta 2b1w \to 2/16\text{ /. }\beta 2b2w \to 6/16\text{ /. }\beta 2b1u \to 5/16\text{ /. }\beta 2bs \text{ -> } 3/16\text{ /. afs} \to 1\text{ /. }\beta f1w \to \eta/10\text{ /. }\beta f2w \to 2\eta/10\text{ /. }\beta f1u \to 3\eta/10\text{ /. }\beta f2u \to 4\eta/10\text{ /. }\beta fs \to (1-\eta)\text{ /. }\eta \to 1/10$$

$$\left\{\frac{e1h}{3}+\frac{5\,e2b}{16}+\frac{e2h}{5}+\frac{3\,ef}{100}\right\}$$

$$\left\{\frac{e1h}{3}+\frac{5\,e2b}{16}+\frac{e2h}{5}+\frac{3\,ef}{100}\right\}\text{ /. e1h} \to 0.288643\text{ /. e1b} \to 0.504467\text{ /. e2h} \to 0.283\text{ /. e2b} \to 0.235269\text{ /. ef} \to 1.32304$$

```
{0.266027}
```

```
u1b = {0.26602709583333334`}
```

```
{0.266027}
```

```
100 * {0.26602709583333334`} / 2.63442`
```

```
{10.0981}
```

equation for u2b

```
{β1h2u * e1h + β2h2u * e2h + β1b2u * e1b + βf2u * ef} /. α1h1w →
                                                7 / 10 /. α1hs → 3 / 10 /. β1h2w → 1 / 12 /.
                                              β1h1u → 4 / 12 /. β1h2u → 3 / 12 /. β1hs → 4 / 12 /.
                                              a2h2w → 5 / 8 /. α2hs → 3 / 8 /. β2h1w → 5 / 15 /.
                                              β2h1u → 3 / 15 /. β2h2u → 4 / 15 /. β2hs → 3 / 15 /.
                                              α1b1u → 4 / 7 /. α1bs → 3 / 7 /. β1b1w → 4 / 16 /.
                                              β1b2w → 3 / 16 /. β1b2u → 5 / 16 /. β1bs → 4 / 16 /.
                                              α2b2u → 5 / 9 /. α2bs → 4 / 9 /. β2b1w → 2 / 16 /.
                                              β2b2w → 6 / 16 /. β2b1u → 5 / 16 /. β2bs -> 3 / 16 /.
                                              afs → 1 /. βf1w → η / 10 /. βf2w → 2
                                                                                  η /
                                                                                10 /.
                                                                              βf1u → 3 η / 10 /. βf2u → 4
                                                                                                  η /
                                                                                              10 /. βfs → (1 -
                                                                                                η) /. η → 1 / 10
```

$$\left\{\frac{5\,e1b}{16}+\frac{e1h}{4}+\frac{4\,e2h}{15}+\frac{ef}{25}\right\}$$

```
{5 e1b / 16 + e1h / 4 + 4 e2h / 15 + ef / 25} /. e1h → 0.288643 /. e1b → 0.504467 /. e2h → 0.283 /.
  e2b → 0.235269 /. ef → 1.32304
```

```
{0.358195}
```

```
u2b = {0.3581949541666667`}
```

```
{0.358195}
```

```
100 * {0.3581949541666667`} / 2.63442`
```

```
{13.5967}
```

equation for fs

```
{β1hs * e1h + β1bs * e1b + β2hs * e2h + β2bs * e2b} + (βfs * ef) /.
                                                  α1h1w → 7 / 10 /. α1hs → 3 / 10 /. β1h2w →
                                                1 / 12 /. β1h1u → 4 / 12 /. β1h2u → 3 / 12 /.
                                              β1hs → 4 / 12 /. a2h2w → 5 / 8 /. α2hs → 3 / 8 /.
                                            β2h1w → 5 / 15 /. β2h1u → 3 / 15 /. β2h2u → 4 / 15 /.
                                          β2hs → 3 / 15 /. α1b1u → 4 / 7 /. α1bs → 3 / 7 /.
                                        β1b1w → 4 / 16 /. β1b2w → 3 / 16 /. β1b2u → 5 / 16 /.
                                      β1bs → 4 / 16 /. α2b2u → 5 / 9 /. α2bs → 4 / 9 /.
                                    β2b1w → 2 / 16 /. β2b2w → 6 / 16 /. β2b1u → 5 / 16 /.
                                  β2bs -> 3 / 16 /. afs → 1 /. βf1w → η /
                                  10 /.
                               βf2w → 2 η / 10 /. βf1u → 3 η / 10 /. βf2u →
                              4
                               η /
                                10 /. βfs → (1 -
                               η) /. η → 1 / 10
```

$$\left\{\frac{e1b}{4}+\frac{e1h}{3}+\frac{3\,e2b}{16}+\frac{e2h}{5}+\frac{9\,ef}{10}\right\}$$

$$\left\{\frac{e1b}{4}+\frac{e1h}{3}+\frac{3\,e2b}{16}+\frac{e2h}{5}+\frac{9\,ef}{10}\right\}\text{ /. e1h} \to 0.288643\text{ /. e1b} \to 0.504467\text{ /. e2h} \to 0.283\text{ /. e2b} \to 0.235269\text{ /. ef} \to 1.32304$$

```
{1.51378}
```

```
fs = {1.5137800208333334`}
```

```
{1.51378}
```

```
100 * {1.5137800208333334`} / 2.63442`
```

```
{57.4616}
```

```
w1h + w2h + u1b + u2b + fs
```

```
{2.63442}
```

```
.41364 + .458 + .604467 + .835269 + .323044
```

```
2.63442
```

Page 166 Derivatives shown in Table XI6

$$\text{inchouena} = \frac{1935360000\left(\frac{24507739}{120960000} - \frac{902861\,\mu 2H}{12902400}\right)}{890680979}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{24507739}{120960000} - \frac{902861\,\mu 2H}{12902400}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{24507739}{120960000} - \frac{902861\,\mu 2H}{12902400}\right)}{890680979}, \mu 2H\right]$$

$$-\frac{135429150}{890680979}$$

$$N\left[-\frac{135429150}{890680979}\right]$$

-0.152051

$$\text{exphouena} = \left(\frac{249589957}{1720320000} - \frac{902861\,\mu 2H}{12902400}\right) \Big/ \frac{890680979}{1935360000}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{249589957}{1720320000} - \frac{902861\,\mu 2H}{12902400}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{249589957}{1720320000} - \frac{902861\,\mu 2H}{12902400}\right)}{890680979}, \mu 2H\right]$$

$$-\frac{135429150}{890680979}$$

$$N\left[-\frac{135429150}{890680979}\right]$$

-0.152051

$$\text{inchoudyo} = \left(\frac{2312083}{12902400} + \frac{43656463\,\mu 2H}{241920000}\right) \Big/ \frac{890680979}{1935360000}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{2312083}{12902400} + \frac{43656463\,\mu 2H}{241920000}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{2312083}{12902400} + \frac{43656463\,\mu 2H}{241920000}\right)}{890680979}, \mu 2H\right]$$

$$\frac{349251704}{890680979}$$

$$N\left[\frac{349251704}{890680979}\right]$$

0.392118

$$\text{exphoudyo} = \frac{1935360000\left(\frac{2312083}{12902400} - \frac{7219057\,\mu 2H}{25804800}\right)}{890680979}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{2312083}{12902400} - \frac{7219057\,\mu 2H}{25804800}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{2312083}{12902400} - \frac{7219057\,\mu 2H}{25804800}\right)}{890680979}, \mu 2H\right]$$

$$-\frac{541429275}{890680979}$$

$$N\left[-\frac{541429275}{890680979}\right]$$

$$-0.607882$$

$$\text{incbusena} = \frac{1935360000\left(\frac{75652199}{276480000} + \frac{60013\,\mu 2H}{2304000}\right)}{890680979}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{75652199}{276480000} + \frac{60013\,\mu 2H}{2304000}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{75652199}{276480000} + \frac{60013\,\mu 2H}{2304000}\right)}{890680979}, \mu 2H\right]$$

$$\frac{50410920}{890680979}$$

$$N\left[\frac{50410920}{890680979}\right]$$

$$0.0565982$$

$$\text{expbusena} = \frac{1935360000\left(\frac{489441439}{2150400000} + \frac{60013\,\mu 2H}{2304000}\right)}{890680979}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{489441439}{2150400000} + \frac{60013\,\mu 2H}{2304000}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{489441439}{2150400000} + \frac{60013\,\mu 2H}{2304000}\right)}{890680979}, \mu 2H\right]$$

$$\frac{50410920}{890680979}$$

$$N\left[\frac{50410920}{890680979}\right]$$

$$0.0565982$$

$$\text{incbusdyo} = \frac{1935360000\left(\frac{3538979333}{8601600000} - \frac{33213931\,\mu 2H}{215040000}\right)}{890680979}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{3538979333}{8601600000} - \frac{33213931\,\mu 2H}{215040000}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{3538979333}{8601600000} - \frac{33213931\,\mu 2H}{215040000}\right)}{890680979}, \mu 2H\right]$$

$$-\frac{298925379}{890680979}$$

$$N\left[-\frac{298925379}{890680979}\right]$$

$$-0.335614$$

$$\text{expbusdyo} = \frac{1935360000\left(\frac{132490739}{2419200000} + \frac{1479389\,\mu 2H}{4838400}\right)}{890680979}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{132490739}{2419200000} + \frac{1479389\,\mu 2H}{4838400}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{132490739}{2419200000}+\frac{1479389\,\mu 2H}{4838400}\right)}{890680979},\ \mu 2H\right]$$

$$\frac{591755600}{890680979}$$

$$N\left[\frac{591755600}{890680979}\right]$$

$$0.664386$$

$$incfinsec = \frac{1935360000\left(\frac{195304439}{1290240000}-\frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{890680979}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{195304439}{1290240000}-\frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{195304439}{1290240000}-\frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{890680979},\ \mu 2H\right]$$

$$-\frac{29872000}{890680979}$$

$$N\left[-\frac{29872000}{890680979}\right]$$

$$-0.0335384$$

$$expfinsec = \frac{1935360000\left(\frac{94691011}{154828800}-\frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{890680979}$$

$$\frac{1935360000\left(\frac{94691011}{154828800}-\frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{890680979}$$

$$D\left[\frac{1935360000\left(\frac{94691011}{154828800}-\frac{1867\,\mu 2H}{120960}\right)}{890680979},\ \mu 2H\right]$$

$$-\frac{29872000}{890680979}$$

$$N\left[-\frac{29872000}{890680979}\right]$$

$$-0.0335384$$

Page 176 Estimation of differential equation
system 137 by using the behavioral coefficients in Table XI7

equation for dy1h / dt

```
{β2h1w * e2h + β1b1w * e1b + β2b1w * e2b + βf1w * ef + (βfs * ef)
                                α2hs * y2h - α1bs * y1b - α2bs * y2b -
                                y1h} /. α1h1w → 8 / 9 /. α1hs → 1 / 9 /.
                            β1h2w → 0 /. β1h1u → 7 α / 8 /. β1h2u →
                           7 (1 - α) / 8 /. β1hs → 1 / 8 /. a2h2w → 1 / 3 /.
                       α2hs → 2 / 3 /. β2h1w → 0 /. β2h1u → (1 - γ) / 4 /.
                    β2h2u → γ / 4 /. β2hs → 3 / 4 /. α1b1u → 6 / 7 /.
                 α1bs → 1 / 7 /. β1b1w → 5 α / 6 /. β1b2w → 5 (1 - α) / 6 /.
              β1b2u → 0 /. β1bs → 1 / 6 /. α2b2u → 1 / 5 /. α2bs → 4 / 5 /.
           β2b1w → (1 - γ) / 6 /. β2b2w → γ / 6 /. β2b1u → 0 /.
        β2bs -> 5 / 6 /. afs → 1 /. βf1w → 1 /
        4 /.
     βf2w → 1 / 12 /. βf1u → 1145 /
      6336 /.
   βf2u → 1 / 24 /. βfs →
   2815 /
    6336
```

$$\left\{\frac{4399\,ef}{6336} - \frac{y1b}{7} - y1h - \frac{4\,y2b}{5} - \frac{2\,y2h}{3} + \frac{5\,e1b\,\alpha}{6} + \frac{1}{6}\,e2b\,(1-\gamma)\right\}$$

FullSimplify[%]

$$\left\{\frac{4399\,ef}{6336} - \frac{y1b}{7} - y1h - \frac{4\,y2b}{5} - \frac{2\,y2h}{3} + \frac{5\,e1b\,\alpha}{6} - \frac{1}{6}\,e2b\,(-1+\gamma)\right\}$$

equation for dy2h / dt

```
{β1h2w * e1h + β1b2w * e1b + β2b2w * e2b + βf2w * ef + (βfs * ef) - α1hs * y1h - α1bs * y1b -
                                α2bs * y2b - y2h} /. α1h1w → 8 / 9 /. α1hs → 1 / 9 /.
                                β1h2w → 0 /. β1h1u → 7 α / 8 /. β1h2u →
                               7 (1 - α) / 8 /. β1hs → 1 / 8 /. a2h2w → 1 / 3 /.
                           α2hs → 2 / 3 /. β2h1w → 0 /. β2h1u → (1 - γ) / 4 /.
                        β2h2u → γ / 4 /. β2hs → 3 / 4 /. α1b1u → 6 / 7 /.
                     α1bs → 1 / 7 /. β1b1w → 5 α / 6 /. β1b2w → 5 (1 - α) / 6 /.
                  β1b2u → 0 /. β1bs → 1 / 6 /. α2b2u → 1 / 5 /. α2bs → 4 / 5 /.
               β2b1w → (1 - γ) / 6 /. β2b2w → γ / 6 /. β2b1u → 0 /.
            β2bs -> 5 / 6 /. afs → 1 /. βf1w → 1 /
            4 /.
         βf2w → 1 / 12 /. βf1u → 1145 /
          6336 /.
       βf2u → 1 / 24 /. βfs →
       2815 /
        6336
```

$$\left\{\frac{3343\,ef}{6336} - \frac{y1b}{7} - \frac{y1h}{9} - \frac{4\,y2b}{5} - y2h + \frac{5}{6}\,e1b\,(1-\alpha) + \frac{e2b\,\gamma}{6}\right\}$$

FullSimplify[%]

$$\left\{\frac{3343\,ef}{6336} - \frac{y1b}{7} - \frac{y1h}{9} - \frac{4\,y2b}{5} - y2h - \frac{5}{6}\,e1b\,(-1+\alpha) + \frac{e2b\,\gamma}{6}\right\}$$

equation for dy1b / dt

```
{β1h1u * e1h + β2h1u * e2h + β2b1u * e2b + βf1u * ef + (βfs * ef) - α1hs * y1h - α2hs * y2h -
                                                    α2bs * y2b - y1b} /. α1h1w → 8 / 9 /. α1hs → 1 / 9 /
                                                                    β1h2w → 0 /. β1h1u → 7 α / 8 /. β1h2u →
                                                                   7 (1 - α) / 8 /. β1hs → 1 / 8 /. a2h2w → 1 / 3 /.
                                                                 α2hs → 2 / 3 /. β2h1w → 0 /. β2h1u → (1 - γ) / 4 /.
                                                               β2h2u → γ / 4 /. β2hs → 3 / 4 /. α1b1u → 6 / 7 /.
                                                             α1bs → 1 / 7 /. β1b1w → 5 α / 6 /. β1b2w → 5 (1 - α) / 6 /.
                                                           β1b2u → 0 /. β1bs → 1 / 6 /. α2b2u → 1 / 5 /. α2bs → 4 / 5 /.
                                                         β2b1w → (1 - γ) / 6 /. β2b2w → γ / 6 /. β2b1u → 0 /.
                                                       β2bs -> 5 / 6 /. afs → 1 /. βf1w → 1 /
                                                       4 /.
                                                    βf2w → 1 / 12 /. βf1u → 1145 /
                                                     6336 /.
                                                  βf2u → 1 / 24 /. βfs →
                                                  2815 /
                                                   6336
```

$$\left\{\frac{5\,ef}{8} - y1b - \frac{y1h}{9} - \frac{4\,y2b}{5} - \frac{2\,y2h}{3} + \frac{7\,e1h\,\alpha}{8} + \frac{1}{4}\,e2h\,(1-\gamma)\right\}$$

FullSimplify[%]

$$\left\{\frac{5\,ef}{8} - y1b - \frac{y1h}{9} - \frac{4\,y2b}{5} - \frac{2\,y2h}{3} + \frac{7\,e1h\,\alpha}{8} - \frac{1}{4}\,e2h\,(-1+\gamma)\right\}$$

equation for dy2b / dt

```
{β1h2u * e1h + β2h2u * e2h + β1b2u * e1b + βf2u * ef + (βfs * ef) -
                                                    α1hs * y1h - α2hs * y2h - α1bs * y1b -
                                                    y2b} /. α1h1w → 8 / 9 /. α1hs → 1 / 9 /.
                                                    β1h2w → 0 /. β1h1u → 7 α / 8 /. β1h2u →
                                                   7 (1 - α) / 8 /. β1hs → 1 / 8 /. a2h2w → 1 / 3 /.
                                                  α2hs → 2 / 3 /. β2h1w → 0 /. β2h1u → (1 - γ) / 4 /.
                                                  β2h2u → γ / 4 /. β2hs → 3 / 4 /. α1b1u → 6 / 7 /.
                                                α1bs → 1 / 7 /. β1b1w → 5 α / 6 /. β1b2w → 5 (1 - α) / 6 /.
                                               β1b2u → 0 /. β1bs → 1 / 6 /. α2b2u → 1 / 5 /. α2bs → 4 / 5 /.
                                               β2b1w → (1 - γ) / 6 /. β2b2w → γ / 6 /. β2b1u → 0 /.
                                               β2bs -> 5 / 6 /. afs → 1 /. βf1w → 1 /
                                                       4 /.
                                                    βf2w → 1 / 12 /. βf1u → 1145 /
                                                     6336 /.
                                                  βf2u → 1 / 24 /. βfs →
                                                  2815 /
                                                   6336
```

$$\left\{\frac{3079\,ef}{6336} - \frac{y1b}{7} - \frac{y1h}{9} - y2b - \frac{2\,y2h}{3} + \frac{7}{8}\,e1h\,(1-\alpha) + \frac{e2h\,\gamma}{4}\right\}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$\left\{\frac{3079\,ef}{6336}-\frac{y1b}{7}-\frac{7}{8}\,e1h\,(-1+\alpha)+\frac{1}{36}\,(-4\,(y1h+9\,y2b+6\,y2h)+9\,e2h\,\gamma)\right\}$$

```
equation for dyf / dt
```

```
{(β1hs * e1h + β1bs * e1b + β2hs * e2h + β2bs * e2b) - yf} /.
                                α1h1w → 8 / 9 /. α1hs → 1 / 9 /. β1h2w → 0 /.
                             β1h1u → 7 α / 8 /. β1h2u → 7 (1 - α) / 8 /.
                          β1hs → 1 / 8 /. a2h2w → 1 / 3 /. α2hs → 2 / 3 /.
                       β2h1w → 0 /. β2h1u → (1 - γ) / 4 /. β2h2u → γ / 4 /.
                    β2hs → 3 / 4 /. α1b1u → 6 / 7 /. α1bs → 1 / 7 /.
                 β1b1w → 5 α / 6 /. β1b2w → 5 (1 - α) / 6 /. β1b2u → 0 /.
              β1bs → 1 / 6 /. α2b2u → 1 / 5 /. α2bs → 4 / 5 /.
           β2b1w → (1 - γ) / 6 /. β2b2w → γ / 6 /. β2b1u → 0 /.
        β2bs -> 5 / 6 /. afs → 1 /. βf1w → 1 /
        4 /.
     βf2w → 1 / 12 /. βf1u → 1145 /
      6336 /.
   βf2u → 1 / 24 /. βfs →
   2815 /
    6336
```

$$\left\{\frac{e1b}{6}+\frac{e1h}{8}+\frac{5\,e2b}{6}+\frac{3\,e2h}{4}-yf\right\}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$\left\{\frac{1}{24}\,(4\,e1b+3\,e1h+20\,e2b+18\,e2h-24\,yf)\right\}$$

Page 177 Routh - Hurwitz conditions when $\alpha = 1/2$

```
deltamatrix = {{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
  {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -1, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
  {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 α/8, -2/3, (1 - γ)/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8},
  {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4,
   -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5\alpha}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{1-\gamma}{6}, 0, \frac{4399}{6336}\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, 0, -1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5(1-\alpha)}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{\gamma}{6}, 0, \frac{3343}{6336}\right\},$$
$$\{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7\alpha}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{1-\gamma}{4}, -1, 0, -\frac{4}{5}, 0, 0, \frac{5}{8}\right\},$$
$$\{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7(1-\alpha)}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{\gamma}{4},\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7}, 0, -1, 0, 0, \frac{3079}{6336}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[deltamatrix]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

```
<< Algebra`InequalitySolve`

InequalitySolve[
 {46729201/766402560 + 6643151 α/18247680 - 2938103 α^2/7299072 + 144252923 γ/383201280 - 4107769 α γ/10948608 - 2063483 γ^2/153280512 >
    0 && 0 < α && α < 1 && 0 < γ && γ < 1}, {α, γ}]
```

$$0 < \alpha < 1 \;\&\&\; 0 < \gamma < 1$$

