



Πανεπιστήμιο
Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΓΑΛΙΛΑΙΟΝΙΑ ΠΕΔΙΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΜΑΣ ΓΙΑΝ ΜΙΧΑΗΛ

ΜΑΪΟΣ 2015



Πανεπιστήμιο
Κύπρου

Τμήμα Φυσικής

Γαλιλαιόνια Πεδία

Διπλωματική Εργασία

Τόμας Γιαν Μιχαήλ

Υπεύθυνος Καθηγητής
Κωνσταντίνος Σκορδής

Μάιος 2015

Περιεχόμενα

Παρουσιάζουμε μια μικρή εισαγωγή για την Γενική Σχετικότητα και τα κίνητρα για Εναλλακτικές Θεωρίες Βαρύτητας. Αναφέρουμε γνωστές παθολογίες Εναλλακτικών Θεωριών Βαρύτητας, το Θεώρημα του Ostrogradski και τους Μηχανισμούς Θωράκισης. Παρουσιάζουμε σε συντομία το Μοντέλο DGP και τα Γαλιλαιόνια. Υπολογίζουμε τις εξισώσεις κίνησης για το Τετράγωνο Γαλιλαιόνιο για την μετρική Friedmann-Robertson-Walker και χρονοεξαρτημένο Γαλιλαιόνιο. Λύνουμε τις εξισώσεις αριθμητικά με την μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης χρησιμοποιώντας την γλώσσα προγραμματισμού C++. Παρουσιάζουμε τις λύσεις για διάφορες κατανομές ύλης. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για το Κυβικό Γαλιλαιόνιο για το οποίο χρησιμοποιούμε την μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Παρουσιάζουμε τις λύσεις για διάφορες τιμές των ελεύθερων παραμέτρων για βαρυονική ύλη και ακτινοβολία.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Μοναδικότητα	2
1.1.1	Θεώρημα Lovelock	2
1.1.2	Γενική Σχετικότητα ως Βαρυτόνιο	3
1.2	Ανάγκη για Καινούρια Θεωρία	6
2	Εναλλακτικές Θεωρίες Βαρύτητας	10
2.1	Παθολογίες	11
2.2	Θεώρημα του Ostrogradsky	13
2.3	Μηχανισμοί Θωράκισης	15
3	Μοντέλο DGP	19
3.1	Λαγκρανζιανή και Εξισώσεις Κίνησης	19
3.2	Φαινομενολογία	21
3.3	Γενικές Ιδιότητες	23
4	Γαλιλαιόνια	24
4.1	Λαγκρανζιανή και Εξισώσεις Κίνησης	24
4.2	Euler Hierarchies	26
4.3	Γαλιλαιονική Συμμετρία	26
4.4	Duality	28
5	Κυβικό Γαλιλαιόνιο	30
5.1	Brans-Dicke στο Jordan Frame	30
5.1.1	Εξισώσεις Κίνησης	30
5.1.2	Εξισώσεις Κίνησης για FRW Μετρική και Χρονοεξαρτημένο Βαθμωτό Πεδίο	32
5.2	Brans-Dicke στο Einstein Frame	33
5.2.1	Εξισώσεις Κίνησης	34
5.2.2	Εξισώσεις Κίνησης για FRW Μετρική και Χρονοεξαρτημένο Βαθμωτό Πεδίο	35

5.3	Λύσεις της Θεωρίας Brans-Dicke	37
5.3.1	Λύσεις του Brans-Dicke στο Jordan Frame	37
5.3.2	Λύσεις του Brans-Dicke στο Einstein Frame	38
5.3.3	Γραφικές Παραστάσεις	40
5.4	Κυβικό Γαλιλαίονα στο Einstein Frame	51
5.4.1	Εξισώσεις Κίνησης	51
5.4.2	Εξισώσεις Κίνησης για FRW Μετρική και Χρονοεξαρτημένο Βαθμωτό Πεδίο	52
5.5	Κυβικό Γαλιλαίονο στο Jordan Frame	53
5.5.1	Εξισώσεις Κίνησης	53
5.5.2	Εξισώσεις Κίνησης για FRW Μετρική και Χρονοεξαρτημένο Βαθμωτό Πεδίο	54
5.6	Λύσεις του Κυβικού Γαλιλαίου	55
5.6.1	Λύσεις του Κυβικού Γαλιλαίου στο Einstein Frame	55
5.6.2	Λύσεις του Κυβικού Γαλιλαίου στο Jordan Frame	56
5.6.3	Γραφικές Παραστάσεις	59
A'	Σύμμορφοι Μετασχηματισμοί	65
A'.1	Χρήσιμες σχέσεις	66
B'	Ποσότητες Καμπυλότητας για FRW Μετρική	69
B'.1	Jordan Frame	69
B'.2	Einstein Frame	70

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα η πλέον αποδεκτή θεωρία βαρύτητας είναι η Γενική Σχετικότητα (ΓΣ). Η γνωστή νευτωνική εικόνα της βαρύτητας που περιγράφεται από την δύναμη

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.1)$$

αντικαταστήθηκε από την γεωμετρική εικόνα της βαρύτητας που περιγράφεται από την καμπύλωση του χωρόχρονου μέσω των εξισώσεων Einstein

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

Βέβαια, στο όριο ασθενών πεδίων, μικρών ταχυτήτων και σε χρονοανεξάρτητα συστήματα, η ΓΣ επιστρέφει στην Νευτωνική Βαρύτητα.

Η ΓΣ περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια την κίνηση των πλανητών στο ηλιακό μας σύστημα και προβλέπει πολλά καινούρια φαινόμενα, όπως η καμπύλωση των τροχιών του φωτός εξαιτίας της βαρύτητας, που έχουν επιβεβαιωθεί πειραματικά.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες συμβάσεις. Ως προς την μετρική θα χρησιμοποιήσουμε την σύμβαση $(-, +, +, +)$. Ελληνικοί μικροί δείκτες θα συμβολίζουν τον 4D χωρόχρονο, λατινικοί μικροί δείκτες τις 3D χωρικές διαστάσεις και λατινικοί δείκτες με κεφαλαίο θα περιγράφουν χωρόχρονους με περισσότερες από 4 διαστάσεις.

1.1 Μοναδικότητα

1.1.1 Θεώρημα Lovelock

Το θεώρημα του Lovelock αποδυναμώνει πως οι μοναδικές εξισώσεις δευτέρας τάξης που μπορούν να αποκτηθούν σε τετραδιάστατο χωρόχρονο από μια λαγκρανζιανή $\mathcal{L}(g_{\mu\nu})$ που εμπεριέχει μέχρι δευτέρας τάξης παραγώγους της μετρικής είναι

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv \mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Εδώ μ , λ είναι αυθαίρετες σταθερές και $R_{\mu\nu}$, R η καμπυλότητα Ricci και βαθμωτή καμπυλότητα αντίστοιχα [1].

Συμπεραίνουμε ότι για να κατασκευαστεί μια καινούρια θεωρία βαρύτητας πρέπει είτε να

1. Προστεθούν περισσότεροι βαθμοί ελευθερίας πέρα τις μετρικής $g_{\mu\nu}$
2. Αυξηθεί η τάξη παραγώγων στην λαγκρανζιανή
3. Αυξηθεί ο αριθμός των διαστάσεων του χωρόχρονου
4. Εγκαταλειφθούν οι τανυστικές εξισώσεις $(2, 0)$, είτε η συμμετρία ως προς την εναλλαγή των δεικτών σ' αυτές, είτε εξισώσεις με μηδενική απόκλιση
5. Εγκαταλειφθεί η τοπικότητα.

Από τα πιο πάνω, όμως, δεν συνεπάγεται πως η δράση Einstein-Hilbert είναι η μοναδική δράση που δίνει τις εξισώσεις (1.3). Η πιο γενική λαγκρανζιανή που δίνει τις εξισώσεις αυτές δίνεται από την σχέση

$$\mathcal{L} = \mu R - 2\lambda + \alpha \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} + \beta (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda}) \quad (1.4)$$

όπου α, β επίσης σταθερές. Όσοι, οι δύο τελευταίοι όροι δεν συνεισφέρουν στις εξισώσεις κίνησης αφού μηδενίζονται ταυτοτικά. Έχουμε δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \left(\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} \right), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda}). \quad (1.6)$$

Η πρώτη σχέση ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων. Η δεύτερη ισχύει μόνο στον 4D χωρόχρονο. Σε κάθε διάσταση υπάρχει ένας τέτοιος όρος, δηλαδή που δεν συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης, και ονομάζονται αναλοίοι όροι Lovelock [2]. Σε άρτιο αριθμό διαστάσεων έχουν τοπολογικό χαρακτήρα αφού ισούνται με την χαρακτηριστική Euler.¹

1.1.2 Γενική Σχετικότητα ως Βαρυτόνιο

Από τη άλλη έχουν βρεθεί επίσης αποδείξεις ότι η Γενική Σχετικότητα είναι η μοναδική θεωρία που περιγράφει ένα άμαζο σωματίδιο με ελικότητα 2 που αλληλεπιδρά με τον εαυτό του. Μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [3] την οποία παραθέτουμε σε σύντομια πιο κάτω.

Ξεκινούμε με την κατασκευή της πιο γενικής λαγκρανζιανής ενός μη-αλληλεπιδρόν ταυσιτικού πεδίου $(2, 0)$ $h_{\mu\nu}$. Αφού το βαρυτόνιο είναι άμαζο, το πεδίο έχει δύο ελεύθερους δείκτες και επιτρέπονται μόνο μέχρι δεύτερης τάξης παράγωγοι, οι μόνοι επιτρεπτοί όροι είναι της μορφής $\partial h \partial h$. Η απαίτηση η θεωρία να σέβεται τον μετασχηματισμό βαθμίδας (diffeomorphism) $h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$ καθορίζει πλήρως τους σχετικούς συντελεστές των όρων στην λαγκρανζιανή πέρα από την ολική κανονικοποίηση έτσι ώστε να δίνεται από τύπο

$$\mathcal{L}_{FP} = \frac{1}{2} \left(-\partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + 2\partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\mu h^{\nu\lambda} - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h + \partial_\mu h \partial^\mu h \right) \quad (1.10)$$

που ονομάζεται δράση Fierz-Pauli και δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι ευθυγραμμισμένες εξισώσεις της Γενικής Σχετικότητας. Εδώ h είναι το ίχνος της μετρικής $h_{\mu\nu}$ και

¹Για άρτιο n , $n < D$ όπου D οι διάστασεις, οι αναλοίοι όροι Lovelock δίνονται από την σχέση

$$\mathcal{L}_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1} \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1} \mu_n} R_{\mu_1 \mu_2}{}^{\nu_1 \nu_2} \dots R_{\mu_{n-1} \mu_n}{}^{\nu_{n-1} \nu_n} \quad (1.7)$$

όπου $\delta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{n-1} \nu_n}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1} \mu_n} \equiv n! \delta_{\nu_1}^{[\mu_1} \dots \delta_{\nu_n]}^{\mu_n]$ είναι η γενικευμένη συνάρτηση δέλτα του Kronecker. Για άρτιο D έχουμε

$$\chi(M) = \frac{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}{\left(\frac{D}{2}\right)!} \int d^D x \sqrt{-g} \mathcal{L}_D \quad (1.8)$$

όπου $\chi(M)$ η χαρακτηριστική Euler για την πολλαπλότητα M . Τέλος οι πρώτοι τρεις όροι Lovelock δίνονται από την σχέσεις

$$\mathcal{L}_0 = 1, \quad \mathcal{L}_2 = R, \quad \mathcal{L}_4 = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\kappa\lambda}R^{\mu\nu\kappa\lambda} \quad (1.9)$$

διαλέξαμε την αυθαίρετη ολική κανονικοποίηση να είναι $1/2$. Προσθέτοντας τον Lorentz gauge fixing όρο $\mathcal{L}_{gf} = -\partial_\mu \bar{h}^{\mu\lambda} \partial^\nu \bar{h}_{\nu\lambda}$ όπου $\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$ και τον όρο αλληλεπίδρασης του βαρυτονίου με εξωτερικές πηγές $\mathcal{L}_{int} = \frac{\kappa}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, η δράση δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x (\mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{int}) \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{\kappa}{2}h_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Μεταβολή την δράση ως προς την μετρική έχουμε παίρουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu} \quad (1.12)$$

των οποίων οι λύσεις είναι τα βαρυτική κύμματα. Μέχρι εδώ η εξίσωση αυτές ισχύουν όσο $T_{\mu\nu}$ είναι εξωτερικές πηγές που ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Στην πραγματικότητα όμως κουβαλάνε και τα βαρυτόνια ενέργεια και ορμή την οποία πρέπει να συμπεριλάβουμε αν θέλουμε οι εξωτερικές πηγές να περιγράφουν δυναμικά πεδία. Από το θεώρημα της Noether μπορούμε να υπολογίσουμε τον ταυστή ενέργειας-ορμής ενός κυματοπακέτου βαρυτονίων με μέση τιμή μήκους κύματος λ

$$t_{\mu\nu}^{(2)} = \left\langle -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu h_{\alpha\beta})} \partial_\nu h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L} \right\rangle \quad (1.13)$$

όπου οι αγκύλες $\langle \dots \rangle$ αντιπροσωπεύουν μέση χωρική τιμή πάνω σε μια περιοχή $L > \lambda/2\pi$. Ο αριθμός 2 τονίζει το γεγονός ότι ο ταυστής αυτός εμπεριέχει όρους δεύτερης τάξης ως προς την μετρική $h_{\mu\nu}$. Η διατηρούμενη ποσότητα τώρα είναι το άθροισμα του ταυστή ενέργειας-ορμής των εξωτερικών πηγών και αυτού των βαρυτονίων ώστε η εξίσωση συνέχειας τώρα να δίνεται από τον τύπο $\partial^\mu (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{(2)}) = 0$ και η εξίσωση κίνησης

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{(2)}). \quad (1.14)$$

Παρατηρούμε όμως πως η θεωρία αυτή δεν είναι συνεπής τώρα. Ο ταυστής ενέργειας-ορμής των βαρυτονίων που έχει την μορφή $\partial h \partial h$, που είναι δεύτερης τάξης ως προς την μετρική $h_{\mu\nu}$ και πρώτης τάξης ως προς την σταθερά κ θα μπορούσε να προέρχεται μόνο από μια δράση κυβική ως προς την μετρική και γραμμική ως προς το κ .

Επομένως, πρέπει να προσθέσουμε ακόμη ένα όρο στην δράση των βαρυτονίων της μορφής $\mathcal{L}_3 \sim h\partial h\partial h$. Η δράση λοιπόν που προσθέτουμε είναι

$$S_3 = \frac{\kappa}{2} \int d^4x h_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}(\partial h) \quad (1.15)$$

και η ολική δράση είναι

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x (\mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{gf} + \mathcal{L}_{int}) \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} h_{\mu\nu} \mathcal{S}^{\mu\nu}(\partial h) \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

όπου $\mathcal{S}^{\mu\nu}(\partial h) = A^{\mu\alpha\beta\nu\gamma\delta} \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h_{\gamma\delta}$ και $A^{\mu\alpha\beta\nu\gamma\delta}$ γινόμενα της μετρικής Minkowski. Είναι σημαντικό να επισημάνουμε εδώ πως ο ταυιστής $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ δεν είναι ο ταυιστής $t_{\mu\nu}$ και αυτό γιατί η συναρτησιακή παράγωγος του όρου $h^{\mu\nu} t_{\mu\nu}^{(2)}$ δίνει ένα επιπρόσθετο ανεπιθύμητο όρο

$$\frac{\delta}{\delta h_{\alpha\beta}} (h^{\mu\nu} t_{\mu\nu}^{(2)}) = t_{\alpha\beta}^{(2)} + h^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta h_{\alpha\beta}} t_{\mu\nu}^{(2)} \quad (1.17)$$

δηλαδή, την παράγωγο του ταυιστή ενέργειας-ορμής. Επίσης παρατηρούμε ότι με την προσθήκη του κυβικού όρου αυτού χάνεται η αβελιανότητα της θεωρίας αφού οι εξισώσεις κίνησης δεν είναι γραμμικές πλέον. Η μη-αβελιανότητα φαίνεται και από το γεγονός ότι η δράση αυτή δεν σέβεται πλέον τον γραμμικό μετασχηματισμό βαθμίδας. Αυτό μπορεί να διορθωθεί προσθέτοντας κι εκεί ένα όρο της επόμενης τάξης της μορφής

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) + \kappa O(h\partial\xi). \quad (1.18)$$

Η διαδικασία όμως δεν τελειώνει εδώ αφού εκμεταλλευόμενοι ακόμη μια φορά το θεώρημα της Noether μπορούμε να υπολογίσουμε ένα καινούριο ταυιστή ενέργειας ορμής του όρου S_3 ο οποίος θα είναι τρίτης τάξης ως προς το h και πρώτης τάξης ως προς την σταθερά κ , και θα πρέπει να συμπεριληφθεί για μια ολοκληρωμένη θεωρία. Όπως και πριν θα πρέπει να προστεθεί ο κατάλληλος όρος στην δράση που θα είναι τετάρτης τάξης ως προς το h και δεύτερης τάξης ως προς το κ , όπως και ο επόμενος όρος στον μετασχηματισμό βαθμίδας. Η εξίσωση κίνησης τώρα δίνεται από τον τύπο

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2} (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{(2)} + \kappa t_{\mu\nu}^{(3)}). \quad (1.19)$$

Στο σημείο αυτό είναι προφανές πως η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ' άπειρον. Αναγνωρίζουμε πως ολοκληρωμένη θεωρία, που συμπεριλαμβάνει όλους τους όρους είναι η ΓΣ με μετασχηματισμό diffeomorphism.

Όσοσο η απόδειξη αυτή έχει αδυναμίες. Όπως αναφέρεται στο [4], κάνοντας την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή αναπτύσσοντας την Γενική Σχετικότητα κατά Taylor με $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, μπορούμε να διαβάσουμε απ' εκεί ποιός πρέπει να είναι ο ταυιστής $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$, ο οποίος βγαίνει να είναι μη-συναλλοίωτη. Πέρα απ' αυτό, γνωρίζουμε ότι η λαγκρανζιανή της ΓΣ έχει την μορφή

$$\mathcal{L}_{GR} \sim \frac{1}{\kappa^2} (\partial\Gamma + \Gamma\Gamma) \quad (1.20)$$

Αναπτύσσοντας τον δεύτερο όρο και κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο έχουμε $\Gamma\Gamma/\kappa^2 \sim (\partial h)^2 = \mathcal{O}(\kappa^0)$. Από την άλλη ο όρος $\partial\Gamma$ δίνει ένα επιφανειακό του οποίου ο πρώτος όρος είναι $\partial\Gamma/\kappa^2 \sim \partial^2 h/\kappa = \mathcal{O}(\kappa^{-1})$. Παρατηρούμε λοιπόν, πως ο όρος αυτός εμπεριέχει ένα πόλο. Είναι φανερό πως με την προηγούμενη διαδικασία της επανάκτησης της ΓΣ από το ελεύθερο βαρυτόνιο (που δεν αλληλεπιδρά με τον εαυτό του) δεν μπορούμε να αποκτήσουμε αυτόν τον όρο με τον πόλο αφού ξεκινήσαμε από την δράση Fierz-Pauli που είναι της τάξης $\mathcal{O}(\kappa^0)$ και σε κάθε βήμα προσθέταμε τον όρο της επόμενης δηλαδή ψηλότερης τάξης.

Στην κλασική θεωρία αυτό δεν μας απασχολεί αφού οι επιφανειακοί όροι δεν επηρεάζουν της εξισώσεις κίνησης. Επομένως μπορούμε με το χέρι να προσθέσουμε αυτό τον όρο γιατί χωρίς αυτόν η δράση δεν θα ήταν συναλλοίωτο ως προς μετασχηματισμούς diffeomorphism και Lorentz. Στην μελέτη όμως της θερμοδυναμικής σε ορίζοντες, χρησιμοποιώντας ημικλασική βαρύτητα, ο επιφανειακός όρος έχει σημασία. Αφού η διαδικασία που αναφέραμε πιο πάνω δεν είναι σε θέση να αναπαράγει αυτόν τον όρο - αφού σε κάθε βήμα υπάρχει αυθαιρεσία ως προς το επιφανειακό όρο - συμπεραίνουμε ότι η ΓΣ δεν περιγράφεται πλήρως από βαρυτόνια.