```
deltaL = deltamatrix - L IdentityMatrix[10];
```

MatrixForm[deltaL]

$$\begin{pmatrix}
-1-L & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1-L & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1-L & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1-L & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1-L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L
\end{pmatrix}$$

pol = Det[deltaL]

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6097639\,L}{2661120} + \frac{13104118477\,L^2}{574801920} + \frac{3995574137\,L^3}{47900160} + \frac{2441701319\,L^4}{14370048} + \frac{352572683\,L^5}{1596672} + \frac{342560249\,L^6}{1774080} + \frac{61697\,L^7}{540} + \frac{41654\,L^8}{945} + 10\,L^9 + L^{10} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} + \frac{29132839\,L\,\alpha}{8211456} + \frac{129861203\,L^2\,\alpha}{27371520} - \frac{4264411\,L^3\,\alpha}{1283040} - \frac{1083881\,L^4\,\alpha}{76032} - \frac{30319\,L^5\,\alpha}{2160} - \frac{13301\,L^6\,\alpha}{2160} - \frac{1121\,L^7\,\alpha}{1080} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} - \frac{1413209\,L\,\alpha^2}{304128} - \frac{13338493\,L^2\,\alpha^2}{912384} - \frac{2275\,L^3\,\alpha^2}{108} - \frac{2177\,L^4\,\alpha^2}{144} - \frac{49\,L^5\,\alpha^2}{9} - \frac{35\,L^6\,\alpha^2}{48} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} + \frac{618726631\,L\,\gamma}{143700480} + \frac{14526389\,L^2\,\gamma}{1197504} + \frac{633680783\,L^3\,\gamma}{35925120} + \frac{31930627\,L^4\,\gamma}{2128896} + \frac{28747\,L^5\,\gamma}{3780} + \frac{509\,L^6\,\gamma}{240} + \frac{971\,L^7\,\gamma}{3780} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{10627063\,L\,\alpha\,\gamma}{2737152} - \frac{5338829\,L^2\,\alpha\,\gamma}{608256} - \frac{26555\,L^3\,\alpha\,\gamma}{2592} - \frac{1459}{216}\,L^4\,\alpha\,\gamma - \frac{1051}{432}\,L^5\,\alpha\,\gamma - \frac{17}{48}\,L^6\,\alpha\,\gamma - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512} - \frac{358871\,L\,\gamma^2}{1368576} - \frac{9309907\,L^2\,\gamma^2}{12773376} - \frac{17225\,L^3\,\gamma^2}{18144} - \frac{73\,L^4\,\gamma^2}{108} - \frac{197\,L^5\,\gamma^2}{756} - \frac{L^6\,\gamma^2}{24}$$

Expand[pol]

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6097639\,L}{2661120} + \frac{13104118477\,L^2}{574801920} + \frac{3995574137\,L^3}{47900160} + \frac{2441701319\,L^4}{14370048} + \frac{352572683\,L^5}{1596672} + \frac{342560249\,L^6}{1774080} + \frac{61697\,L^7}{540} + \frac{41654\,L^8}{945} + 10\,L^9 + L^{10} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} + \frac{29132839\,L\,\alpha}{8211456} + \frac{129861203\,L^2\,\alpha}{27371520} - \frac{4264411\,L^3\,\alpha}{1283040} - \frac{1083881\,L^4\,\alpha}{76032} - \frac{30319\,L^5\,\alpha}{2160} - \frac{13301\,L^6\,\alpha}{2160} - \frac{1121\,L^7\,\alpha}{1080} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} - \frac{1413209\,L\,\alpha^2}{304128} - \frac{13338493\,L^2\,\alpha^2}{912384} - \frac{2275\,L^3\,\alpha^2}{108} - \frac{2177\,L^4\,\alpha^2}{144} - \frac{49\,L^5\,\alpha^2}{9} - \frac{35\,L^6\,\alpha^2}{48} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} + \frac{618726631\,L\,\gamma}{143700480} + \frac{14526389\,L^2\,\gamma}{1197504} + \frac{633680783\,L^3\,\gamma}{35925120} + \frac{31930627\,L^4\,\gamma}{2128896} + \frac{28747\,L^5\,\gamma}{3780} + \frac{509\,L^6\,\gamma}{240} + \frac{971\,L^7\,\gamma}{3780} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{10627063\,L\,\alpha\,\gamma}{2737152} - \frac{5338829\,L^2\,\alpha\,\gamma}{608256} - \frac{26555\,L^3\,\alpha\,\gamma}{2592} - \frac{1459}{216}\,L^4\,\alpha\,\gamma - \frac{1051}{432}\,L^5\,\alpha\,\gamma - \frac{17}{48}\,L^6\,\alpha\,\gamma - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512} - \frac{358871\,L\,\gamma^2}{1368576} - \frac{9309907\,L^2\,\gamma^2}{12773376} - \frac{17225\,L^3\,\gamma^2}{18144} - \frac{73\,L^4\,\gamma^2}{108} - \frac{197\,L^5\,\gamma^2}{756} - \frac{L^6\,\gamma^2}{24}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{1}{2299207680}\,(140187603 + 101345181696\,L^8 + 22992076800\,L^9 + 2299207680\,L^{10} - 925502445\,\alpha^2 + \alpha\,(837037026 - 862631490\,\gamma) - 304128\,L^7\,(-863758 + 7847\,\alpha - 1942\,\gamma) + 865517538\,\gamma - 30952245\,\gamma^2 - 288\,L^5\,(-1762863415 + 43464960\,\alpha^2 - 60713664\,\gamma + 2080320\,\gamma^2 + 3696\,\alpha\,(30319 + 5255\,\gamma)) - 40\,L^4\,(-9766805276 + 868988736\,\alpha^2 - 862126929\,\gamma + 38852352\,\gamma^2 + 756\,\alpha\,(1083881 + 513568\,\gamma)) - 16\,L^3\,(-11986722411 + 3027024000\,\alpha^2 - 2534723132\,\gamma + 136422000\,\gamma^2 + 112\,\alpha\,(4264411 + 13144725\,\gamma)) - 8\,L\,(-658545012 + 1335482505\,\alpha^2 - 1237453262\,\gamma + 75362910\,\gamma^2 + 35\,\alpha\,(-29132839 + 31881189\,\gamma)) - 4\,L^2\,(-13104118477 + 8403250590\,\alpha^2 - 6972666720\,\gamma + 418945815\,\gamma^2 + 21\,\alpha\,(-129861203 + 240247305\,\gamma)) - 432\,L^6\,(3880800\,\alpha^2 + 2464\,\alpha\,(13301 + 765\,\gamma) + 3\,(-342560249 - 3762528\,\gamma + 73920\,\gamma^2)))$$

```
a0 = Coefficient[pol, L, 10]
```

$$1$$

```
a1 = Coefficient[pol, L, 9]
```

$$10$$

```
a2 = Coefficient[pol, L, 8]
```

$$\frac{41654}{945}$$

```
a3 = Coefficient[pol, L, 7] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{81889}{720} + \frac{971\,\gamma}{3780}$$

```
a4 = Coefficient[pol, L, 6] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{202064743}{1064448} + \frac{311\,\gamma}{160} - \frac{\gamma^2}{24}$$

```
a5 = Coefficient[pol, L, 5] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{1695967663}{7983360} + \frac{64397\,\gamma}{10080} - \frac{197\,\gamma^2}{756}$$

```
a6 = Coefficient[pol, L, 4] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{4569925537}{28740096} + \frac{24740675\,\gamma}{2128896} - \frac{73\,\gamma^2}{108}$$

$$\frac{2441701319}{14370048} - \frac{1083881\,\alpha}{76032} - \frac{2177\,\alpha^2}{144} + \frac{31930627\,\gamma}{2128896} - \frac{1459\,\alpha\,\gamma}{216} - \frac{73\,\gamma^2}{108} \;/.\; \alpha \to 1/2$$

$$\frac{4569925537}{28740096} + \frac{24740675\,\gamma}{2128896} - \frac{73\,\gamma^2}{108}$$

```
a7 = Coefficient[pol, L, 3] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{2198231879}{28740096} + \frac{449654633\,\gamma}{35925120} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144}$$

$$\frac{3995574137}{47900160} - \frac{4264411\,\alpha}{1283040} - \frac{2275\,\alpha^2}{108} + \frac{633680783\,\gamma}{35925120} - \frac{26555\,\alpha\,\gamma}{2592} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144} \;/.\; \alpha \to 1/2$$

$$\frac{2198231879}{28740096} + \frac{449654633\,\gamma}{35925120} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144}$$

```
a8 = Coefficient[pol, L, 2] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{1124258951}{52254720} + \frac{593342669\,\gamma}{76640256} - \frac{9309907\,\gamma^2}{12773376}$$

```
a9 = Coefficient[pol, L, 1] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{3337996273}{1149603840} + \frac{1359064909\,\gamma}{574801920} - \frac{358871\,\gamma^2}{1368576}$$

```
a10 = Coefficient[pol, L, 0] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{436440673}{3065610240} + \frac{144733931\,\gamma}{766402560} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

```
rh0 = a0
```

```
1
```

```
rh1 = a1
```

```
10
```

```
rh2 = Det[{{a1, a0}, {a3, a2}}]
```

$$\frac{4944971}{15120} - \frac{971\,\gamma}{3780}$$

```
rh3 = Det[{{a1, a0, 0}, {a3, a2, a1}, {a5, a4, a3}}]
```

$$\frac{2435492823109}{119750400} - \frac{2163076429\,\gamma}{28576800} + \frac{21359159\,\gamma^2}{14288400}$$

```
rh4 = Det[{{a1, a0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0}, {a5, a4, a3, a2}, {a7, a6, a5, a4}}]
```

$$\frac{66311873135000253076301}{40152443240448000} - \frac{7966644225277755671\,\gamma}{456277764096000} +$$
$$\frac{61002787653239653\,\gamma^2}{76046294016000} + \frac{88139320051\,\gamma^3}{432081216000} - \frac{7411559\,\gamma^4}{342921600}$$

```
rh5 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1}, {a7, a6, a5, a4, a3}, {a9, a8, a7, a6, a5}}]
```

$$\frac{13840738476467714592407056751681}{10685046975602098176000} - \frac{3171016088652991200229996 4611\,\gamma}{10927888952320327680000} +$$
$$\frac{11590141071855838645971243 89\,\gamma^2}{5463944476160163840000} + \frac{90482424045521551783\,\gamma^3}{313587263324160000} +$$
$$\frac{12081370557332909627\,\gamma^4}{1724729948282880000} - \frac{69812673348359\,\gamma^5}{217768932864000} + \frac{1460077123\,\gamma^6}{259248729600}$$

```
rh6 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, a10, a9, a8, a7, a6}}]
```

$$\frac{18784105452638082840927574908304837699 2511}{25125486205362051221972582400000} -$$
$$\frac{78323180893090603795499420583366644294147\,\gamma}{27638034825898256344169840640000 0} +$$
$$\frac{13731065836582703479010161131818593 61\,\gamma^2}{43620635773198005593702400000} +$$
$$\frac{33232320347614377711045041751079\,\gamma^3}{13958603447423361789984768 00} + \frac{14083455030527335330228228391\,\gamma^4}{89920914807664410624 0000} -$$
$$\frac{13712133156727975648099718371\,\gamma^5}{41307420239770838630400000} + \frac{47760765281688221143457\,\gamma^6}{20862333454429716480000} +$$
$$\frac{3206457154184755069\,\gamma^7}{16557407503515648000} - \frac{1322377768339\,\gamma^8}{447981804748800}$$

```
rh7 = Det[
  {{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3},
   {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}}]
```

$$\frac{5423560975564476862440321828352321672578722386331387}{22694850689933119244687150294237184000000} - \frac{427955429939815401861064347294065606274935482067563\gamma}{39715988707382958678202513014915072000000} + \frac{80690738410568829936950093837902136687263031285627\gamma^2}{397159887073829586782025130149150720000000} + \frac{18951046967293020920181883571793987759300 61\gamma^3}{81406575305373045959191166976000000} + \frac{435463413621706990357526196232904410371684 79\gamma^4}{250732251940548981554308794286080000000} + \frac{10440170856325829193112416540590104442 9\gamma^5}{135677625508955076598651944960000000} - \frac{11872419111309253489690694646893974076 3\gamma^6}{23743584464067138404764090368000000} + \frac{11861117661575182865624675866966 09\gamma^7}{59958546626432167688798208000000} - \frac{89281109089480399956945970 37\gamma^8}{33310303681351204271554560000} - \frac{10494016633368069357386 9\gamma^9}{78859620457744328294400 0} + \frac{898360760120089657\gamma^{10}}{500696002906313195520}$$

```
rh8 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4},
   {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}}]
```

$$\frac{3565605451780896216371423978756952999425792833864490644053903 61}{12175374167307756172539448869225691745353728000000 0} + \frac{12333619801691271516781879686966340457452728565613011978880 93\gamma}{60876870836538780862697244346128458726768640000000} + \frac{30205130700761098730882646252557011606446489651171809812676 3\gamma^2}{60876870836538780862697244346128458726768640000000} + \frac{39384895533004254552036281219265344684661710080865710623 17\gamma^3}{25365362848557825359457185144220191136153600000000} + \frac{63349505689623077579466807112749922521497231348630318693\gamma^4}{36236232640796893370653121634600273051648000000 0} - \frac{74223282511684675772022721961870575113749684178578 9\gamma^5}{72788575667349131541142060216426168320000000} + \frac{93646387549105578765180116175077710091701145130 01\gamma^6}{59309209803025218292782419435606507520000000} - \frac{25075047037758029579963965852692433137231777463\gamma^7}{86653066270653728025169119305269248000000 0} + \frac{94485696876983110998199151112092951611433875 1\gamma^8}{30328573194728804808809191756844236800000 0} - \frac{22723499124297940934936412089677955840 29\gamma^9}{25529102015764987212802349963673600000} - \frac{54170659206004773379709354337418 51\gamma^{10}}{12156715245602374863239214268416000} + \frac{27810905547622785960443036214 17\gamma^{11}}{40292143332962416686872395776000} - \frac{26770416748780086550627021\gamma^{12}}{31977891534097156100692377600}$$

```
FullSimplify[
 rh9 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0},
    {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1},
    {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5},
    {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9}}]]
```

```
(448068368714203947382664930350049299477211883849360889344182189769282705+γ
    (296918597074931172754803613968430660005613273722673403213118490514613 2
       15+2γ
       (-121129038321324787119462806286432907285293901707182996431161141451
           87601+4γ
          (62182756944211273350958791860502562751502232684128405082468090662
             60260+γ
             (-60734678351400672307670736799806348941494221000253213263577 4
                 19721429+2γ
                (-26776694741086375959476487451027155083317174499252850392 2
                    818600269+36γ
                   (-71296408847265939689873917191394721445225483175752956 2
                       7514958417+44γ
                      (75578118473234474317647837308124876973415884911208691
                         198582367+60γ
                         (-42362357787133047670036546836606973832432873267 6
                             4468121687+352γ
                            (16812694269872003998418911509402438344247503061
                               478043102+45γ
                               (-26541497871527284164346933467980508751051 6
                                   3254143969+
                                 23760γ
                                  (24902315969613390278399789913833564540151
                                     261681+
                                    10γ
                                     (29240783484041225339322890212411177211
                                      617959+
                                      443520γ
                                      (-49763850953762477447321816777062483 1
                                      +
                                      54932127908230530139088612271276 90
                                      γ))))))))))))))/
 69984284480868994788675264857727565285574739335577600000000
```

```
FullSimplify[
 rh10 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0},
    {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
    {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2},
    {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10}}]]
```

$$
\begin{aligned}
&-((-436440673-578935724\gamma+41269660\gamma^2)\\
&\quad(448068368714203947382664930350049299477211883849360889344182189769282705+\gamma\\
&\qquad(296918597074931172754803613968430660005613273722673403213118490514613215+2\gamma\\
&\qquad\quad(-121129038321324787119462806286432907285293901707182996431161141\\
&\qquad\qquad 45187601+4\gamma\\
&\qquad\qquad(621827569442112733509587918605025627515022326841284050824680906660260+\gamma\\
&\qquad\qquad\quad(-607346783514006723076707367998063489414942210002532132635\\
&\qquad\qquad\qquad 77419721429+2\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad(-267766947410863759594764874510271550833171744992528503\\
&\qquad\qquad\qquad\quad 922818600269+36\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad\quad(-712964088472659396898739171913947214452254831757529\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 5627514958417+44\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad(755781184732344743176478373081248769734158849112086919858236760+\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad(-42362357787133047670036546836606973832432873267644681216871+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 352\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(168126942698720039984189115094024383442475030647804310245+\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad(-26541497871527284164346933467980508751051632540439691+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 23760\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(249023159696133902783997899138335645401526168110+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 10\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(292407834840412253393228902124111772161795944352+\gamma\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(-49763850953762477447321816777062483149321279082305301390886122712769+\gamma)))))))))))))))/\\
&\quad 21454453914362507452266952798256176726972644519247748687462400000000
\end{aligned}
$$

```
InequalitySolve[{rh2 > 0, rh3 > 0, rh4 > 0, rh5 > 0,
  rh6 > 0, rh7 > 0, rh8 > 0, rh9 > 0, rh10 > 0, 0 < γ, γ < 1}, {γ}]
```

$$0 < \gamma < 1$$

Page 177 Routh - Hurwitz conditions when $\alpha = 3/4$

```
deltamatrix = {{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
  {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -1, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
  {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 α/8, -2/3, (1 - γ)/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8},
  {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4,
   -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

```
{{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, 1 - γ/6, 0, 4399/6336}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-1/9, 0, -1, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
 {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 α/8, -2/3, 1 - γ/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8},
 {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4,
  -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
 {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

```
MatrixForm[deltamatrix]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

```
<< Algebra`InequalitySolve`

InequalitySolve[
  {46729201/766402560 + 6643151 α/18247680 - 2938103 α^2/7299072 + 144252923 γ/383201280 - 4107769 α γ/10948608 - 2063483 γ^2/153280512 >
     0 && 0 < α && α < 1 && 0 < γ && γ < 1}, {α, γ}]
```

$0 < \alpha < 1 \;\&\&\; 0 < \gamma < 1$

```
deltaL = deltamatrix - L IdentityMatrix[10];
```

MatrixForm[deltaL]

$$\begin{pmatrix}
-1-L & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1-L & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1-L & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1-L & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1-L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L
\end{pmatrix}$$

pol = Det[deltaL]

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6097639\,L}{2661120} + \frac{13104118477\,L^2}{574801920} + \frac{3995574137\,L^3}{47900160} + \frac{2441701319\,L^4}{14370048} +$$
$$\frac{352572683\,L^5}{1596672} + \frac{342560249\,L^6}{1774080} + \frac{61697\,L^7}{540} + \frac{41654\,L^8}{945} + 10\,L^9 + L^{10} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} +$$
$$\frac{29132839\,L\,\alpha}{8211456} + \frac{129861203\,L^2\,\alpha}{27371520} - \frac{4264411\,L^3\,\alpha}{1283040} - \frac{1083881\,L^4\,\alpha}{76032} - \frac{30319\,L^5\,\alpha}{2160} -$$
$$\frac{13301\,L^6\,\alpha}{2160} - \frac{1121\,L^7\,\alpha}{1080} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} - \frac{1413209\,L\,\alpha^2}{304128} - \frac{13338493\,L^2\,\alpha^2}{912384} -$$
$$\frac{2275\,L^3\,\alpha^2}{108} - \frac{2177\,L^4\,\alpha^2}{144} - \frac{49\,L^5\,\alpha^2}{9} - \frac{35\,L^6\,\alpha^2}{48} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} + \frac{618726631\,L\,\gamma}{143700480} +$$
$$\frac{14526389\,L^2\,\gamma}{1197504} + \frac{633680783\,L^3\,\gamma}{35925120} + \frac{31930627\,L^4\,\gamma}{2128896} + \frac{28747\,L^5\,\gamma}{3780} +$$
$$\frac{509\,L^6\,\gamma}{240} + \frac{971\,L^7\,\gamma}{3780} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{10627063\,L\,\alpha\,\gamma}{2737152} - \frac{5338829\,L^2\,\alpha\,\gamma}{608256} -$$
$$\frac{26555\,L^3\,\alpha\,\gamma}{2592} - \frac{1459}{216}\,L^4\,\alpha\,\gamma - \frac{1051}{432}\,L^5\,\alpha\,\gamma - \frac{17}{48}\,L^6\,\alpha\,\gamma - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512} -$$
$$\frac{358871\,L\,\gamma^2}{1368576} - \frac{9309907\,L^2\,\gamma^2}{12773376} - \frac{17225\,L^3\,\gamma^2}{18144} - \frac{73\,L^4\,\gamma^2}{108} - \frac{197\,L^5\,\gamma^2}{756} - \frac{L^6\,\gamma^2}{24}$$

Expand[pol]

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6097639\,L}{2661120} + \frac{13104118477\,L^2}{574801920} + \frac{3995574137\,L^3}{47900160} + \frac{2441701319\,L^4}{14370048} +$$
$$\frac{352572683\,L^5}{1596672} + \frac{342560249\,L^6}{1774080} + \frac{61697\,L^7}{540} + \frac{41654\,L^8}{945} + 10\,L^9 + L^{10} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} +$$
$$\frac{29132839\,L\,\alpha}{8211456} + \frac{129861203\,L^2\,\alpha}{27371520} - \frac{4264411\,L^3\,\alpha}{1283040} - \frac{1083881\,L^4\,\alpha}{76032} - \frac{30319\,L^5\,\alpha}{2160} -$$
$$\frac{13301\,L^6\,\alpha}{2160} - \frac{1121\,L^7\,\alpha}{1080} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} - \frac{1413209\,L\,\alpha^2}{304128} - \frac{13338493\,L^2\,\alpha^2}{912384} -$$
$$\frac{2275\,L^3\,\alpha^2}{108} - \frac{2177\,L^4\,\alpha^2}{144} - \frac{49\,L^5\,\alpha^2}{9} - \frac{35\,L^6\,\alpha^2}{48} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} + \frac{618726631\,L\,\gamma}{143700480} +$$
$$\frac{14526389\,L^2\,\gamma}{1197504} + \frac{633680783\,L^3\,\gamma}{35925120} + \frac{31930627\,L^4\,\gamma}{2128896} + \frac{28747\,L^5\,\gamma}{3780} +$$
$$\frac{509\,L^6\,\gamma}{240} + \frac{971\,L^7\,\gamma}{3780} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{10627063\,L\,\alpha\,\gamma}{2737152} - \frac{5338829\,L^2\,\alpha\,\gamma}{608256} -$$
$$\frac{26555\,L^3\,\alpha\,\gamma}{2592} - \frac{1459}{216}\,L^4\,\alpha\,\gamma - \frac{1051}{432}\,L^5\,\alpha\,\gamma - \frac{17}{48}\,L^6\,\alpha\,\gamma - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512} -$$
$$\frac{358871\,L\,\gamma^2}{1368576} - \frac{9309907\,L^2\,\gamma^2}{12773376} - \frac{17225\,L^3\,\gamma^2}{18144} - \frac{73\,L^4\,\gamma^2}{108} - \frac{197\,L^5\,\gamma^2}{756} - \frac{L^6\,\gamma^2}{24}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{1}{2299207680}\,(140187603 + 101345181696\,L^8 + 22992076800\,L^9 + 2299207680\,L^{10} - 925502445\,\alpha^2 + \alpha\,(837037026 - 862631490\,\gamma) - 304128\,L^7\,(-863758 + 7847\,\alpha - 1942\,\gamma) + 865517538\,\gamma - 30952245\,\gamma^2 - 288\,L^5\,(-1762863415 + 43464960\,\alpha^2 - 60713664\,\gamma + 2080320\,\gamma^2 + 3696\,\alpha\,(30319 + 5255\,\gamma)) - 40\,L^4\,(-9766805276 + 868988736\,\alpha^2 - 862126929\,\gamma + 38852352\,\gamma^2 + 756\,\alpha\,(1083881 + 513568\,\gamma)) - 16\,L^3\,(-11986722411 + 3027024000\,\alpha^2 - 2534723132\,\gamma + 136422000\,\gamma^2 + 112\,\alpha\,(4264411 + 13144725\,\gamma)) - 8\,L\,(-658545012 + 1335482505\,\alpha^2 - 1237453262\,\gamma + 75362910\,\gamma^2 + 35\,\alpha\,(-29132839 + 31881189\,\gamma)) - 4\,L^2\,(-13104118477 + 8403250590\,\alpha^2 - 6972666720\,\gamma + 418945815\,\gamma^2 + 21\,\alpha\,(-129861203 + 240247305\,\gamma)) - 432\,L^6\,(3880800\,\alpha^2 + 2464\,\alpha\,(13301 + 765\,\gamma) + 3\,(-342560249 - 3762528\,\gamma + 73920\,\gamma^2)))$$

```
a0 = Coefficient[pol, L, 10] /. α → 3 / 4
```

$$1$$

```
a1 = Coefficient[pol, L, 9] /. α → 3 / 4
```

$$10$$

```
a2 = Coefficient[pol, L, 8] /. α → 3 / 4
```

$$\frac{41654}{945}$$

```
a3 = Coefficient[pol, L, 7] /. α → 3 / 4
```

$$\frac{490213}{4320} + \frac{971\,\gamma}{3780}$$

```
a4 = Coefficient[pol, L, 6] /. α → 3 / 4
```

$$\frac{111213061}{591360} + \frac{1781\,\gamma}{960} - \frac{\gamma^2}{24}$$

```
a5 = Coefficient[pol, L, 5] /. α → 3 / 4
```

$$\frac{1654370107}{7983360} + \frac{349597\,\gamma}{60480} - \frac{197\,\gamma^2}{756}$$

```
a6 = Coefficient[pol, L, 4] /. α → 3 / 4
```

$$\frac{8663438585}{57480192} + \frac{21145699\,\gamma}{2128896} - \frac{73\,\gamma^2}{108}$$

$$\frac{2441701319}{14370048} - \frac{1083881\,\alpha}{76032} - \frac{2177\,\alpha^2}{144} + \frac{31930627\,\gamma}{2128896} - \frac{1459\,\alpha\,\gamma}{216} - \frac{73\,\gamma^2}{108} \;/.\; \alpha \to 3/4$$

$$\frac{8663438585}{57480192} + \frac{21145699\,\gamma}{2128896} - \frac{73\,\gamma^2}{108}$$

```
a7 = Coefficient[pol, L, 3] /. α → 3 / 4
```

$$\frac{3308603629}{47900160} + \frac{178820779\,\gamma}{17962560} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144}$$

$$\frac{3995574137}{47900160} - \frac{4264411\,\alpha}{1283040} - \frac{2275\,\alpha^2}{108} + \frac{633680783\,\gamma}{35925120} - \frac{26555\,\alpha\,\gamma}{2592} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144} \;/.\; \alpha \to 3/4$$

$$\frac{3308603629}{47900160} + \frac{178820779\,\gamma}{17962560} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144}$$

```
a8 = Coefficient[pol, L, 2] /. α → 3 / 4
```

$$\frac{83380831739}{4598415360} + \frac{850339111\,\gamma}{153280512} - \frac{9309907\,\gamma^2}{12773376}$$

```
a9 = Coefficient[pol, L, 1] /. α → 3 / 4
```

$$\frac{3584390009}{1532805120} + \frac{1602288203\,\gamma}{1149603840} - \frac{358871\,\gamma^2}{1368576}$$

```
a10 = Coefficient[pol, L, 0] /. α → 3 / 4
```

$$\frac{263861597}{2452488192} + \frac{145695947\,\gamma}{1532805120} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

```
rh0 = a0
```

```
1
```

```
rh1 = a1
```

```
10
```

```
rh2 = Det[{{a1, a0}, {a3, a2}}]
```

$$\frac{3299263}{10080} - \frac{971\,\gamma}{3780}$$

```
rh3 = Det[{{a1, a0, 0}, {a3, a2, a1}, {a5, a4, a3}}]
```

$$\frac{9775121866409}{479001600} - \frac{4160104171\,\gamma}{57153600} + \frac{21359159\,\gamma^2}{14288400}$$

```
rh4 = Det[{{a1, a0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0}, {a5, a4, a3, a2}, {a7, a6, a5, a4}}]
```

$$\frac{17834555796715151784517}{10707318197452800} - \frac{28608334009026631613\,\gamma}{1825111056384000} +$$
$$\frac{2539737293671199\,\gamma^2}{3168595584000} + \frac{101748702347\,\gamma^3}{864162432000} - \frac{7411559\,\gamma^4}{342921600}$$

```
rh5 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1}, {a7, a6, a5, a4, a3}, {a9, a8, a7, a6, a5}}]
```

$$\frac{16858665487551369793270715816006 9}{1282205637072251781120000} - \frac{208817410337301194678581904 47\,\gamma}{8742311161856262144000} +$$
$$\frac{1160259415685392448029540121\,\gamma^2}{5463944476160163840000} + \frac{4112672706906592111601\,\gamma^3}{13797839586263040000} +$$
$$\frac{2621566859805410273\,\gamma^4}{431182487070720000} - \frac{124111763384113\,\gamma^5}{435537865728000} + \frac{1460077123\,\gamma^6}{259248729600}$$

```
rh6 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, a10, a9, a8, a7, a6}}]
```

$$\frac{56047991108895549771514384758147740983759 99}{737014262023953502511195750400000} -$$
$$\frac{1109119343746458710525928502615552899984 73\,\gamma}{552760696517965126883396812800000} +$$
$$\frac{8802287771482365546550368638866736522 3\,\gamma^2}{279172068948467235799695360000 0} +$$
$$\frac{1751206874083563218751468396126 43\,\gamma^3}{218103178865990027968512000 0} + \frac{8397393136228525691288754065 9\,\gamma^4}{590106003425297694720000 0} -$$
$$\frac{4794863201442737742660152140 9\,\gamma^5}{165229680959083354521600000} + \frac{1370717119196382304706 29\,\gamma^6}{417246669088594329600000} +$$
$$\frac{2775108085591515349\,\gamma^7}{16557407503515648000} - \frac{1322377768339\,\gamma^8}{447981804748800}$$

```
rh7 = Det[
  {{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3},
   {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}}]
```

$$\frac{957839578459589368287860178922767023482942749756574 1}{4034640122654776754611048941197721600000 0} - \frac{14168352974430468150043188312382207725109686309803 9\gamma}{2647732580492197245213500867661004800000 0} + \frac{33241694687586277532551835994131991585479341709365 1\gamma^2}{1588639548295318347128100520596602880000 00} + \frac{53528651841245586720013778449094796782695951 7\gamma^3}{1910340967166087478509019385036800000 0} + \frac{16181959154229959347078944333948601359009985 3\gamma^4}{1002929007762195926217235177144320000 00} - \frac{22030936814359665075421880028999771282 7\gamma^5}{2713552510179101531973038899200000 0} - \frac{16794784406939006695782014384357681748 1\gamma^6}{4748716892813427680952818073600000 0} + \frac{10325531566692684980221602051550 69\gamma^7}{5995854662643216768879820800000} - \frac{26320770020167701319457757 47\gamma^8}{2081893980084450266972160000} - \frac{64529434443804325524017\gamma^9}{5735245124199587512320 00} + \frac{8983607601200896 57\gamma^{10}}{5006960029063131955 20}$$

```
rh8 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4},
   {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}}]
```

$$\frac{650061496633368493556103695747235573236798622151805235563249 4163}{2597413155692321316808415758768147572342128640000000} + \frac{11590626611133500190045300572696277148706782820720315322399152 9\gamma}{4870149666923102469015779547690276698141491200000 00} + \frac{12172480552522310733760651176753935004882225318629926220908459\gamma^2}{2435074833461551234507889773845138349070745600000 00} + \frac{31021023478391202232898434492869618205648241426152093727 83\gamma^3}{1229835774475530926519136249416736539934720000000} + \frac{23004092661175442145355683114637894788072505712951860307\gamma^4}{2070641865188393906894464093405729888665600000 00} - \frac{32541294103507843909817318447516886768968035600241303\gamma^5}{4270263105817815717080334199363668541440000000} + \frac{84901437053783001928435891228225674417179376512854 1\gamma^6}{6405394658726723575620501299045502812160000000} - \frac{95426513881861943482669469983111612135143102 23\gamma^7}{8665306627065372802516911930526924800000 00} + \frac{13041818614990525992654683793206979670019740 27\gamma^8}{6065714638945760961761838351368847360000 00} - \frac{20315478606785753461718607961143472097 99\gamma^9}{2552910201576498721280234996367360000 0} + \frac{29396671172225402967563972556 61\gamma^{10}}{1240481147510446414616246353920 0} + \frac{11510650433997856532555398135 81\gamma^{11}}{2014607166648120834343619788800 0} - \frac{26770416748780086550627021\gamma^{12}}{3197789153409715610069237760 0}$$

```
FullSimplify[
 rh9 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0},
    {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1},
    {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5},
    {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9}}]]

(157649195990949269342436848158320937533643065835760704113303921260567247993
   + 4 γ
    (243059732281284741442229011671839137361592481039723595442905484267971 0 ∖
       3025 + 8 γ
       (-102530653967447848748555813460092507167660596247331255640693115889 ∖
           902381 + 2 γ
          (-127262845104326291754312939214918685225095035194664778733604697 ∖
              4964427 + 16 γ
             (-250806063533186088086418381028169498459281793942206451117024 ∖
                 911850768 + γ
                (-161890073529146117189349781087155315431852154130818263796 ∖
                    91197278887 + 36 γ
                   (-31457165835778262674276532941037178297691452819854472 6 ∖
                       31542789467 + 44 γ
                      (434633697920256810974391507089816988904318674573683 5 ∖
                         3313298337 + 120 γ
                         (-80635065255920378017587113238060338649766283687 8 ∖
                             4189351433 + 88 γ
                            (105925694113911807403263572428760966839307539 4 ∖
                               1404485867 + 360 γ
                               (-34973571029647305741254612750280951860797 1 ∖
                                   1495507493 +
                                  23760 γ
                                   (46970413387233313299260163275520390918 2 0 ∖
                                      803597 +
                                     80 γ
                                      (25483345304907358246689701747153080 3 0 ∖
                                       7021 +
                                       27720 γ
                                       (-
                                       160424249852019841937854244864413082 9 +
                                       21972851163292212055635444908510760
                                       γ))))))))))))) /
 358319536542049253318017356071565134262142665398157312000000 0 0
```

```
FullSimplify[
 rh10 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0},
    {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
    {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2},
    {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10}}]]
```

```
-((-1319307985 + 8 γ (-145695947 + 20634830 γ))
    (157649195990949269342436848158320937533643065835760704113303921260567 2 ∖
       47993 + 4 γ
       (243059732281284741442229011671839137361592481039723595442905484267 9 ∖
          7103025 + 8 γ
          (-10253065396744784874855581346009250716766059624733125564069311 5 ∖
              889902381 + 2 γ
             (-12726284510432629175431293921491868522509503519466477873360 4 ∖
                 6974964427 + 16 γ
                (-25080606353318608808641838102816949845928179394220645111 7 ∖
                    024911850768 + γ
                   (-16189007352914611718934978108715531543185215413081826 3 ∖
                       79691197278887 + 36 γ
                      (-31457165835778262674276532941037178297691452819854 4 ∖
                          72631542789467 + 44 γ
                         (43463369792025681097439150708981698890431867457 3 6 ∖
                            8353313298337 + 120 γ
                            (-80635065255920378017587113238060338649766283 6 ∖
                                8784189351433 +
                              88 γ
                               (10592569411391180740326357242876096683930 7 5 ∖
                                  3941404485867 +
                                 360 γ
                                  (-34973571029647305741254612750280951860 7 ∖
                                      9711495507493 +
                                    23760 γ
                                     (46970413387233313299260163275520390 9 1 ∖
                                      820803597 +
                                      80 γ
                                      (25483345304907358246689701747153080 3 ∖
                                      07021 +
                                      27720 γ
                                      (-
                                      160424249852019841937854244864413082 9 +
                                      21972851163292212055635444908510760
                                      γ))))))))))))))) /
  439387216166144152622427193308286499368399759754193893119229952000000000
```

```
InequalitySolve[{rh2 > 0, rh3 > 0, rh4 > 0, rh5 > 0,
  rh6 > 0, rh7 > 0, rh8 > 0, rh9 > 0, rh10 > 0, 0 < γ, γ < 1}, {γ}]
```

```
0 < γ < 1
```

Page 177 Routh - Hurwitz conditions when $\alpha = 7/8$

```
deltamatrix = {{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
  {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -1, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
  {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 α/8, -2/3, (1 - γ)/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8},
  {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4,
   -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5\alpha}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{1-\gamma}{6}, 0, \frac{4399}{6336}\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, 0, -1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5(1-\alpha)}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{\gamma}{6}, 0, \frac{3343}{6336}\right\},$$
$$\{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7\alpha}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{1-\gamma}{4}, -1, 0, -\frac{4}{5}, 0, 0, \frac{5}{8}\right\},$$
$$\{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7(1-\alpha)}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{\gamma}{4},\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7}, 0, -1, 0, 0, \frac{3079}{6336}\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[deltamatrix]
```

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{9} & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6643151\alpha}{18247680} - \frac{2938103\alpha^2}{7299072} + \frac{144252923\gamma}{383201280} - \frac{4107769\alpha\gamma}{10948608} - \frac{2063483\gamma^2}{153280512}$$

```
<< Algebra`InequalitySolve`

InequalitySolve[
  {46729201/766402560 + 6643151 α/18247680 - 2938103 α^2/7299072 + 144252923 γ/383201280 - 4107769 α γ/10948608 - 2063483 γ^2/153280512 >
     0 && 0 < α && α < 1 && 0 < γ && γ < 1}, {α, γ}]
```

$$0 < \alpha < 1 \;\&\&\; 0 < \gamma < 1$$

```
deltaL = deltamatrix - L IdentityMatrix[10];
```

MatrixForm[deltaL]

$$\begin{pmatrix}
-1-L & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1-L & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1-L & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1-L & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1-L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L
\end{pmatrix}$$

pol = Det[deltaL]

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6097639\,L}{2661120} + \frac{13104118477\,L^2}{574801920} + \frac{3995574137\,L^3}{47900160} + \frac{2441701319\,L^4}{14370048} +$$
$$\frac{352572683\,L^5}{1596672} + \frac{342560249\,L^6}{1774080} + \frac{61697\,L^7}{540} + \frac{41654\,L^8}{945} + 10\,L^9 + L^{10} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} +$$
$$\frac{29132839\,L\,\alpha}{8211456} + \frac{129861203\,L^2\,\alpha}{27371520} - \frac{4264411\,L^3\,\alpha}{1283040} - \frac{1083881\,L^4\,\alpha}{76032} - \frac{30319\,L^5\,\alpha}{2160} -$$
$$\frac{13301\,L^6\,\alpha}{2160} - \frac{1121\,L^7\,\alpha}{1080} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} - \frac{1413209\,L\,\alpha^2}{304128} - \frac{13338493\,L^2\,\alpha^2}{912384} -$$
$$\frac{2275\,L^3\,\alpha^2}{108} - \frac{2177\,L^4\,\alpha^2}{144} - \frac{49\,L^5\,\alpha^2}{9} - \frac{35\,L^6\,\alpha^2}{48} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} + \frac{618726631\,L\,\gamma}{143700480} +$$
$$\frac{14526389\,L^2\,\gamma}{1197504} + \frac{633680783\,L^3\,\gamma}{35925120} + \frac{31930627\,L^4\,\gamma}{2128896} + \frac{28747\,L^5\,\gamma}{3780} +$$
$$\frac{509\,L^6\,\gamma}{240} + \frac{971\,L^7\,\gamma}{3780} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{10627063\,L\,\alpha\,\gamma}{2737152} - \frac{5338829\,L^2\,\alpha\,\gamma}{608256} -$$
$$\frac{26555\,L^3\,\alpha\,\gamma}{2592} - \frac{1459}{216}\,L^4\,\alpha\,\gamma - \frac{1051}{432}\,L^5\,\alpha\,\gamma - \frac{17}{48}\,L^6\,\alpha\,\gamma - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512} -$$
$$\frac{358871\,L\,\gamma^2}{1368576} - \frac{9309907\,L^2\,\gamma^2}{12773376} - \frac{17225\,L^3\,\gamma^2}{18144} - \frac{73\,L^4\,\gamma^2}{108} - \frac{197\,L^5\,\gamma^2}{756} - \frac{L^6\,\gamma^2}{24}$$

Expand[pol]

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6097639\,L}{2661120} + \frac{13104118477\,L^2}{574801920} + \frac{3995574137\,L^3}{47900160} + \frac{2441701319\,L^4}{14370048} +$$
$$\frac{352572683\,L^5}{1596672} + \frac{342560249\,L^6}{1774080} + \frac{61697\,L^7}{540} + \frac{41654\,L^8}{945} + 10\,L^9 + L^{10} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} +$$
$$\frac{29132839\,L\,\alpha}{8211456} + \frac{129861203\,L^2\,\alpha}{27371520} - \frac{4264411\,L^3\,\alpha}{1283040} - \frac{1083881\,L^4\,\alpha}{76032} - \frac{30319\,L^5\,\alpha}{2160} -$$
$$\frac{13301\,L^6\,\alpha}{2160} - \frac{1121\,L^7\,\alpha}{1080} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} - \frac{1413209\,L\,\alpha^2}{304128} - \frac{13338493\,L^2\,\alpha^2}{912384} -$$
$$\frac{2275\,L^3\,\alpha^2}{108} - \frac{2177\,L^4\,\alpha^2}{144} - \frac{49\,L^5\,\alpha^2}{9} - \frac{35\,L^6\,\alpha^2}{48} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} + \frac{618726631\,L\,\gamma}{143700480} +$$
$$\frac{14526389\,L^2\,\gamma}{1197504} + \frac{633680783\,L^3\,\gamma}{35925120} + \frac{31930627\,L^4\,\gamma}{2128896} + \frac{28747\,L^5\,\gamma}{3780} +$$
$$\frac{509\,L^6\,\gamma}{240} + \frac{971\,L^7\,\gamma}{3780} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{10627063\,L\,\alpha\,\gamma}{2737152} - \frac{5338829\,L^2\,\alpha\,\gamma}{608256} -$$
$$\frac{26555\,L^3\,\alpha\,\gamma}{2592} - \frac{1459}{216}\,L^4\,\alpha\,\gamma - \frac{1051}{432}\,L^5\,\alpha\,\gamma - \frac{17}{48}\,L^6\,\alpha\,\gamma - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512} -$$
$$\frac{358871\,L\,\gamma^2}{1368576} - \frac{9309907\,L^2\,\gamma^2}{12773376} - \frac{17225\,L^3\,\gamma^2}{18144} - \frac{73\,L^4\,\gamma^2}{108} - \frac{197\,L^5\,\gamma^2}{756} - \frac{L^6\,\gamma^2}{24}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{1}{2299207680}\,(140187603 + 101345181696\,L^8 + 22992076800\,L^9 + 2299207680\,L^{10} - 925502445\,\alpha^2 + \alpha\,(837037026 - 862631490\,\gamma) - 304128\,L^7\,(-863758 + 7847\,\alpha - 1942\,\gamma) + 865517538\,\gamma - 30952245\,\gamma^2 - 288\,L^5\,(-1762863415 + 43464960\,\alpha^2 - 60713664\,\gamma + 2080320\,\gamma^2 + 3696\,\alpha\,(30319 + 5255\,\gamma)) - 40\,L^4\,(-9766805276 + 868988736\,\alpha^2 - 862126929\,\gamma + 38852352\,\gamma^2 + 756\,\alpha\,(1083881 + 513568\,\gamma)) - 16\,L^3\,(-11986722411 + 3027024000\,\alpha^2 - 2534723132\,\gamma + 136422000\,\gamma^2 + 112\,\alpha\,(4264411 + 13144725\,\gamma)) - 8\,L\,(-658545012 + 1335482505\,\alpha^2 - 1237453262\,\gamma + 75362910\,\gamma^2 + 35\,\alpha\,(-29132839 + 31881189\,\gamma)) - 4\,L^2\,(-13104118477 + 8403250590\,\alpha^2 - 6972666720\,\gamma + 418945815\,\gamma^2 + 21\,\alpha\,(-129861203 + 240247305\,\gamma)) - 432\,L^6\,(3880800\,\alpha^2 + 2464\,\alpha\,(13301 + 765\,\gamma) + 3\,(-342560249 - 3762528\,\gamma + 73920\,\gamma^2)))$$

```
a0 = Coefficient[pol, L, 10] /. α → 7 / 8
```

$$1$$

```
a1 = Coefficient[pol, L, 9] /. α → 7 / 8
```

$$10$$

```
a2 = Coefficient[pol, L, 8] /. α → 7 / 8
```

$$\frac{41654}{945}$$

```
a3 = Coefficient[pol, L, 7] /. α → 7 / 8
```

$$\frac{65287}{576} + \frac{971\,\gamma}{3780}$$

```
a4 = Coefficient[pol, L, 6] /. α → 7 / 8
```

$$\frac{1992065107}{10644480} + \frac{1159\,\gamma}{640} - \frac{\gamma^2}{24}$$

```
a5 = Coefficient[pol, L, 5] /. α → 7 / 8
```

$$\frac{1631533909}{7983360} + \frac{73601\,\gamma}{13440} - \frac{197\,\gamma^2}{756}$$

```
a6 = Coefficient[pol, L, 4] /. α → 7 / 8
```

$$\frac{16768996987}{114960384} + \frac{19348211\,\gamma}{2128896} - \frac{73\,\gamma^2}{108}$$

```
2441701319/14370048 - 1083881 α/76032 - 2177 α^2/144 + 31930627 γ/2128896 - 1459 α γ/216 - 73 γ^2/108 /. α → 7 / 8
```

$$\frac{16768996987}{114960384} + \frac{19348211\,\gamma}{2128896} - \frac{73\,\gamma^2}{108}$$

```
a7 = Coefficient[pol, L, 3] /. α → 7 / 8
```

$$\frac{9251244883}{143700480} + \frac{623270041\,\gamma}{71850240} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144}$$

```
3995574137/47900160 - 4264411 α/1283040 - 2275 α^2/108 + 633680783 γ/35925120 - 26555 α γ/2592 - 17225 γ^2/18144 /. α → 7 / 8
```

$$\frac{9251244883}{143700480} + \frac{623270041\,\gamma}{71850240} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144}$$

```
a8 = Coefficient[pol, L, 2] /. α → 7 / 8
```

$$\frac{289810539173}{18393661440} + \frac{1364331995\,\gamma}{306561024} - \frac{9309907\,\gamma^2}{12773376}$$

```
a9 = Coefficient[pol, L, 1] /. α → 7 / 8
```

$$\frac{33808602463}{18393661440} + \frac{189884981\,\gamma}{209018880} - \frac{358871\,\gamma^2}{1368576}$$

```
a10 = Coefficient[pol, L, 0] /. α → 7 / 8
```

$$\frac{3498820081}{49049763840} + \frac{147619979\,\gamma}{3065610240} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

```
rh0 = a0
```

```
1
```

```
rh1 = a1
```

```
10
```

```
rh2 = Det[{{a1, a0}, {a3, a2}}]
```

$$\frac{3960685}{12096} - \frac{971\,\gamma}{3780}$$

```
rh3 = Det[{{a1, a0, 0}, {a3, a2, a1}, {a5, a4, a3}}]
```

$$\frac{223819147967}{10948608} - \frac{1630831931\,\gamma}{22861440} + \frac{21359159\,\gamma^2}{14288400}$$

```
rh4 = Det[{{a1, a0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0}, {a5, a4, a3, a2}, {a7, a6, a5, a4}}]
```

$$\frac{4300217860930625629315 13}{256975636738867200} - \frac{215838887055883159423\,\gamma}{14600888451072000} +$$
$$\frac{48737895185789879\,\gamma^2}{60837035212800} + \frac{128967466939\,\gamma^3}{1728324864000} - \frac{7411559\,\gamma^4}{342921600}$$

```
rh5 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1}, {a7, a6, a5, a4, a3}, {a9, a8, a7, a6, a5}}]
```

$$\frac{272211918617825834527530200772127}{2051529019315602849792000} - \frac{29830293095451875039300326172 69\,\gamma}{13987697858970019430400 00} +$$
$$\frac{37148604213028665030994236523\,\gamma^2}{17484622323712524288000 0} + \frac{33388387742519758363579\,\gamma^3}{110382716690104320000} +$$
$$\frac{39224607073004256773\,\gamma^4}{6898919793131520000} - \frac{232709943455621\,\gamma^5}{871075731456000} + \frac{1460077123\,\gamma^6}{259248729600}$$

```
rh6 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, a10, a9, a8, a7, a6}}]
```

$$\frac{43649680189056735915328617810799981085150197}{56602695323439628992859833630720 00} -$$
$$\frac{11281709747187077536047764093769468928994 57\,\gamma}{70753369154299536241074792038400 00} +$$
$$\frac{14123777560070028957935959120684426196 57\,\gamma^2}{44667531031754757727951257600000} +$$
$$\frac{29995868076032495772778710917404384 1\,\gamma^3}{27917206894846723577996953600000} +$$
$$\frac{62421659492182544294473433952 7\,\gamma^4}{45777920265720063590400000} - \frac{17711159960535559036452193386 1\,\gamma^5}{66091872383633341808640000 0} +$$
$$\frac{28138085045021835246943\,\gamma^6}{7586303074338078720000} + \frac{2559433551294895489\,\gamma^7}{16557407503515648000} - \frac{1322377768339\,\gamma^8}{447981804748800}$$

```
rh7 = Det[
  {{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3},
   {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}}]
```