1.2 Ανάγκη για Καινούρια Θεωρία

Παρά όμως την τεράστια επιτυχία της ΓΣ σε κλίμακες του ηλιακού συστήματος, υπάρχουν ενδείξεις ότι δεν είναι η τελευταία λέξη. Από την πειραματική μελέτη του σύμπαντος σε μεγαλύτερες κλίμακες, φαίνεται πως για να συνεχίσει να περιγράφει η ΓΣ σωστά το σύμπαν, χρειάζεται να εισαχθούν δυο καινούριες μορφές ύλης.

Η πειραματική μελέτη γαλαξίων, γύρω στο 1970, οδήγησε στην εισαγωγή της Σκοτεινής Ύλης για να εξηγήσει την ταχύτητα των περιστρεφόμενων αστεριών γύρω από τους γαλαξίες. Πέρα απ' αυτό, για να περιγράψει η ΓΣ την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος, που ανακαλύφθηκε πειραματικά τέλη του 1990, πρέπει να υποθέσουμε την ύπαρξη της Σκοτεινής Ενέργειας, μια περίεργη μορφή ύλης με καταστατική εξίσωση $\rho = -P$. Η ύλη αυτή, σύμφωνα με τα σημερινά πειραματικά δεδομένα αποτελεί το 68.3% της ύλης του σύμπαντος ενώ η Σκοτεινή Ύλη το 26.8% αφήνοντας μόνο ένα μικρό ποσοστό, 4.9%, για όλη την υπόλοιπη ύλη που είδη γνωρίζουμε.

Το γεγονός ότι η Σκοτεινή Ύλη και η Σκοτεινή Ενέργεια καταλαμβάνουν ένα τόσο μεγάλο ποσοστό της ύλης του σύμπαντος ενώ ταυτόχρονα δεν έχουν παρατηρηθεί άμεσα πειραματικά, ίσως να είναι ένδειξη ότι χρειαζόμαστε μια καινούρια θεωρία.

Ένα από τα μεγαλύτερα ανοιχτά ζητήματα στην σύγχρονη φυσική είναι το λεγόμενο πρόβλημα της Κοσμολογικής Σταθεράς (ΚΣ). Η χβάντωση του βαθμωτού πεδίου Klein Gordon με λαγκρανζιανή $\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ αποτελεί ένα απλό παράδειγμα όπου φαίνεται αυτό το πρόβλημα [5].

Κατά την κανονική χβάντωση, ορίζουμε πρώτα την συζυγή ορμή του πεδίου $\phi(x)$ όπως και στην κλασική μηχανική $\pi(x) = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\phi)$. Στην συνέχεια προωθούμε τις δυναμικές μεταβλητές σε τελεστές, και απαιτούμε τις μεταθετικές ιδιότητες $[\phi(x), \pi(y)] = i\delta^{(3)}(x - y)$ και $[\phi(x), \phi(y)] = 0$, $[\pi(x), \pi(y)] = 0$. Στον χώρο Fourier το πεδίο $\phi(x)$ γράφεται ως

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (\alpha_p e^{ix \cdot p} + \alpha_p^\dagger e^{-ix \cdot p}) \quad (1.21)$$

όπου $\omega^2 = p^2 + m^2$. Αντιστρέφοντας τις σχέσεις των $\phi(x)$ και $\pi(x)$ ως προς τους τελεστές αναβίβασης α_p^\dagger και καταβίβασης α_p βρίσκουμε από τις πιο πάνω μεταθετικές ιδιότητες $[\alpha_p, \alpha_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p - p')$.

Στο σημείο αυτό, η χαμιλτονιανή στον χώρο Fourier δίνεται από

$$\mathcal{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p \left(\alpha_p^\dagger \alpha_p + \frac{1}{2} [\alpha_p, \alpha_p^\dagger] \right). \quad (1.22)$$

Η ομοιότητα με την εξίσωση που δίνει τις ιδιοενέργειες του χβαντικού αρμονικού ταλαντωτή $E = \omega(N + \frac{1}{2})$ είναι εμφανή. Με τον τελεστή αριθμού να δίνεται από $N = \alpha_p^\dagger \alpha_p$ οι πρώτοι όροι είναι πλήρως ανάλογοι. Οι δεύτεροι, επίσης ανάλογοι, δίνουν την ενέργεια μηδενικού σημείου. Ερμηνεύοντας την ενέργεια μηδενικού σημείου ως την ενέργεια του κενού, ο υπολογισμός της ενέργειας μηδενικού σημείου δίνει μια πρόχειρη πρόβλεψη της τιμής της ΚΣ. Παρατηρούμε όμως πως η ενέργεια μηδενικού

είναι ανάλογη του $\delta^{(3)}(0)$ και επομένως απειρίζεται. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί υποθέτοντας ότι ο χώρος είναι πεπερασμένος αφού

$$\delta^{(3)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d^3x. \quad (1.23)$$

Υπάρχει ακόμη ένας απειρισμός που προέρχεται από το γεγονός ότι ολοκληρώνουμε πάνω σε όλες τις ορμές $p \in (0, \infty)$. Για να το αποφύγουμε υποθέτουμε ότι η θεωρία καταρρέει σε ένα υπεριώδης cut off Λ_{UV} οπότε έχουμε

$$\Lambda_{Theory} \sim \int_0^{\Lambda_{UV}^4} d^3p p^2 \sqrt{p^2 + m^2} \sim \int_0^{\Lambda_{UV}^4} d^3p p^3 \sim \Lambda_{UV}^4. \quad (1.24)$$

Το Πρότυπο Μοντέλο έχει επαληθευτεί με ακρίβεια μέχρι και ενέργειες της τάξης του $1TeV$. Με αυτό το cut off έχουμε

$$\Lambda_{Theory} = 10^{-60} M_P^4 \quad (1.25)$$

όπου M_P η μάζα Planck.

Η πειραματικά μετρούμενη τιμή της ΚΣ από την άλλη είναι

$$\Lambda_{obs.} = 10^{-120} M_P^4 \quad (1.26)$$

Αυτή η μεγάλη διαφορά μεταξύ πειράματος και θεωρίας αποτελεί ένα από τους μεγαλύτερους γρίφους στην σύγχρονη φυσική.

Τέλος, το γεγονός ότι δεν έχει βρεθεί ακόμη μια ενοποιημένη θεωρία των πάντων, ούτε μια κβαντική θεωρία βαρύτητας ίσως να είναι μια ένδειξη ότι η ΓΣ δεν είναι η σωστή περιγραφή της βαρυτηκής δύναμης.

Μέχρι στιγμής υπάρχουν δύο διαδεδομένες υποψήφιες θεωρίες. Από την μια είναι η Θεωρία Χορδών η οποία υποθέτει ότι όλα τα θεμελιώδη σωματίδια προκύπτουν από τις διάφορες διεγέρσεις χορδών που έχουν μήκος της τάξης του Planck. Πέρα του γεγονότος ότι αποτελεί κβαντική θεωρία βαρύτητας, η Θεωρία Χορδών έχει πετύχει και την ενοποίηση όλων των δυνάμεων. Ουσιαστικά, υπάρχει μια διεγερμένη κατάσταση της χορδής που έχει τις ιδιότητες του βαρυτονίου έτσι ώστε η βαρύτητα να προκύπτει με ένα φυσιολογικό τρόπο μέσα από την ίδια την θεωρία.

Από την άλλη έχουμε την Κβαντική Βαρύτητα Βρόχων η οποία αποσκοπεί μόνο την έβρεση μιας κβαντικής θεωρίας της βαρύτητας. Η θεωρία αυτή είναι βασισμένη

στην ιδέα ότι μια βαρυτική θεωρία πρέπει να είναι διατυπωμένη ως μια background-independent θεωρία. Μια από τις κύριες τις προβλέψεις είναι η κβάντωση του χώρου και του χρόνου.

Κεφάλαιο 2

Εναλλακτικές Θεωρίες Βαρύτητας

Σύντομα μετά την δημοσίευση της ΓΣ είχε ήδη ξεκινήσει η μελέτη εναλλακτικών θεωριών βαρύτητας. Μια από τις πρώτες είναι η θεωρία Kaluza-Klein που αποτελεί την γενίκευση της ΓΣ από 4D χωρόχρονο σε 5D. Η προσθήκη αυτής της επιπρόσθετης χωρικής διάσταση έχει εκπληκτικά αποτελέσματα.

Πρώτα χωρίζουμε την 5D μετρική σε 4D μετρική, ένα διάνυσμα και ένα βαθμωτό με τον ακόλουθο τρόπο

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & \phi^2 A_\mu \\ \phi^2 A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

όπου $\phi^2 \equiv G_{44}$, $A_\mu \equiv G_{\mu 4}/\phi^2$ και $g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - \phi^2 A_\mu A_\nu$. Για απλοποίηση των εξισώσεων υποθέτουμε ότι το ϕ είναι σταθερά και ότι η μετρική δεν εξαρτάται από την 5η διάσταση, δηλαδή $\partial_4 G_{MN} = 0$. Αναπτύσσοντας την μετρική ως προς τις καινούριες αυτές ποσότητες παρατηρούμε ότι προκύπτει η τετραδιάστατη ΓΣ από την μετρική $g_{\mu\nu}$ και ο ηλεκτρομαγνητισμός με διανυσματικό πεδίο βαθμίδας A_μ . Η θεωρία αυτή δηλαδή ενοποιεί τις δύο από τις τέσσερις δυνάμεις. Συγκεκριμένα οι πενταδιάστατες εξισώσεις Einstein δίνουν

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{4\mu} = 0 & \Rightarrow \nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0 \\ \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}G_{\mu\nu} = 0 & \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\phi^2 \left(F_\mu^\lambda F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

όπου \mathcal{R}_{MN} ο τανυστής Ricci στις πέντε διαστάσεις ενώ $R_{\mu\nu}$ ο αντίστοιχος στις τέσσερις διαστάσεις. Παρατηρούμε η πρώτη εξίσωση δίνει τις εξισώσεις Maxwell στις τέσσερις διαστάσεις. Επίσης στην αριστερή πλευρά της δεύτερης εξίσωσης έχει εμφανιστεί ο τανυστής ενέργειας-ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνοντας την σωστή αλληλεπίδραση μεταξύ βαρύτητας και ηλεκτρομαγνητισμού.

Υπάρχουν πολλές άλλες εναλλακτικές θεωρίες όμως. Κάποιες εισαγάγουν περισσότερες διαστάσεις όπως η Kaluza-Klein άλλες εμπνευσμένες από την Θεωρία Χορδών εισαγάγοντας τις λεγόμενες βράνες εντοπίζοντας την βαρυόνική ύλη πάνω σ' αυτές, όπως το μεντέλο DGP.

Η θεωρία Massive Gravity είναι μια βαρυτική θεωρία όπου το βαρυτόνιο αποκτά μάζα με τον κατάλληλο επιπρόσθετο όρο [6]. Η δράση αποτελείται από την γραμμική εξίσωση Einstein, δηλαδή η Fierz-Pauli μαζί με ένα τετράγωνο όρο της μετρικής.

Υπάρχει επίσης μια ολόκληρη οικογένεια θεωριών Scalar-Tensor που εισαγάγουν επιπρόσθετους βαθμούς ελευθερίας σε μέσω βαθμωτών πεδίων. Η πιο γενική λαγκρανζιανή μιας τέτοιας θεωρίας δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\mathcal{L}_{ST} = \frac{1}{16\pi} [f(\phi)R - g(\phi)\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi - 2\Lambda(\phi)] + \mathcal{L}_m(\Psi, h(\phi)g_{\mu\nu}) \quad (2.3)$$

όπου f, g, h και Λ αυθαίρετες συναρτήσεις και \mathcal{L}_m η λαγκρανζιανή που περιγράφει τα πεδία ύλης Ψ .

Η πιο απλή θεωρία Scalar-Tensor είναι η Brans-Dicke με $f(\phi) = \phi$, $g(\phi) = \omega\phi^{-1}$, $h(\phi) = 0$. Οι θεωρίες αυτές παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί προκύπτουν με φυσιολογικό τρόπο από θεωρίες με περισσότερες διαστάσεις ή άλλες προεκτάσεις της ΓΣ όπως η θεωρία $f(R)$. Στο Einstein frame η θεωρία Brans-Dicke συμπίπτει με τον όρο δεύτερης τάξης της Γαλιλαιονικής Θεωρίας. Στα επόμενα κεφάλαια μελετήσουμε και τις δύο περισσότερο.

2.1 Παθολογίες

Οποιαδήποτε θεωρία, πέρα του ότι πρέπει να συμφωνεί με τις παρατηρήσεις, πρέπει να ελεγχθεί ως προς κάποιες παθολογίες [7], τις οποίες παραθέτουμε πιο κάτω.

1. Φαντάσματα

Στην θεωρία πεδίων λέμε πως έχουμε φάντασμα όταν εμφανίζεται ο όρος κινητικής ενέργειας ενός πεδίου με το λάθος πρόσημο

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{m_\chi}{2}\chi^2. \quad (2.4)$$

Επειδή κατά την κατασκευή κάθε λαγκανζιανής ενός πεδίου υπάρχει αυθαιρεσία ως προς μια πολλαπλασιαστική σταθερά, η παθολογία αυτή εμφανίζεται όταν ο κινητικός όρος έχει το λάθος πρόσημο και ενώ το πεδίο αυτό είναι συζευγμένο με ένα δεύτερο πεδίο που έχει το σωστό πρόσημο, δηλαδή,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m_\phi}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{m_\chi}{2}\chi^2 + \lambda\phi^2\chi^2. \quad (2.5)$$

Σε μια τέτοια θεωρία απαιτείται μηδέν ενέργεια για την παραγωγή $0 \rightarrow \chi\chi + \phi\phi$. Αυτή η αστάθεια έχει σαν αποτέλεσμα την συνεχή παραγωγή σωματιδίων, επομένως, μια θεωρία με τέτοια αστάθεια δεν είναι καλά ορισμένη.

Ωστόσο η παρουσία φαντάσματος δεν σημαίνει απαραίτητα ότι μια θεωρία χάνει εντελώς την ικανότητα να περιγράφει τον φυσικό κόσμο. Αν η μάζα του φαντάσματος είναι μεγαλύτερη από το εύρος όπου θεωρούμε ότι ισχύει η θεωρία τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε την ύπαρξη του σαν αποτέλεσμα της αποκοπής της ολοκληρωμένης θεωρίας σε πεπερασμένο σημείο του αναπτύγματος. Δηλαδή, αν η μάζα είναι μεγαλύτερη από το cut off της Effective Field Theory (EFT) τότε πιθανό να μπορούμε να αγνοήσουμε την ύπαρξη του φαντάσματος και να υποθέσουμε ότι η αστάθεια αυτή αναιρείται στο UV completion. Μόνο αν η μάζα του φαντάσματος ισοδυναμεί με μια ενέργεια εντός του εύρους εγκυρότητας της EFT, τότε μπορούμε να απορρίψουμε την θεωρία.

2. Αστάθειες της Κλίσης

Όπως και στα φαντάσματα, η αστάθεια αυτή προκύπτει από λάθος πρόσημο. Κατ' ακρίβεια προκύπτει όταν η κλίση έχει λάθος σχετικό πρόσημο με την χρονική παράγωγο

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2. \quad (2.6)$$

Είναι φανερό πως μια τέτοια θεωρία δεν είναι καν Lorentz αναλλοίωτη. Οι λύσεις μιας τέτοιας θεωρίας στον χώρο Fourier είναι ανάλογες του $\phi \sim e^{\pm kt}$ όπου $k = \sqrt{\vec{k}^2}$. Παρατηρούμε πως η λύση $\phi \sim e^{kt}$ δεν είναι φραγμένη και επομένως οδηγεί σε αστάθειες. Η αστάθεια αυτή εμφανίζεται σε χρόνους $\tau \sim k^{-1}$. Αν η θεωρία αποτελεί μια ΕΦΤ τότε ο ελάχιστος χρόνος εμφάνισης της αστάθειας είναι $\tau \sim \Lambda_{UV}^{-1}$. Για να έχει ελπίδα λοιπόν η θεωρία αυτή πρέπει ο χρόνος αυτός να είναι τουλάχιστο της τάξης της ηλικίας του σύμπαντος.

Τότε $\Lambda_{UV} \sim 10^{-60} M_P$ το οποίο είναι αδύνατο αφού τυπικές τιμές του Λ_{UV} κυμαίνονται μεταξύ $10^{-40} M_P$ και $10^{-30} M_P$. Επομένως θεωρίες με αστάθειες κλίσεις δεν μπορούν να ιδωθούν ούτε σαν EFT.

3. Ταχυόνια

Αν τώρα με την σειρά της η μάζα έχει το λάθος πρόσημο αποκτούμε ταχυόνιο. Για το βαθμωτό πεδίο η λαγκρανζιανή έχει την μορφή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial\chi)^2 + \frac{m_\chi}{2}\chi^2 \quad (2.7)$$

Στον χώρο Fourier έχουμε $\phi(k) \sim e^{i\omega t}$ όπου $\omega^2 = \vec{k}^2 - m^2$. Στο όριο $k \rightarrow 0$ εμφανίζονται πάλι εκθετικές λύσεις $\phi \sim e^{mt}$ που οδηγούν σε αστάθειες. Ωστόσο, αν το εύρος εγκυρότητας της EFT είναι $m \ll k \ll \Lambda_{UV}$, τότε η θεωρία αυτή είναι καλά ορισμένη και μπορούμε να αγνοήσουμε την αστάθεια αυτή αφού εμφανίζεται σε περιοχή ενεργειών όπου η θεωρία αυτή δεν είναι έγκυρη.

4. Τοπικότητα, Υπερφωτεινές Ταχύτητες

Για πληρότητα καταγράφουμε και την πιθανή παθολογία της υπερφωτεινότητας και της μη-τοπικότητας χωρίς όμως να τις αναλύσουμε περισσότερο.

2.2 Θεώρημα του Ostrogradsky

Αφού πιο κάτω θα μελετήσουμε τα Γαλιλαιόνια πεδία, ένα σχετικό θεώρημα είναι αυτό του Ostrogradsky [7, 8]. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, η χαμιλτονιανή που δίνεται από μια μη-εκφυλισμένη λαγκρανζιανή που περιέχει παραγώγους μεγαλύτερης τάξης του δύο δεν είναι φραγμένη.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό ξεκινούμε με μια λαγκρανζιανή που περιγράφει ένα σωματίδιο στην κλασική μηχανική

$$L = L(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)}). \quad (2.8)$$

Το θεώρημα μπορεί στην συνέχεια να γενικευθεί για την θεωρία πεδίων. Η εξίσωση κίνησης δίνεται από τον τύπο

$$\sum_{i=0}^N \left(-\frac{d}{dt}\right)^i \frac{\partial L}{\partial q^{(i)}} = 0 \quad (2.9)$$

Μη-εκφυλισμένη λαγκρανζιανή συνεπάγεται ότι $\frac{\partial L}{\partial q^{(N)}}$ είναι συνάρτηση του $q^{(N)}$. Μπορούμε επομένως να γράψουμε την εξίσωση κίνησης (2.9) στην μορφή

$$q^{(2N)} = f(q, \dot{q}, \dots, q^{(2N-1)}). \quad (2.10)$$

Η διαφορική εξίσωση αυτή είναι βαθμού $2N$ και επομένως απαιτούνται $2N$ αρχικές συνθήκες για την επίλυσή της. Από αυτό συμπεραίνουμε πως υπάρχουν $2N$ κανονικές συντεταγμένες τις οποίες ορίζουμε, σύμφωνα με τον Ostrogradsky, ως εξής

$$Q_i = q^{i-1} \quad P_i = \sum_{j=i}^N \left(-\frac{d}{dt} \right)^{j-i} \frac{\partial L}{\partial q^{(j)}}. \quad (2.11)$$

Αναλυτικά έχουμε για την τελευταία κανονική ορμή $P_N = \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}}$. Αφού όμως η λαγκρανζιανή είναι μη-εκφυλισμένη μπορούμε να αντιστρέψουμε την σχέση αυτή παίρνοντας

$$q^{(N)} = F(Q_1, \dots, Q_N, P_N). \quad (2.12)$$

Η χαμιλτονιανή τώρα δίνεται από την σχέση

$$H = \sum_{i=1}^N P_i Q_{i+1} - L = P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + \dots + P_{N-1} Q_N + P_N F - L(Q_1, \dots, Q_N, F) \quad (2.13)$$

Για να επαληθεύσουμε την χαμιλτονιανή αυτή με εκμεταλλευόμεστε τις εξισώσεις χάμιλτον

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}. \quad (2.14)$$

Η πρώτη για $i \neq N$ είναι συνεπείς με τον ορισμό των Q_i στην εξίσωση (2.11). Έχουμε δηλαδή $\dot{Q}_i = Q_{i+1} \Rightarrow Q_i = q^{(i-1)}$. Για $i = N$ έχουμε

$$\dot{Q}_N = F + P_N \frac{\partial F}{\partial P_N} - \frac{\partial L}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial P_N} = F \Rightarrow P_N = \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \quad (2.15)$$

η οποία είναι συνεπείς με τον ορισμό των P_i στην (2.11). Οι υπόλοιπες κανονικές ορμές λαμβάνονται από το δεύτερο σύνολο εξισώσεων στην (2.14)

$$\dot{P}_i = -P_{i-1} + \frac{\partial L}{\partial q^{i-1}} \quad (2.16)$$

Ξεκινώντας με $i = N$ και αντικαθιστώντας σε κάθε βήμα την P_i από το προηγούμενο βήμα. Τέλος για $i = 1$ καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης (2.9).

Παρατηρούμε πως όλες, εκτός πιθανά η τελευταία, κανονικές ορμές εμφανίζονται γραμμικά στην χαμιλτονιανή με αποτέλεσμα η χαμιλτονιανή να μην είναι φραγμένη.

Τώρα, το γεγονός αυτό δεν συνεπάγεται πως η χαμιλτονιανή θα τείνει να αποκτήσει άπειρη αρνητική ενέργεια γιατί το σύστημα ελαχιστοποιεί την ενέργεια του. Γενικά, η ολική ενέργεια μιας θεωρίας παραμένει σταθερή. Κβαντικά συστήματα "κινούνται" μέσα στον χώρο των κλασικών λύσεων. Η αστάθεια λοιπόν οφείλεται στην εντροπία η οποία θα οδηγήσει το σύστημα να δημιουργήσει απεριόριστο αριθμό σωματιδίων. Η παρουσία της αστάθειας αυτής επιτρέπει την διέγερση ακόμη και καταστάσεων με μεγάλη ενέργεια λόγω του ότι μπορούν παράλληλα να διεγερθούν καταστάσεις αρνητικής ενέργειας, "ελευθερώνοντας" έτσι ενέργεια για άλλες καταστάσεις.

2.3 Μηχανισμοί Θωράκισης

Όλες η εναλλακτικές θεωρίες της ΓΣ εισάγουν καινούρια φαινομενολογία. Γνωρίζουμε όμως πως η ΓΣ περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια το ηλιακό μας σύστημα. Πρέπει επομένως να επιτρέψουμε τις τροποποιήσεις της ΓΣ να εμφανιστούν μόνο σε κλίμακες μεγαλύτερες από αυτές του ηλιακού συστήματος. Με άλλα λόγια, χρειάζεται ένας μηχανισμός θωράκισης [7, 9] ο οποίος θα αποσυνδέσει τους επιπρόσθετους βαθμούς ελευθερίας στα κατάλληλα όρια.

Για να μελετήσουμε τους μηχανισμούς αυτούς ξεκινούμε με μια γενική θεωρία βαθμωτού πεδίου, σύμμορφα συζευγμένο με την ύλη

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z^{\mu\nu}(\phi, \partial\phi, \dots)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) + g(\phi)T \quad (2.17)$$

όπου $Z^{\mu\nu}$ εμπεριέχει τις αλληλεπιδράσεις του βαθμωτού πεδίου με τον εαυτό του, V, g αυθαίρετες συναρτήσεις και $T = T_\mu^\mu$ το ίχνος του ταυστή ενέργειας-ορμής.

1. Μεγάλη Μάζα

Στην πρώτη κατηγορία μηχανισμών θωράκισης αφήνει την μάζα της διακύμανσης του πεδίου να έχει εξάρτηση από το περιβάλλον. Ο επιπρόσθετος βαθμός ελευθερίας θωρακίζεται σε περιοχές με μεγάλη πυκνότητα ύλης αυξάνοντας την

μάζα του σωματιδίου εκεί. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας τέτοιας θεωρίας είναι το Chameleon.

Για να το δούμε αυτό ξεκινάμε με την λαγκρανζιανή (2.17) και υποθέτουμε πρώτα ότι βρισκόμαστε στην παρουσία μη-σχετικιστικής ύλης, δηλαδή $T = -\rho$. Αναπτύσσουμε στην συνέχεια το πεδίο $\phi = \phi_0 + \varphi$ και προσθέτουμε μια μικρή διαταραχή δT στο τανυστή ενέργειας-ορμής. Κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - V(\phi_0) - V'(\phi_0)\varphi - \frac{1}{2}V''\varphi^2 \\ & - \left(g(\phi_0) + g'(\phi_0)\varphi + \frac{1}{2}g''(\phi_0)\varphi^2 \right) \rho \\ & + \left(g(\phi_0) + g'(\phi_0)\varphi \right) \delta T \end{aligned} \quad (2.18)$$

όπου διαλέξαμε $Z_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ και ' υποδηλώνει παραγωγή ως προς ϕ . Αγνοώντας τους σταθερούς όρους ξαναγράφουμε την σχέση αυτή ως

$$\mathcal{L}_{Chameleon} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m_{eff}^2(\phi_0)\varphi^2 + g'(\phi_0)\varphi\delta T \quad (2.19)$$

όπου $V_{eff}(\phi_0) = V(\phi_0) + \rho g(\phi_0)$ και $m_{eff}^2 = V''_{eff}$ το οποίο ερμηνεύουμε ως την ενεργό μάζα. Στην πιο πάνω σχέση επιλέξαμε το $\phi_0(\rho)$ να ελαχιστοποιεί το ενεργό δυναμικό V_{eff} και υποθέτουμε ότι εξαρτάται από το περιβάλλον.

Παρατηρούμε πώς η ενεργός μάζα των διακυμάνσεων φ είναι συνάρτηση της πυκνότητας ύλης ρ . Με την κατάλληλη επιλογή των συναρτήσεων V και g μπορούμε να κατασκευάσουμε μια θεωρία όπου σε περιοχές με μεγάλη πυκνότητα ύλης η μάζα είναι μικρή με αποτέλεσμα η πέμπτη δύναμη που μεταδίδεται από το σωματίδιο αυτό να έχει μικρή εμβέλεια. Έτσι το Chameleon αφήνει ανέπαφη την ΓΣ σε περιοχές όπως το ηλιακό μας σύστημα. Από την άλλη αφήνουμε την μάζα να αποκτά μικρή τιμή σε περιοχές όπου η πυκνότητα ύλης είναι μικρή. Έτσι η πέμπτη δύναμη μπορεί να μεταδοθεί ελεύθερα στις περιοχές αυτές ώστε να εμφανίζεται καινούρια φαινομενολογία.

2. Ασθενής Σύζευξη

Στην δεύτερη κατηγορία μηχανισμών αφήνουμε την σύζευξη του βαθμωτού πεδίου με την ύλη να εξαρτάται από το περιβάλλον. Συγκεκριμένα, η σύζευξη είναι ασθενείς σε περιοχές όπου η πυκνότητα ύλης είναι μικρή (εξού και το

όνομα). Όπως και στο Chameleon, στις περιοχές αυτές η πέμπτη δύναμη, που προκύπτει από το πεδίο αυτό, είναι αρκετά ασθενείς ώστε να αφήνει την ΓΣ ανέπαφη. Από την άλλη, επιτρέπουμε η σύζευξη να αποκτήσει μεγάλες τιμές σε περιοχές όπου η πυκνότητα ύλης είναι μικρή ώστε να εμφανίζεται καινούρια φαινομενολογία. Έτσι ο επιπρόσθετος βαθμός ελευθερίας θωρακίζεται στις περιοχές όπου η ΓΣ ισχύει με μεγάλη ακρίβεια. Παραδείγματα θεωριών που αξιοποιούν τον μηχανισμό αυτό είναι το Symmetron και το Varying-Dilaton.

Το Symmetron βασίζεται πάνω σε ένα μηχανισμό αυθόρμητου σπάσιμου συμμετρίας, παρόμοιο με αυτό του σωματιδίου Higgs. Ξενικώντας με την (2.18) διαλέγουμε

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad g(\phi) = 1 + \frac{1}{2M^2}\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4). \quad (2.20)$$

τα οποία δίνουν

$$V_{eff} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{M^2} - \mu^2 \right) \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (2.21)$$

Αν τώρα $\rho > (\mu M)^2$ τότε το ενεργό δυναμικό έχει ελάχιστο στο $\phi_0 = 0$. Αφού η σύζευξη του Symmetron με την ύλη είναι της μορφής $g'(\phi_0)\varphi T$ ο όρος αυτό μηδενίζεται. Επομένως δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ του Symmetron και ύλης. Αν τώρα όμως $\rho < (\mu M)^2$ το ολικό ελάχιστο του ενεργούς δυναμικού είναι $\phi_0^2 = \frac{1}{\lambda} \left(\mu^2 - \frac{\rho}{M^2} \right)$. Στις περιοχές αυτές υπάρχει αλληλεπίδραση του Symmetron με την ύλη και εμφανίζονται οι τροποποιήσεις στην ΓΣ.

3. Μεγάλη Αδράνεια

Τέλος, στην κατηγορία αυτή, επιτυγχάνουμε την θωράκιση εισάγοντας όρους αλληλεπίδρασης κινητικού τύπου, του πεδίου με τον εαυτό του. Ένα παράδειγμα μοντέλου όπου όροι με παράγωγους πρώτης τάξης στην εξίσωση κίνησης αποκτούν σημασία είναι το K-mouflage. Ο μηχανισμός θωράκισης όπου όροι με παραγωγούς δεύτερης τάξης αποκτούν σημασία ονομάζονται μηχανισμός Βάινσταϊν. Η επινοήση ενός μηχανισμού που εκμεταλλεύεται παράγωγους τρίτης τάξης δεν είναι εφικτό αφού για απαιτεί την κατασκευή λαγκρανζιανής με παράγωγους πέρα της δεύτερης τάξης. Όπως δείξαμε προηγουμένως με το θεώρημα του Ostrogradsky αυτό οδηγεί σε αστάθειες με αποτέλεσμα η θεωρία αυτή να καθιστάται ανίκανη για οποιαδήποτε πρόβλεψη.

Στον μηχανισμό Βάινσταϊν μπορούμε να ορίσουμε μια ακτίνα r_V . Αν η θεωρία αποτελεί EFT έχουμε κι ένα cut off Λ_{UV} . Έχοντας αυτά μπορούμε να ορίσουμε

τρεις περιοχές, Για πολύ μικρές αποστάσεις $r \ll \Lambda_{UV}^{-1}$ οι κβαντικές διορθώσεις είναι μεγάλες και η θεωρία πάυει να ισχύει. Σε μεγάλες αποστάσεις $r \gg r_V$ η κβαντικές διορθώσεις είναι πολύ μικρές όπως και οι συνεισφορά των κλασικών μη-γραμμικών όρων του καινούριου πεδίου έτσι ώστε το πεδίο να μεταδίδει μια πέμπτη δύναμη μεγάλης εμβέλειας, τροποποιώντας την ΓΣ σε μεγάλες κλίμακες. Στην ενδιάμεση περιοχή $\Lambda_{UV}^{-1} \ll r \ll r_V$ οι κβαντικές διορθώσεις πάλι είναι μικρές ενώ οι κλασικοί μη-γραμμικοί όροι συνεισφέρουν και δεν μπορούν να αγνοηθούν. Η σύζευξη αυτή, του πεδίου με τον εαυτό του δηλαδή, έχει ως αποτέλεσμα να περιορίσει την εμβέλεια της πέμπτης δύναμης σε μικρές αποστάσεις με αποτέλεσμα να μην εμφανίζονται τροποποιήσεις στην ΓΣ.

Κεφάλαιο 3

Μοντέλο DGP

Το 2000 οι G. Dvali, G. Gabadadze και M. Porrati κατασκεύασαν ένα πρωτοποριακό μοντέλο, το μοντέλο DGP [10]. Εντοπίζοντας την ύλη πάνω σε μια 4D βράνη εμβαπτισμένη στον 5D χωρόχρονο επιτυγχάνεται η εισαγωγή επιπρόσθετων διαστάσεων απείρου μεγέθους (σε αντίθεση με τα μοντέλλα Kaluza-Klein όπου οι επιπρόσθετες διαστάσεις είναι κλειστές). Το μοντέλο DGP αποτελεί το πρώτο πλαίσιο όπου τροποποιήσεις της ΓΣ σε μεγάλες αποστάσεις συνδέονται με την κοσμική επιτάχυνση.

3.1 Λαγκρανζιανή και Εξισώσεις Κίνησης

Συμβολίζοντας τις αντίστοιχες 5D ποσότητες των 4D ποσοτήτων με $\tilde{}$ και ορίζοντας τις ποσότητες $\kappa^2 = M_P^{-2} = 8\pi G_N^{(4)}$, $\tilde{\kappa}^2 = \tilde{M}_P^{-3} = 8\pi G_N^{(5)}$ η δράση δίνεται από τον τύπο

$$S_{DGP} = \int_{\mathcal{M}} d^5 X \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{2}{\tilde{\kappa}^2} \tilde{R}(\tilde{g}) + \mathcal{L}_m \right] + \int_{\partial\mathcal{M}} d^4 x \sqrt{-g} \left[\frac{2}{\kappa} R(g) - \frac{4}{\tilde{\kappa}} K(g) \right] \quad (3.1)$$

όπου \mathcal{M} είναι μια 5D πολλαπλότητα με συντεταγμένες X^M και με 4D σύνορο $\partial\mathcal{M}$ όπου βρίσκεται η βράνη με συντεταγμένες x^μ . Η μετρική \tilde{g} περιγράφει τον 5D χώρο και $g_{\mu\nu}$ η επαγόμενη μετρική πάνω στο σύνορο που δίνεται από την σχέση

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial X^M}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^N}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{MN}. \quad (3.2)$$

K είναι η εξωγενής καμπυλότητα και \mathcal{L}_m περιέχει τα πεδία ύλης. Ο όρος με την επαγόμενη καμπυλότητα ονομάζεται Gibbons-Hawking όρος συνόρου και είναι απαραίτητος για μια συνεπή περιγραφή πολλαπλότητας με σύνορο. Πιο συγκεκριμένα, η μεταβολή του όρου αυτού εξουδετερώνει τον επιφανειακό όρο που αποκτούμε από την μεταβολή της δράσης Einstein-Hilbert και δίνει τις εξισώσεις Israel που αποτελούν τις σωστές εξισώσεις κίνησης ενός συνόρου.

Η προέλευση του όρου της 4D δράσης Einstein-Hilbert έχει δύο εξηγήσεις [11]. Από την μια, αν η βράνη είναι άκαμπτη τότε ο όρος αυτός εμφανίζεται μέσω loop διαγραμμάτων των κβαντικών διακυμάνσεων της ύλης πάνω στην βράνη. Από την άλλη, αν επιτρέψουμε της βράνης να διακυμαίνεται, τότε υπάρχει μια mode με μάζα που μπορεί, μέσω loop diagrams ξανά να δημιουργήσει τον όρο αυτό.

Γενικά, οι διακυμάνσεις αυτές θα επάγουν ολόκληρη σειρά όρων με δυνάμεις της 4D καμπυλότητας R πάνω στην βράνη

$$S \sim \int d^4x \sqrt{-g} [\Lambda + R + \mathcal{O}(R^2) + \dots] \quad (3.3)$$

όπου ο μηδενικός όρος Λ ερμηνεύεται ως ΚΣ πάνω στην βράνη. Η εμφάνιση της ΚΣ έχει σαν αποτέλεσμα την επανακανονικοποίηση της τάσης του βράνης. Αυτό φαίνεται από την δράση Dirac-Nambu-Goto η οποία περιγράφει την βράνη

$$S_{DNG} = -T \int d^4x \sqrt{-g} \quad (3.4)$$

όπου T η τάση της βράνης. Για απλότητα επιλέγουμε $T' = T - 2\kappa^{-2}\Lambda = 0$ όπου T' η επανακανονικοποιημένη τάση. Οι όροι ψηλότερης τάξης δεν συνεισφέρουν αφού συνοδεύονται από δυνάμεις της μάζα Planck, M_P .

Σε μικρές αποστάσεις κυριαρχεί ο όρος της 4D βαρύτητας και επιστρέφουμε στην ΓΣ. Σε μεγάλες αποστάσεις όμως κυριαρχεί ο 5D όρος και εμφανίζονται οι τροποποιήσεις. Συγκεκριμένα η κλίμακα που ξεχωρίζει αυτές τις δύο περιοχές δίνεται από την σχέση

$$\lambda = \frac{\tilde{\kappa}^2}{2\kappa^2}. \quad (3.5)$$

Η εισαγωγή της 4D βαρύτητας έχει ως αποτέλεσμα την λειτουργία του όρου αυτό σαν πηγή της 5D ώστε να αποκτούμε αυτο-επιταχυνόμενες λύσεις χωρίς την παρουσία ΚΣ [12, 13]. Για να το δούμε αυτό ξεκινούμε από τις 5D εξισώσεις Einstein

$$\tilde{G}_{MN} = \tilde{R}_{MN} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{MN}\tilde{R} = \tilde{\kappa}^2\tilde{S}_{MN}. \quad (3.6)$$

Χωρίζουμε στην συνέχεια τον τανυστή \tilde{S}_{MN} σε δύο συνεισφορές, μια από την βαθμωτή καμπυλότητα, \tilde{U}_{MN} , και μια από την ύλη εντοπισμένη πάνω στην βράνη, T_{MN} . Επιλέγοντας την ισοτροπική και ομοιογενή γεωμετρία πάνω στην βράνη ο τανυστής ενέργειας ορμής δίνεται από την σχέση

$$T^A_B = \frac{\delta(y)}{b} \text{diag}(-\rho_b, P_b, P_b, P_b, 0) \quad (3.7)$$

Χρησιμοποιώντας μια είδους Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) μετρική

$$ds^2 = -n^2(y, t)dt^2 + a^2(y, t)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(y, t)dy^2 \quad (3.8)$$

με y την επιπρόσθετη χωρική διάσταση, οι πρώτη εξίσωση Friedmann δίνει

$$\frac{\kappa^2}{3}\rho_b = H^2 + \frac{k}{a_0^2} - 2\epsilon\frac{\kappa^2}{\tilde{\kappa}^2}\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}}. \quad (3.9)$$

Εδώ, ποσότητες με δείκτη κάτω 0 είναι υπολογισμένες στο $y = 0$ όπου έχουμε τοποθετήσει την βράνη. Η παράμετρος Hubble έχει οριστεί ως $H = \frac{\dot{a}_0}{a_0 n_0}$, η μεταβλητή ϵ παίρνει τις τιμές $\epsilon = \pm 1$ και $k = -1, 0, 1$ παραμετροποιά την χωρική 3D καμπυλότητα.

3.2 Φαινομενολογία

1. Ανάκτηση 4D κοσμολογίας

Στο όριο

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} \gg \lambda^{-1} \quad (3.10)$$

ή ισοδύναμα

$$H^{-1} \ll \lambda \quad (3.11)$$

όπου αγνοήσαμε την χωρική καμπυλότητα, αποκτούμε από την εξίσωση (3.9) την γνώριμη πρώτη εξίσωση Friedmann της 4D ΓΣ (για FLRW μετρική)

$$\frac{1}{3\kappa^2}\rho_b = H^2 + \frac{k}{a_0^2} \quad (3.12)$$

2. Late time κοσμολογία

Λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση (3.9) ως προς $\sqrt{H^2 + k/a_0^2}$ έχουμε

$$\sqrt{H^2 + \frac{k}{a_0^2}} = \epsilon \frac{\kappa^2}{\tilde{\kappa}^2} + \sqrt{\frac{\kappa^2}{3}\rho_b + \frac{\kappa^4}{\tilde{\kappa}^4}}. \quad (3.13)$$

η οποία έχει δύο λύσεις για $\epsilon = \pm 1$. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση αυτή με $k = 0$ με την ύλη πάνω στην βράνη να περιγράφεται από μια συνηθισμένη καταστατική εξίσωση $P_b = w\rho_b$, $w > -1$ μπορεί κανείς να δείξει πως η για μεγάλους χρόνους το a_0 αποκλίνει. Αν το a_0 τότε η πυκνότητα ενέργειας ρ θα τείνει στο 0. Θα υπάρξει δηλαδή μια στιγμή όπου $\frac{\rho_b}{3} \ll \frac{\kappa^2}{\tilde{\kappa}^4}$. Το όριο αυτό ισοδυναμεί με

$$\left(H^2 + \frac{k}{a_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \lambda^{-1} \quad (3.14)$$

ή, αγνοώντας πάλι την χωρική καμπυλότητα,

$$H^{-1} \gg \lambda. \quad (3.15)$$

Για $\epsilon = -1$ η εξίσωση (3.13) δίνει

$$\left(H^2 + \frac{k}{a_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\tilde{\kappa}^2}{6}\rho_b. \quad (3.16)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει την 5D βαρύτητα. Μπορούμε να αποκτήσουμε την ίδια εξίσωση από την ολοκληρωμένη 5D εξίσωση Friedmann στο όριο $\kappa \rightarrow \infty$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ομαλή μετάβαση μεταξύ 4D βαρύτητα και 5D.