$$\frac{5557110701509431742128502813750338612487320887490655 19}{232395271064915141065596419012988764160000 0} - \frac{216791780150685199852610591168927351503699051268230319\gamma}{813383448727202993729587466545460674560000 00} + \frac{215931268171584314372747387215493668801159180121592 77\gamma^2}{101672931090900374216198433318182584320000 00} + \frac{158202314185853924075844068604553971013035678 17\gamma^3}{523979236708412565533902459895808000000} + \frac{248319003285009570006261999661345045772830375 3\gamma^4}{160468641241951348194757628343091200000 0} - \frac{471979239651562842807086523784353701207\gamma^5}{354423185002984689890356101120000 00} + \frac{222570313698918557045241385665076554126 1\gamma^6}{759794702850148428952450891776000000} + \frac{150757026390236613461256407984837 59\gamma^7}{95933674602291468302077132800000} - \frac{22438075698545245352560400456 3\gamma^8}{13324121472540481708621824000 0} - \frac{128995000597609719370160 9\gamma^9}{12617539273239092527104000} + \frac{898360760120089657\gamma^{10}}{500696002906313195520}$$

```
rh8 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4},
   {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}}]
```

$$\frac{184713969973749223824839213079007613951280310672057418114401978 5163}{797925321428681108523545321093574934223501918208000000} + \frac{173371653545086206465646745456717677695364301165470955086694926297\gamma}{498703325892925692827215825683484333889688698880000000} + \frac{638522784263308067673406515997619491716534171092579202696002239\gamma^2}{124675831473231423206803956420871083472422174720000 00} + \frac{152118163189209532309599799748887972693345912919669943141202 51\gamma^3}{519482631138464263361683151753629514468425728000000 0} + \frac{334216961093294952391574832483436126002802394018534671897 1\gamma^4}{371059022241760188115487965538306796048875520000 00} - \frac{202702194009134211427149979580968428946027875323896389 1\gamma^5}{327956206526808247071769666511129743982592000000} + \frac{199586196802247990747662468340195059810598892639060 1\gamma^6}{136648419386170102946570694379637393326080000 00} - \frac{545028974020669652345620781791666984633059249209\gamma^7}{110915924826436771872216472710744637440000000} + \frac{169427028084024461409173078576433856520653745 7\gamma^8}{970514342231321753881894136219015577600000 0} - \frac{296893048942501233241726469873614623799 69\gamma^9}{40846563225223979540483759941877760000 0} + \frac{253367761382945048972503586357537 27\gamma^{10}}{486268609824094994529568570736640 00} + \frac{375027245966948665771721387279\gamma^{11}}{732584424235680303397679923200 0} - \frac{267704167487800865506270 21\gamma^{12}}{319778915340971561006923776 00}$$

```
FullSimplify[
 rh9 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0},
    {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1},
    {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5},
    {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9}}]]

(48791389403404155716071616664955029229285971561759725825604507064329663964\
    815 + 256 γ
    (11779072787921124031738390406519661629048115338485934323125516537671887\
       34906 + γ
       (-44270247247811111118859732305372066046113215465834865110395609455\
           9130901 + γ
          (-22553186135460562178166504445055138383630746514521573196029696\
              1097747715 + 4 γ
             (-11564911081913642919973745177855114092958175770159654822804\
                 049667669317 + 128 γ
                (-67017868415808039264067948321349077823421275346276010134\
                    91441392602 + 9 γ
                   (-28972578159943091435535863599090762312456854915061984\
                       899779076065 + 88 γ
                      (22328937143541290025800110081750273023576722605767\
                         94785976059 + 12 γ
                         (-45688939067713054365743628530941305906689924171\
                             230090837637 + 352 γ
                            (83389385887173631747465170158870962786534245\
                               6585710577 + 2880 γ
                               (-54523050153762346668020598492438828001742\
                                   9525304441 +
                                 11880 γ
                                  (17267246807486340838669377683208458947\
                                     9497933 +
                                    20 γ
                                     (-42115193102952299653490950853793124\
                                      8442939 +
                                      221760 γ
                                      (-
                                      2822173457410096160242754674849893163+
                                      4394570232658442411127088981702152\
                                      0γ)))))))))))))) /
 14676768216762337415905990904691307899377363574708523499520000000
```

```
FullSimplify[
 rh10 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0},
    {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
    {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2},
    {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10}}]]
```

```
-((-3498820081 + 16 γ (-147619979 + 41269660 γ))
    (48791389403404155716071616664955029229285971561759725825604507064329665
       3964815 + 256 γ
       (11779072787921124031738390406519661629048115338485934323125516537675
          18834906 + γ
          (-44270247247811111118859732305372066046113215465834865110395609445
              5599130901 + γ
             (-22553186135460562178166504445055138383630746514521573196029645
                 9661097747715 + 4 γ
                (-11564911081913642919973745177855114092958175770159654822845
                    044049667669317 + 128 γ
                   (-67017868415808039264067948321349077823421275346276010145
                       34691441392602 + 9 γ
                      (-28972578159943091435535863599090762312456854915061945
                          845899779076065 + 88 γ
                         (22328937143541290025800110081750273023576722605765
                            73794785976059 + 12 γ
                            (-45688939067713054365743628530941305906689924145
                                712230090837637 +
                              352 γ
                               (83389385887173631747465170158870962786534245
                                  5106585710577 +
                                 2880 γ
                                  (-54523050153762346668020598492438828001745
                                      4259525304441 +
                                    11880 γ
                                     (17267246807486340838669377683208458945
                                      7049497933 +
                                      20 γ
                                      (-42115193102952299653490950853793124
                                      68442939 +
                                      221760 γ
                                      (-
                                      28221734574100961602427546748498931634+
                                      43945702326584424111270889817021520
                                      γ))))))))))))))) /
  719892014966610579656584713516296600565186166381271274486546353356800000
   00
```

```
InequalitySolve[{rh2 > 0, rh3 > 0, rh4 > 0, rh5 > 0,
  rh6 > 0, rh7 > 0, rh8 > 0, rh9 > 0, rh10 > 0, 0 < γ, γ < 1}, {γ}]
```

```
0 < γ < 1
```

Page 177 Routh - Hurwitz conditions when $\alpha = 127/128$

```
deltamatrix = {{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
  {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -1, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
  {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 α/8, -2/3, (1 - γ)/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8},
  {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4,
   -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

```
{{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, 1 - γ/6, 0, 4399/6336}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
 {-1/9, 0, -1, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
 {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 α/8, -2/3, 1 - γ/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8},
 {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4,
  -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
 {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

```
MatrixForm[deltamatrix]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[%]
```

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

```
<< Algebra`InequalitySolve`

InequalitySolve[
  {46729201/766402560 + 6643151 α/18247680 - 2938103 α^2/7299072 + 144252923 γ/383201280 - 4107769 α γ/10948608 - 2063483 γ^2/153280512 >
     0 && 0 < α && α < 1 && 0 < γ && γ < 1}, {α, γ}]
```

$0 < \alpha < 1 \;\&\&\; 0 < \gamma < 1$

```
deltaL = deltamatrix - L IdentityMatrix[10];
```

MatrixForm[deltaL]

$$\begin{pmatrix}
-1-L & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1-L & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1-L & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1-L & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1-L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1-L
\end{pmatrix}$$

pol = Det[deltaL]

$$\frac{46729201}{766402560}+\frac{6097639\,L}{2661120}+\frac{13104118477\,L^2}{574801920}+\frac{3995574137\,L^3}{47900160}+\frac{2441701319\,L^4}{14370048}+\frac{352572683\,L^5}{1596672}+\frac{342560249\,L^6}{1774080}+\frac{61697\,L^7}{540}+\frac{41654\,L^8}{945}+10\,L^9+L^{10}+\frac{6643151\,\alpha}{18247680}+\frac{29132839\,L\,\alpha}{8211456}+\frac{129861203\,L^2\,\alpha}{27371520}-\frac{4264411\,L^3\,\alpha}{1283040}-\frac{1083881\,L^4\,\alpha}{76032}-\frac{30319\,L^5\,\alpha}{2160}-\frac{13301\,L^6\,\alpha}{2160}-\frac{1121\,L^7\,\alpha}{1080}-\frac{2938103\,\alpha^2}{7299072}-\frac{1413209\,L\,\alpha^2}{304128}-\frac{13338493\,L^2\,\alpha^2}{912384}-\frac{2275\,L^3\,\alpha^2}{108}-\frac{2177\,L^4\,\alpha^2}{144}-\frac{49\,L^5\,\alpha^2}{9}-\frac{35\,L^6\,\alpha^2}{48}+\frac{144252923\,\gamma}{383201280}+\frac{618726631\,L\,\gamma}{143700480}+\frac{14526389\,L^2\,\gamma}{1197504}+\frac{633680783\,L^3\,\gamma}{35925120}+\frac{31930627\,L^4\,\gamma}{2128896}+\frac{28747\,L^5\,\gamma}{3780}+\frac{509\,L^6\,\gamma}{240}+\frac{971\,L^7\,\gamma}{3780}-\frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608}-\frac{10627063\,L\,\alpha\,\gamma}{2737152}-\frac{5338829\,L^2\,\alpha\,\gamma}{608256}-\frac{26555\,L^3\,\alpha\,\gamma}{2592}-\frac{1459}{216}\,L^4\,\alpha\,\gamma-\frac{1051}{432}\,L^5\,\alpha\,\gamma-\frac{17}{48}\,L^6\,\alpha\,\gamma-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}-\frac{358871\,L\,\gamma^2}{1368576}-\frac{9309907\,L^2\,\gamma^2}{12773376}-\frac{17225\,L^3\,\gamma^2}{18144}-\frac{73\,L^4\,\gamma^2}{108}-\frac{197\,L^5\,\gamma^2}{756}-\frac{L^6\,\gamma^2}{24}$$

Expand[pol]

$$\frac{46729201}{766402560}+\frac{6097639\,L}{2661120}+\frac{13104118477\,L^2}{574801920}+\frac{3995574137\,L^3}{47900160}+\frac{2441701319\,L^4}{14370048}+\frac{352572683\,L^5}{1596672}+\frac{342560249\,L^6}{1774080}+\frac{61697\,L^7}{540}+\frac{41654\,L^8}{945}+10\,L^9+L^{10}+\frac{6643151\,\alpha}{18247680}+\frac{29132839\,L\,\alpha}{8211456}+\frac{129861203\,L^2\,\alpha}{27371520}-\frac{4264411\,L^3\,\alpha}{1283040}-\frac{1083881\,L^4\,\alpha}{76032}-\frac{30319\,L^5\,\alpha}{2160}-\frac{13301\,L^6\,\alpha}{2160}-\frac{1121\,L^7\,\alpha}{1080}-\frac{2938103\,\alpha^2}{7299072}-\frac{1413209\,L\,\alpha^2}{304128}-\frac{13338493\,L^2\,\alpha^2}{912384}-\frac{2275\,L^3\,\alpha^2}{108}-\frac{2177\,L^4\,\alpha^2}{144}-\frac{49\,L^5\,\alpha^2}{9}-\frac{35\,L^6\,\alpha^2}{48}+\frac{144252923\,\gamma}{383201280}+\frac{618726631\,L\,\gamma}{143700480}+\frac{14526389\,L^2\,\gamma}{1197504}+\frac{633680783\,L^3\,\gamma}{35925120}+\frac{31930627\,L^4\,\gamma}{2128896}+\frac{28747\,L^5\,\gamma}{3780}+\frac{509\,L^6\,\gamma}{240}+\frac{971\,L^7\,\gamma}{3780}-\frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608}-\frac{10627063\,L\,\alpha\,\gamma}{2737152}-\frac{5338829\,L^2\,\alpha\,\gamma}{608256}-\frac{26555\,L^3\,\alpha\,\gamma}{2592}-\frac{1459}{216}\,L^4\,\alpha\,\gamma-\frac{1051}{432}\,L^5\,\alpha\,\gamma-\frac{17}{48}\,L^6\,\alpha\,\gamma-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}-\frac{358871\,L\,\gamma^2}{1368576}-\frac{9309907\,L^2\,\gamma^2}{12773376}-\frac{17225\,L^3\,\gamma^2}{18144}-\frac{73\,L^4\,\gamma^2}{108}-\frac{197\,L^5\,\gamma^2}{756}-\frac{L^6\,\gamma^2}{24}$$

```
Simplify[%]
```

$$\frac{1}{2299207680}\,(140187603 + 101345181696\,L^8 + 22992076800\,L^9 +$$
$$2299207680\,L^{10} - 925502445\,\alpha^2 + \alpha\,(837037026 - 862631490\,\gamma) -$$
$$304128\,L^7\,(-863758 + 7847\,\alpha - 1942\,\gamma) + 865517538\,\gamma - 30952245\,\gamma^2 - 288\,L^5$$
$$(-1762863415 + 43464960\,\alpha^2 - 60713664\,\gamma + 2080320\,\gamma^2 + 3696\,\alpha\,(30319 + 5255\,\gamma)) -$$
$$40\,L^4\,(-9766805276 + 868988736\,\alpha^2 - 862126929\,\gamma + 38852352\,\gamma^2 +$$
$$756\,\alpha\,(1083881 + 513568\,\gamma)) - 16\,L^3\,(-11986722411 + 3027024000\,\alpha^2 -$$
$$2534723132\,\gamma + 136422000\,\gamma^2 + 112\,\alpha\,(4264411 + 13144725\,\gamma)) -$$
$$8\,L\,(-658545012 + 1335482505\,\alpha^2 - 1237453262\,\gamma + 75362910\,\gamma^2 +$$
$$35\,\alpha\,(-29132839 + 31881189\,\gamma)) - 4\,L^2\,(-13104118477 + 8403250590\,\alpha^2 -$$
$$6972666720\,\gamma + 418945815\,\gamma^2 + 21\,\alpha\,(-129861203 + 240247305\,\gamma)) -$$
$$432\,L^5\,(3880800\,\alpha^2 + 2464\,\alpha\,(13301 + 765\,\gamma) + 3\,(-342560249 - 3762528\,\gamma + 73920\,\gamma^2)))$$

```
a0 = Coefficient[pol, L, 10] /. α → 127 / 128
```

$$1$$

```
a1 = Coefficient[pol, L, 9] /. α → 127 / 128
```

$$10$$

```
a2 = Coefficient[pol, L, 8] /. α → 127 / 128
```

$$\frac{41654}{945}$$

```
a3 = Coefficient[pol, L, 7] /. α → 127 / 128
```

$$\frac{1043471}{9216} + \frac{971\,\gamma}{3780}$$

```
a4 = Coefficient[pol, L, 6] /. α → 127 / 128
```

$$\frac{507567476677}{2724986880} + \frac{18119\,\gamma}{10240} - \frac{\gamma^2}{24}$$

```
a5 = Coefficient[pol, L, 5] /. α → 127 / 128
```

$$\frac{102969048271}{510935040} + \frac{3348923\,\gamma}{645120} - \frac{197\,\gamma^2}{756}$$

```
a6 = Coefficient[pol, L, 4] /. α → 127 / 128
```

$$\frac{2073172246091}{14714929152} + \frac{8831533\,\gamma}{1064448} - \frac{73\,\gamma^2}{108}$$

```
2441701319/14370048 - 1083881 α/76032 - 2177 α^2/144 + 31930627 γ/2128896 - 1459 α γ/216 - 73 γ^2/108 /. α → 127 / 128
```

$$\frac{2073172246091}{14714929152} + \frac{8831533\,\gamma}{1064448} - \frac{73\,\gamma^2}{108}$$

```
a7 = Coefficient[pol, L, 3] /. α → 127 / 128
```

$$\frac{1092214813919}{18393661440} + \frac{8592124531\,\gamma}{1149603840} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144}$$

```
3995574137/47900160 - 4264411 α/1283040 - 2275 α^2/108 +
  633680783 γ/35925120 - 26555 α γ/2592 - 17225 γ^2/18144 /. α → 127 / 128
```

$$\frac{1092214813919}{18393661440} + \frac{8592124531\,\gamma}{1149603840} - \frac{17225\,\gamma^2}{18144}$$

```
a8 = Coefficient[pol, L, 2] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{1124258951}{52254720} + \frac{593342669\,\gamma}{76640256} - \frac{9309907\,\gamma^2}{12773376}$$

```
a9 = Coefficient[pol, L, 1] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{3337996273}{1149603840} + \frac{1359064909\,\gamma}{574801920} - \frac{358871\,\gamma^2}{1368576}$$

```
a10 = Coefficient[pol, L, 0] /. α → 1 / 2
```

$$\frac{436440673}{3065610240} + \frac{144733931\,\gamma}{766402560} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

```
rh0 = a0
```

```
1
```

```
rh1 = a1
```

```
10
```

```
rh2 = Det[{{a1, a0}, {a3, a2}}]
```

$$\frac{4944971}{15120} - \frac{971\,\gamma}{3780}$$

```
rh3 = Det[{{a1, a0, 0}, {a3, a2, a1}, {a5, a4, a3}}]
```

$$\frac{2435492823109}{119750400} - \frac{2163076429\,\gamma}{28576800} + \frac{21359159\,\gamma^2}{14288400}$$

```
rh4 = Det[{{a1, a0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0}, {a5, a4, a3, a2}, {a7, a6, a5, a4}}]
```

$$\frac{6631187313500025307630 1}{40152443240448000} - \frac{7966644225277755671\,\gamma}{456277764096000} +$$
$$\frac{61002787653239653\,\gamma^2}{76046294016000} + \frac{88139320051\,\gamma^3}{432081216000} - \frac{7411559\,\gamma^4}{342921600}$$

```
rh5 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1}, {a7, a6, a5, a4, a3}, {a9, a8, a7, a6, a5}}]
```

$$\frac{13840738476467714592407056751681}{10685046975602098176000 0} - \frac{3171016088652991200229996 4611\,\gamma}{10927888952320327680000} +$$
$$\frac{11590141071855838645971243 89\,\gamma^2}{5463944476160163840000} + \frac{90482424045521551783\,\gamma^3}{313587263324160000} +$$
$$\frac{12081370557332909627\,\gamma^4}{1724729948282880000} - \frac{69812673348359\,\gamma^5}{217768932864000} + \frac{1460077123\,\gamma^6}{259248729600}$$

```
rh6 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, a10, a9, a8, a7, a6}}]
```

$$\frac{18784105452638082840927574908304837699 2511}{25125486205362051221972582400000} -$$
$$\frac{78323180893090603795499420583366644294147\,\gamma}{27638034825898256344169840 6400000} +$$
$$\frac{13731065836582703479010161131818593 61\,\gamma^2}{43620635773198005593702400000} +$$
$$\frac{33232320347614377711045041751079\,\gamma^3}{13958603447423361789984768 00} + \frac{14083455030527335330228228391\,\gamma^4}{89920914807664410624 0000} -$$
$$\frac{13712133156727975648099718371\,\gamma^5}{41307420239770838630400000} + \frac{47760765281688221143457\,\gamma^6}{20862333454429716480000} +$$
$$\frac{3206457154184755069\,\gamma^7}{16557407503515648000} - \frac{1322377768339\,\gamma^8}{447981804748800}$$

```
rh7 = Det[
  {{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0}, {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0},
   {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1}, {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3},
   {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}}]
```

$$\frac{2812519195670913784219052812952918496311607638896167485613116102 3}{1161460467163770907801557190278399233492546224128000 00} -$$
$$\frac{9324471249111238182368793631234586631511181480426126785019407 19\gamma}{5589528498225647493794993978214796311182878703616000000} +$$
$$\frac{4702411480276655384490151760738555787630441245792973701790618 1\gamma^2}{2183409569619393552263669522740154809055811993600000 0} +$$
$$\frac{3162967044170505964019551431028088965550740642740651587 9\gamma^3}{9845822373824826624565609319715705307791360000 00} +$$
$$\frac{9998405688079100411507677549816676227960102892391067\gamma^4}{6730542638356815075386646995899407925248000000} -$$
$$\frac{3090699217399825365770904456478434687036363044 3\gamma^5}{1821034263624679403513703191531225088000000} -$$
$$\frac{1214513102373183004587396806726509628973466 21\gamma^6}{4979390564598732743982782164343193600000 0} +$$
$$\frac{5577212870484552638077353256393570693 9\gamma^7}{3929443311709858541653079359488000 00} -$$
$$\frac{6924557863831631085379327346270 3\gamma^8}{3410975096970363317407186944000 0} -$$
$$\frac{1869373681880358558182426 9\gamma^9}{2018806283718254804336640 00} + \frac{898360760120089657\gamma^{10}}{500696002906313195520}$$

```
rh8 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0},
   {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
   {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2}, {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4},
   {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}}]
```

$$\frac{48273748349543964678996024200480865551399067715053682214016283756493169739 0}{274137} +$$
$$\frac{22459601126598071795853911654863492207183736951908774219402444800000 0}{(39610666071276479967042465087148901055250591511069349762468783934233155 51}{940007\gamma)} +$$
$$\frac{87732816900773717952554342401810516434311472468393649294540800000 00}{(36331543352560656948703810340137534948110914282714955043088757713122517 22}{11\gamma^2)} +$$
$$\frac{68541263203729467150433080001414465964305837865932538511360000 00}{2936666440124767004948812607080472148924764939184547309553315474560884 49\gamma^3} +$$
$$\frac{12313448831431629552687751326890642548728048596249032649187621365993\gamma^4}{1593686365414096613430828683068602724244462375974993920000 00} -$$
$$\frac{4157105128064127002995114033484444045086965621204801760528467 73\gamma^5}{8803507384705394802727115515688304190113033958195200000 0} +$$
$$\frac{1287174183044303804354247038013783044061825754390871932447 3\gamma^6}{7641933493667877432922843329590541831695341977600000 0} -$$
$$\frac{6194255296492577664791216827620917249499008058952310 9\gamma^7}{1163037767908057645026812600891417689482854400000 00} +$$
$$\frac{9031326668597140647144829514850118464490669503215 77\gamma^8}{6360362793247190246240381411124940489359360000 00} -$$
$$\frac{1090283224903777142956441103774235543604935 49\gamma^9}{1673075229705174201978214807219313049600000 0} +$$
$$\frac{9370099396123985575686794490480398267\gamma^{10}}{1244847641149683185995695541085798400 0} +$$
$$\frac{5882038827074235583282460424727 9\gamma^{11}}{1289348586654797333979916664832000 0} - \frac{26770416748780086550627021\gamma^{12}}{3197789153409715610069237760 0}$$

```
FullSimplify[
 rh9 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0},
    {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1},
    {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3}, {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5},
    {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9}}]]

(24638132749182859312390499246083150408952444385692901987331648159248262425\
    1250708417068690393 5 + 512 γ
    (29932628436312995978249253749559731077534328804294931703849958956956745\
       026447719756905480393 + 32 γ
       (-85958096418400390658459331682418734398174697217744236338239341801 4\
           671191191749445057812 7 + 128 γ
          (-38038255266306369388621949648436534695222392957726649378539615 7\
              896023606508361338874 01 + 32 γ
             (-14671510663181729000961719403756599388112394607385853913086 4\
                 52252683891766944829156 9 + 2048 γ
                (-54222151368050827404531891937511312899016612044264849674 7\
                    394977623992428744207 1 + 144 γ
                   (-93406838857477962854890052157881957464026731477487198 9\
                       0018843176614999320 01 + 5632 γ
                      (11204622227754924257947200923080282060638422084068 8 4\
                         4148329583287631763 + 48 γ
                         (-81441830399193658714669802370197938628167416507 6\
                             45127542183838571 17 +
                           5632 γ
                            (24928243218237809790572162354900437635167237 4 0\
                               9464474419704427 +
                              23040 γ
                               (-55197112739662676342627973573559181174016 9\
                                   354707200510777 +
                                 380160 γ
                                  (63000212981743328848715930029707349000 6 3\
                                     3774226743 +
                                    320 γ
                                     (-20278888735020163502682254492056632 1\
                                      0375864759 +
                                      3548160 γ
                                      (-
                                      39360102224107028386169121461022763183
                                      +
                                      70313123722535078578033423707234432 0
                                      γ))))))))))))) /
 10575726059522240296185590954988267649920409430206145401781474528242905907\
  20000000
```

```
FullSimplify[
 rh10 = Det[{{a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
    {a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0, 0, 0}, {a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0, 0, 0},
    {a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0},
    {0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2},
    {0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4}, {0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8, a7, a6},
    {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10, a9, a8}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, a10}}]]
```

```
-((-325426215601 + 256 γ (-205340939 + 660314560 γ))
    (246381327491828593123904992460831504089524443856929019873316481592482 6 ↖
       24251250708417068690393 5 + 512 γ
       (29932628436312995978249253749559731077534328804294931703849958956 95 ↖
          67402644771975690548039 3 + 32 γ
          (-85958096418400390658459331682418734398174697217744236338239341 8 ↖
             01467119119174944505781 27 + 128 γ
             (-38038255266306369388621949648436534695222392957726649378539 6 ↖
                15789602360650836133887401 + 32 γ
                (-14671510663181729000961719403756599388112394607385853913 0 ↖
                   864522526838917669448291569 + 2048 γ
                   (-54222151368050827404531891937511312899016612044264849 6 ↖
                      74739497762399242874420 71 + 144 γ
                      (-93406838857477962854890052157881957464026731477487 1 ↖
                         98900188431766149993200 1 +
                        5632 γ
                        (11204622227754924257947200923080282060638422084 06 ↖
                           8844148329583287631763 +
                          48 γ
                          (-81441830399193658714669802370197938628167416 5 ↖
                             0764512754218383857117 +
                            5632 γ
                            (24928243218237809790572162354900437635167 23 ↖
                               7409464474419704427 +
                              23040 γ
                              (-55197112739662676342627973573559181174 0 ↖
                                 169354707200510777 +
                                380160 γ
                                (63000212981743328848715930029707349 00 ↖
                                 0633774226743 +
                                 320 γ
                                 (-20278888735020163502682254492056632 ↖
                                 10375864759 +
                                 3548160 γ
                                 (-
                                 39360102224107028386169121461022763183
                                 +
                                 70313123722535078578034237072344320
                                 γ))))))))))))))) /
  13279663760796151545744253162317173713902281660101642098536530966970622 58 ↖
   9529624464588800000000
```

```
InequalitySolve[{rh2 > 0, rh3 > 0, rh4 > 0, rh5 > 0,
  rh6 > 0, rh7 > 0, rh8 > 0, rh9 > 0, rh10 > 0, 0 < γ, γ < 1}, {γ}]
```

```
0 < γ < 1
```

Pages 178 - 179 Solution of (i) the linear equalities system
139 and (ii) of the corresponding system of inequalities (Table XI9)

```
deltamatrix =
```

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[deltamatrix]
```

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

```
<< Algebra`InequalitySolve`

InequalitySolve[
  {46729201/766402560 + 6643151 α/18247680 - 2938103 α^2/7299072 + 144252923 γ/383201280 - 4107769 α γ/10948608 - 2063483 γ^2/153280512 > 0 &&
    0 < α && α < 1 && 0 < γ && γ < 1}, {α, γ}]
```

$$0 < \alpha < 1 \;\&\&\; 0 < \gamma < 1$$

inchouena =

$$\left\{\left\{0,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1/4,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{1/4,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{0,\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{0,\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{0,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \left\{\frac{1}{4},\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \left\{\frac{1}{4},\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{0,\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \left\{\frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{0,\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \left\{\frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
\frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
\frac{1}{4} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[inchouena]

$$\frac{21516739}{1021870080} + \frac{1394749\,\alpha}{15482880} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{6017281\,\gamma}{56770560} - \frac{10748249\,\alpha\,\gamma}{102187008} - \frac{480671\,\gamma^2}{92897280}$$

exphouena =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 1/4,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \left\{1,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \left\{0,\ \frac{1}{4},\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \left\{0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \left\{0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & \frac{1}{4} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[exphouena]

$$\frac{2227627}{383201280} - \frac{23767\,\alpha}{25546752} + \frac{81311\,\gamma}{6842880} - \frac{872591\,\alpha\,\gamma}{76640256} - \frac{99013\,\gamma^2}{54743040}$$

inchoudyo =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1/4,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ 0,\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ 0,\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ 0,\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ 0,\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & 0 & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & 0 & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[inchoudyo]

$$-\frac{897373}{87588864}+\frac{2424127\,\alpha}{15482880}-\frac{12304673\,\alpha^2}{87588864}+\frac{10225441\,\gamma}{102187008}-\frac{21925027\,\alpha\,\gamma}{218972160}-\frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

exphoudyo =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & 0 & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[exphoudyo]

$$-\frac{3255719}{127733760}+\frac{16747067\,\alpha}{255467520}-\frac{872591\,\alpha^2}{21897216}+\frac{2282173\,\gamma}{383201280}-\frac{693091\,\alpha\,\gamma}{109486080}$$

incbusena =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ 0,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ 0,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[incbusena]

$$\frac{2263181}{437944320} + \frac{2308811\,\alpha}{21897216} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{3979235\,\gamma}{43794432} - \frac{9882139\,\alpha\,\gamma}{109486080} - \frac{2044651\,\gamma^2}{437944320}$$

expbusena =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[expbusena]

$$-\frac{15443467}{1532805120}+\frac{3158657\,\alpha}{218972160}-\frac{2489849\,\gamma}{766402560}+\frac{86063\,\alpha\,\gamma}{24330240}-\frac{665857\,\gamma^2}{510935040}$$

incbusdyo =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ 0,\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ 0,\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ 0,\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ 0,\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ -1,\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & 0 & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & 0 & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[incbusdyo]

$$\frac{23228269}{613122048} + \frac{7653053\,\alpha}{153280512} - \frac{2421725\,\alpha^2}{29196288} + \frac{30916103\,\gamma}{306561024} - \frac{15375977\,\alpha\,\gamma}{153280512} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

expbusdyo =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1/4,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1/4,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ 0,\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ 0,\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[expbusdyo]

$$\frac{4338259}{191600640} - \frac{62975641\,\alpha}{1532805120} + \frac{86063\,\alpha^2}{4866048} + \frac{117359\,\gamma}{17418240} - \frac{665857\,\alpha\,\gamma}{102187008}$$

incfinsec =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1/4,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1/4,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ 0,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \left\{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{4},\ 0\right\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ 0,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[incfinsec]

$$-\frac{919921}{766402560}+\frac{2199079\,\alpha}{127733760}-\frac{110569\,\alpha^2}{7299072}+\frac{4224901\,\gamma}{383201280}-\frac{602803\,\alpha\,\gamma}{54743040}-\frac{339737\,\gamma^2}{766402560}$$

expfinsec =

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5\alpha}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{(1-\gamma)}{6}, 0, 0\right\}, \{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/4\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, 0, -1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5(1-\alpha)}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{\gamma}{6}, 0, 0\right\}, \{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1/4\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{7\alpha}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{(1-\gamma)}{4}, -1, 0, -\frac{4}{5}, 0, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 1/4\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{7(1-\alpha)}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{\gamma}{4}, -\frac{1}{7}, 0, -1, 0, 0, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 1/4\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1, 0, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5\alpha}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{1-\gamma}{6}, 0, 0\right\}, \left\{1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}\right\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, 0, -1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5(1-\alpha)}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{\gamma}{6}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{7\alpha}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{1-\gamma}{4}, -1, 0, -\frac{4}{5}, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, \frac{1}{4}\right\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, \frac{7(1-\alpha)}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{\gamma}{4}, -\frac{1}{7}, 0, -1, 0, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, \frac{1}{4}\right\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}, -1, 0\right\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
-\frac{1}{9} & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[expfinsec]
```

$$\frac{241}{4032} + \frac{92237\,\alpha}{241920} - \frac{2887\,\alpha^2}{6912} + \frac{11717\,\gamma}{30240} - \frac{1483\,\alpha\,\gamma}{3840} - \frac{841\,\gamma^2}{60480}$$

New definitions

```
inchouena = .

exphouena = .

inchoudyo = .

exphoudyo = .

incbusena = .

expbusena = .

incbusdyo = .

expbusdyo = .

incfinsec = .

expfinsec = .
```

$$\text{inchouena} = \frac{21516739}{1021870080} + \frac{1394749\,\alpha}{15482880} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{6017281\,\gamma}{56770560} - \frac{10748249\,\alpha\,\gamma}{102187008} - \frac{480671\,\gamma^2}{92897280}$$

$$\frac{21516739}{1021870080} + \frac{1394749\,\alpha}{15482880} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{6017281\,\gamma}{56770560} - \frac{10748249\,\alpha\,\gamma}{102187008} - \frac{480671\,\gamma^2}{92897280}$$

$$\text{exphouena} = \frac{2227627}{383201280} - \frac{23767\,\alpha}{25546752} + \frac{81311\,\gamma}{6842880} - \frac{872591\,\alpha\,\gamma}{76640256} - \frac{99013\,\gamma^2}{54743040}$$

$$\frac{2227627}{383201280} - \frac{23767\,\alpha}{25546752} + \frac{81311\,\gamma}{6842880} - \frac{872591\,\alpha\,\gamma}{76640256} - \frac{99013\,\gamma^2}{54743040}$$

$$\text{inchoudyo} = -\frac{897373}{87588864} + \frac{2424127\,\alpha}{15482880} - \frac{12304673\,\alpha^2}{87588864} + \frac{10225441\,\gamma}{102187008} - \frac{21925027\,\alpha\,\gamma}{218972160} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

$$-\frac{897373}{87588864} + \frac{2424127\,\alpha}{15482880} - \frac{12304673\,\alpha^2}{87588864} + \frac{10225441\,\gamma}{102187008} - \frac{21925027\,\alpha\,\gamma}{218972160} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

$$\text{exphoudyo} = -\frac{3255719}{127733760} + \frac{16747067\,\alpha}{255467520} - \frac{872591\,\alpha^2}{21897216} + \frac{2282173\,\gamma}{383201280} - \frac{693091\,\alpha\,\gamma}{109486080}$$

$$-\frac{3255719}{127733760} + \frac{16747067\,\alpha}{255467520} - \frac{872591\,\alpha^2}{21897216} + \frac{2282173\,\gamma}{383201280} - \frac{693091\,\alpha\,\gamma}{109486080}$$

$$\text{incbusena} = \frac{2263181}{437944320} + \frac{2308811\,\alpha}{21897216} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{3979235\,\gamma}{43794432} - \frac{9882139\,\alpha\,\gamma}{109486080} - \frac{2044651\,\gamma^2}{437944320}$$

$$\frac{2263181}{437944320} + \frac{2308811\,\alpha}{21897216} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{3979235\,\gamma}{43794432} - \frac{9882139\,\alpha\,\gamma}{109486080} - \frac{2044651\,\gamma^2}{437944320}$$

$$\text{expbusena} = -\frac{15443467}{1532805120} + \frac{3158657\,\alpha}{218972160} - \frac{2489849\,\gamma}{766402560} + \frac{86063\,\alpha\,\gamma}{24330240} - \frac{665857\,\gamma^2}{510935040}$$

$$-\frac{15443467}{1532805120} + \frac{3158657\,\alpha}{218972160} - \frac{2489849\,\gamma}{766402560} + \frac{86063\,\alpha\,\gamma}{24330240} - \frac{665857\,\gamma^2}{510935040}$$

$$\text{incbusdyo} = \frac{23228269}{613122048} + \frac{7653053\,\alpha}{153280512} - \frac{2421725\,\alpha^2}{29196288} + \frac{30916103\,\gamma}{306561024} - \frac{15375977\,\alpha\,\gamma}{153280512} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

$$\frac{23228269}{613122048} + \frac{7653053\,\alpha}{153280512} - \frac{2421725\,\alpha^2}{29196288} + \frac{30916103\,\gamma}{306561024} - \frac{15375977\,\alpha\,\gamma}{153280512} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

$$\text{expbusdyo} = \frac{4338259}{191600640} - \frac{62975641\,\alpha}{1532805120} + \frac{86063\,\alpha^2}{4866048} + \frac{117359\,\gamma}{17418240} - \frac{665857\,\alpha\,\gamma}{102187008}$$

$$\frac{4338259}{191600640} - \frac{62975641\,\alpha}{1532805120} + \frac{86063\,\alpha^2}{4866048} + \frac{117359\,\gamma}{17418240} - \frac{665857\,\alpha\,\gamma}{102187008}$$

$$\text{incfinsec} = -\frac{919921}{766402560} + \frac{2199079\,\alpha}{127733760} - \frac{110569\,\alpha^2}{7299072} + \frac{4224901\,\gamma}{383201280} - \frac{602803\,\alpha\,\gamma}{54743040} - \frac{339737\,\gamma^2}{766402560}$$

$$-\frac{919921}{766402560} + \frac{2199079\,\alpha}{127733760} - \frac{110569\,\alpha^2}{7299072} + \frac{4224901\,\gamma}{383201280} - \frac{602803\,\alpha\,\gamma}{54743040} - \frac{339737\,\gamma^2}{766402560}$$

$$\text{expfinsec} = \frac{241}{4032} + \frac{92237\,\alpha}{241920} - \frac{2887\,\alpha^2}{6912} + \frac{11717\,\gamma}{30240} - \frac{1483\,\alpha\,\gamma}{3840} - \frac{841\,\gamma^2}{60480}$$

$$\frac{241}{4032} + \frac{92237\,\alpha}{241920} - \frac{2887\,\alpha^2}{6912} + \frac{11717\,\gamma}{30240} - \frac{1483\,\alpha\,\gamma}{3840} - \frac{841\,\gamma^2}{60480}$$

```
InequalitySolve[{inchouena > 0 && inchoudyo > 0 && incbusena > 0 &&
    incbusdyo > 0 && incfinsec > 0 && exphouena > 0 && exphoudyo > 0 && expbusena > 0 &&
    expbusdyo > 0 && expfinsec > 0 && 0 < α && α < 1 && 0 < γ && γ < 1}, {α, γ}]
```

$$\frac{15443467}{22110599} < \alpha \le \frac{2802592}{3441571} \;\&\&\; 0 < \gamma < \frac{-4979698 + 5421969\,\alpha}{3995142} + \frac{\sqrt{-98600295103424 + 122670429049392\,\alpha + 29397747836961\,\alpha^2}}{3995142} \;||$$

$$\frac{2802592}{3441571} < \alpha < \frac{62975641 - \sqrt{202426429445521}}{54219690} \;\&\&\; 0 < \gamma < 1 \;||$$

$$\frac{62975641 - \sqrt{202426429445521}}{54219690} \le \alpha < \frac{4\left(9120437 - \sqrt{6878892894589}\right)}{27109845} \;\&\&\; \frac{34706072 - 62975641\,\alpha + 27109845\,\alpha^2}{-10327592 + 9987855\,\alpha} < \gamma < 1$$

$$\frac{15443467}{22110599} < \alpha \le \frac{2802592}{3441571} \;\&\&\; 0 < \gamma < \frac{-4979698 + 5421969\,\alpha}{3995142} + \frac{\sqrt{-98600295103424 + 122670429049392\,\alpha + 29397747836961\,\alpha^2}}{3995142} \;||$$

$$\frac{2802592}{3441571} < \alpha < \frac{62975641 - \sqrt{202426429445521}}{54219690} \;\&\&\; 0 < \gamma < 1 \;||$$

$$\frac{62975641 - \sqrt{202426429445521}}{54219690} \le \alpha < \frac{4\left(9120437 - \sqrt{6878892894589}\right)}{27109845} \;\&\&\; \frac{34706072 - 62975641\,\alpha + 27109845\,\alpha^2}{-10327592 + 9987855\,\alpha} < \gamma < 1$$

$$N\left[\frac{15443467}{22110599} < \alpha \le \frac{2802592}{3441571} \&\& 0 < \gamma < \frac{-4979698 + 5421969\,\alpha}{3995142} + \frac{\sqrt{-98600295103424 + 122670429049392\,\alpha + 29397747836961\,\alpha^2}}{3995142} \;||\right.$$

$$\frac{2802592}{3441571} < \alpha < \frac{62975641 - \sqrt{202426429445521}}{54219690} \&\& 0 < \gamma < 1 \;||$$

$$\frac{62975641 - \sqrt{202426429445521}}{54219690} \le \alpha < \frac{4\left(9120437 - \sqrt{6878892894589}\right)}{27109845} \&\&$$

$$\left.\frac{34706072 - 62975641\,\alpha + 27109845\,\alpha^2}{-10327592 + 9987855\,\alpha} < \gamma < 1\right]$$

$$0.698464 < \alpha \le 0.814335 \&\& 0. < \gamma < 2.50304 \times 10^{-7}\,(-4.9797 \times 10^6 + 5.42197 \times 10^6\,\alpha) + 2.50304 \times 10^{-7}\sqrt{-9.86003 \times 10^{13} + 1.2267 \times 10^{14}\,\alpha + 2.93977 \times 10^{13}\,\alpha^2} \;||$$

$$0.814335 < \alpha < 0.899083 \&\& 0. < \gamma < 1. \;||\; 0.899083 \le \alpha < 0.958718 \&\& \frac{3.47061 \times 10^7 - 6.29756 \times 10^7\,\alpha + 2.71098 \times 10^7\,\alpha^2}{-1.03276 \times 10^7 + 9.98786 \times 10^6\,\alpha} < \gamma < 1.$$

Pages 179 -

180 World income and expenditure (Table XI10) and their aggregates (equation 140)

From the solution of linear system 139 we obtained :

detdeltamatrix =

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

inchouena = $\frac{21516739}{1021870080} + \frac{1394749\,\alpha}{15482880} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{6017281\,\gamma}{56770560} - \frac{10748249\,\alpha\,\gamma}{102187008} - \frac{480671\,\gamma^2}{92897280}$

$$\frac{21516739}{1021870080} + \frac{1394749\,\alpha}{15482880} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{6017281\,\gamma}{56770560} - \frac{10748249\,\alpha\,\gamma}{102187008} - \frac{480671\,\gamma^2}{92897280}$$

exphouena = $\frac{2227627}{383201280} - \frac{23767\,\alpha}{25546752} + \frac{81311\,\gamma}{6842880} - \frac{872591\,\alpha\,\gamma}{76640256} - \frac{99013\,\gamma^2}{54743040}$

$$\frac{2227627}{383201280} - \frac{23767\,\alpha}{25546752} + \frac{81311\,\gamma}{6842880} - \frac{872591\,\alpha\,\gamma}{76640256} - \frac{99013\,\gamma^2}{54743040}$$

inchoudyo = $-\frac{897373}{87588864} + \frac{2424127\,\alpha}{15482880} - \frac{12304673\,\alpha^2}{87588864} + \frac{10225441\,\gamma}{102187008} - \frac{21925027\,\alpha\,\gamma}{218972160} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$

$$-\frac{897373}{87588864} + \frac{2424127\,\alpha}{15482880} - \frac{12304673\,\alpha^2}{87588864} + \frac{10225441\,\gamma}{102187008} - \frac{21925027\,\alpha\,\gamma}{218972160} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

exphoudyo = $-\frac{3255719}{127733760} + \frac{16747067\,\alpha}{255467520} - \frac{872591\,\alpha^2}{21897216} + \frac{2282173\,\gamma}{383201280} - \frac{693091\,\alpha\,\gamma}{109486080}$

$$-\frac{3255719}{127733760} + \frac{16747067\,\alpha}{255467520} - \frac{872591\,\alpha^2}{21897216} + \frac{2282173\,\gamma}{383201280} - \frac{693091\,\alpha\,\gamma}{109486080}$$

incbusena = $\frac{2263181}{437944320} + \frac{2308811\,\alpha}{21897216} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{3979235\,\gamma}{43794432} - \frac{9882139\,\alpha\,\gamma}{109486080} - \frac{2044651\,\gamma^2}{437944320}$

$$\frac{2263181}{437944320} + \frac{2308811\,\alpha}{21897216} - \frac{2938103\,\alpha^2}{29196288} + \frac{3979235\,\gamma}{43794432} - \frac{9882139\,\alpha\,\gamma}{109486080} - \frac{2044651\,\gamma^2}{437944320}$$

expbusena = $-\frac{15443467}{1532805120} + \frac{3158657\,\alpha}{218972160} - \frac{2489849\,\gamma}{766402560} + \frac{86063\,\alpha\,\gamma}{24330240} - \frac{665857\,\gamma^2}{510935040}$

$$-\frac{15443467}{1532805120} + \frac{3158657\,\alpha}{218972160} - \frac{2489849\,\gamma}{766402560} + \frac{86063\,\alpha\,\gamma}{24330240} - \frac{665857\,\gamma^2}{510935040}$$

incbusdyo = $\frac{23228269}{613122048} + \frac{7653053\,\alpha}{153280512} - \frac{2421725\,\alpha^2}{29196288} + \frac{30916103\,\gamma}{306561024} - \frac{15375977\,\alpha\,\gamma}{153280512} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$

$$\frac{23228269}{613122048} + \frac{7653053\,\alpha}{153280512} - \frac{2421725\,\alpha^2}{29196288} + \frac{30916103\,\gamma}{306561024} - \frac{15375977\,\alpha\,\gamma}{153280512} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

expbusdyo = $\frac{4338259}{191600640} - \frac{62975641\,\alpha}{1532805120} + \frac{86063\,\alpha^2}{4866048} + \frac{117359\,\gamma}{17418240} - \frac{665857\,\alpha\,\gamma}{102187008}$

$$\frac{4338259}{191600640} - \frac{62975641\,\alpha}{1532805120} + \frac{86063\,\alpha^2}{4866048} + \frac{117359\,\gamma}{17418240} - \frac{665857\,\alpha\,\gamma}{102187008}$$

incfinsec = $-\frac{919921}{766402560} + \frac{2199079\,\alpha}{127733760} - \frac{110569\,\alpha^2}{7299072} + \frac{4224901\,\gamma}{383201280} - \frac{602803\,\alpha\,\gamma}{54743040} - \frac{339737\,\gamma^2}{766402560}$

$$-\frac{919921}{766402560} + \frac{2199079\,\alpha}{127733760} - \frac{110569\,\alpha^2}{7299072} + \frac{4224901\,\gamma}{383201280} - \frac{602803\,\alpha\,\gamma}{54743040} - \frac{339737\,\gamma^2}{766402560}$$

$$\text{expfinsec} = \frac{241}{4032} + \frac{92237\,\alpha}{241920} - \frac{2887\,\alpha^2}{6912} + \frac{11717\,\gamma}{30240} - \frac{1483\,\alpha\,\gamma}{3840} - \frac{841\,\gamma^2}{60480}$$

$$\frac{241}{4032} + \frac{92237\,\alpha}{241920} - \frac{2887\,\alpha^2}{6912} + \frac{11717\,\gamma}{30240} - \frac{1483\,\alpha\,\gamma}{3840} - \frac{841\,\gamma^2}{60480}$$

It follows that :

incomehouseholdalfa = inchouena / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{11232110611}{465064427520} + \frac{510185381\,\gamma}{32699842560} - \frac{480671\,\gamma^2}{92897280}}{\frac{240311285761}{3139184885760} + \frac{441577249\,\gamma}{8174960640} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

Simplify[
$$\frac{\frac{11232110611}{465064427520} + \frac{510185381\,\gamma}{32699842560} - \frac{480671\,\gamma^2}{92897280}}{\frac{240311285761}{3139184885760} + \frac{441577249\,\gamma}{8174960640} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$
]

$$\frac{303266986497 + 195911186304\,\gamma - 64971337728\,\gamma^2}{961245143044 + 678262654464\,\gamma - 169040527360\,\gamma^2}$$

expenditurehouseholdalfa = exphouena / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{122960353}{24524881920} + \frac{17152033\,\gamma}{8174960640} - \frac{99013\,\gamma^2}{54743040}}{\frac{240311285761}{3139184885760} + \frac{441577249\,\gamma}{8174960640} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