Για $\epsilon = 1$ η παράμετρος Hubble, H τείνει σε σταθερά H_{self}

$$H_{self} = \frac{2\kappa^2}{\tilde{\kappa}^2}. \quad (3.17)$$

Στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε πως η μετάβαση είναι μεταξύ 4D βαρύτητας και λύσης πληθορισμού. Έχει βρεθεί όμως, πως η λύση αυτή συνοδεύεται από αστάθειες [14].

Ωστόσο, το μοντέλο DGP παρουσιάζει ενδιαφέρον. Όπως και στο Massive Gravity παρουσιάζεται η van Dam - Veltman - Zakharov (vDVZ) ασυνέχεια στο όριο της αποσύζευξης ([3] για vDVZ στο Massive Gravity). Η ασυνέχεια αυτή, όπως είχε παρατηρήσει πρώτος ο Vainshtein για το Massive Gravity, εξαλείφεται μέσω του μηχανισμού Vainshtein αν ληφθούν υπόψη οι μη-γραμμικοί όροι.

3.3 Γενικές Ιδιότητες

Τώρα, στο όριο αποσύζευξης, πολλές από τις ιδιότητες του μοντέλου DGP περιγράφονται από την δράση [14, 15]

$$S = \int d^4x \left[-3 \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - \frac{1}{\Lambda^3} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi \square \pi + \frac{\kappa}{2} \pi T \right] \quad (3.18)$$

της οποίας οι εξισώσεις κίνησης δίνουν

$$\square \pi - \frac{1}{3\Lambda^3} [(\square \pi)^2 + \partial_\mu \partial_\nu \pi \partial^\mu \partial^\nu \pi] = -\frac{\kappa}{12} T. \quad (3.19)$$

Παρατηρούμε ότι, παρά το γεγονός ότι οι δράση περιέχει όρους ψηλότερης τάξης, η εξίσωση κίνησης περιέχει μόνο παραγώγους δεύτερης τάξης. Για τον λόγο αυτό, η θεωρία αυτή αποφεύγει την αστάθεια που προβλέπει το θεώρημα του Ostrogradsky. Ακριβώς αυτή η παρατήρηση οδήγησε στην μελέτη της πιο γενικής θεωρίας ενός βαθμωτού πεδίου με εξισώσεις κίνησης είναι αυστηρά δεύτερης τάξης, το Γαλιλαιόνιο.

Κεφάλαιο 4

Γαλιλαιόνια

Η πιο γενική λαγκρανζιανή, η οποία δίνει αυστηρά εξισώσεις δεύτερης τάξης, δίνει τα Γαλιλαιόνια τα οποία μελετήθηκαν για πρώτη φορά το 2009 από τον A. Nicolis, R. Rattazzi και E. Trincherini [16]. Προκύπτει πως υπάρχει μόνο συγκεκριμένος αριθμός όρων ο οποίος ικανοποιεί την απαίτηση αυτή. Συγκεκριμένα, υπάρχουν σε d διαστάσεις, $d + 1$ όροι, ένα σε κάθε τάξη.

4.1 Λαγκρανζιανή και Εξισώσεις Κίνησης

Στις 4D οι λαγκρανζιανές δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= \phi, \\ \mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2, \\ \mathcal{L}_3 &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2\Box\phi, \\ \mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2((\Box\phi)^2 - (\partial\partial\phi)^3), \\ \mathcal{L}_5 &= -\frac{1}{2}((\Box\phi)^3 + (\partial\partial\phi)^3 - (\partial\partial\phi)^2\Box\phi).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Μεταβάλλοντας ως προς ϕ έχουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_1 &= 1 \\
 \mathcal{E}_2 &= \square\phi \\
 \mathcal{E}_3 &= (\square\phi)^2 - (\partial\partial\phi)^2 \\
 \mathcal{E}_4 &= (\partial^2\phi)^3 - 3\partial^2\phi(\partial\partial\phi)^2 + 2(\partial\partial\phi)^3 \\
 \mathcal{E}_5 &= (\square\phi\phi)^4 - 6(\square\phi)^2(\partial\partial\phi)^2 + 8\square\phi(\partial\partial\phi)^3 + 3[(\partial\partial\phi)^2]^2 - 6(\partial\partial\phi)^4
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Διαλέγοντας μια διαφορετική κανονικοποίηση μπορούμε να γράψουμε την n-οστή λαγκρανζιανή του Γαλιλαιονίου σε d διαστάσεις [7, 2]

$$\mathcal{L}_n = (n - 1)\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\dots\mu_{n-1}\nu_{n-1}}\phi\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_1}\phi\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}\phi\dots\partial_{\mu_{n-1}}\partial_{\nu_{n-1}}\phi \tag{4.3}$$

όπου $\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\dots\mu_{n-1}\nu_{n-1}} = \frac{1}{n!} \sum_p (-1)^p \eta^{\mu_1\nu_1} \eta^{\mu_2\nu_2} \dots \eta^{\mu_{n-1}\nu_{n-1}}$ με το άθροισμα να τρέχει πάνω σε όλες τις κυκλικές μεταθέσεις με πρόσημο $(-1)^p$. Ο τανυστής αυτός είναι αντισυμμετρικός ως προς την εναλλαγή οποιονδήποτε δεικτών μ ή ν και συμμετρικός ως προς την εναλλαγή οποιουδήποτε ζευγαριού δεικτών $\mu_i\nu_i$.²

Στην μορφή αυτή φαίνεται πως οι όροι αυτοί δίνουν εξισώσεις δεύτερης τάξης. Η μεταβολή του πρώτου πεδίου είναι τετριμένος. Μεταβάλλοντας οποιοδήποτε άλλο όρο αποκτούμε $(n - 1)$ όρους της μορφής $\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_1}(\phi\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}\phi\dots\partial_{\mu_{n-1}}\partial_{\nu_{n-1}}\phi)$ όπου ολοκληρώσαμε κατά παράγοντες και αγνοήσαμε τον επιφανειακό όρο.

Λόγω της αντισυμμετρίας του τανυστή η και του γεγονότος ότι η μερική παράγωγος μετατίθεται με τον εαυτό της, ο μόνος όρος που θα επιζήσει είναι αυτός όπου οι παράγωγοι κτυπούν πάνω στο ελεύθερο πεδίο ώστε να καταλήξουμε με εξίσωση κίνησης

$$\mathcal{E}_n = \frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial\phi} = n(n - 1)\eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\dots\mu_{n-1}\nu_{n-1}}\partial_{\mu_1}\partial_{\nu_1}\phi\partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}\phi\dots\partial_{\mu_{n-1}}\partial_{\nu_{n-1}}\phi \tag{4.5}$$

όπου σε κάθε πεδίο δρουν δύο παράγωγοι.

Υπενθυμίζοντας τους εαυτούς μας πως τα Γαλιλαιόνια μπορούν να ερμηνευτούν ως προερχόμενα από μια 4D βράνη εμβαπτισμένη σε 5D χωρόχρονο στο όριο ασθενούς

²Εναλλακτικά, μπορεί κάποιος να εκφράσει τον τανυστή η συναρτήσει του τανυστή Levi-Civita

$$\mathcal{L}_n \sim \epsilon^{\mu_1\dots\mu_{n-1}\alpha_n\dots\alpha_d}\epsilon_{\nu_1\dots\nu_{n-1}\alpha_n\dots\alpha_d}\phi\partial_{\mu_1}\partial^{\nu_1}\phi\partial_{\mu_2}\partial^{\nu_2}\phi\dots\partial_{\mu_{n-1}}\partial^{\nu_{n-1}}\phi \tag{4.4}$$

πεδίου σημειώνουμε εδώ πως προέρχονται συγκεκριμένα από τους όρους Lovelock ¹. Η προέλευση των όρων Lovelock είναι διπλή. Εμφανίζονται 4D όροι Lovelock από την επαγόμενη μετρική και 5D όροι Lovelock μέσω της εξωγενούς καμπυλότητας. Το γεγονός αυτό επίσης εξηγεί γιατί τα Γαλιλαιόνια δίνουν εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Επίσης καταλαβαίνουμε από την εξίσωση (4.3), γιατί σε d διαστάσεις τα Γαλιλαιόνια έχουν πεπερασμένο αριθμό όρων $d+1$, ένα για κάθε τάξη μέχρι $d+1$. Ο τανυστής η επιτρέπεται να έχει μόνο μέχρι d δείκτες αλλιώς, λόγω αντισυμμετρίας, θα μηδενίζεται η σχέση ταυτοτικά.

4.2 Euler Hierarchies

Παρατηρώντας ότι ο τανυστής η μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$\begin{aligned} \eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\dots\mu_n\nu_n} &= \eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_2\dots\mu_n\nu_n} - \eta^{\mu_1\nu_2}\eta^{\mu_2\nu_1\mu_3\nu_3\dots\mu_n\nu_n} \dots \\ &+ (-1)^{n-1}\eta^{\mu_1\nu_n}\eta^{\mu_2\nu_1\mu_3\nu_2\dots\mu_n\nu_{n-1}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την $n+1$ λαγκρανζιανή, \mathcal{L}_{n+1} , συναρτήσεως της n εξίσωσης κίνησης, \mathcal{E}_n ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{n+1} &= - \frac{n+1}{2n(n-1)} (\partial\phi)^2 \mathcal{E}_n \\ &+ \frac{n-1}{2} \partial_{\mu_1} [(\partial\phi)^2 \eta^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\dots\mu_{n-1}\nu_{n-1}} \partial_{\nu_1}\phi \partial_{\mu_2}\partial_{\nu_2}\phi \dots \partial_{\mu_{n-1}}\partial_{\nu_{n-1}}\phi] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως Euler Hierarchies [17].

4.3 Γαλιλαιονική Συμμετρία

Το γεγονός ότι οι εξισώσεις είναι αυστηρά δεύτερης τάξης παρατηρούμε πως τα Γαλιλαιόνια σέβονται την συμμετρία

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + b_\mu x^\mu + c \quad (4.8)$$

όπου b_μ, c αυθαίρετες σταθερές. Η συμμετρία αυτή αποτελεί την γενίκευση της γαλιλαιονικής $\dot{x} \rightarrow \dot{x}' = \dot{x} + u$ στον χωρόχρονο. Ειδωμένα τα Γαλιλαίονια ως προερχόμενα από το μοντέλο DGP, η συμμετρία αυτή προέρχεται από την σπασμένη 5D Poincaré συμμετρία [2].

Για απειροστή μεταβολή ο 5D Poincaré μετασχηματισμός δίνεται από την σχέση

$$\delta_P X^M = \omega^M_N X^N + \epsilon^M \quad (4.9)$$

όπου ο αντισυμμετρικός τανυστής ω^M_N και ϵ^M είναι απειροστές ποσότητες. Η δράση πρέπει επίσης να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμό βαθμίδας πάνω στην βράνη, diffeomorphism

$$\delta_g X^M = \xi^\mu \partial_\mu X^M \quad (4.10)$$

με ξ^μ την παράμετρο βαθμίδας. Ουσιαστικά, ο τελεστής δ_g είναι η παράγωγος Lie για βαθμωτά. Εχμεταλλευόμενη την ελεύθερία βαθμίδας, επιλέγουμε

$$X^\mu = x^\mu, \quad X^4 = \phi(x). \quad (4.11)$$

Υπο το πρίσμα αυτό, γράφουμε τον μετασχηματισμό Poincaré πάνω στην βράνη ως

$$\delta_P X^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu + \omega^\mu_4 \phi + \epsilon^\mu. \quad (4.12)$$

Παρατηρούμε πως ο μετασχηματισμός αυτός δεν διατηρεί την βαθμίδα. Μπορούμε να επαναφέρουμε την βαθμίδα επιλέγοντας κατάλληλα το διάνυσμα ξ^μ . Έχοντας τον μετασχηματισμό $\delta_g X^\mu = \xi^\mu \partial_\mu x^\mu = \xi^\mu$, επιλέγουμε

$$\xi^\mu = -\omega^\mu_\nu x^\nu - \omega^\mu_4 \phi - \epsilon^\mu \quad (4.13)$$

και ορίζουμε τον καινούριο μετασχηματισμό $\delta_{P'} = \delta_P + \delta_g$. Ο μετασχηματισμός $\delta_{P'}$ τώρα, διατηρεί την βαθμίδα. Η δράση του πάνω στο ϕ δίνει

$$\delta_{P'} \phi = \omega^4_\mu x^\mu + \epsilon^4 - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi - \omega^\mu_4 \phi \partial_\mu \phi - \epsilon^\mu \partial_\mu \phi. \quad (4.14)$$

Μετονομάζοντας τις ποσότητες $\omega_\mu \equiv \omega^4_\mu$ και $\epsilon \equiv \epsilon^4$, η εσωτερική σχετικιστική συμμετρία δίνεται από την σχέση

$$\delta_{P'}\phi = \omega^4_{\mu}x^{\mu} + \epsilon^4 - \omega^{\mu}_4\phi\partial_{\mu}\phi. \quad (4.15)$$

Στο μη-σχετικιστικό όριο, δηλαδή για μικρό ϕ , δίνει

$$\delta_{P'}\phi = \omega_{\mu}x^{\mu} + \epsilon \quad (4.16)$$

η οποία είναι ακριβώς η γαλιλαιονική συμμετρία που ορίσαμε προηγουμένως.

4.4 Duality

Μια άλλη ιδιότητα που παρουσιάζουν τα Γαλιλαίονια είναι το γεγονός ότι είναι self-dual [7, 18]. Συγκεκριμένα, αν ξεκινήσουμε από μια την γενική θεωρία

$$\mathcal{L}[\phi] = \sum_{n=1}^5 c_n \mathcal{L}_n[\phi] \quad (4.17)$$

και εφαρμόσουμε ταυτόχρονα τους μετασχηματισμούς ³

$$\phi \rightarrow \phi' = -\rho - \frac{1}{2\Lambda^2}(\partial\phi)^2, \quad x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \frac{1}{\Lambda}\partial^{\mu}\rho \quad (4.19)$$

αποκτούμε την dual θεωρία

$$\mathcal{L}[\rho] = \sum_{n=1}^5 p_n \mathcal{L}_n[\rho] \quad (4.20)$$

η οποία επίσης είναι Γαλιλαιονική θεωρία, εξού και ο χαρακτηρισμός self-dual. Οι συντελεστές c_n γενικά δεν μετασχηματίζονται στον εαυτό τους όμως. Οι σχέσεις μεταξύ των συντελεστών c_n και p_n δίνονται από τον πίνακα

³Οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho \rightarrow \rho' = -\rho - \frac{1}{2\Lambda^2}(\partial'\rho)^2, \quad x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu} = x'^{\mu} + \frac{1}{\Lambda}\partial'^{\mu}\rho \quad (4.18)$$

όπου ∂' εννοούμε παραγωγήση ως προς x' .

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Είναι εμφανές πως μόνο η Γαλιλαιονική θεωρία με $c_2 \neq 0$ και $c_3 = c_4 = c_5 = 0$ επιστρέφει στον εαυτό της στην dual θεωρία. Μπορεί κανείς να υπολογίσει και τον αντίστροφο μετασχηματισμό, αφού η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα δίνεται από το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων το οποίο ισούτε με την μονάδα. Τέλος, η ιδιότητα αυτή ισχύει για τα Γαλιλαιόνια σε οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων.

Μελετώντας την αρχική θεωρία με το πεδίο ϕ παρατηρεί κανείς ότι δέχεται υπερφωτεινές λύσεις. Η dual θεωρία, από την άλλη, είναι μια καλά ορισμένη αιτιώδης θεωρία και UV-complete. Αφού οι δύο θεωρίες αυτές είναι ισοδύναμες, συμπεραίνουμε πως, κάνοντας σωστούς υπολογισμούς στην αρχική θεωρία, θα εξαληφονται οι υπερφωτεινότητες.

Κεφάλαιο 5

Κυβικό Γαλιλαϊόνιο

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τον Γαλιλαϊονικό όρο τρίτης τάξης σε συνδυασμό με τον όρο δεύτερης τάξης. Πριν εισάγουμε όμως το κυβικό Γαλιλαϊόνιο θα περιοριστούμε στον τετράγωνο όρο. Σημειώνουμε εδώ πως οι Γαλιλαϊονικοί όροι, όπως έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο (4.1), θα οριστούν στο Einstein frame στην πιο κάτω ανάλυση. Θα ξεκινήσουμε λοιπόν με την Θεωρία Brans-Dicke στο Jordan Frame η οποία στο Einstein frame δεν είναι τίποτα άλλο από τετραγωνικό Γαλιλαϊονικό όρο, όπως θα δούμε πιο κάτω.

5.1 Brans-Dicke στο Jordan Frame

Η δράση της Θεωρίας Brans-Dicke στο Jordan Frame δίνεται από την σχέση

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi R - \omega g^{\mu\nu} \frac{\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi}{\phi} \right) + S_m[g] \quad (5.1)$$

όπου ω είναι μια ελεύθερη παράμετρος, G η σταθερά Newton στον 4D χωρόχρονο και $\phi = \phi(x)$ βαθμωτό πεδίο. Για πειραματικά φράγματα στην τιμή της παραμέτρου ω δείτε [19]. Η δράση S_m εδώ περιγράφει την ύλη.

5.1.1 Εξισώσεις Κίνησης

1. Παίρνοντας την μεταβολή ως προς το βαθμωτό πεδίο ϕ αποκτούμε την εξίσωση κίνησης

$$R + 2\omega \frac{\square\phi}{\phi} - \omega \frac{\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi}{\phi^2} = 0. \quad (5.2)$$

2. Για την δεύτερη εξίσωση κίνησης που παίρνουμε από την μεταβολή της μετρικής $g_{\mu\nu}$ υπενθυμίζουμε τον αναγνώστη πως η μεταβολή της βαθμωτής καμπυλότητας R δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \\ &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\nu). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Στην ΓΣ ο δεύτερος όρος μπορεί να αγνοηθεί αφού είναι επιφανειακός όρος και υποθέτουμε πως το σύστημα μας δεν έχει σύνορα και τα πεδία μηδενίζονται στο άπειρο.⁴ Στην περίπτωση αυτή όμως ο όρος αυτός δεν δίνει επιφανειακό όρο αφού πολλαπλασιάζεται με το βαθμωτό πεδίο. Έχοντας τα προηγούμενα κατά νου, η εξίσωση κίνησης δίνεται από την σχέση

$$G_{\mu\nu} + \omega \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi - \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi \right) + \frac{1}{\phi} (g_{\mu\nu}\square\phi - \nabla_\mu\nabla_\nu\phi) = 8\pi G \frac{T_{\mu\nu}}{\phi}. \quad (5.4)$$

όπου έχουμε ορίσει τον ταυιστή ενέργειας-ορμής

$$\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m(g)) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu}(g)\delta g^{\mu\nu}. \quad (5.5)$$

3. Το ίχνος της εξίσωσης αυτής είναι

$$-R + \omega \frac{\nabla_\lambda\phi\nabla^\lambda\phi}{\phi^2} + 3\frac{\square\phi}{\phi} = 8\pi G \frac{T}{\phi} \quad (5.6)$$

το οποίο μπορούμε να προσθέσουμε στην (5.2) και να πάρουμε μια εξίσωση που περιέχει μόνο το βαθμωτό πεδίο και την ύλη

$$\square\phi = \frac{8\pi G}{2\omega + 3}T. \quad (5.7)$$

⁴Αν το σύμπαν είχε σύνορο τότε θα πρέπει να συμπεριληφθεί και ο όρος Gibbons-Hawking για την εξουδετέρωση του επιφανειακού όρου και την σωστή περιγραφή του συνόρου με τις κατάλληλες εξισώσεις κίνησης

Παρατηρούμε πως το πεδίο ϕ περιγράφεται από την κυματική εξίσωση με πηγή το ίχνος του ταυιστή ενέργειας-ορμής.

5.1.2 Εξισώσεις Κίνησης για FRW Μετρική και Χρονοεξαρτημένο Βαθμωτό Πεδίο

Η μετρική FRW δίνεται από την σχέση

$$ds^2 = - dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \quad (5.8)$$

όπου η σταθερά k δίνει την χωρική καμπυλότητα. Για $k > 0$, $k = 0$ και $k < 0$ έχουμε αντίστοιχα κλειστό, επίπεδο και ανοικτό σύμπαν. Εναλλάκτικα η μετρική γράφεται $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j$ όπου γ_{ij} η 3×3 χωρική μετρική.