Simplify[
$$\frac{\frac{122960353}{24524881920} + \frac{17152033\,\gamma}{8174960640} - \frac{99013\,\gamma^2}{54743040}}{\frac{240311285761}{3139184885760} + \frac{441577249\,\gamma}{8174960640} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$
]

$$\frac{128\,(-122960353 - 51456099\,\gamma + 44357824\,\gamma^2)}{-240311285761 - 169565663616\,\gamma + 42260131840\,\gamma^2}$$

incomehouseholdgamma = inchoudyo / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{5735886817}{279038656512} + \frac{275057593\,\gamma}{19619905536} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}}{\frac{240311285761}{3139184885760} + \frac{441577249\,\gamma}{8174960640} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

Simplify[
$$\frac{\frac{5735886817}{279038656512} + \frac{275057593\,\gamma}{19619905536} - \frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}}{\frac{240311285761}{3139184885760} + \frac{441577249\,\gamma}{8174960640} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$
]

$$\frac{5\,(51622981353 + 35207371904\,\gamma - 8452026368\,\gamma^2)}{961245143044 + 678262654464\,\gamma - 169040527360\,\gamma^2}$$

expenditurehouseholdgamma = exphoudyo / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{4450905251}{3139184885760} + \frac{25278109\,\gamma}{49049763840}}{\frac{240311285761}{3139184885760} + \frac{441577249\,\gamma}{8174960640} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

Simplify[
$$\frac{\frac{4450905251}{3139184885760} + \frac{25278109\,\gamma}{49049763840}}{\frac{240311285761}{3139184885760} + \frac{441577249\,\gamma}{8174960640} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$
]

$$\frac{4450905251 + 1617798976\,\gamma}{240311285761 + 169565663616\,\gamma - 42260131840\,\gamma^2}$$

incomebusinessalfa = incbusena / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{12831286717}{597939978240} + \frac{18631991\,\gamma}{1401421824} - \frac{2044651\,\gamma^2}{437944320}}{\frac{240311285761}{3139184885760} + \frac{441577249\,\gamma}{8174960640} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{\frac{12831286717}{597939978240}+\frac{18631991\,\gamma}{1401421824}-\frac{2044651\,\gamma^2}{437944320}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}\right]$$

$$\frac{7\,(38493860151+23848948480\,\gamma-8374890496\,\gamma^2)}{961245143044+678262654464\,\gamma-169040527360\,\gamma^2}$$

expenditurebusinessalfa = expbusena / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{227701057}{98099527680}-\frac{20492377\,\gamma}{98099527680}-\frac{665857\,\gamma^2}{510935040}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{\frac{227701057}{98099527680}-\frac{20492377\,\gamma}{98099527680}-\frac{665857\,\gamma^2}{510935040}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}\right]$$

$$\frac{32\,(-227701057+20492377\,\gamma+127844544\,\gamma^2)}{-240311285761-169565663616\,\gamma+42260131840\,\gamma^2}$$

incomebusinessgamma = incbusdyo / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{778696753}{39862665216}+\frac{143636561\,\gamma}{9809952768}-\frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{\frac{778696753}{39862665216}+\frac{143636561\,\gamma}{9809952768}-\frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}\right]$$

$$\frac{5\,(49057895439+36770959616\,\gamma-8452026368\,\gamma^2)}{961245143044+678262654464\,\gamma-169040527360\,\gamma^2}$$

expenditurebusinessgamma = expbusdyo / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{2489095717}{6278369771520}+\frac{10148533\,\gamma}{8918138880}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{\frac{2489095717}{6278369771520}+\frac{10148533\,\gamma}{8918138880}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}\right]$$

$$\frac{2489095717+7144567232\,\gamma}{480622571522+339131327232\,\gamma-84520263680\,\gamma^2}$$

incomefinancialsector = incfinsec / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{7557073439}{3139184885760}+\frac{12771503\,\gamma}{8174960640}-\frac{339737\,\gamma^2}{766402560}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

$$\text{Simplify}\left[\frac{\frac{7557073439}{3139184885760}+\frac{12771503\,\gamma}{8174960640}-\frac{339737\,\gamma^2}{766402560}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}\right]$$

$$\frac{7557073439+4904257152\,\gamma-1391562752\,\gamma^2}{240311285761+169565663616\,\gamma-42260131840\,\gamma^2}$$

expenditurefinancialsector = expfinsec / detdeltamatrix /. α → 55 / 64

$$\frac{\frac{82795}{1048576}+\frac{860509\,\gamma}{15482880}-\frac{841\,\gamma^2}{60480}}{\frac{240311285761}{3139184885760}+\frac{441577249\,\gamma}{8174960640}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}}$$

```
Simplify[ (82795/1048576 + (860509 γ)/15482880 - (841 γ^2)/60480) / (240311285761/3139184885760 + (441577249 γ)/8174960640 - (2063483 γ^2)/153280512) ]
```

$$\frac{3168\,(-78241275-55072576\,\gamma+13778944\,\gamma^2)}{-240311285761-169565663616\,\gamma+42260131840\,\gamma^2}$$

```
Simplify[(incomehouseholdalfa + incomehouseholdgamma +
    incomebusinessalfa + incomebusinessgamma + incomefinancialsector)]
```

$$\frac{553178342635+371181255936\,\gamma-106841042944\,\gamma^2}{480622571522+339131327232\,\gamma-84520263680\,\gamma^2}$$

```
Simplify[expenditurehouseholdalfa + expenditurehouseholdgamma +
  expenditurebusinessalfa + expenditurebusinessgamma + expenditurefinancialsector]
```

$$\frac{553178342635+371181255936\,\gamma-106841042944\,\gamma^2}{480622571522+339131327232\,\gamma-84520263680\,\gamma^2}$$

```
(553178342635 + 371181255936 γ - 106841042944 γ^2) / (480622571522 + 339131327232 γ - 84520263680 γ^2) /. γ → 0
```

$$\frac{553178342635}{480622571522}$$

```
N[553178342635/480622571522]
```

```
1.15096
```

```
(553178342635 + 371181255936 γ - 106841042944 γ^2) / (480622571522 + 339131327232 γ - 84520263680 γ^2) /. γ → 1/10
```

$$\frac{4910233814993}{4280754180070}$$

```
N[4910233814993/4280754180070]
```

```
1.14705
```

```
(553178342635 + 371181255936 γ - 106841042944 γ^2) / (480622571522 + 339131327232 γ - 84520263680 γ^2) /. γ → 1/2
```

$$\frac{237352903289}{209686056406}$$

```
N[237352903289/209686056406]
```

```
1.13194
```

```
(553178342635 + 371181255936 γ - 106841042944 γ^2) / (480622571522 + 339131327232 γ - 84520263680 γ^2) /. γ → 9/10
```

$$\frac{20017505704819}{17934483811250}$$

```
N[20017505704819/17934483811250]
```

```
1.11615
```

$$\frac{553178342635 + 371181255936\,\gamma - 106841042944\,\gamma^2}{480622571522 + 339131327232\,\gamma - 84520263680\,\gamma^2} /. \gamma \to 1$$

$$\frac{272506185209}{245077878358}$$

$$N\left[\frac{272506185209}{245077878358}\right]$$

1.11192

From the solution of linear system 139 we obtained :

detdeltamatrix =

$$\frac{46729201}{766402560}+\frac{6643151\,\alpha}{18247680}-\frac{2938103\,\alpha^2}{7299072}+\frac{144252923\,\gamma}{383201280}-\frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

$$\frac{46729201}{766402560}+\frac{6643151\,\alpha}{18247680}-\frac{2938103\,\alpha^2}{7299072}+\frac{144252923\,\gamma}{383201280}-\frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608}-\frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}$$

$$\text{inchouena}=\frac{21516739}{1021870080}+\frac{1394749\,\alpha}{15482880}-\frac{2938103\,\alpha^2}{29196288}+\frac{6017281\,\gamma}{56770560}-\frac{10748249\,\alpha\,\gamma}{102187008}-\frac{480671\,\gamma^2}{92897280}$$

$$\frac{21516739}{1021870080}+\frac{1394749\,\alpha}{15482880}-\frac{2938103\,\alpha^2}{29196288}+\frac{6017281\,\gamma}{56770560}-\frac{10748249\,\alpha\,\gamma}{102187008}-\frac{480671\,\gamma^2}{92897280}$$

$$\text{exphouena}=\frac{2227627}{383201280}-\frac{23767\,\alpha}{25546752}+\frac{81311\,\gamma}{6842880}-\frac{872591\,\alpha\,\gamma}{76640256}-\frac{99013\,\gamma^2}{54743040}$$

$$\frac{2227627}{383201280}-\frac{23767\,\alpha}{25546752}+\frac{81311\,\gamma}{6842880}-\frac{872591\,\alpha\,\gamma}{76640256}-\frac{99013\,\gamma^2}{54743040}$$

$$\text{inchoudyo}=-\frac{897373}{87588864}+\frac{2424127\,\alpha}{15482880}-\frac{12304673\,\alpha^2}{87588864}+\frac{10225441\,\gamma}{102187008}-\frac{21925027\,\alpha\,\gamma}{218972160}-\frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

$$-\frac{897373}{87588864}+\frac{2424127\,\alpha}{15482880}-\frac{12304673\,\alpha^2}{87588864}+\frac{10225441\,\gamma}{102187008}-\frac{21925027\,\alpha\,\gamma}{218972160}-\frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

$$\text{exphoudyo}=-\frac{3255719}{127733760}+\frac{16747067\,\alpha}{255467520}-\frac{872591\,\alpha^2}{21897216}+\frac{2282173\,\gamma}{383201280}-\frac{693091\,\alpha\,\gamma}{109486080}$$

$$-\frac{3255719}{127733760}+\frac{16747067\,\alpha}{255467520}-\frac{872591\,\alpha^2}{21897216}+\frac{2282173\,\gamma}{383201280}-\frac{693091\,\alpha\,\gamma}{109486080}$$

$$\text{incbusena}=\frac{2263181}{437944320}+\frac{2308811\,\alpha}{21897216}-\frac{2938103\,\alpha^2}{29196288}+\frac{3979235\,\gamma}{43794432}-\frac{9882139\,\alpha\,\gamma}{109486080}-\frac{2044651\,\gamma^2}{437944320}$$

$$\frac{2263181}{437944320}+\frac{2308811\,\alpha}{21897216}-\frac{2938103\,\alpha^2}{29196288}+\frac{3979235\,\gamma}{43794432}-\frac{9882139\,\alpha\,\gamma}{109486080}-\frac{2044651\,\gamma^2}{437944320}$$

$$\text{expbusena}=-\frac{15443467}{1532805120}+\frac{3158657\,\alpha}{218972160}-\frac{2489849\,\gamma}{766402560}+\frac{86063\,\alpha\,\gamma}{24330240}-\frac{665857\,\gamma^2}{510935040}$$

$$-\frac{15443467}{1532805120}+\frac{3158657\,\alpha}{218972160}-\frac{2489849\,\gamma}{766402560}+\frac{86063\,\alpha\,\gamma}{24330240}-\frac{665857\,\gamma^2}{510935040}$$

$$\text{incbusdyo}=\frac{23228269}{613122048}+\frac{7653053\,\alpha}{153280512}-\frac{2421725\,\alpha^2}{29196288}+\frac{30916103\,\gamma}{306561024}-\frac{15375977\,\alpha\,\gamma}{153280512}-\frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

$$\frac{23228269}{613122048}+\frac{7653053\,\alpha}{153280512}-\frac{2421725\,\alpha^2}{29196288}+\frac{30916103\,\gamma}{306561024}-\frac{15375977\,\alpha\,\gamma}{153280512}-\frac{2063483\,\gamma^2}{613122048}$$

$$\text{expbusdyo}=\frac{4338259}{191600640}-\frac{62975641\,\alpha}{1532805120}+\frac{86063\,\alpha^2}{4866048}+\frac{117359\,\gamma}{17418240}-\frac{665857\,\alpha\,\gamma}{102187008}$$

$$\frac{4338259}{191600640}-\frac{62975641\,\alpha}{1532805120}+\frac{86063\,\alpha^2}{4866048}+\frac{117359\,\gamma}{17418240}-\frac{665857\,\alpha\,\gamma}{102187008}$$

$$\text{incfinsec}=-\frac{919921}{766402560}+\frac{2199079\,\alpha}{127733760}-\frac{110569\,\alpha^2}{7299072}+\frac{4224901\,\gamma}{383201280}-\frac{602803\,\alpha\,\gamma}{54743040}-\frac{339737\,\gamma^2}{766402560}$$

$$-\frac{919921}{766402560}+\frac{2199079\,\alpha}{127733760}-\frac{110569\,\alpha^2}{7299072}+\frac{4224901\,\gamma}{383201280}-\frac{602803\,\alpha\,\gamma}{54743040}-\frac{339737\,\gamma^2}{766402560}$$

$$\text{expfinsec} = \frac{241}{4032} + \frac{92237\,\alpha}{241920} - \frac{2887\,\alpha^2}{6912} + \frac{11717\,\gamma}{30240} - \frac{1483\,\alpha\,\gamma}{3840} - \frac{841\,\gamma^2}{60480}$$

$$\frac{241}{4032} + \frac{92237\,\alpha}{241920} - \frac{2887\,\alpha^2}{6912} + \frac{11717\,\gamma}{30240} - \frac{1483\,\alpha\,\gamma}{3840} - \frac{841\,\gamma^2}{60480}$$

It follows that :

incomehouseholdalfa = inchouena / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3

$$\frac{728996929077}{2408924020948}$$

N[728996929077 / 2408924020948]

0.302623

expenditurehouseholdalfa = exphouena / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3

$$\frac{31691480960}{602231005237}$$

N[31691480960 / 602231005237]

0.0526235

incomehouseholdgamma = inchoudyo / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3

$$\frac{642042958129}{2408924020948}$$

N[642042958129 / 2408924020948]

0.266527

expenditurehouseholdgamma = exphoudyo / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3

$$\frac{9952988223}{602231005237}$$

N[9952988223 / 602231005237]

0.0165269

incomebusinessalfa = incbusena / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3

$$\frac{638454418357}{2408924020948}$$

N[638454418357 / 2408924020948]

0.265037

expenditurebusinessalfa = expbusena / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3

$$\frac{9055853280}{602231005237}$$

```
N[9055853280/602231005237]
```

```
0.0150372
```

```
incomebusinessgamma = incbusdyo / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3
```

$$\frac{628338711175}{2408924020948}$$

```
N[628338711175/2408924020948]
```

```
0.260838
```

```
expenditurebusinessgamma = expbusdyo / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3
```

$$\frac{13053852969}{1204462010474}$$

```
N[13053852969/1204462010474]
```

```
0.0108379
```

```
incomefinancialsector = incfinsec / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3
```

$$\frac{18374590571}{602231005237}$$

```
N[18374590571/602231005237]
```

```
0.0305109
```

```
expenditurefinancialsector = expfinsec / detdeltamatrix /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3
```

$$\frac{620605595808}{602231005237}$$

```
N[620605595808/602231005237]
```

```
1.03051
```

```
(incomehouseholdalfa + incomehouseholdgamma +
  incomebusinessalfa + incomebusinessgamma + incomefinancialsector)
```

$$\frac{1355665689511}{1204462010474}$$

```
N[1355665689511/1204462010474]
```

```
1.12554
```

```
(expenditurehouseholdalfa + expenditurehouseholdgamma +
  expenditurebusinessalfa + expenditurebusinessgamma + expenditurefinancialsector)
```

$$\frac{1355665689511}{1204462010474}$$

```
N[1355665689511/1204462010474]
```

```
1.12554
```

```
100 * incomehouseholdalfa / 1.1255362790375563`
```

```
26.887
```

```
100 * incomehouseholdgamma / 1.1255362790375563`
```

```
23.68
```

```
100 * incomebusinessalfa / 1.1255362790375563`
```

```
23.5476
```

```
100 * incomebusinessgamma / 1.1255362790375563`
```

```
23.1745
```

```
100 * incomefinancialsector / 1.1255362790375563`
```

```
2.71078
```

```
100 * (incomehouseholdalfa + incomehouseholdgamma + incomebusinessalfa +
    incomebusinessgamma + incomefinancialsector) / 1.1255362790375563`
```

```
100.
```

```
100 * expenditurehouseholdalfa / 1.1255362790375563`
```

```
4.67541
```

```
100 * expenditurehouseholdgamma / 1.1255362790375563`
```

```
1.46835
```

```
100 * expenditurebusinessalfa / 1.1255362790375563`
```

```
1.336
```

```
100 * expenditurebusinessgamma / 1.1255362790375563`
```

```
0.962911
```

```
100 * expenditurefinancialsector / 1.1255362790375563`
```

```
91.5573
```

```
100 * (expenditurehouseholdalfa + expenditurehouseholdgamma + expenditurebusinessalfa +
    expenditurebusinessgamma + expenditurefinancialsector) / 1.1255362790375563`
```

```
100.
```

Pages 182 - 183 Replacement of sectoral income and
expenditure in world market equilibrium (equations 144 & 145)

incomehouseholdalfa

y1ha = 0.30262346289780984` * k

0.302623 k

expenditurehouseholdalfa

eh1a = 0.05262346289780985` * k

0.0526235 k

incomehouseholdgamma

yh2g = 0.2665268611819199` * k

0.266527 k

expenditurehouseholdgamma

e2hg = 0.01652686118191994` * k

0.0165269 k

incomebusinessalfa

ib1a = 0.2650371754380799` * k

0.265037 k

expenditurebusinessalfa

eb1a = 0.015037175438079926` * k

0.0150372 k

incomebusinessgamma

yb2g = 0.2608379117444002` * k

0.260838 k

expenditurebusinessgamma

eb2g = 0.010837911744400165` * k

0.0108379 k

incomefinanacialsector

ynfs = 0.030510867775346312` * k

0.0305109 k

expenditurefinancialsector

```
exfs = 1.0305108677753463` * k
```

```
1.03051 k
```

Market equilibrim equatuions 144

```
w1ha = (5 α / 6) eb1a + {(1 - γ) / 6} eb2g + (1 / 4) exfs /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3
```

```
{0.268999 k}
```

```
100 * {0.2689986336869421` k} / {1.124667295686983` k}
```

```
{23.9181}
```

```
wh2g = {5 (1 - α) / 6} eb1a + {γ / 6} eb2g + (1 / 12) exfs /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3
```

```
{0.0888423 k}
```

```
100 * {0.08884228706063997` k} / {1.124667295686983` k}
```

```
{7.89943}
```

```
u1ba = (7 α / 8) eh1a + {(1 - γ) / 4} e2hg + (1145 / 6336) exfs /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3
```

```
{0.227175 k}
```

```
100 * {0.2271747218040685` k} / {1.124667295686983` k}
```

```
{20.1993}
```

```
ub2g = {7 (1 - α) / 8} eh1a + {γ / 4} e2hg + (1 / 24) exfs /. α → 55 / 64 /. γ → 2 / 3
```

```
{0.0521676 k}
```

```
100 * {0.052167582348880026` k} / {1.124667295686983` k}
```

```
{4.63849}
```

```
fisc = {1 / 8} eh1a + {1 / 6} e2hg + {3 / 4} eb1a + {5 / 6} eb2g + (2815 / 6336) exfs
```

```
{0.487484 k}
```

```
100 * {0.4874840707864523` k} / {1.124667295686983` k}
```

```
{43.3447}
```

```
w1ha + wh2g + u1ba + ub2g + fisc
```

```
{1.12467 k}
```

```
100 * {1.124667295686983` k} / {1.124667295686983` k}
```

```
{100.}
```

Page 186 Solution of system 139 in order to derive Table XI14

deltamatrix =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

detdeltamatrix =

$$\frac{46729201}{766402560} + \frac{6643151\,\alpha}{18247680} - \frac{2938103\,\alpha^2}{7299072} + \frac{144252923\,\gamma}{383201280} - \frac{4107769\,\alpha\,\gamma}{10948608} - \frac{2063483\,\gamma^2}{153280512}\ /.$$
$$\alpha \to 55/64\ /.\ \gamma \to 2/3$$

$$\frac{602231005237}{5650532794368}$$

```
inchouena = {{0, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
  {250 (1 + ξ), -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, -1, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6,
  -4/5, γ/6, 0, 3343/6336}, {250 (1 + ξ), 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {0, 7 α/8, -2/3, (1 - γ)/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8}, {250 (1 + ξ), 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0},
  {0, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4, -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336},
  {250 (1 + ξ), 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0}, {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0},
  {-1000 (1 + ξ), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{0, 0, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5\alpha}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{1-\gamma}{6}, 0, \frac{4399}{6336}\right\}, \{250(1+\xi), -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{0, 0, -1, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5(1-\alpha)}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{\gamma}{6}, 0, \frac{3343}{6336}\right\}, \{250(1+\xi), 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{0, \frac{7\alpha}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{1-\gamma}{4}, -1, 0, -\frac{4}{5}, 0, 0, \frac{5}{8}\right\}, \{250(1+\xi), 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\},$$
$$\left\{0, \frac{7(1-\alpha)}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{\gamma}{4}, -\frac{1}{7}, 0, -1, 0, 0, \frac{3079}{6336}\right\}, \{250(1+\xi), 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\},$$
$$\left.\left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}, -1, 0\right\}, \{-1000(1+\xi), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
250(1+\xi) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
250(1+\xi) & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
250(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{7(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
250(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
-1000(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[inchouena]
```

$$\frac{537918475}{25546752} + \frac{34868725\alpha}{387072} - \frac{367262875\alpha^2}{3649536} + \frac{150432025\gamma}{1419264} -$$
$$\frac{1343531125\alpha\gamma}{12773376} - \frac{12016775\gamma^2}{2322432} + \frac{537918475\xi}{25546752} + \frac{34868725\alpha\xi}{387072} -$$
$$\frac{367262875\alpha^2\xi}{3649536} + \frac{150432025\gamma\xi}{1419264} - \frac{1343531125\alpha\gamma\xi}{12773376} - \frac{12016775\gamma^2\xi}{2322432}$$

```
537918475/25546752 + 34868725 α/387072 - 367262875 α^2/3649536 + 150432025 γ/1419264 -
  1343531125 α γ/12773376 - 12016775 γ^2/2322432 + 537918475 ξ/25546752 + 34868725 α ξ/387072 - 367262875 α^2 ξ/3649536 +
  150432025 γ ξ/1419264 - 1343531125 α γ ξ/12773376 - 12016775 γ^2 ξ/2322432 /. α → 55/64 /. γ → 2/3
```

$$\frac{30374872044875}{941755465728} + \frac{30374872044875\xi}{941755465728}$$

```
incomehouseholdalfa = 30374872044875/941755465728 + 30374872044875 ξ/941755465728 / detdeltamatrix
```

$$\frac{30374872044875}{941755465728}+\frac{182249232269250\,\xi}{602231005237}$$

```
exphouena = {{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
  {1, 250 (1 + ξ), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 0, -1, 0, -1/7,
   5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336}, {0, 250 (1 + ξ), 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -2/3, (1 - γ)/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8}, {0, 250 (1 + ξ), 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -2/3, γ/4, -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 250 (1 + ξ), 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 0, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0}, {0, -1000 (1 + ξ), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},$$
$$\{0,\ 250\,(1+\xi),\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},$$
$$\{0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},$$
$$\{0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},$$
$$\left.\{0,\ -1000\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 250\,(1+\xi) & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & -1000\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[exphouena]
```

$$\frac{55690675}{9580032}-\frac{2970875\,\alpha}{3193344}+\frac{2032775\,\gamma}{171072}-\frac{109073875\,\alpha\,\gamma}{9580032}-\frac{2475325\,\gamma^2}{1368576}+$$
$$\frac{55690675\,\xi}{9580032}-\frac{2970875\,\alpha\,\xi}{3193344}+\frac{2032775\,\gamma\,\xi}{171072}-\frac{109073875\,\alpha\,\gamma\,\xi}{9580032}-\frac{2475325\,\gamma^2\,\xi}{1368576}$$

```
55690675/9580032 - 2970875 α/3193344 + 2032775 γ/171072 - 109073875 α γ/9580032 - 2475325 γ^2/1368576 + 55690675 ξ/9580032 -
  2970875 α ξ/3193344 + 2032775 γ ξ/171072 - 109073875 α γ ξ/9580032 - 2475325 γ^2 ξ/1368576 /. α → 55/64 /. γ → 2/3
```

$$\frac{30948711875}{5518098432}+\frac{30948711875\,\xi}{5518098432}$$

```
expenditurehouseholdalfa = (30948711875/5518098432 + (30948711875 ξ)/5518098432) / detdeltamatrix
```

$$\frac{30948711875}{5518098432} + \frac{31691480960000\,\xi}{602231005237}$$

```
inchoudyo = {{-1, 0, 0, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
  {1, -1, 250 (1 + ξ), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, 0, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
  {0, 0, 250 (1 + ξ), -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 α/8, 0, (1 - γ)/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8},
  {0, 0, 250 (1 + ξ), 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 (1 - α)/8, 0, γ/4,
   -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 0, 250 (1 + ξ), 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0}, {0, 0, -1000 (1 + ξ), 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1, 0, 0, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5\alpha}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{1-\gamma}{6}, 0, \frac{4399}{6336}\right\}, \{1, -1, 250\,(1+\xi), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9}, 0, 0, 0, -\frac{1}{7}, \frac{5\,(1-\alpha)}{6}, -\frac{4}{5}, \frac{\gamma}{6}, 0, \frac{3343}{6336}\right\},$$
$$\{0, 0, 250\,(1+\xi), -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7\alpha}{8}, 0, \frac{1-\gamma}{4}, -1, 0, -\frac{4}{5}, 0, 0, \frac{5}{8}\right\},$$
$$\{0, 0, 250\,(1+\xi), 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0\}, \left\{-\frac{1}{9}, \frac{7\,(1-\alpha)}{8}, 0, \frac{\gamma}{4}, -\frac{1}{7}, 0, -1, 0, 0, \frac{3079}{6336}\right\},$$
$$\{0, 0, 250\,(1+\xi), 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0\}, \left\{0, \frac{1}{8}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}, -1, 0\right\},$$
$$\left.\{0, 0, -1000\,(1+\xi), 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 250\,(1+\xi) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & 0 & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & 0 & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & -1000\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[inchoudyo]
```

$$-\frac{112171625}{10948608} + \frac{60603175\,\alpha}{387072} - \frac{1538084125\,\alpha^2}{10948608} + \frac{1278180125\,\gamma}{12773376} -$$
$$\frac{548125675\,\alpha\,\gamma}{5474304} - \frac{257935375\,\gamma^2}{76640256} - \frac{112171625\,\xi}{10948608} + \frac{60603175\,\alpha\,\xi}{387072} -$$
$$\frac{1538084125\,\alpha^2\,\xi}{10948608} + \frac{1278180125\,\gamma\,\xi}{12773376} - \frac{548125675\,\alpha\,\gamma\,\xi}{5474304} - \frac{257935375\,\gamma^2\,\xi}{76640256}$$

$$-\frac{112171625}{10948608}+\frac{60603175\,\alpha}{387072}-\frac{1538084125\,\alpha^2}{10948608}+\frac{1278180125\,\gamma}{12773376}-\frac{548125675\,\alpha\,\gamma}{5474304}-\frac{257935375\,\gamma^2}{76640256}-\frac{112171625\,\xi}{10948608}+\frac{60603175\,\alpha\,\xi}{387072}-\frac{1538084125\,\alpha^2\,\xi}{10948608}+\frac{1278180125\,\gamma\,\xi}{12773376}-\frac{548125675\,\alpha\,\gamma\,\xi}{5474304}-\frac{257935375\,\gamma^2\,\xi}{76640256}\ /.\ \alpha\to 55/64\ /.\ \gamma\to 2/3$$

$$\frac{80255369766125}{2825266397184}+\frac{80255369766125\,\xi}{2825266397184}$$

$$\text{incomehouseholdgamma}=\frac{80255369766125}{2825266397184}+\frac{80255369766125\,\xi}{2825266397184}\Big/\text{detdeltamatrix}$$

$$\frac{80255369766125}{2825266397184}+\frac{160510739532250\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{exphoudyo}=\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\right.$$
$$\{1,\ -1,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\right.$$
$$\left.\frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},$$
$$\left.\{0,\ 0,\ 0,\ -1000\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 1,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},$$
$$\left.\{0,\ 0,\ 0,\ -1000\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & 0 & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1000\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[exphoudyo]
```

$$-\frac{81392975}{3193344}+\frac{418676675\,\alpha}{6386688}-\frac{109073875\,\alpha^2}{2737152}+\frac{57054325\,\gamma}{9580032}-\frac{17327275\,\alpha\,\gamma}{2737152}-\frac{81392975\,\xi}{3193344}+\frac{418676675\,\alpha\,\xi}{6386688}-\frac{109073875\,\alpha^2\,\xi}{2737152}+\frac{57054325\,\gamma\,\xi}{9580032}-\frac{17327275\,\alpha\,\gamma\,\xi}{2737152}$$

```
-81392975/3193344 + 418676675 α/6386688 - 109073875 α^2/2737152 + 57054325 γ/9580032 - 17327275 α γ/2737152 - 81392975 ξ/3193344 + 418676675 α ξ/6386688 - 109073875 α^2 ξ/2737152 + 57054325 γ ξ/9580032 - 17327275 α γ ξ/2737152 /. α → 55/64 /. γ → 2/3
```

$$\frac{414707842625}{235438866432}+\frac{414707842625\,\xi}{235438866432}$$

```
expenditurehouseholdgamma = 414707842625/235438866432 + 414707842625 ξ/235438866432 / detdeltamatrix
```

$$\frac{414707842625}{235438866432}+\frac{9952988223000\,\xi}{602231005237}$$

```
incbusena = {{-1, 0, -2/3, 0, 0, 5 α/6, -4/5, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
  {1, -1, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0, 0, 0, 0, 0},
  {-1/9, 0, -1, 0, 0, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
  {0, 0, 1, -1, 250 (1 + ξ), 0, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 α/8, -2/3, (1 - γ)/4, 0, 0, -4/5, 0, 0, 5/8},
  {0, 0, 0, 0, 250 (1 + ξ), -1, 0, 0, 0, 0}, {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4,
   0, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 0, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0, 1, -1, 0, 0},
  {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0}, {0, 0, 0, 0, -1000 (1 + ξ), 0, 0, 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{1-\gamma}{6},\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ 0,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1000\,(1+\xi),\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1000\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[incbusena]
```

$$\frac{56579525}{10948608}+\frac{288601375\,\alpha}{2737152}-\frac{367262875\,\alpha^2}{3649536}+\frac{497404375\,\gamma}{5474304}-\frac{247053475\,\alpha\,\gamma}{2737152}-\frac{51116275\,\gamma^2}{10948608}+\frac{56579525\,\xi}{10948608}+\frac{288601375\,\alpha\,\xi}{2737152}-\frac{367262875\,\alpha^2\,\xi}{3649536}+\frac{497404375\,\gamma\,\xi}{5474304}-\frac{247053475\,\alpha\,\gamma\,\xi}{2737152}-\frac{51116275\,\gamma^2\,\xi}{10948608}$$

$$\frac{56579525}{10948608}+\frac{288601375\,\alpha}{2737152}-\frac{367262875\,\alpha^2}{3649536}+\frac{497404375\,\gamma}{5474304}-\frac{247053475\,\alpha\,\gamma}{2737152}-\frac{51116275\,\gamma^2}{10948608}+\frac{56579525\,\xi}{10948608}+\frac{288601375\,\alpha\,\xi}{2737152}-\frac{367262875\,\alpha^2\,\xi}{3649536}+\frac{497404375\,\gamma\,\xi}{5474304}-\frac{247053475\,\alpha\,\gamma\,\xi}{2737152}-\frac{51116275\,\gamma^2\,\xi}{10948608}\;/.\;\alpha\to 55/64\;/.\;\gamma\to 2/3$$

$$\frac{11400971756375}{403609485312}+\frac{11400971756375\,\xi}{403609485312}$$

```
incomebusinessalfa = 11400971756375/403609485312 + (11400971756375 ξ)/403609485312 / detdeltamatrix
```

$$\frac{11400971756375}{403609485312}+\frac{159613604589250\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{expbusena}=\left\{\left\{-1,\,0,\,-\frac{2}{3},\,0,\,-\frac{1}{7},\,0,\,-\frac{4}{5},\,\frac{(1-\gamma)}{6},\,0,\,\frac{4399}{6336}\right\},\right.$$
$$\{1,\,-1,\,0,\,0,\,0,\,250\,(1+\xi),\,0,\,0,\,0,\,0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\,0,\,-1,\,0,\,-\frac{1}{7},\,0,\,-\frac{4}{5},\,\frac{\gamma}{6},\,0,\,\frac{3343}{6336}\right\},$$
$$\{0,\,0,\,1,\,-1,\,0,\,250\,(1+\xi),\,0,\,0,\,0,\,0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\,\frac{7\,\alpha}{8},\,-\frac{2}{3},\,\frac{(1-\gamma)}{4},\,-1,\,0,\,-\frac{4}{5},\,0,\,0,\,\frac{5}{8}\right\},$$
$$\{0,\,0,\,0,\,0,\,1,\,250\,(1+\xi),\,0,\,0,\,0,\,0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\,\frac{7\,(1-\alpha)}{8},\,-\frac{2}{3},\,\frac{\gamma}{4},\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7},\,0,\,-1,\,0,\,0,\,\frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,250\,(1+\xi),\,1,\,-1,\,0,\,0\},$$
$$\left.\left\{0,\,\frac{1}{8},\,0,\,\frac{3}{4},\,0,\,0,\,0,\,\frac{5}{6},\,-1,\,0\right\},\ \{0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,-1000\,(1+\xi),\,0,\,0,\,1,\,-1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\,0,\,-\frac{2}{3},\,0,\,-\frac{1}{7},\,0,\,-\frac{4}{5},\,\frac{1-\gamma}{6},\,0,\,\frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\,-1,\,0,\,0,\,0,\,250\,(1+\xi),\,0,\,0,\,0,\,0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,0,\,-1,\,0,\,-\frac{1}{7},\,0,\,-\frac{4}{5},\,\frac{\gamma}{6},\,0,\,\frac{3343}{6336}\right\},\ \{0,\,0,\,1,\,-1,\,0,\,250\,(1+\xi),\,0,\,0,\,0,\,0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,\frac{7\,\alpha}{8},\,-\frac{2}{3},\,\frac{1-\gamma}{4},\,-1,\,0,\,-\frac{4}{5},\,0,\,0,\,\frac{5}{8}\right\},\ \{0,\,0,\,0,\,0,\,1,\,250\,(1+\xi),\,0,\,0,\,0,\,0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,\frac{7\,(1-\alpha)}{8},\,-\frac{2}{3},\,\frac{\gamma}{4},\,-\frac{1}{7},\,0,\,-1,\,0,\,0,\,\frac{3079}{6336}\right\},$$
$$\{0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,250\,(1+\xi),\,1,\,-1,\,0,\,0\},\ \left\{0,\,\frac{1}{8},\,0,\,\frac{3}{4},\,0,\,0,\,0,\,\frac{5}{6},\,-1,\,0\right\},$$
$$\left.\{0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,-1000\,(1+\xi),\,0,\,0,\,1,\,-1\}\right\}$$

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1000\,(1+\xi) & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[expbusena]
```

$$-\frac{386086675}{38320128}+\frac{78966425\,\alpha}{5474304}-\frac{62246225\,\gamma}{19160064}+\frac{2151575\,\alpha\,\gamma}{608256}-\frac{16646425\,\gamma^2}{12773376}-\frac{386086675\,\xi}{38320128}+\frac{78966425\,\alpha\,\xi}{5474304}-\frac{62246225\,\gamma\,\xi}{19160064}+\frac{2151575\,\alpha\,\gamma\,\xi}{608256}-\frac{16646425\,\gamma^2\,\xi}{12773376}$$

```
-386086675/38320128 + 78966425 α/5474304 - 62246225 γ/19160064 + 2151575 α γ/608256 - 16646425 γ^2/12773376 -
  386086675 ξ/38320128 + 78966425 α ξ/5474304 - 62246225 γ ξ/19160064 + 2151575 α γ ξ/608256 - 16646425 γ^2 ξ/12773376 /. α → 55/64 /. γ → 2/3
```

$$\frac{3930491875}{2452488192}+\frac{3930491875\,\xi}{2452488192}$$

```
expenditurebusinessalfa = 3930491875/2452488192 + 3930491875 ξ/2452488192 / detdeltamatrix
```

$$\frac{3930491875}{2452488192}+\frac{9055853280000\,\xi}{602231005237}$$

```
incbusdyo = {{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, 0, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
   {1, -1, 0, 0, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0, 0, 0}, {-1/9, 0, -1, 0, -1/7,
    5 (1 - α)/6, 0, γ/6, 0, 3343/6336}, {0, 0, 1, -1, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0, 0, 0},
   {-1/9, 7 α/8, -2/3, (1 - γ)/4, -1, 0, 0, 0, 0, 5/8}, {0, 0, 0, 0, 1, -1, 250 (1 + ξ), 0, 0, 0},
   {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4, -1/7, 0, 0, 0, 0, 3079/6336},
   {0, 0, 0, 0, 0, 0, 250 (1 + ξ), -1, 0, 0}, {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, -1, 0},
   {0, 0, 0, 0, 0, 0, -1000 (1 + ξ), 0, 1, -1}}
```

$$\left\{\left\{-1,\,0,\,-\frac{2}{3},\,0,\,-\frac{1}{7},\,\frac{5\,\alpha}{6},\,0,\,\frac{1-\gamma}{6},\,0,\,\frac{4399}{6336}\right\},\,\{1,\,-1,\,0,\,0,\,0,\,0,\,250\,(1+\xi),\,0,\,0,\,0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,0,\,-1,\,0,\,-\frac{1}{7},\,\frac{5\,(1-\alpha)}{6},\,0,\,\frac{\gamma}{6},\,0,\,\frac{3343}{6336}\right\},\,\{0,\,0,\,1,\,-1,\,0,\,0,\,250\,(1+\xi),\,0,\,0,\,0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,\frac{7\,\alpha}{8},\,-\frac{2}{3},\,\frac{1-\gamma}{4},\,-1,\,0,\,0,\,0,\,0,\,\frac{5}{8}\right\},\,\{0,\,0,\,0,\,0,\,1,\,-1,\,250\,(1+\xi),\,0,\,0,\,0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\,\frac{7\,(1-\alpha)}{8},\,-\frac{2}{3},\,\frac{\gamma}{4},\,-\frac{1}{7},\,0,\,0,\,0,\,0,\,\frac{3079}{6336}\right\},$$
$$\{0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,250\,(1+\xi),\,-1,\,0,\,0\},\,\left\{0,\,\frac{1}{8},\,0,\,\frac{3}{4},\,0,\,\frac{1}{6},\,0,\,\frac{5}{6},\,-1,\,0\right\},$$
$$\left.\{0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,0,\,-1000\,(1+\xi),\,0,\,1,\,-1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & 0 & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & 0 & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & -1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1000\,(1+\xi) & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[incbusdyo]

$$\frac{2903533625}{76640256}+\frac{956631625\,\alpha}{19160064}-\frac{302715625\,\alpha^2}{3649536}+\frac{3864512875\,\gamma}{38320128}-\frac{1921997125\,\alpha\,\gamma}{19160064}-\frac{257935375\,\gamma^2}{76640256}+\frac{2903533625\,\xi}{76640256}+\frac{956631625\,\alpha\,\xi}{19160064}-\frac{302715625\,\alpha^2\,\xi}{3649536}+\frac{3864512875\,\gamma\,\xi}{38320128}-\frac{1921997125\,\alpha\,\gamma\,\xi}{19160064}-\frac{257935375\,\gamma^2\,\xi}{76640256}$$

$$\frac{2903533625}{76640256}+\frac{956631625\,\alpha}{19160064}-\frac{302715625\,\alpha^2}{3649536}+\frac{3864512875\,\gamma}{38320128}-\frac{1921997125\,\alpha\,\gamma}{19160064}-\frac{257935375\,\gamma^2}{76640256}+\frac{2903533625\,\xi}{76640256}+\frac{956631625\,\alpha\,\xi}{19160064}-\frac{302715625\,\alpha^2\,\xi}{3649536}+\frac{3864512875\,\gamma\,\xi}{38320128}-\frac{1921997125\,\alpha\,\gamma\,\xi}{19160064}-\frac{257935375\,\gamma^2\,\xi}{76640256}\ /.\ \alpha\to 55/64\ /.\ \gamma\to 2/3$$

$$\frac{11220334128125}{403609485312}+\frac{11220334128125\,\xi}{403609485312}$$

$$\text{incomebusinessgamma}=\frac{11220334128125}{403609485312}+\frac{11220334128125\,\xi}{403609485312}\Big/\text{detdeltamatrix}$$

$$\frac{11220334128125}{403609485312}+\frac{157084677793750\,\xi}{602231005237}$$

expbusdyo =

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0\},\ \left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\right.$$
$$\left.-\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ 0,\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1000\,(1+\xi),\ 1,\ -1\}\right\}$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{4399}{6336}\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0\},\right.$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{3343}{6336}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1-\gamma}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{8}\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ \frac{3079}{6336}\right\},$$
$$\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 250\,(1+\xi),\ 0,\ 0\},\ \left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ 0,\ -1,\ 0\right\},$$
$$\left.\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1000\,(1+\xi),\ 1,\ -1\}\right\}$$

MatrixForm[%]

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 250\,(1+\xi) & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1000\,(1+\xi) & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

Det[expbusdyo]

$$\frac{108456475}{4790016} - \frac{1574391025\,\alpha}{38320128} + \frac{10757875\,\alpha^2}{608256} + \frac{2933975\,\gamma}{435456} - \frac{83232125\,\alpha\,\gamma}{12773376} +$$
$$\frac{108456475\,\xi}{4790016} - \frac{1574391025\,\alpha\,\xi}{38320128} + \frac{10757875\,\alpha^2\,\xi}{608256} + \frac{2933975\,\gamma\,\xi}{435456} - \frac{83232125\,\alpha\,\gamma\,\xi}{12773376}$$

$$\frac{108456475}{4790016} - \frac{1574391025\,\alpha}{38320128} + \frac{10757875\,\alpha^2}{608256} + \frac{2933975\,\gamma}{435456} - \frac{83232125\,\alpha\,\gamma}{12773376} + \frac{108456475\,\xi}{4790016} -$$
$$\frac{1574391025\,\alpha\,\xi}{38320128} + \frac{10757875\,\alpha^2\,\xi}{608256} + \frac{2933975\,\gamma\,\xi}{435456} - \frac{83232125\,\alpha\,\gamma\,\xi}{12773376}\ /.\ \alpha \to 55/64\ /.\ \gamma \to 2/3$$

$$\frac{543910540375}{470877732864} + \frac{543910540375\,\xi}{470877732864}$$

expenditurebusinessgamma = $\dfrac{543910540375}{470877732864} + \dfrac{543910540375\,\xi}{470877732864}$ **/ detdeltamatrix**

$$\frac{543910540375}{470877732864} + \frac{6526926484500\,\xi}{602231005237}$$

```
incfinsec = {{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, (1 - γ)/6, 0, 4399/6336},
  {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0},
  {-1/9, 0, -1, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
  {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0}, {-1/9, 7 α/8, -2/3, (1 - γ)/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8},
  {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0}, {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4,
   -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 250 (1 + ξ), 0},
  {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1000 (1 + ξ), -1}}
```

```
{{-1, 0, -2/3, 0, -1/7, 5 α/6, -4/5, 1 - γ/6, 0, 4399/6336}, {1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0},
 {-1/9, 0, -1, 0, -1/7, 5 (1 - α)/6, -4/5, γ/6, 0, 3343/6336},
 {0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0},
 {-1/9, 7 α/8, -2/3, 1 - γ/4, -1, 0, -4/5, 0, 0, 5/8}, {0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 250 (1 + ξ), 0},
 {-1/9, 7 (1 - α)/8, -2/3, γ/4, -1/7, 0, -1, 0, 0, 3079/6336},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 250 (1 + ξ), 0}, {0, 1/8, 0, 3/4, 0, 1/6, 0, 5/6, 0, 0},
 {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1000 (1 + ξ), -1}}
```