Σημειώνοντας πως η ντ' Αλεμπεριανή δίνεται από την σχέση

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) \quad (5.9)$$

η εξίσωση (5.7) για χρονοεξαρτημένο βαθμωτό πεδίο, $\phi = \phi(t)$ δίνει

$$-\ddot{\phi} - 3\dot{\phi}\frac{\dot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{2\omega + 3}T. \quad (5.10)$$

Η πρώτη εξίσωση Friedmann δίνεται από την $_{00}$ συνιστώσα της εξίσωσης Einstein (5.4)

$$3\frac{k + \dot{a}^2}{a^2} - \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + 3\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} = 8\pi G\frac{\rho}{\phi}. \quad (5.11)$$

ενώ το ίχνος της, (5.6), δίνει δεύτερη εξίσωση Friedmann

$$-6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = 8\pi G\frac{T(g)}{\phi} + \omega\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + 9\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + 3\frac{\ddot{\phi}}{\phi}. \quad (5.12)$$

Έχουμε φτάσει σε ένα σύστημα εξισώσεων με 2 εξισώσεις για 4 αγνώστους $\phi(t)$, $a(t)$, $\rho(t)$ και $P(t)$. (Οι δύο εξισώσεις Friedmann δεν είναι ανεξάρτητες). Οπότε για να συμπληρωθεί το σύστημα εξισώσεων χρειαζόμαστε ακόμη δύο εξισώσεις. Η

πρώτη δίνεται από τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής και εκφράζει την διατήρηση ενέργειας

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -P \frac{da^3}{dt}. \quad (5.13)$$

Η δεύτερη εξίσωση, η καταστατική εξίσωση, εκφράζει την σχέση μεταξύ της πυκνότητας ενέργειας και της ορμής. Έχουμε,

$$P = \begin{cases} 0 & \text{ύλη} \\ \frac{1}{3}\rho & \text{ακτινοβολία} \\ -\rho & \text{κοσμολογική σταθερά.} \end{cases} \quad (5.14)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις αυτές στην (5.13) έχουμε

$$\rho(t) = \begin{cases} \rho(t_0) \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3 & \text{ύλη} \\ \rho(t_0) \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4 & \text{ακτινοβολία.} \\ \frac{\Lambda}{8\pi G} & \text{κοσμολογική σταθερά} \end{cases} \quad (5.15)$$

Εδώ, t_0 είναι ο παρών χρόνος και Λ η κοσμολογική σταθερά. Για ευκολία θα θέσουμε $a(t_0) = 1$.

5.2 Brans-Dicke στο Einstein Frame

Στο σημείο αυτό θα φανεί χρήσιμο να εκτελέσουμε τον σύμμορφο μετασχηματισμό

$$g_{\mu\nu} = e^{2\Omega} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (5.16)$$

όπου $\Omega = \Omega(x)$ αυθαίρετη συνάρτηση, και να γράψουμε την δράση συναρτήσει της καινούρια μετρικής $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Οι μετασχηματισμοί των γεωμετρικών αντικειμένων μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα (Α'). Η δράση Brans-Dicke, κάτω από τον μετασχηματισμό αυτό, παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}
 S_{BD} &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{2\Omega} \left[\phi \tilde{R} - 6\phi \tilde{\square}\Omega - 6\phi \tilde{\nabla}_\lambda \Omega \tilde{\nabla}^\lambda \Omega - \omega \frac{\tilde{\nabla}_\lambda \phi \tilde{\nabla}^\lambda \phi}{\phi} \right] \\
 &+ \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{4\Omega} \mathcal{L}_m(\tilde{g}).
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Αφού η συνάρτηση Ω είναι αυθαίρετη διαλέγουμε να ικανοποιά την ακόλουθη συνθήκη $e^{2\Omega}\phi = 1$. Η επιλογή αυτή εξουδετερώνει τον συντελεστή της βαθμωτής καμπυλότητας και δικαιολογεί την ονομασία του frame αυτού ως Einstein frame. Φτάνουμε λοιπόν στην έκφραση

$$\begin{aligned}
 S_{BD} &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} + 3\tilde{\square} \ln(\phi) - \left(\frac{2\omega + 3}{2} \right) \tilde{\nabla}_\lambda \ln(\phi) \tilde{\nabla}^\lambda \ln(\phi) \right] \\
 &+ \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{\mathcal{L}_m(\tilde{g})}{\phi^2}.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Παρατηρούμε πως στο Jordan frame το Γαλιλαϊόνιο είναι συζευγμένο με την βαθμωτή καμπυλότητα αλλά όχι με την ύλη. Αντίθετα, στο Einstein frame είναι συζευγμένο με την ύλη αλλά όχι με την βαθμωτή καμπυλότητα.

Εκτελώντας τον επαναορισμό $\tilde{\chi} = -\frac{1}{2}M_P \ln(\phi)$ όπου η μάζα Planck έχει οριστεί ως $M_P = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$ καταλήγουμε στην τελική έκφραση

$$\begin{aligned}
 S_{BD} &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - 2 \left(\frac{2\omega + 3}{M_P^2} \right) \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\chi} \right] \\
 &+ \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \mathcal{L}_m(\tilde{g}).
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Στην μορφή αυτή αναγνωρίζουμε το Γαλιλαϊονικό όρο δεύτερης τάξης. Πρέπει ο-στώσο να τονίσουμε εδώ πως το Γαλιλαϊόνιο εδώ έχει γενικευθεί στην συναλλοίωτη του μορφή. Εδώ, τα Γαλιλαϊόνια δυστυχώς χάνουν την ιδιότητα να σέβονται την γενικευμένη γαλιλαϊονική συμμετρία.

5.2.1 Εξισώσεις Κίνησης

1. Για να προχωρήσουμε στον υπολογισμό των εξισώσεων κίνησης θα χρειαστούμε την σχέση

$$\delta g^{\mu\nu} = - \left(\frac{2}{M_P} \right) \tilde{g}^{\mu\nu} e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} \delta\tilde{\chi} = - \left(\frac{2}{M_P} \right) g^{\mu\nu} \delta\tilde{\chi}. \quad (5.20)$$

όπου μεταβάλαμε την μετρική $g_{\mu\nu}$ κρατώντας σταθερή την $\tilde{g}_{\mu\nu}$ στην εξίσωση (5.16). Έχοντας την σχέση αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m(g)) = \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m(g))}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{M_P} T(g) \delta\tilde{\chi}. \quad (5.21)$$

Η εξίσωση κίνησης, παρμένη από την μεταβολή της (5.19) ως προς το πεδίο $\tilde{\chi}$ δίνει

$$\tilde{\square}\tilde{\chi} = - \left(\frac{4\pi G M_P}{2\omega + 3} \right) T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}}. \quad (5.22)$$

2. Κρατώντας τώρα το πεδίο $\tilde{\chi}$ σταθερό, η μεταβολή της (5.16) δίνει $\delta g_{\mu\nu} = e^{2\Omega} \delta\tilde{g}_{\mu\nu}$. Η μεταβολή της (5.19) ως προς την μετρική $\tilde{g}_{\mu\nu}$ δίνει τις εξισώσεις Einstein

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu}(g) e^{\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} + \tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{\chi}) \right) \quad (5.23)$$

όπου

$$\tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{\chi}) \equiv (2\omega + 3) \left(2\tilde{\nabla}_\mu\tilde{\chi}\tilde{\nabla}_\nu\tilde{\chi} - \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{\nabla}_\lambda\tilde{\chi}\tilde{\nabla}^\lambda\tilde{\chi} \right). \quad (5.24)$$

3. Τέλος το ίχνος της εξίσωσης (5.23) δίνει

$$- \tilde{R} = \frac{1}{M_P^2} \left(T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} - \frac{2}{\alpha^2} \tilde{\nabla}_\lambda\tilde{\chi}\tilde{\nabla}^\lambda\tilde{\chi} \right). \quad (5.25)$$

5.2.2 Εξισώσεις Κίνησης για FRW Μετρική και Χρονοεξαρτημένο Βαθμωτό Πεδίο

Ορίζοντας τις ποσότητες

$$d\tilde{t} = e^{-\frac{\tilde{\chi}}{M_P}} dt, \quad a(t) = e^{\frac{\tilde{\chi}}{M_P}} b(t) \quad (5.26)$$

έχουμε από τον μετασχηματισμό (5.16)

$$\tilde{g}_{00} = -e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}}, \quad \tilde{g}_{ii} = b^2(t)\gamma_{ii}. \quad (5.27)$$

Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + b^2\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (5.28)$$

όπου $ds^2 = e^{\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} d\tilde{s}^2$. Ορίζουμε τώρα την παράμετρο Hubble $\tilde{H} = \frac{b'}{b}$ όπου ' υποδηλώνει παραγωγή ως προς \tilde{t} . Οι γεωμετρικές ποσότητες που προκύπτουν από την μετρική δίνονται στο παράρτημα (B').

Μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε στον υπολογισμό των εξισώσεων.

1. Η εξίσωση του βαθμωτού πεδίου (5.22) δίνει

$$\tilde{\chi}'' + 3\tilde{H}\tilde{\chi}' = \frac{\alpha^2}{2M_P} T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}}. \quad (5.29)$$

2. Η 00 συνιστώσα της εξίσωσης Einstein (5.23) δίνει την πρώτη εξίσωση Friedmann

$$3\frac{k}{b^2} + 3\tilde{H}^2 = \frac{1}{M_P^2} \left(\rho e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{1}{\alpha^2} \tilde{\chi}'^2 \right). \quad (5.30)$$

3. Τέλος το ίχνος της εξίσωσης Einstein (5.25) δίνει την δεύτερη εξίσωση Friedmann

$$-6 \left(\tilde{H}' + 2\tilde{H}^2 + \frac{k}{b^2} \right) = \frac{1}{M_P^2} \left[T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{2}{\alpha^2} \tilde{\chi}'^2 \right]. \quad (5.31)$$

5.3 Λύσεις της Θεωρίας Brans-Dicke

5.3.1 Λύσεις του Brans-Dicke στο Jordan Frame

Τώρα που έχουμε τις εξισώσεις κίνησης και στα δύο frames θα τις λύσουμε. Στο Jordan frame οι εξισώσεις που πρέπει να λυθούν είναι

$$3H^2 + 3\frac{k}{a^2} - \frac{\omega \dot{\phi}^2}{2\phi^2} + 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} = \frac{1}{M_P^2} \rho \quad (5.32)$$

$$-\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} = \frac{\alpha^2}{M_P^2} T \quad (5.33)$$

$$-6\left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2}\right) = 8\pi G \frac{T(g)}{\phi} + \omega \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + 9H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + 3\frac{\ddot{\phi}}{\phi} \quad (5.34)$$

για τις μεταβλητές $a(t)$ και $\phi(t)$.

Γράφουμε τώρα την πρώτη εξίσωση Friedmann σε διαφορετική μορφή

$$\begin{aligned} \Omega_m + \Omega_r + \Omega_v + \Omega_c + \Omega_{mod} &= 1, \\ \Omega_i &= \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}, \quad \rho_{crit} = 3H^2 M_P^2, \end{aligned} \quad (5.35)$$

όπου ορίσαμε την μεταβλητή

$$\rho_{mod} = \rho \left(\frac{1}{\phi} - 1 \right) + \frac{\omega M_P^2 \dot{\phi}^2}{2\phi} - 3M_P^2 H \frac{\dot{\phi}}{\phi}. \quad (5.36)$$

Στην μορφή αυτή μπορούμε να μελετήσουμε την απόκλιση του μοντέλου αυτού από την ΓΣ αφού εισάγοντας την μεταβλητή ρ_{mod} έχουμε κάνει εμφανή την τροποποίηση. Παρατηρώντας πως οι εξισώσεις δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο t μπορούμε να τον απαλείψουμε εισάγοντας την καινούρια μεταβλητή

$$\eta \equiv \ln(a) \quad or \quad e^\eta \equiv a. \quad (5.37)$$

Έχουμε τότε

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\eta} H, \quad \ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{d\eta^2} H^2 + \frac{d\phi}{d\eta} H \frac{dH}{d\eta}. \quad (5.38)$$

Αντικαθιστώντας αυτό ξανά στην εξίσωση (5.32) και λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς H έχουμε

$$H^2 = \frac{\phi \frac{\rho}{M_P^2} - 3k\phi^2 e^{-2\eta}}{3\phi^2 - \frac{\omega}{2} \left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 + 3\phi \frac{d\phi}{d\eta}}. \quad (5.39)$$

Συνδιάζοντας τις εξισώσεις (5.33) και (5.34) έχουμε

$$-H \frac{dH}{d\eta} = 2H + ke^{-2\eta} + \frac{\omega\alpha^2 T}{3M_P^2 \phi} + \frac{\omega}{6} H^2 \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 \quad (5.40)$$

και αντικαθιστώντας την εξίσωση αυτή ξανά στην (5.33), απαλείφοντας το $H \frac{dH}{d\eta}$ και χρησιμοποιώντας την (5.39) φτάνουμε τελικά στην εξίσωση

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{d\phi}{d\eta} \\ \frac{d\psi}{d\eta} &= -\frac{1}{H^2} \left[2ke^{-2\eta} \frac{d\phi}{d\eta} - \frac{\alpha^2}{M_P^2} T + \frac{1}{3M_P^2} \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{d\eta} (\omega\alpha^2 T - \rho) \right] + \frac{1}{\phi^2} \left(\frac{d\phi}{d\eta}\right)^2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

όπου έχουμε ορίσει την μεταβλητή $\psi \equiv \frac{d\phi}{d\eta}$. Με την εισαγωγή της μεταβλητής αυτής έχουμε μετατρέψει την εξίσωση δευτέρας τάξης σε δύο εξισώσεις πρώτης τάξης.

5.3.2 Λύσεις του Brans-Dicke στο Einstein Frame

Οι εξισώσεις που πρέπει να λυθούν στο Einstein frame είναι

$$3\frac{k}{b^2} + 3\tilde{H}^2 = \frac{1}{M_P^2} \left(\rho e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{1}{\alpha^2} \tilde{\chi}'^2 \right) \quad (5.42)$$

$$\tilde{\chi}'' + 3\tilde{H}\tilde{\chi}' = \frac{\alpha^2}{2M_P} T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \quad (5.43)$$

$$-6 \left(\tilde{H}' + 2\tilde{H}^2 + \frac{k}{b^2} \right) = \frac{1}{M_P^2} \left(T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{2}{\alpha^2} \tilde{\chi}'^2 \right) \quad (5.44)$$

πρώτα για τις μεταβλητές $b = b(\tilde{t})$, $\chi = \chi(\tilde{t})$ και μετά ξανά για τις μεταβλητές $a = a(t)$, $\phi = \phi(t)$.

Ακολουθώντας ξανά τα ίδια βήματα όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο ξαναγράφουμε την πρώτη εξίσωση στην μορφή

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_m + \tilde{\Omega}_r + \tilde{\Omega}_v + \tilde{\Omega}_c + \tilde{\Omega}_{mod} &= 1, \\ \tilde{\Omega}_i &= \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} e^{\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}}, \quad \rho_{crit} = 3\tilde{H}^2 M_P^2, \end{aligned} \quad (5.45)$$

όπου

$$\rho_{mod} = \rho \left(e^{\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} - 1 \right) + \left[(2\omega + 6)\tilde{\chi}'^2 + 6M_P\tilde{H}\tilde{\chi}' \right] e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}}. \quad (5.46)$$

Ορίζοντας όπως και πριν μια καινούρια μεταβλητή

$$\tilde{\eta} \equiv \ln(b), \quad e^{\tilde{\eta}} \equiv b, \quad (5.47)$$

τα οποία δίνουν τις σχέσεις

$$\tilde{\chi}' = \frac{d\tilde{\chi}}{d\tilde{\eta}} \tilde{H}, \quad \tilde{\chi}'' = \frac{d^2\tilde{\chi}}{d\tilde{\eta}^2} \tilde{H}^2 + \frac{d\tilde{\chi}}{d\tilde{\eta}} \tilde{H} \frac{d\tilde{H}}{d\tilde{\eta}}. \quad (5.48)$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στην (5.42) και λύνοντας ως προς \tilde{H} καταλήγουμε στην σχέση

$$\tilde{H}^2 = \frac{\frac{\rho e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}}}{M_P^2} - 3k e^{-2\tilde{\eta}}}{3 - \frac{1}{M_P^2 \alpha^2} \left(\frac{d\tilde{\chi}}{d\tilde{\eta}} \right)^2}. \quad (5.49)$$

Η εξίσωση (5.44) δίνει

$$\tilde{H} \frac{d\tilde{H}}{d\tilde{\eta}} = -\tilde{H}^2 \left[2 + \frac{1}{3M_P^2 \alpha^2} \left(\frac{d\tilde{\chi}}{d\tilde{\eta}} \right)^2 \right] - k e^{-2\tilde{\eta}} - \frac{1}{6M_P^2} T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}}. \quad (5.50)$$

Συνδιάζοντας όλες τις εξισώσεις καταλήγουμε στην σχέση

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{d\tilde{\chi}}{d\tilde{\eta}} \\ \frac{d\psi}{d\tilde{\eta}} &= -\frac{1}{H^2} \left[2k e^{-2\tilde{\eta}} \frac{d\tilde{\chi}}{d\tilde{\eta}} - \frac{1}{6M_P^2} e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \frac{d\tilde{\chi}}{d\tilde{\eta}} (2\rho - T) + \frac{\alpha^2}{2M_P} T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

όπου ορίσαμε την μεταβλητή $\psi \equiv \frac{d\tilde{\chi}}{d\tilde{\eta}}$.

5.3.3 Γραφικές Παραστάσεις

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τις υπολογιστικές λύσεις των πιο πάνω εξισώσεων για διάφορες κατανομές ύλης. Για την επίλυση των εξισώσεων έχουμε χρησιμοποιήσει την μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης. Για τις διάφορες κατανομές αυτές θα φαίνονται οι $\phi = \phi(\eta)$, $a = a(t)$ και $\phi = \phi(t)$. Για αρχικές συνθήκες θα επιλέξουμε

$$t_0 = 0, \quad a_0 = e^{-5}, \quad \phi_0 = 1, \quad \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t_0} = 0 \quad (5.52)$$

τα οποία στο Einstein frame δίνουν

$$\tilde{t}_0 = 0, \quad b_0 = e^{-5}, \quad \tilde{\chi}_0 = 0, \quad \left. \frac{d\tilde{\chi}}{d\tilde{t}} \right|_{\tilde{t}_0} = 0. \quad (5.53)$$

Τέλος θα επιλέξουμε την ακόλουθη τιμή για την παράμετρο Brans-Dicke $\omega = 1$. Η τελική συνθήκη για την ολοκλήρωση των εξισώσεων δίνεται από το $a = 10$.

Πριν συνεχίσουμε θα ορίσουμε τις μεταβλητές

$$\omega_i = h^2 \Omega_i. \quad (5.54)$$

1. Όλες οι Μορφές Ύλης

Θα ξεκινήσουμε εισάγωντας όλων των μορφών ύλης, δηλαδή βαρυονική ύλη, ακτινοβολία και σκοτεινή ύλη. Θα επιλέξουμε τις ακόλουθες τιμές

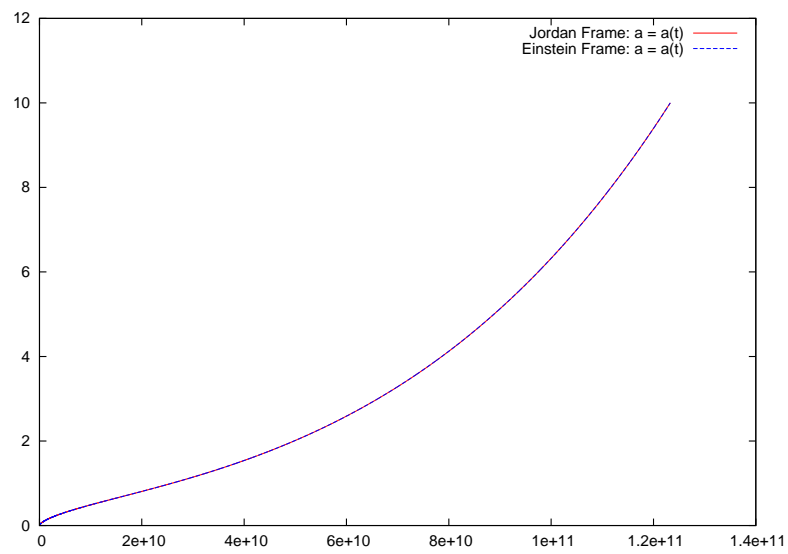
$$\omega_m = 0.15, \quad T = 2.72548, \quad \omega_v = 0.36, \quad \omega_c = 0. \quad (5.55)$$

Στην γραφική 5.1 βλέπουμε την χρονική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας. Όπως αναμένουμε, υπερισχύουν πρώτα οι βαρυονική ύλη και η ακτινοβολία επιβάλλοντας αρνητική δεύτερη παράγωγο στον παράγοντα κλίσης μέχρι να μειωθεί αρκετά η πυκνότητα τους ώστε να κυριαρχήσει η σκοτεινή ύλη. Στο σημείο αυτό αντιστρέφονται τα κοίλα και η συνάρτηση αποκτά θετική δεύτερη παράγωγο. Η εικόνα αυτή είναι γνωστή από την ΓΣ.

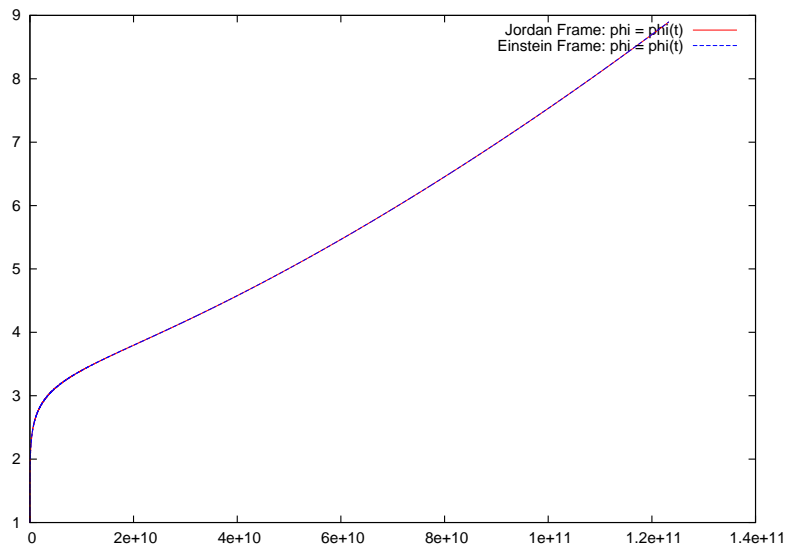
Η χρονική εξέλιξη των πυκνοτήτων φαίνεται στην 5.4. Εκεί επιβεβαιώνουμε το γεγονός πως αρχικά υπερισχύει η ακτινοβολία για κάποιο σύντομο διάστημα, αφού είναι ανάλογη του a^{-4} . Στην συνέχεια κυριαρχεί η βαρυονική ύλη, η οποία είναι ανάλογη του a^{-3} για ένα σχετικά μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Τέλος επιζεί μόνο η κοσμολογική σταθερά. Σημειώνουμε εδώ πως σε αντίθεση με την ΓΣ, οι πυκνότητες Ω_i μπορούν να πάρουν τιμές μεγαλύτερες της μονάδας εφόσον η τροποποίηση μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές. Το άθροισμα όλων των Ω_i όμως πρέπει να ισούτε με την μονάδα κάθε δεδομένη στιγμή.

Στην γραφική παράσταση 5.5 φαίνεται η συμπεριφορά της τροποποίησης. Σημειώνουμε εδώ πως η πυκνότητα έχει αρνητική τιμή, επομένως η γραφική παράσταση παρουσιάζει τον λογάριθμο της απόλυτης τιμής της πυκνότητας. Παρατηρούμε πως για ένα σύντομο, περίπου ο χρόνος κατά τον οποία υπερισχύει η ακτινοβολία η τροποποίηση έχει θετική κλίση. Στην συνέχεια συμπεριφέρεται σαν ύλη με εξάρτηση από τον παράγοντα κλίμακας κοντά στο -3 μέχρι να υπερισχύσει η κοσμολογική σταθερά. Από το σημείο αυτό και πέρα η τροποποίηση συμπεριφέρεται σαν κοσμολογική σταθερά.

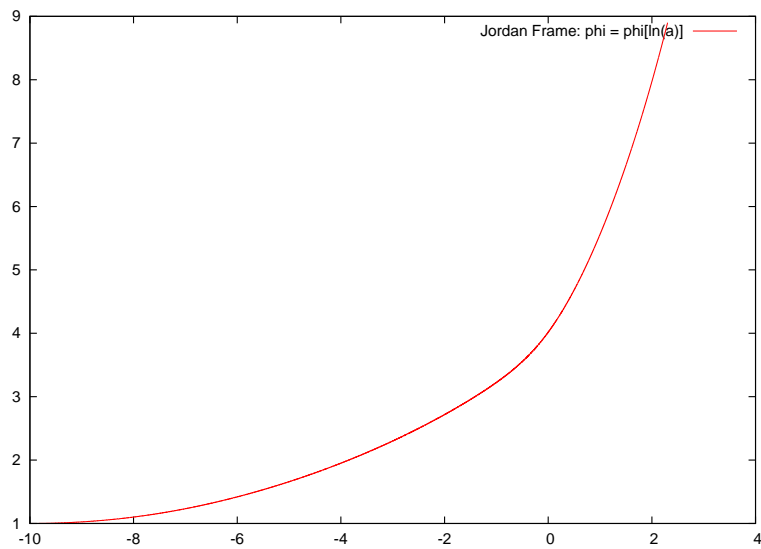
Για πληρότητα παρουσιάζουμε και τις λύσεις $\phi = \phi(\eta)$ και $\phi = \phi(t)$.



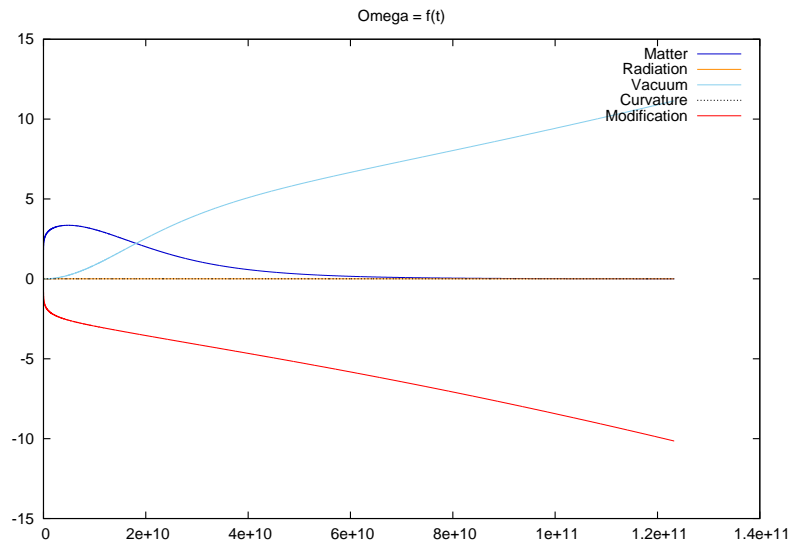
Σχήμα 5.1: Γραφική παράσταση του παράγοντα κλίμακας ως προς τον χρόνο $a = a(t)$ με όλες τις μορφές ύλης σαν πηγή. Η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η λύση από την ολοκλήρωση των εξισώσεων στο Jordan frame, ενώ η μπλε διακεκομμένη στο Einstein frame.



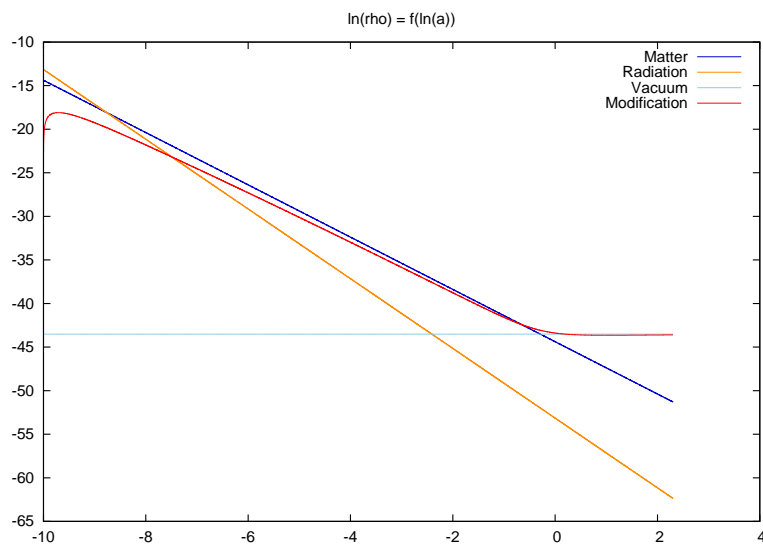
Σχήμα 5.2: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον χρόνο $\phi = \phi(t)$ με όλες τις μορφές ύλης σαν πηγή. Η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η λύση από την ολοκλήρωση των εξισώσεων στο Jordan frame, ενώ η μπλε διακεκομμένη στο Einstein frame.



Σχήμα 5.3: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον λογάριθμο του παράγοντα κλίμακας, $\phi = \phi(\eta)$, $\eta = \ln(a)$ με όλες τις μορφές ύλης σαν πηγή.



Σχήμα 5.4: Γραφική παράσταση των πυκνοτήτων ως προς τον χρόνο, $\Omega_i = \Omega_i(t)$ με όλες τις μορφές ύλης σαν πηγή. Η σκούρα μπλε γραμμή αντιπροσωπεύει την βαρυονική ύλη, η κίτρινη την ακτινοβολία, η γαλάζια την κοσμολογική σταθερά, η μαύρη διακεκομμένη την καμπυλότητα και τέλος η κόκκινη την τροποποίηση.



Σχήμα 5.5: Γραφική παράσταση του λογάριθμου των πυκνοτήτων ως προς τον λογάριθμο του παράγοντα κλίμακας, $\ln(\rho_i) = f(\ln(\eta))$, $\eta = \ln(a)$ με όλες τις μορφές ύλης σαν πηγή. Η σκούρα μπλε γραμμή αντιπροσωπεύει την βαρυονική ύλη, η κίτρινη την ακτινοβολία, η γαλάζια την κοσμολογική σταθερά, η μαύρη διακεκομμένη την καμπυλότητα και τέλος η κόκκινη την τροποποίηση.

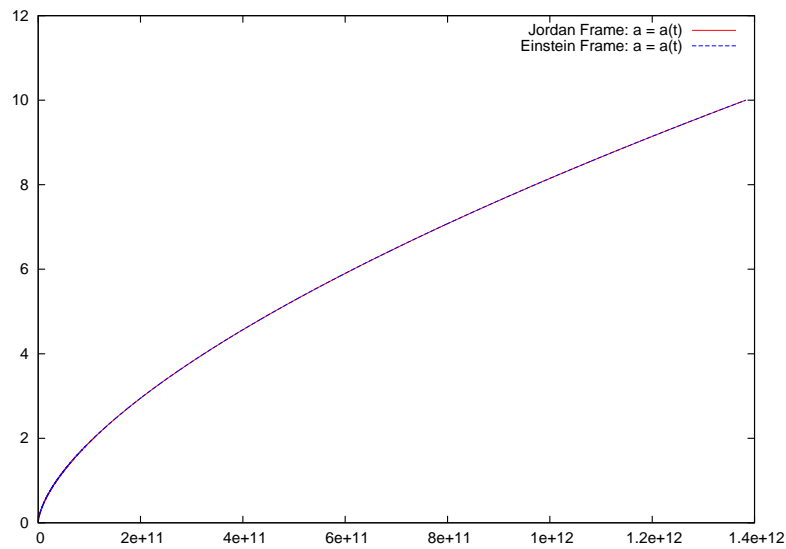
2. Βαρυονική Ύλη

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου έχουμε μόνο βαρυονική ύλη. Θα επιλέξουμε τις τιμές

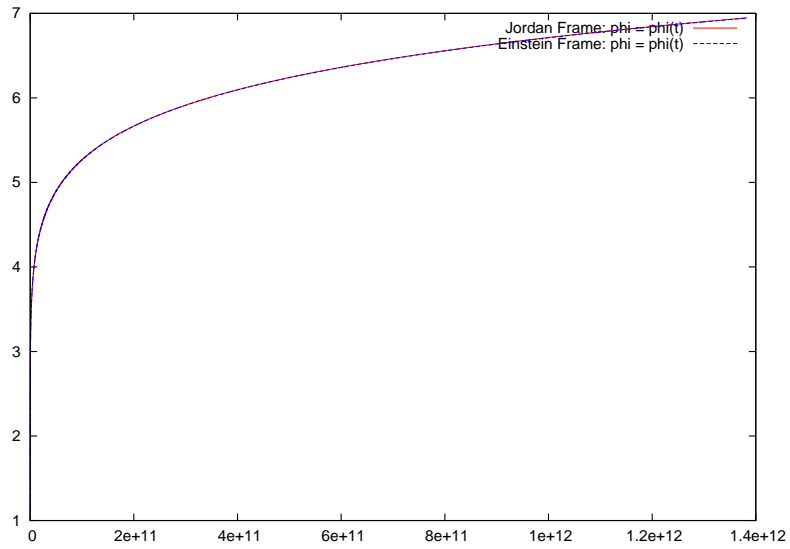
$$\omega_m = 0.15, \quad T = \omega_v = \omega_c = 0. \quad (5.56)$$

Παρατηρούμε πως ο παράγοντας κλίμακας, 5.6 συμπεριφέρεται και πάλι όπως αναμένουμε από την ΓΣ. Η συνάρτηση έχει τα κοίλα προς τα κάτω και μοιάζει με την a^{-3} αναλογία που προβλέπουν οι εξισώσεις Einstein.

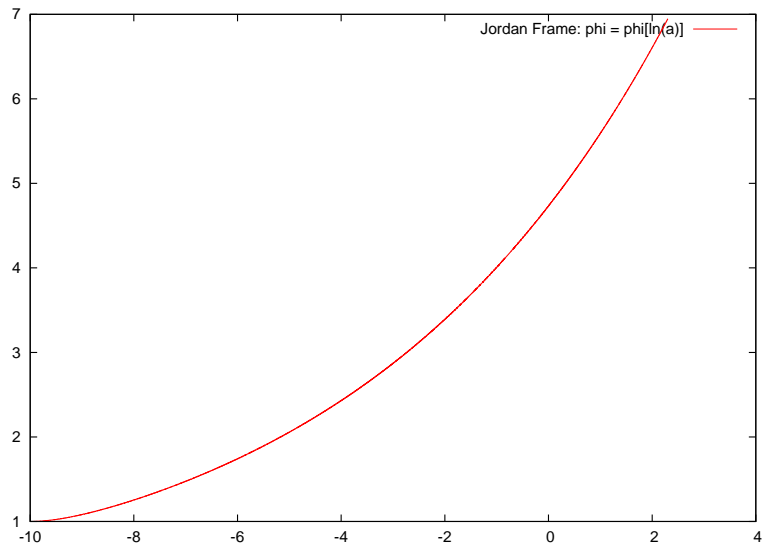
Για πληρότητα παρουσιάζουμε και τις λύσεις $\phi = \phi(\eta)$ και $\phi = \phi(t)$.



Σχήμα 5.6: Γραφική παράσταση του παράγοντα κλίμακας ως προς τον χρόνο $a = a(t)$ με βαρυονική ύλη σαν πηγή. Η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η λύση από την ολοκλήρωση των εξισώσεων στο Jordan frame, ενώ η μπλε διακεκομμένη στο Einstein frame.



Σχήμα 5.7: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον χρόνο $\phi = \phi(t)$ με βαρυονική ύλη σαν πηγή. Η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η λύση από την ολοκλήρωση των εξισώσεων στο Jordan frame, ενώ η μπλε διακεκομμένη στο Einstein frame.



Σχήμα 5.8: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον λογάριθμο του παράγοντα κλίμακας, $\phi = \phi(\eta)$, $\eta = \ln(a)$ με βαρυονική ύλη σαν πηγή.

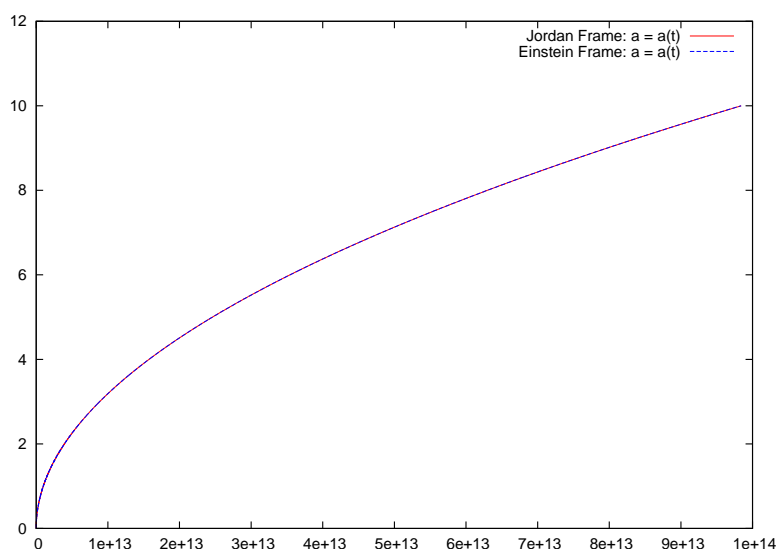
3. Ακτινοβολία

Η επόμενη περίπτωση που θα μελετήσουμε είναι η παρουσία μόνο ακτινοβολίας. Έχουμε επομένως

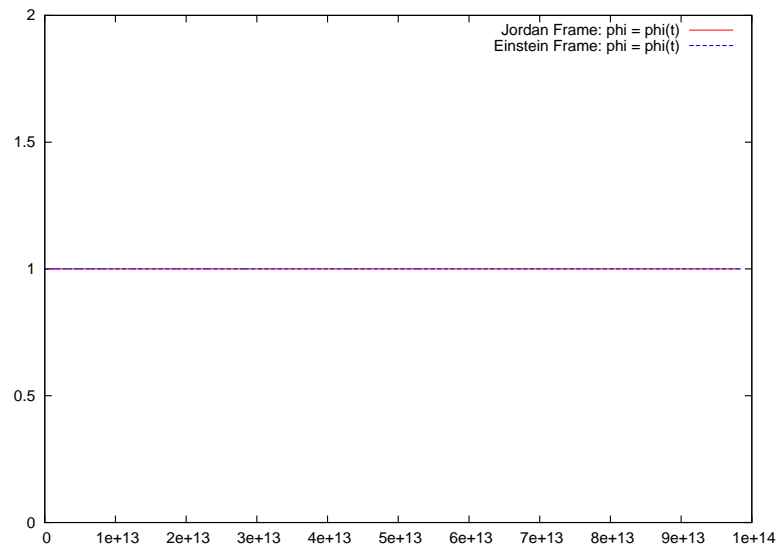
$$T = 2.72548, \quad \omega_m = \omega_v = \omega_c = 0. \quad (5.57)$$

Όπως και στην περίπτωση της βαρυονικής ύλης ο παράγοντας κλίμακας 5.9 φαίνεται να συμπεριφέρεται όπως αναμένουμε, δηλαδή ανάλογο του a^{-4} . Η συμπεριφορά του βαθμωτού πεδίου επίσης είναι αναμενόμενη. Το γεγονός ότι το ίχνος του ταυυστή ενέργειας-ομής της ακτινοβολίας είναι μηδεν και η συγκεκριμένη επιλογή αρχικών συνθηκών μηδενίζει το δεξί σκέλος της εξίσωσης 5.3.2. Αφού επιλέξαμε την αρχική συνθήκη της πρώτης παραγώγου να είναι μηδέν, το πεδίο παγιδεύεται στην αρχική τιμή που επιλέξαμε και παραμένει σταθερό.