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & \frac{4399}{6336} \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & \frac{3343}{6336} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{5}{8} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) & 0 \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3079}{6336} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 250\,(1+\xi) & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1000\,(1+\xi) & -1
\end{pmatrix}$$

```
Det[incfinsec]
```

$$-\frac{22998025}{19160064}+\frac{54976975\,\alpha}{3193344}-\frac{13821125\,\alpha^2}{912384}+\frac{105622525\,\gamma}{9580032}-\frac{15070075\,\alpha\,\gamma}{1368576}-\frac{8493425\,\gamma^2}{19160064}-$$
$$\frac{22998025\,\xi}{19160064}+\frac{54976975\,\alpha\,\xi}{3193344}-\frac{13821125\,\alpha^2\,\xi}{912384}+\frac{105622525\,\gamma\,\xi}{9580032}-\frac{15070075\,\alpha\,\gamma\,\xi}{1368576}-\frac{8493425\,\gamma^2\,\xi}{19160064}$$

$$-\frac{22998025}{19160064}+\frac{54976975\,\alpha}{3193344}-\frac{13821125\,\alpha^2}{912384}+\frac{105622525\,\gamma}{9580032}-$$
$$\frac{15070075\,\alpha\,\gamma}{1368576}-\frac{8493425\,\gamma^2}{19160064}-\frac{22998025\,\xi}{19160064}+\frac{54976975\,\alpha\,\xi}{3193344}-\frac{13821125\,\alpha^2\,\xi}{912384}+$$
$$\frac{105622525\,\gamma\,\xi}{9580032}-\frac{15070075\,\alpha\,\gamma\,\xi}{1368576}-\frac{8493425\,\gamma^2\,\xi}{19160064}\ /.\ \alpha\to 55/64\ /.\ \gamma\to 2/3$$

$$\frac{2296823821375}{706316599296}+\frac{2296823821375\,\xi}{706316599296}$$

$$\text{incomefinancialsector} = \frac{2296823821375}{706316599296} + \frac{2296823821375\,\xi}{706316599296} \Big/ \text{detdeltamatrix}$$

$$\frac{2296823821375}{706316599296} + \frac{18374590571000\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{expfinsec} =$$

$$\left\{\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,\alpha}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{(1-\gamma)}{6},\ 0,\ 0\right\},\ \{1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi)\}\right.,$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ 0,\ -1,\ 0,\ -\frac{1}{7},\ \frac{5\,(1-\alpha)}{6},\ -\frac{4}{5},\ \frac{\gamma}{6},\ 0,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi)\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,\alpha}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{(1-\gamma)}{4},\ -1,\ 0,\ -\frac{4}{5},\ 0,\ 0,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 250\,(1+\xi)\},$$
$$\left\{-\frac{1}{9},\ \frac{7\,(1-\alpha)}{8},\ -\frac{2}{3},\ \frac{\gamma}{4},\ -\frac{1}{7},\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 250\,(1+\xi)\},$$
$$\left.\left\{0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ \frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{6},\ 0,\ \frac{5}{6},\ -1,\ 0\right\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1000\,(1+\xi)\}\right\}$$

$$\text{MatrixForm[\%]}$$

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,\alpha}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{1-\gamma}{6} & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) \\
-\frac{1}{9} & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{5\,(1-\alpha)}{6} & -\frac{4}{5} & \frac{\gamma}{6} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,\alpha}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{1-\gamma}{4} & -1 & 0 & -\frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 250\,(1+\xi) \\
-\frac{1}{9} & \frac{7\,(1-\alpha)}{8} & -\frac{2}{3} & \frac{\gamma}{4} & -\frac{1}{7} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 250\,(1+\xi) \\
0 & \frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1000\,(1+\xi)
\end{pmatrix}$$

$$\text{Det[expfinsec]}$$

$$\frac{30125}{504} + \frac{2305925\,\alpha}{6048} - \frac{360875\,\alpha^2}{864} + \frac{292925\,\gamma}{756} - \frac{37075\,\alpha\,\gamma}{96} - \frac{21025\,\gamma^2}{1512} +$$
$$\frac{30125\,\xi}{504} + \frac{2305925\,\alpha\,\xi}{6048} - \frac{360875\,\alpha^2\,\xi}{864} + \frac{292925\,\gamma\,\xi}{756} - \frac{37075\,\alpha\,\gamma\,\xi}{96} - \frac{21025\,\gamma^2\,\xi}{1512}$$

$$\frac{30125}{504} + \frac{2305925\,\alpha}{6048} - \frac{360875\,\alpha^2}{864} + \frac{292925\,\gamma}{756} - \frac{37075\,\alpha\,\gamma}{96} - \frac{21025\,\gamma^2}{1512} + \frac{30125\,\xi}{504} + \frac{2305925\,\alpha\,\xi}{6048} -$$
$$\frac{360875\,\alpha^2\,\xi}{864} + \frac{292925\,\gamma\,\xi}{756} - \frac{37075\,\alpha\,\gamma\,\xi}{96} - \frac{21025\,\gamma^2\,\xi}{1512} \text{ /. } \alpha \to 55/64 \text{ /. } \gamma \to 2/3$$

$$\frac{24487278875}{222953472} + \frac{24487278875\,\xi}{222953472}$$

$$\text{expenditurefinancialsector} = \frac{24487278875}{222953472} + \frac{24487278875\,\xi}{222953472} \Big/ \text{detdeltamatrix}$$

$$\frac{24487278875}{222953472} + \frac{620605595808000\,\xi}{602231005237}$$

Page 187 World income and expenditure (equation 148)
and solution of the related system of inequalities

$$\text{incomehouseholdalfa} = \frac{30374872044875}{941755465728} + \frac{182249232269250\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{30374872044875}{941755465728} + \frac{182249232269250\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{expenditurehouseholdalfa} = \frac{30948711875}{5518098432} + \frac{31691480960000\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{30948711875}{5518098432} + \frac{31691480960000\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{incomehouseholdgamma} = \frac{80255369766125}{2825266397184} + \frac{160510739532250\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{80255369766125}{2825266397184} + \frac{160510739532250\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{expenditurehouseholdgamma} = \frac{414707842625}{235438866432} + \frac{9952988223000\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{414707842625}{235438866432} + \frac{9952988223000\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{incomebusinessalfa} = \frac{11400971756375}{403609485312} + \frac{159613604589250\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{11400971756375}{403609485312} + \frac{159613604589250\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{expenditurebusinessalfa} = \frac{3930491875}{2452488192} + \frac{9055853280000\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{3930491875}{2452488192} + \frac{9055853280000\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{incomebusinessgamma} = \frac{11220334128125}{403609485312} + \frac{157084677793750\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{11220334128125}{403609485312} + \frac{157084677793750\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{expenditurebusinessgamma} = \frac{543910540375}{470877732864} + \frac{6526926484500\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{543910540375}{470877732864} + \frac{6526926484500\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{incomefinancialsector} = \frac{2296823821375}{706316599296} + \frac{18374590571000\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{2296823821375}{706316599296} + \frac{18374590571000\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{expenditurefinancialsector} = \frac{24487278875}{222953472} + \frac{620605595808000\,\xi}{602231005237}$$

$$\frac{24487278875}{222953472} + \frac{620605595808000\,\xi}{602231005237}$$

$$\text{incomehouseholdalfa} + \text{incomehouseholdgamma} + \text{incomebusinessalfa} + \text{incomebusinessgamma} + \text{incomefinancialsector}$$

$$\frac{24208315884125}{201804742656} + \frac{677832844755500\,\xi}{602231005237}$$

```
expenditurehouseholdalfa + expenditurehouseholdgamma +
 expenditurebusinessalfa + expenditurebusinessgamma + expenditurefinancialsector
```

$$\frac{24208315884125}{201804742656} + \frac{677832844755500\,\xi}{602231005237}$$

```
<< Algebra`InequalitySolve`
```

```
InequalitySolve[{incomehouseholdalfa > 0, expenditurehouseholdalfa > 0,
  incomehouseholdgamma > 0, expenditurehouseholdgamma > 0, incomebusinessalfa > 0,
  expenditurebusinessalfa > 0, incomebusinessgamma > 0, expenditurebusinessgamma > 0,
  incomefinancialsector > 0, expenditurefinancialsector > 0}, {ξ}]
```

$$\xi > -\frac{602231005237}{5650532794368}$$

Page 188 Derivates of income and expenditure (Table XI14) with respect to the exchange rate (Table XI15)

$$\text{incomehouseholdalfa} = \left(\frac{30374872044875}{941755465728} + \frac{182249232269250\,\xi}{602231005237}\right)$$

$$\frac{30374872044875}{941755465728} + \frac{182249232269250\,\xi}{602231005237}$$

D[%, ξ]

$$\frac{182249232269250}{602231005237}$$

N[%]

302.623

$$\text{expenditurehouseholdalfa} = \left(\frac{30948711875}{5518098432} + \frac{31691480960000\,\xi}{602231005237}\right)$$

$$\frac{30948711875}{5518098432} + \frac{31691480960000\,\xi}{602231005237}$$

D[%, ξ]

$$\frac{31691480960000}{602231005237}$$

N[%]

52.6235

$$\text{incomehouseholdgamma} = \left(\frac{80255369766125}{2825266397184} + \frac{160510739532250\,\xi}{602231005237}\right)$$

$$\frac{80255369766125}{2825266397184} + \frac{160510739532250\,\xi}{602231005237}$$

D[%, ξ]

$$\frac{160510739532250}{602231005237}$$

N[%]

266.527

$$\text{expenditurehouseholdgamma} = \left(\frac{414707842625}{235438866432} + \frac{9952988223000\,\xi}{602231005237}\right)$$

$$\frac{414707842625}{235438866432} + \frac{9952988223000\,\xi}{602231005237}$$

D[%, ξ]

$$\frac{9952988223000}{602231005237}$$

N[%]

16.5269

$$\text{incomebusinessalfa} = \left(\frac{11400971756375}{403609485312} + \frac{159613604589250\,\xi}{602231005237}\right)$$

$$\frac{11400971756375}{403609485312} + \frac{159613604589250\,\xi}{602231005237}$$

D[%, ξ]

$$\frac{159613604589250}{602231005237}$$

N[%]

265.037

$$\text{expenditurebusinessalfa} = \left(\frac{3930491875}{2452488192} + \frac{9055853280000\,\xi}{602231005237}\right)$$

$$\frac{3930491875}{2452488192} + \frac{9055853280000\,\xi}{602231005237}$$

D[%, ξ]

$$\frac{9055853280000}{602231005237}$$

N[%]

15.0372

$$\text{incomebusinessgamma} = \left(\frac{11220334128125}{403609485312} + \frac{157084677793750\,\xi}{602231005237}\right)$$

$$\frac{11220334128125}{403609485312} + \frac{157084677793750\,\xi}{602231005237}$$

D[%, ξ]

$$\frac{157084677793750}{602231005237}$$

N[%]

260.838

$$\text{expenditurebusinessgamma} = \left(\frac{543910540375}{470877732864} + \frac{6526926484500\,\xi}{602231005237}\right)$$

$$\frac{543910540375}{470877732864} + \frac{6526926484500\,\xi}{602231005237}$$

D[%, ξ]

$$\frac{6526926484500}{602231005237}$$

N[%]

10.8379

$$\text{incomefinancialsector} = \left(\frac{2296823821375}{706316599296} + \frac{18374590571000\,\xi}{602231005237}\right)$$

$$\frac{2296823821375}{706316599296} + \frac{18374590571000\,\xi}{602231005237}$$

```
D[%, ξ]
```

$$\frac{18374590571000}{602231005237}$$

```
N[%]
```

```
30.5109
```

```
expenditurefinancialsector = (24487278875/222953472 + 620605595808000 ξ/602231005237)
```

$$\frac{24487278875}{222953472} + \frac{620605595808000\,\xi}{602231005237}$$

```
D[%, ξ]
```

$$\frac{620605595808000}{602231005237}$$

```
N[%]
```

```
1030.51
```

```
incomehouseholdalfa + incomehouseholdgamma +
 incomebusinessalfa + incomebusinessgamma + incomefinancialsector
```

$$\frac{24208315884125}{201804742656} + \frac{677832844755500\,\xi}{602231005237}$$

```
D[%, ξ]
```

$$\frac{677832844755500}{602231005237}$$

```
N[%]
```

```
1125.54
```

```
expenditurehouseholdalfa + expenditurehouseholdgamma +
 expenditurebusinessalfa + expenditurebusinessgamma + expenditurefinancialsector
```

$$\frac{24208315884125}{201804742656} + \frac{677832844755500\,\xi}{602231005237}$$

```
D[%, ξ]
```

$$\frac{677832844755500}{602231005237}$$

```
N[%]
```

```
1125.54
```

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ADOLFSON, Malin, LASÉEN, Stefan, LINDÉ, Jesper, and Mattias VILLANI (2005) ''Baynesian Estimation of an Open Economy DSGE Model with Incomplete Pass-Through'' European Summer Symposium in Macroeconomics hosted by the Central Bank of Cyprus.

ALLEN, R.G.D. (1966) *Mathematical Economics*, St. Martin's Press.

ALLEN, R.G.D. (1968) *Macroeconomic Theory: Mathematical Treatment*, St. Martin's Press.

AMERICAN ACADEMY OF POLITICAL AND SOCIAL SCIENCE (1963) *Mathematics and the Social Sciences: The Utility and Inutility of Mathematics in the Study of Economics, Political Science and Sociology*, American Academy of Political and Social Science.

ARROW, K.J. (1959) "Toward a Theory of Price Adjustments" in M. Abramowitz (ed.) *The Allocation of Economic Resources*, Stanford University Press.

AYRES, Frank Jr. (1952) *Theory and Problems of Differential Equations*, McGraw Hill Book Company.

BANK OF ENGLAND Model Development Team (2003) ''On the Bank of England's New Model'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

BATINI, Nicoletta, JUSTINIANO, Alejandro, LEVINE, Paul, and Joseph PEARLMAN, (2005) ''Model Uncertainty and the Welfare Gains from Coordinating Monetary Rules'' International Research Forum on Monetary Policy, 3rd Conference at the European Central Bank.

BAYOUMI, Tamim, LAXTON, Douglas, and Paolo PESENTI (2003) ''When Leaner Isn't Meaner: Measuring Benefits and Spillovers of Greater Competition in Europe'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

BENIGNO, Gianluca, and Bianca DE PAOLI (2005) ''Optimal Monetary and Fiscal Policy for a Small Open Economy,'' European Summer Symposium in Macroeconomics hosted by the Central Bank of Cyprus.

BERBEN, R - P, MESTRE, Ricardo, MITRAKOS, Theodore, MORGAN, Julian, and Nicholas ZONZILOS (2004) ''Inflation Persistence in Structural Macroeconomic Models'' Inflation Persistence in the Euro Area Conference at the European Central Bank.

BOVIN, Jean, and Marc GIANNONI (2005) ''DSGE Models in a Data-Rich Environment'' European Summer Symposium in Macroeconomics hosted by the Central Bank of Cyprus.

BRONFENBRENNER, Martin. (1971) *Income Distribution Theory*, Aldine-Atherton.

BULLARD, James, and Eric SCHALING (2005) ''Monetary Policy, Determinacy, and Learnability in the Open Economy'' International Research Forum on Monetary Policy, 3rd Conference at the European Central Bank.

BURMEISTER, E. and DOBELL, R. (1968) *Mathematical Theories of Economic Growth*, MacMillan.

CAGAN, Philip (1956) "The Monetary Dynamics of Hyperinflation", in M. Friedman (ed.) *Studies in the Quantity Theory of Money*, University of Chicago Press.

CANOVA, Fabio, and Luca SALA (2005) ''Learning about the Parameters and the Dynamics of DSGE Models: Identification and Estimation'' European Summer Symposium in Macroeconomics hosted by the Central Bank of Cyprus.

COENEN, Gunther, and Andrew LEVIN (2004) ''Identifying the Influences of Nominal and Real Rigidities in Aggregate Price-Setting Behavior'' Inflation Persistence in the Euro Area Conference at the European Central Bank.

DE NEDERLANDSCHE BANK (2000) ''EUROMON: The Nederlandsche Bank' Multi-country Model for Policy Analysis in Europe'' De Nederlandsche Bank.

DE WALQUE, Gregory, SMETS, Frank, and Raf WOUTERS (2004) ''Price Setting in General Equilibrium: Alternative Specifications'' Inflation Persistence in the Euro Area Conference at the European Central Bank.

DEL NEGRO, Marco, SCHORFHEIDE, Frank, SMETS, Frank, and Raf WOUTERS (2005) ''On the Fit and Forecasting Performance of New Keynesian Models'' European Summer Symposium in Macroeconomics hosted by the Central Bank of Cyprus.

DESCARTES, René (2000) *Discourse on Method and Related Writings*, Penguin Classics.

DEVEREUX, Michael, and Charles ENGEL (2005) ''Expenditure Switching Vs Real Exchange Rate Stabilization: Competing Objectives for Exchange Rate Policy'' International Research Forum on Monetary Policy, 3rd Conference at the European Central Bank.

DI STEFANO, STUBERRUD, WILLIAMS (1967) *Theory and Problems of Feedback and Control Systems*, New York: Schaum Publishing Co.

DOMAR, Evsey (1957) *Essays in the Theory of Economic Growth* Oxford University Press.

DRYMES, Phoebus J. (1974) *Econometrics: Statistical Foundations and Applications*, Springer- Verlag.

ENTHOVEN, A. C. (1960) "A Neoclassical Model of Money, Debt, and Economic Growth" in J.G. Curley and E.S. Shaw, *Money in a Theory of Finance* The Brookings Institute.

ERCEG J. Christopher, GUERRIERI, Luca and Christopher GUST (2003) ''SIGMA: A New Open Economy Model for Policy Analysis'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

ERCEG, Christopher J., and Andrew LEVIN (2003) ''Optimal Monetary Policy with Durable and Non-Durable Goods'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

EUCLID (1957) *Elements of Geometry*, Everymans Library.

FERGUSON, C. E. and J. P. GOULD (1975) *Microeconomic Theory*, Richard D. Irwin Inc.

FISHER, I. *The Purchasing Power of Money* (New York, 1913).

FISHER, I. *The Theory of Interest* (New York, 1930).

FRIEDMAN, Milton (1956) "The Quantity Theory of Money – A Restatement" in M. Friedman (ed.) *Studies in the Quantitative Theory of Money*, University Chicago Press.

FRIEDMAN, Milton (1969) *Optimum Supply of Money and other Essays*, Aldine.

FUJIWARA, Ippei, HARA, Naoko, HIROSE, Yasuo, and Yuki TERANISHI (2003) ''Monetary Policy under the Low Inflation, Economic Growth and Nominal Interest Rate'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

FUJIWARA, Ippei, HARA, Naoko, HIROSE Yasuo, and Yuki TERANISHI (2003) ''The Japanese Economic Model: JEM'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

GOLDBERGER, Arthur S. (1963) *Econometric Theory*, John Wiley & Sons.

HARROD, Roy (1948) *Toward a Dynamic Economics*, Macmillan.

HICKS, J.R. (1946) *Value and Capital*, Oxford University Press.

HIGGINS, Robert C. (1995) *Analysis for Financial Management*, Irwin / McGraw Hill.

HUANG, Cliff J., and Philip S. CROOKE (1999) *Mathematics and Mathematica for Economists*, Blackwell Publishers.

INTRILLIGATOR, Michael D. (1971) *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall Inc.

JUILLARD, Michel, KARAM, Philippe, LAXTON, Douglas, and Paolo PESENTI (2005) ''Welfare-Based Monetary Policy Rules in an Estimated DSGE Model of the U.S. Economy'' International Research Forum on Monetary Policy, 3rd Conference at the European Central Bank.

KEYNES, J.M. (1935) *The General Theory of Employment, Interest, and Money* Harcourt Brace.

KOOPMANS, T.C. (1957) *Three Essays on the State of Economic Science*, McGraw Hill.

KUISMANEN, Mika, and Antti RIPATTI (2003) ''The DGE Model of the Finnish Economy'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

KUISMANEN, Mika (2003) ''Consumption, Endogenous Labour Supply, Pension System and Wages in a Life-Cycle Economy'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

LEIJONHUFVUD, A. (1968) *On Keynesian Economics and the Economics of Keynes*, Oxford University Press.

LEONTIEF, Wassily (1986) *Input-Output Economics*, Oxford University Press.

LEVIN, Andrew, NATALUCCI, Fabio, and Jeremy PIGER (2004) ''Explicit Inflation Objectives and Macroeconomic Outcomes'' Inflation Persistence in the Euro Area Conference at the European Central Bank.

LINDÉ, Jesper, NESSÉN, Marianne and Ulf SÖDERSTRÖM (2003) ''Monetary Policy in an Estimated Open-Economy Model with Imperfect Pass-Through'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

LIPSCHUTZ, Seymour (1968) *Theory and Problems of Linear Algebra*, McGraw Hill Book Company.

LLOYD, Cliff (1967) *Microeconomic Analysis*, Richard D. Irwin Inc.

MARSHALL, Alfred (1920) *Principles of Economics*, London.

MICHAELIDES, Sophocles (1974) *Money, Debt, Capital Gains, Inflation and Growth*, unpublished Ph.D. dissertation, Cornell University.

MURCHISON, Stephen, RENNISON, Andrew and Zhenhua ZHU (2003) ''A Structural Small Open Economy Model for Canada'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

NERI Stefano (2003) ''Agency Costs or Costly Capital Adjustment DSGE Models? An Empirical Investigation'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

PALOVIITA, Maritta (2004) ''Inflation Dynamics in the Euro Area and the Role of Expectations: Further Results'' Inflation Persistence in the Euro Area Conference at the European Central Bank.

PATINKIN, David (1965) *Money, Interest, and Prices*, Harper and Row.

PHELPS, E.S. et al. (1970) *Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory*, Macmillan.

PHILLIPS, A.W. (June 1954) "Stabilization Policy in a Closed Economy" *Economic Journal*.

PHILLIPS, A.W. (November 1958) "The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957" *Economica*.

PIGOU, A.C. (December 1943) "The Classical Stationary State" *Economic Journal*.

PLATO (1959) *Timeus*, Translated by Francis Cornford, The Liberal Arts Press Inc.

QUIRK, James and Rubin SAPOSNIK (1968) *Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics*, McGraw –Hill Book Company.

ROBINSON, Joan. (1962) "A Model of Accumulation" in *Essays in the Theory of Economic Growth*, Macmillan.

ROBINSON, Joan (1973) *Economic Heresies*, Basic Books Inc.

ROBINSON, Joan (1980) *Collected Economic Papers 1951-1979*, The MIT Press.

ROSENSTOCK, H.H. and C. STOREY (1970) *Mathematics of Dynamical Systems*, John Wiley & Sons.

RUMLER, Fabio (2004) ''Estimates of the Open Economy New Keynesian Philips Curve for Euro Area Countries'' Inflation Persistence in the Euro Area Conference at the European Central Bank.

SAMUELSON, P.A. (1947) *The Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press.

SCHMITT-GROHE, Stephanie, and Martin URIBE (2005) ''Optimal Fiscal and Monetary Policy in a Medium Scale Macroeconomic Model'' International Research Forum on Monetary Policy, 3rd Conference at the European Central Bank.

SMETS, Frank, and Raf WOUTERS (2003) ''Forecasting with a Bayesian DSGE Model: An Application to the Euro Area'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

SOKOLINKOFF, I.S. and Redhoffer R.M. (1966) *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, McGraw Hill Book Company.

SOLOW, Robert (February 1956) "A Contribution to the Theory of Economic Growth" *Quarterly Journal of Economics*.

SPANOS, Aris (1986) *Statistical Foundations of Econometric Modelling*, Cambridge University Press.

SPANOS, Aris (1998) *Probability Theory and Statistical Inference*, Cambridge University Press.

STIGLITZ, J.E., and Henry UZAWA(1970) *Readings in the Modern Theory of Economic Growth*, The M.I.T. Press.

SVEEN, Tommy and Lutz WEINKE (2003) ''Inflation and Output Dynamics with Firm-owned Capital'' Central Bank Workshop on Dynamic General Equilibrium Models organized by Nederlandsche Bank.

THUROW, Lester C. (1983) *Dangerous Currents: The State of Economics*, Oxford University Press.

WALRAS, Leon (1954) *Elements of Pure Economics*, Harvard University Press.

WAN, Henry Jr. (1971) *Economic Growth*, Harcourt, Brace, Jovanovich.

WILLEMS, J.L. (1970) *Stability Theory of Dynamical Systems*, John Wiley & Sons.

WONNNACOT, Ronald, and Thomas WONNNACOT (1970) *Econometrics*, John Wiley & Sons.

Σχεδιασμός λογότυπου: Thompson Communications Ltd

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Η Γενική Μέθοδος Κατασκευής και Εφαρμογής Μαθηματικών Μοντέλων

Δρ Σοφοκλής Μιχαηλίδης
Ανώτερος Διευθυντής
Κεντρική Τράπεζα της Κύπρου

Με αφετηρία τη θέση ότι τα οικονομικά πρέπει να προσεγγίζονται μέσω ενός ελάχιστου αριθμού αξιωματικών προτάσεων και των γενικώς αποδεκτών νόμων των μαθηματικών, το βιβλίο καταδεικνύει με απλότητα, ομοιομορφία και γενικότητα ότι ο στόχος αυτός είναι εφικτός. Επεξηγείται πως, βάσει 12 θεμελιωδών υποθέσεων, οποιοδήποτε σύμπλεγμα συναλλαγών μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σύστημα αποτελούμενο από 2n μη-ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με (μεσοπρόθεσμα) σταθερούς συντελεστές, όπου το n ορίζεται ως ο αριθμός των τομέων ή των αγαθών και το t ως ο χρόνος. Το σύστημα είναι προσδιορισμένο στο διανυσματικό χώρο (R^{2n}, t) και, άρα, οι εισπράξεις και οι πληρωμές, που συνιστούν τις ενδογενείς μεταβλητές του, κατανέμονται πλήρως ανάμεσα στους θεσμικούς τομείς, τα παζάρια αγαθών και τις συναλλασσόμενες χώρες.

Χάρη στη μαθηματική μορφή των Ευκλείδειων μοντέλων, οι νομισματικές, δημοσιονομικές και άλλες αρχές ή φορείς μπορούν να εκφράσουν τις λύσεις ισορροπίας, τις συνθήκες σταθερότητας και τις δυνατότητες πηδαλιούχησης κάθε οικονομικού συστήματος ως συναρτήσεις μικρού αριθμού εξωγενών παραμέτρων. Ακολούθως, με το κατάλληλο μαθηματικό λογισμικό, μπορούν να υπολογίσουν ή να κατευθύνουν τα έσοδα και έξοδα των θεσμικών τομέων και, άρα, τις πωλήσεις και αγορές ανάμεσα στα παζάρια αγαθών και τις συναλλασσόμενες χώρες, κατά τον επόμενο χρόνο. Πιο μακροπρόθεσμες προβλέψεις επιτυγχάνονται με επανάληψη των υπολογισμών για έκαστον έτος για το οποίο υπάρχουν ή έχουν γίνει υποθέσεις ή προβολές ως προς τις ισχύουσες εξωγενείς μεταβλητές.