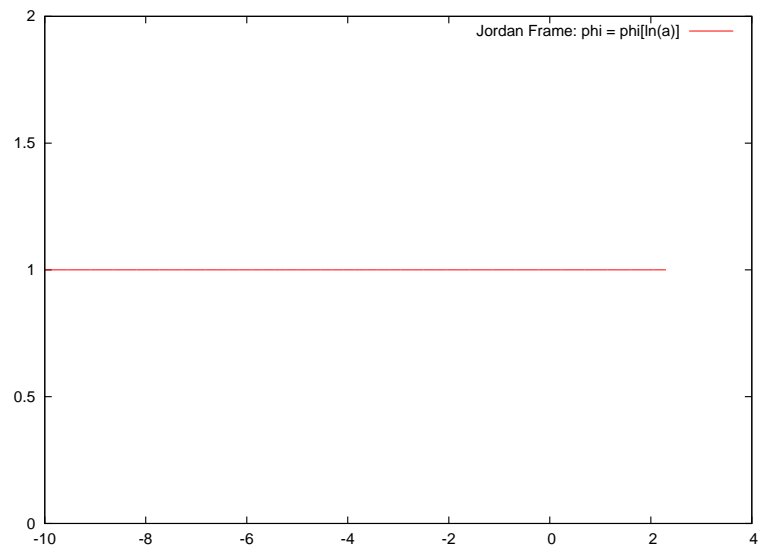
Για πληρότητα παρουσιάζουμε και την λύση $\phi = \phi(\eta)$.



Σχήμα 5.9: Γραφική παράσταση του παράγοντα κλίμακας ως προς τον χρόνο $a = a(t)$ με ακτινοβολία σαν πηγή. Η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η λύση από την ολοκλήρωση των εξισώσεων στο Jordan frame, ενώ η μπλε διακεκομμένη στο Einstein frame.



Σχήμα 5.10: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον χρόνο $\phi = \phi(t)$ με ακτινοβολία σαν πηγή. Η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η λύση από την ολοκλήρωση των εξισώσεων στο Jordan frame, ενώ η μπλε διακεκομμένη στο Einstein frame.



Σχήμα 5.11: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον λογάριθμο του παράγοντα κλίμακας, $\phi = \phi(\eta)$, $\eta = \ln(a)$ με ακτινοβολία σαν πηγή.

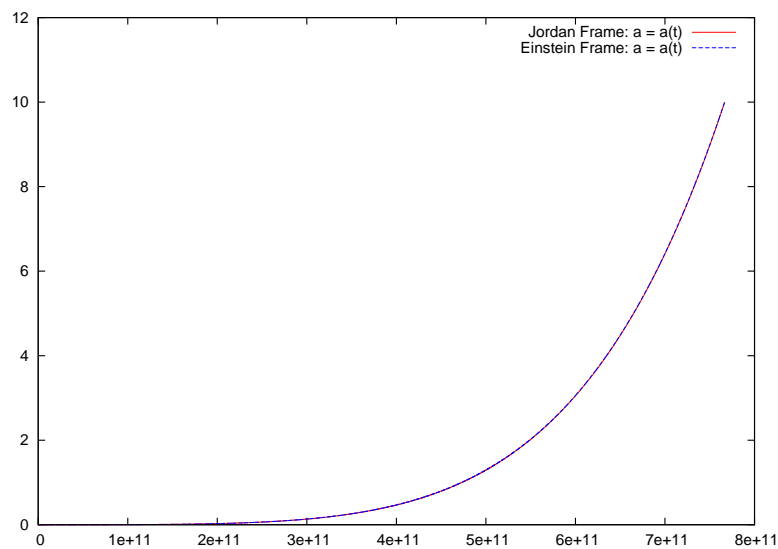
4. Σκοτεινή Ενέργεια

Στην περίπτωση που έχουμε μόνο κοσμολογική σταθερά έχουμε

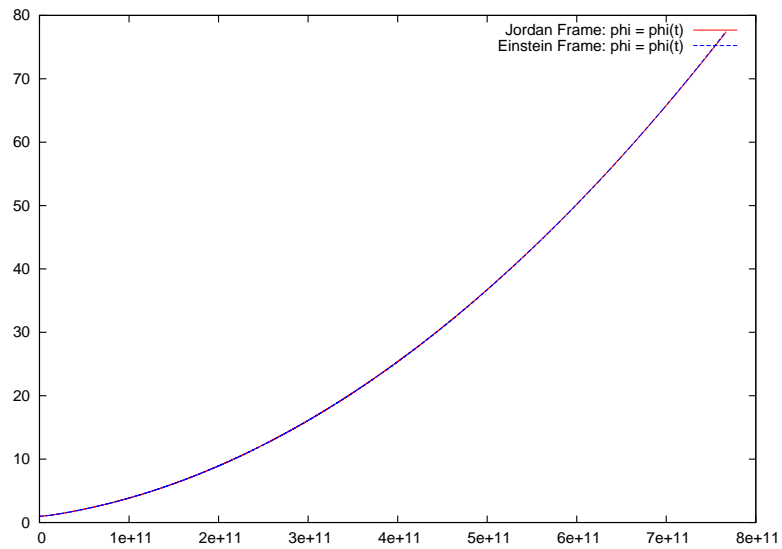
$$\omega_v = 0.36, \quad \omega_m = T = \omega_c = 0. \quad (5.58)$$

Η σχέση του παράγοντα κλίμακας σαν συνάρτηση του χρόνου 5.12, όπως αναμέναμε, μοιάζει εκθετική.

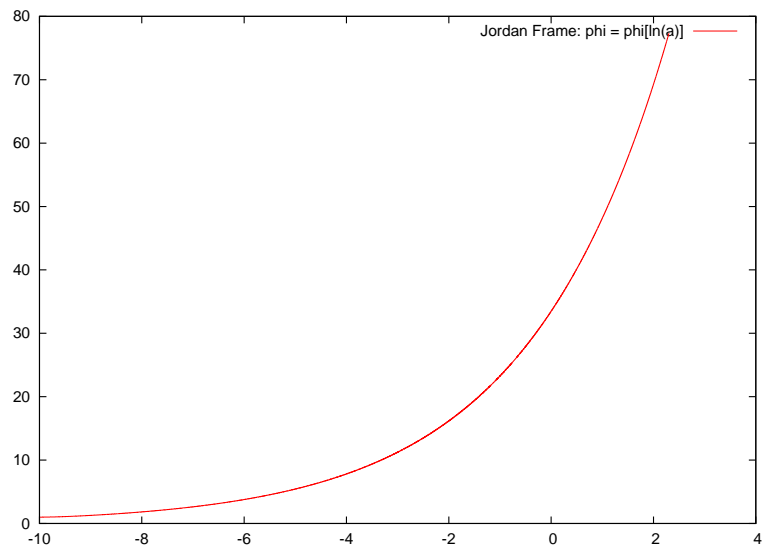
Για πληρότητα παρουσιάζουμε και τις λύσεις $\phi = \phi(\eta)$ και $\phi = \phi(t)$.



Σχήμα 5.12: Γραφική παράσταση του παράγοντα κλίμακας ως προς τον χρόνο $a = a(t)$ με μόνο κοσμολογική σταθερά σαν πηγή. Η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η λύση από την ολοκλήρωση των εξισώσεων στο Jordan frame, ενώ η μπλε διακεκομμένη στο Einstein frame.



Σχήμα 5.13: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον χρόνο $\phi = \phi(t)$ με κοσμολογική σταθερά σαν πηγή. Η κόκκινη συνεχής γραμμή είναι η λύση από την ολοκλήρωση των εξισώσεων στο Jordan frame, ενώ η μπλε διακεκομμένη στο Einstein frame.



Σχήμα 5.14: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον λογάριθμο του παράγοντα κλίμακας, $\phi = \phi(\eta)$, $\eta = \ln(a)$ με κοσμολογική σταθερά σαν πηγή.

5.4 Κυβικό Γαλιλαίονιο στο Einstein Frame

Στην συνέχεια θα προσθέσουμε και τον όρο του κυβικού Γαλιλαίονιου στο Einstein frame. Η δράση μας λοιπόν, αποκτά την μορφή

$$S = S_{BD} + \frac{1}{\Lambda^3} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{X} \tilde{\square} \tilde{\chi} \quad (5.59)$$

όπου $\tilde{X} \equiv -\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\chi} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\chi}$ και S_{BD} η δράση που δίνεται από την εξίσωση (5.19).

5.4.1 Εξισώσεις Κίνησης

1. Όπως και πριν η πρώτη εξίσωση κίνησης δίνεται από την μεταβολή ως προς το βαθμωτό πεδίο, $\tilde{\chi}$. Έχουμε τότε

$$\tilde{\square} \tilde{\chi} + \frac{\alpha^2}{2\Lambda^3} \left((\tilde{\square} \tilde{\chi})^2 - \tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\chi} - \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\nabla}_\kappa \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\nabla}^\kappa \tilde{\chi} \right) = -\frac{\alpha^2}{2M_P} T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \quad (5.60)$$

όπου ορίσαμε $\alpha^{-2} \equiv (2\omega + 3)$ και χρησιμοποιήσαμε την σχέση

$$[\tilde{\square}, \tilde{\nabla}_\mu] \tilde{\chi} = \tilde{R}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\chi} \quad (5.61)$$

η οποία ισχύει για αυθαίρετο βαθμωτό πεδίο. Προκύπτει ουσιαστικά από τον ορισμό του ταυνοστή Riemann, $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^\alpha \equiv R^\alpha_{\beta\mu\nu} T^\beta$

2. Για την μεταβολή της δράσης ως προς την μετρική αντικαθιστούμε πρώτα την ντ' Αλαμπεριανή

$$\tilde{\square} \chi = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\chi}) \quad (5.62)$$

για να γίνει εμφανής η εξάρτηση της από την μετρική. Σημειώνουμε εδώ πως όταν ο στοιχειώδης όγκος είναι $\sqrt{-\tilde{g}} d^d x$ το θεώρημα του Gauss εφαρμόζεται με την συναλλοίωτη παράγωγο. Με την αντικατάσταση της 5.62 διαγράφεται η ρίζα της ορίζουσας της μετρικής και μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Gauss με την μερική παράγωγο.

Καταλήγουμε λοιπόν στην εξίσωση

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu}(g)e^{\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} + \tilde{T}_{\mu\nu}(\tilde{\chi}) \right) \quad (5.63)$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu} &= \frac{2}{\alpha^2} \left(\tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{X} + \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\chi} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\chi} \right) \\ &+ \frac{1}{\Lambda^3} \left((\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\chi} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\chi}) \tilde{\square} \tilde{\chi} + 2\tilde{\nabla}_\mu \tilde{X} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\chi} - \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{X} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\chi} \right). \end{aligned} \quad (5.64)$$

3. Το ίχνος της εξίσωσης 5.63 δίνει

$$-\tilde{R} = \frac{1}{M_P^2} \left[T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} - \frac{2}{\alpha^2} \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\chi} + \frac{1}{\Lambda^3} \left((\tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\chi}) \tilde{\square} \tilde{\chi} - 2\tilde{\nabla}_\lambda \tilde{X} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\chi} \right) \right]. \quad (5.65)$$

5.4.2 Εξισώσεις Κίνησης για FRW Μετρική και Χρονοεξαρτημένο Βαθμωτό Πεδίο

Θα συνεχίσουμε τώρα με τον υπολογισμό των εξισώσεων κίνησης.

1. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\tilde{\square} \tilde{\chi} = -\tilde{\chi}'' - 3\tilde{H}\tilde{\chi}'$, την $(\tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\chi})(\tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\chi}) = \tilde{\chi}''^2 + 3\tilde{H}^2 \tilde{\chi}'^2$ και την (5.61) η εξίσωση (5.60) γίνεται

$$\tilde{\chi}'' + 3\tilde{H}\tilde{\chi}' - \frac{3\alpha^2}{2\Lambda^3} \left(2\tilde{H}\tilde{\chi}'\tilde{\chi}'' + 3\tilde{H}^2\tilde{\chi}'^2 + \tilde{H}'\tilde{\chi}'^2 \right) = \frac{\alpha^2}{2M_P} T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}}. \quad (5.66)$$

2. Ομοίως, χρησιμοποιώντας την σχέση $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\chi} (\tilde{\nabla}_\nu \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\chi}) = -\tilde{\chi}'^2 \tilde{\chi}'' e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}}$ μαζί με την $\tilde{\nabla}^\kappa \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\chi} (\tilde{\nabla}_\kappa \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\chi}) = \tilde{\chi}'^2 \tilde{\chi}''$ η εξίσωση (5.63) γίνεται

$$3\frac{k}{b^2} + 3\tilde{H}^2 = \frac{1}{M_P^2} \left(\rho e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{1}{\alpha^2} \tilde{\chi}'^2 - \frac{3}{\Lambda^3} \tilde{H} \tilde{\chi}'^3 \right). \quad (5.67)$$

3. Τέλος, η εξίσωση (5.65) δίνει

$$-6 \left(\tilde{H}' + 2\tilde{H}^2 + \frac{k}{b^2} \right) = \frac{1}{M_P^2} \left[T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{2}{\alpha^2} \tilde{\chi}'^2 + \frac{3\tilde{\chi}'^2}{\Lambda^3} (\tilde{\chi}'' + \tilde{H}\tilde{\chi}') \right]. \quad (5.68)$$

5.5 Κυβικό Γαλιλαιόνιο στο Jordan Frame

Εκτελώντας τον αντίστροφο σύμμορφο μετασχηματισμό στην δράση (5.59) αποκτούμε το κυβικό Γαλιλαιόνιο στο Jordan frame

$$S = S_{BD} + \frac{M_P^3}{16\Lambda^3} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi}{\phi^2} \right) \frac{\square \phi}{\phi} + S_m[g]. \quad (5.69)$$

5.5.1 Εξισώσεις Κίνησης

1. Η πρώτη εξίσωση κίνησης δίνεται από την μεταβολή ως προς το πεδίο $\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned} R = & -2\omega \frac{1}{\phi} \left(\square \phi + \frac{Y}{\phi} \right) \\ & + \frac{M_p}{4\Lambda^3} \frac{1}{\phi^3} \left((\square \phi)^2 + \nabla_\lambda \phi (\nabla^\lambda \square \phi) + \square Y - 6 \frac{\nabla_\lambda Y \nabla^\lambda \phi}{\phi} - 24 \frac{Y^2}{\phi^2} \right) \end{aligned} \quad (5.70)$$

όπου ορίσαμε το $Y_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi$ και $Y \equiv Y_\mu^\mu$.

2. Η μεταβολή ως προς την μετρική δίνει τις εξισώσεις Einstein

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = & \frac{1}{M_P^2} \frac{T_{\mu\nu}}{\phi} - 2 \frac{\omega}{\phi^2} \left(Y_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} Y \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) \\ & + \frac{M_p}{4\Lambda^3} \frac{1}{\phi^4} \left(Y_{\mu\nu} \square \phi - \nabla_\mu Y \nabla_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda Y \nabla^\lambda \phi \right. \\ & \left. - 6 \frac{Y_{\mu\nu} Y}{\phi} + 3 g_{\mu\nu} \frac{Y^2}{\phi} \right). \end{aligned} \quad (5.71)$$

3. Τέλος, αθροίζοντας το ίχνος της εξίσωσης (5.66) στην (5.70)

$$\square\phi - \frac{\alpha^2 M_P}{4\Lambda^3} \frac{1}{\phi^2} \left[(\square\phi)^2 + \nabla_\lambda\phi(\nabla^\lambda\square\phi) + \square Y + \frac{Y\square\phi}{\phi} - 5 \frac{\nabla_\lambda Y \nabla^\lambda\phi}{\phi} - 18 \frac{Y^2}{\phi^2} \right] = \alpha^2 8\pi G T. \quad (5.72)$$

5.5.2 Εξισώσεις Κίνησης για FRW Μετρική και Χρονοεξαρτημένο Βαθμωτό Πεδίο

1. Θα ξεκινήσουμε με την εξίσωση (5.72). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $(\nabla^\lambda\phi\nabla^\kappa\phi)\nabla_\lambda\nabla_\kappa\phi = \dot{\phi}^2\ddot{\phi}$ και $(\nabla^\lambda\nabla^\kappa\phi)(\nabla_\lambda\nabla_\kappa\phi) = \ddot{\phi}^2 + 3H^2\dot{\phi}^2$ με την βοήθεια των ποσοτήτων καμπυλότητας από το παράρτημα (B') καταλήγουμε στην εξίσωση

$$-\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} - \frac{\alpha^2 M_P}{4\Lambda^3} \frac{1}{\phi^2} \left(6H\dot{\phi}\ddot{\phi} + 9H^2\dot{\phi}^2 + 3\dot{H}\dot{\phi}^2 - \frac{3}{2}H\frac{\dot{\phi}^3}{\phi} + \frac{9}{2}\frac{\dot{\phi}^2\ddot{\phi}}{\phi} - \frac{9}{2}\frac{\dot{\phi}^4}{\phi^2} \right) = \frac{\alpha^2}{M_P^2} T(g). \quad (5.73)$$

2. Με την σχέση $(\nabla^\lambda\phi\nabla_0\phi)\nabla_\lambda\nabla_0\phi = -\dot{\phi}^2\ddot{\phi}$ μπορούμε να υπολογίσουμε την $_{00}$ συνιστώσα της (5.66) η οποία δίνει την πρώτη εξίσωση Friedmann

$$3\frac{k}{a^2} + 3H^2 - \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 8\pi G\frac{\rho}{\phi} + \frac{3M_P}{8\Lambda^3} \frac{1}{\phi^4} \left(\frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^4}{\phi} + H\dot{\phi}^3 \right). \quad (5.74)$$

3. Τέλος, η δεύτερη εξίσωση Friedmann δίνεται από το ίχνος της εξίσωσης Einstein (5.66)

$$-6 \left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2} \right) = \frac{1}{M_P^2} \frac{T(g)}{\phi} + \omega\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + 9H\frac{\dot{\phi}}{\phi} + 3\frac{\ddot{\phi}}{\phi} - \frac{3M_P}{8\Lambda^3} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^4} \left(\ddot{\phi} + H\dot{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} \right). \quad (5.75)$$

5.6 Λύσεις του Κυβικού Γαλιλαϊόνιου

5.6.1 Λύσεις του Κυβικού Γαλιλαϊόνιου στο Einstein Frame

Έχοντας υπολογίσει όλες τις εξισώσεις κίνησης και στα δύο frames θα προχωρήσουμε στην επίλυση τους όπως στο Brans-Dicke. Το σύστημα εξισώσεων Einstein frame που πρέπει να λυθεί τώρα είναι

$$3\frac{k}{b^2} + 3\tilde{H}^2 = \frac{1}{M_P^2} \left(\rho e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{1}{\alpha^2} \tilde{\chi}'^2 - \frac{3}{\Lambda^3} \tilde{H} \tilde{\chi}'^3 \right) \quad (5.76)$$

$$\tilde{\chi}'' + 3\tilde{H}\tilde{\chi}' - \frac{3\alpha^2}{2\Lambda^3} \left(2\tilde{H}\tilde{\chi}'\tilde{\chi}'' + 3\tilde{H}^2\tilde{\chi}'^2 + \tilde{H}'\tilde{\chi}'^2 \right) = \frac{\alpha^2}{2M_P} T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \quad (5.77)$$

$$-6 \left(\tilde{H}' + 2\tilde{H}^2 + \frac{k}{b^2} \right) = \frac{1}{M_P^2} \left[T e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{2}{\alpha^2} \tilde{\chi}'^2 + \frac{3\tilde{\chi}'^2}{\Lambda^3} \left(\tilde{\chi}'' + \tilde{H}\tilde{\chi}' \right) \right]. \quad (5.78)$$

Γράφουμε τώρα την πρώτη εξίσωση Friedmann σε διαφορετική μορφή

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_m + \tilde{\Omega}_r + \tilde{\Omega}_v + \tilde{\Omega}_c + \tilde{\Omega}_{mod} &= 1, \\ \tilde{\Omega}_i &= \frac{\rho_i}{\rho_{crit}} e^{\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}}, \quad \rho_{crit} = 3\tilde{H}^2 M_P^2 \end{aligned} \quad (5.79)$$

όπου

$$\rho_{mod} = \rho \left(e^{\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} - 1 \right) + \left[(2\omega + 6)\tilde{\chi}'^2 - \frac{3}{\Lambda^3} \tilde{H} \tilde{\chi}'^3 + 6M_P \tilde{H} \tilde{\chi}' \right] e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} \quad (5.80)$$

Στην μορφή αυτή μπορούμε να μελετήσουμε την απόκλιση του μοντέλου αυτού από την ΓΣ αφού εισάγοντας την μεταβλητή ρ_{mod} έχουμε κάνει εμφανή την τροποποίηση. Λύνοντας την δευτεροβάθμια εξίσωση η (5.77) δίνει

$$\tilde{H} = -\frac{1}{2M_P^2\Lambda^3}\tilde{\chi}'^3 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2M_P^2\Lambda^3}\tilde{\chi}'^3\right)^2 - \frac{k}{b^2} + \frac{1}{3M_P^2}\rho e^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{1}{3M_P^2\alpha^2}\tilde{\chi}'^2}. \quad (5.81)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις καταλήγουμε στην σχέση

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}'' = & \left[1 - \frac{3\alpha^2}{\Lambda^3}\tilde{\chi}'\left(\tilde{H} - \frac{1}{4M_P^2\Lambda^3}\tilde{\chi}'^3\right)\right]^{-1} \times \left[\frac{\alpha^2}{2M_P}Te^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} - 3\tilde{H}\tilde{\chi}'\right. \\ & \left. + \frac{3\alpha^2}{2\Lambda^3}\tilde{\chi}'^2\left(\tilde{H}^2 - \frac{k}{b^2} - \frac{1}{6M_P^2}Te^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} - \frac{1}{3\alpha^2M_P^2}\tilde{\chi}'^2 - \frac{1}{2M_P^2\Lambda^3}\tilde{H}\tilde{\chi}'^3\right)\right]. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Τέλος μπορούμε να ολοκληρώσουμε την (5.77) και να πάρουμε την σχέση

$$\tilde{\chi}' - \frac{3\alpha^2}{2\Lambda^3}\tilde{H}\tilde{\chi}'^2 = \tilde{\chi}'_0 + \frac{\alpha^2}{2M_P}\frac{1}{b^3}\int d\tilde{t} b^3Te^{\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \quad (5.83)$$

όπου το $\tilde{\chi}'_0$ είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

5.6.2 Λύσεις του Κυβικού Γαλιλαϊόνιου στο Jordan Frame

Στο Jordan frame οι εξισώσεις που πρέπει να λυθούν είναι

$$3\frac{k}{a^2} + 3H^2 - \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} + 3H\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 8\pi G\frac{\rho}{\phi} + \frac{3M_P}{8\Lambda^3}\frac{1}{\phi^4}\left(\frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^4}{\phi} + H\dot{\phi}^3\right) \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} -\ddot{\phi} - 3H\dot{\phi} - \frac{3\alpha^2M_P}{4\Lambda^3}\frac{\dot{\phi}}{\phi^2}\left(2H\ddot{\phi} + 3H^2\dot{\phi} + \dot{H}\dot{\phi} - \frac{1}{2}H\frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \frac{3}{2}\frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}}{\phi} - \frac{3}{2}\frac{\dot{\phi}^3}{\phi^2}\right) \\ = \frac{\alpha^2}{M_P^2}T \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\begin{aligned}
 -6 \left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2} \right) &= \frac{1}{M_P^2} \frac{T(g)}{\phi} + \omega \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + 9H \frac{\dot{\phi}}{\phi} \\
 &+ 3 \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - \frac{3M_P^2 \dot{\phi}^2}{8\Lambda^3 \phi^4} \left(\ddot{\phi} + H\dot{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} \right). \quad (5.86)
 \end{aligned}$$

Ακολουθώντας ξανά τα ίδια βήματα όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο ξαναγράφουμε την πρώτη εξίσωση στην μορφή

$$\begin{aligned}
 \Omega_m + \Omega_r + \Omega_v + \Omega_c + \Omega_{mod} &= 1, \\
 \Omega_i &= \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}, \quad \rho_{crit} = 3H^2 M_P^2 \quad (5.87)
 \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε την μεταβλητή

$$\rho_{mod} = \rho \left(\frac{1}{\phi} - 1 \right) + \frac{\omega M_P^2 \dot{\phi}^2}{2 \phi} - 3M_P^2 H \frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{3M_P^2}{8\Lambda^3} \frac{1}{\phi^4} \left(\frac{1}{2} \frac{\phi^4}{\phi} + H\phi^3 \right). \quad (5.88)$$

Η πρώτη εξίσωση Friedmann (5.6.2) δίνει

$$\begin{aligned}
 H &= - \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left(1 - \frac{M_P \dot{\phi}^2}{8\Lambda^3 \phi^3} \right) \\
 &\pm \sqrt{ \frac{1}{4} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} \left(1 - \frac{M_P \dot{\phi}^2}{8\Lambda^3 \phi^3} \right)^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{\omega \dot{\phi}^2}{6 \phi^2} + \frac{1}{3M_P^2} \frac{\rho}{\phi} + \frac{M_P \dot{\phi}^4}{16\Lambda^3 \phi^5} } \quad (5.89)
 \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις υπόλοιπες εξισώσεις καταλήγουμε στην σχέση

$$\ddot{\phi} = \left[1 + \frac{3\alpha^2 M_P \dot{\phi}}{4\Lambda^3 \phi^2} \left(2H + \frac{\dot{\phi}}{\phi} + \frac{M_P \dot{\phi}^3}{16\Lambda^3 \phi^4} \right) \right]^{-1} \times$$

$$\left[-3H\dot{\phi} - \frac{\alpha^2}{M_P^2} T - \frac{3\alpha^2 M_P \dot{\phi}^2}{4\Lambda^3 \phi^2} \left(H^2 - 2H\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{1}{6M_P^2} \frac{T}{\phi} - \frac{k}{a^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2} \left(3 + \frac{\omega}{3} \right) \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + \frac{M_P \dot{\phi}^3}{16\Lambda^3 \phi^4} \left(H - \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) \right) \right] \quad (5.90)$$

Τέλος, ολοκληρώνοντας την εξίσωση (5.6.2) έχουμε

$$\dot{\phi} + \frac{3\alpha^2 M_P}{4\Lambda^3} \left(H + \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \right) \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} = \dot{\phi}_0 - \frac{\alpha^2}{M_P^2} \frac{1}{a^3} \int dt a^3 T \quad (5.91)$$

όπου το $\dot{\phi}_0$ είναι σταθερά ολοκλήρωσης.

5.6.3 Γραφικές Παραστάσεις

Θα προχωρήσουμε με τις υπολογιστικές λύσεις των πιο πάνω εξισώσεων. Εδώ, για την επίλυση των εξισώσεων θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Για αρχικές συνθήκες θα χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες με την λύση των εξισώσεων Brans-Dicke 5.52, 5.53. Επίσης θα θέσουμε όπως πριν την παράμετρο Brans-Dicke μονάδα, $\omega = 1$.

Παρατηρούμε πως η εξίσωση 5.83 είναι δευτεροβάθμια και έχει επομένως δυο λύσεις. Η επιλογή των αρχικών συνθηκών και παραμέτρων του προβλήματος θα καθορίσουν την λύση στην οποία καταλήγουμε. Δεν θα προσθέσουμε κοσμολογική σταθερά σε οποιαδήποτε ανάλυση με την ελπίδα πως θα βρούμε self-accelerating λύση.

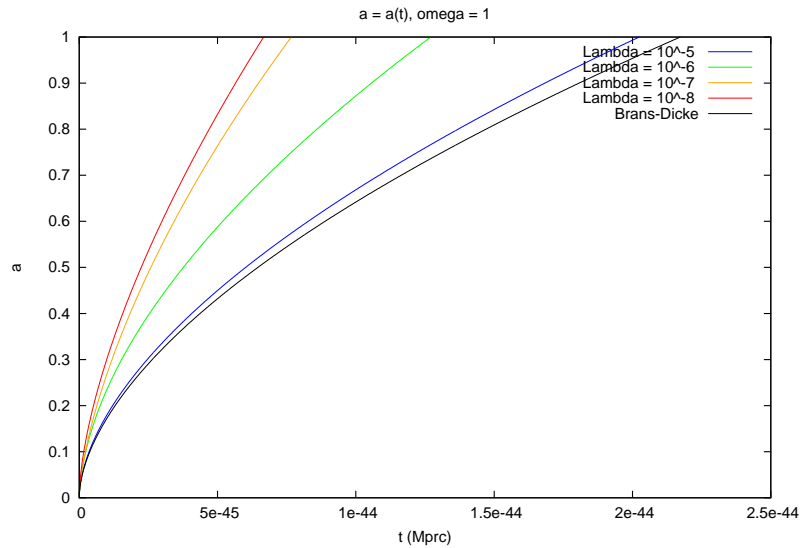
1. Βαρυονική Ύλη και Ακτινοβολία

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό 5.54, θα επιλέγουμε τις τιμές

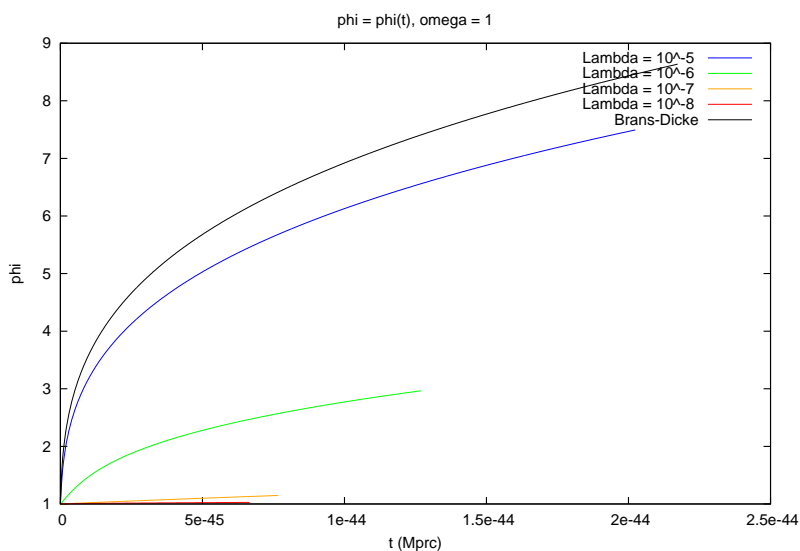
$$\omega_m = 0.51, \quad T = 2.72548, \quad \omega_v = \omega_c = 0. \quad (5.92)$$

Η γραφική παράσταση 5.15 παρουσιάζει την λύση του παράγοντα κλίμακας ως προς τον χρόνο για διάφορες τιμές της σταθεράς Λ . Όπως αναμέναμε, καθώς η τιμή του Λ μικραίνει, τόσο ο Γαλιλαϊονικός όρος συνεισφέρει περισσότερο και η λύση απομακρύνεται από αυτή του Brans-Dicke. Επίσης παρατηρούμε πως το Γαλιλαϊόνιο τείνει σε μικρές τιμές όπως φαίνεται στην 5.16

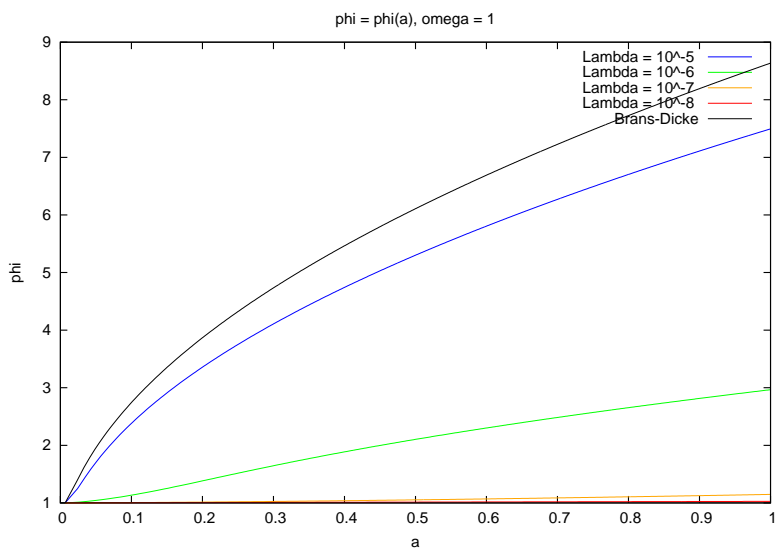
Για πληρότητα παρουσιάζουμε και την λύση $\phi = \phi(a)$, 5.17.



Σχήμα 5.15: Γραφική παράσταση του παράγοντα κλίμακας ως προς τον χρόνο, $a = a(t)$ με βαρυονική ύλη και ακτινοβολία σαν πηγή. Τα διάφορα χρώματα αντιπροσωπεύουν λύσεις για διαφορετικές τιμές της παράμετρου Λ .



Σχήμα 5.16: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον χρόνο, $\phi = \phi(t)$ με βαρυονική ύλη και ακτινοβολία σαν πηγή. Τα διάφορα χρώματα αντιπροσωπεύουν λύσεις για διαφορετικές τιμές της παράμετρου Λ .



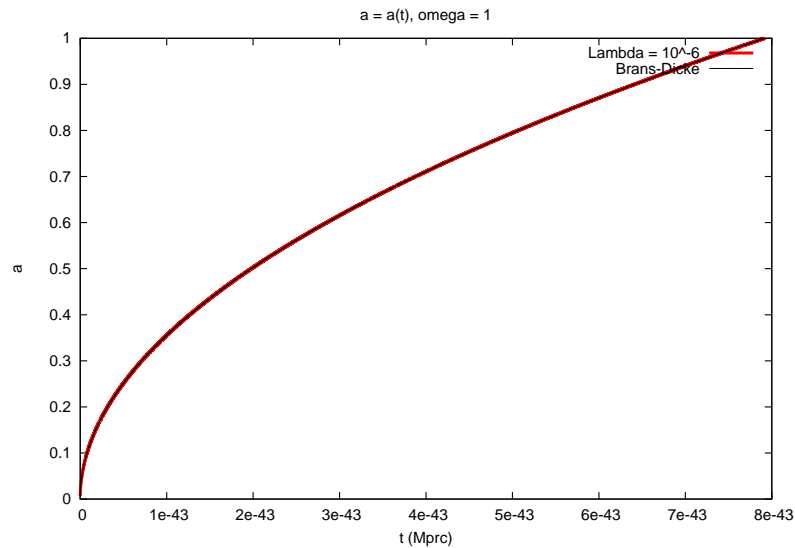
Σχήμα 5.17: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον παράγοντα κλίμακας, $\phi = \phi(a)$ με βαρυονική ύλη και ακτινοβολία σαν πηγή. Τα διάφορα χρώματα αντιπροσωπεύουν λύσεις για διαφορετικές τιμές της παράμετρου Λ .

2. Ακτινοβολία

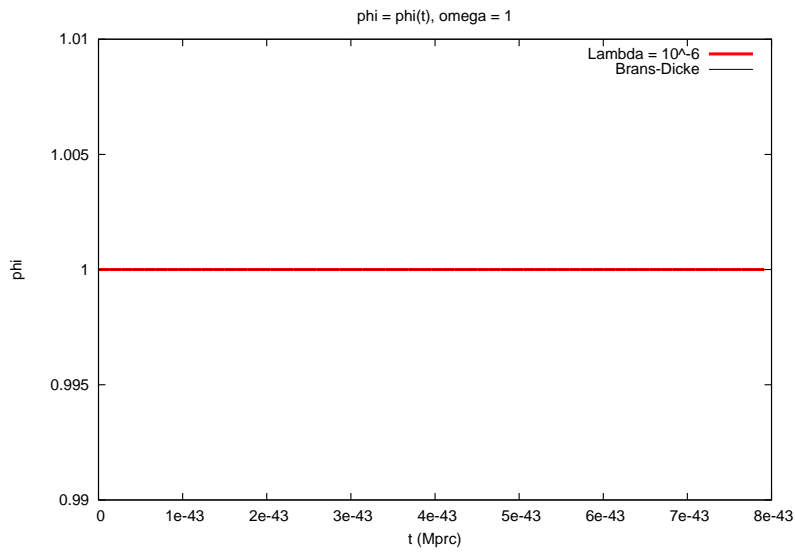
Για την μελέτη της ύπαρξης μόνο ακτινοβολίας επιλέγουμε τις τιμές

$$T = 2.72548, \quad \omega_m = \omega_v = \omega_c = 0. \quad (5.93)$$

Η περίπτωση αυτή είναι τετριμμένη αφού η συγκεκριμένη επιλογή αρχικών συνθηκών μαζί με το γεγονός ότι το ίχνος του ταχυστή ενέργειας ορμής για ακτινοβολία είναι μηδέν έχει ως αποτέλεσμα το Γαλιλαϊόνιο να παραμείνει σταθερό. Οι λύσεις επομένως είναι ταυτόσημες με αυτές του προβλήματος Brans-Dicke. Παρόλ' αυτά η περίπτωση αυτή επιβεβαιώνει την ορθότητα του κώδικα. Παρουσιάζουμε επομένως τις γραφικές παραστάσεις 5.18, 5.19 σαν ένδειξη της συμφωνίας των λύσεων.



Σχήμα 5.18: Γραφική παράσταση του παράγοντα κλίμακας ως προς τον χρόνο, $a = a(t)$ με ακτινοβολία σαν πηγή. Η μαύρη λεπτή γραμμή αντιπροσωπεύει την λύση από την εξίσωση με το Γαλιλαϊόνιο ενώ η κόκκινη χροντρή γραμμή την λύση των εξισώσεων Brans-Dicke.



Σχήμα 5.19: Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου ως προς τον χρόνο, $\phi = \phi(t)$ με ακτινοβολία σαν πηγή. Η μαύρη λεπτή γραμμή αντιπροσωπεύει την λύση από την εξίσωση με το Γαλιλαϊόνιο ενώ η κόκκινη χροντρή γραμμή την λύση των εξισώσεων Brans-Dicke.

Παράρτημα Α΄

Σύμμορφοι Μετασχηματισμοί

Η ιδιότητα που χαρακτηρίζει τους σύμμορφους μετασχηματισμούς είναι το γεγονός ότι διατηρούν τις γωνίες. Ξεκινώντας από μια μετρική $g_{\mu\nu}$ μπορούμε να την μετασχηματίσουμε σύμμορφα με τον ακόλουθο τρόπο

$$g_{\mu\nu} = e^{2\Omega} \tilde{g}_{\mu\nu} \quad (\text{A'.1})$$

όπου $\Omega = \Omega(x)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση. Μετασχηματίζοντας την μετρική λέμε ότι αλλάζουμε frame. Κάτω από τον μετασχηματισμό για την αντίστροφη μετρική μετασχηματίζεται $g^{\mu\nu} = e^{-2\Omega} \tilde{g}^{\mu\nu}$ και για την ποσότητα $\sqrt{-g} = e^{4\Omega} \sqrt{-\tilde{g}}$.

Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει πως τα σύμβολα Christoffel μετασχηματίζονται ως

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} &= \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} + \left(\delta_{\alpha}^{\mu} \tilde{\nabla}_{\beta} \Omega + \delta_{\beta}^{\mu} \tilde{\nabla}_{\alpha} \Omega - \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{\nabla}^{\mu} \Omega \right) \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} &= \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - \left(\delta_{\alpha}^{\mu} \nabla_{\beta} \Omega + \delta_{\beta}^{\mu} \nabla_{\alpha} \Omega - g_{\alpha\beta} \nabla^{\mu} \Omega \right). \end{aligned} \quad (\text{A'.2})$$

Σημειώνουμε εδώ πως $\nabla_{\mu} \Omega = \tilde{\nabla}_{\mu} \Omega$ το οποίο ισχύει μόνο για βαθμωτά πεδία αφού η δράση της συναλλοίωτης παραγώγου σε βαθμωτά πεδία ισούτε με την μερική παράγωγο.

Χρησιμοποιώντας την συναλλοίωτη παράγωγο στο Einstein frame των σύμβολων Christoffel

$$\tilde{\nabla}_{\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \partial_{\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + \tilde{\Gamma}_{\nu\lambda}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} - \tilde{\Gamma}_{\alpha\nu}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} - \tilde{\Gamma}_{\nu\beta}^{\lambda} \Gamma_{\alpha\lambda}^{\mu} \quad (\text{A'.3})$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις μερικές παραγώγους στον ορισμό του τανυστή Riemann

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \tilde{\nabla}_{[\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu]\mu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu[\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu]\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\lambda}) - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}(\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\lambda}). \quad (A'.4)$$

Αντικαθιστώντας σ' αυτή την εξίσωση (A') έχουμε τον μετασχηματισμό του τανυστή Riemann

$$\begin{aligned} R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} &= \tilde{R}^{\alpha}_{\mu\beta\nu} - \delta_{[\beta}^{\alpha}\tilde{\nabla}_{\nu]}\tilde{\nabla}_{\mu}\Omega + \tilde{g}_{\mu[\beta}\tilde{\nabla}_{\nu]}\tilde{\nabla}^{\alpha}\Omega + \delta_{[\beta}^{\alpha}\tilde{\nabla}_{\nu]}\Omega\tilde{\nabla}_{\mu}\Omega \\ &\quad - \tilde{g}_{\mu[\beta}\tilde{\nabla}_{\nu]}\Omega\tilde{\nabla}^{\alpha}\Omega + \tilde{g}_{\mu[\beta}\delta_{\nu]}^{\alpha}\tilde{\nabla}_{\lambda}\Omega\tilde{\nabla}^{\lambda}\Omega \\ \tilde{R}^{\alpha}_{\mu\beta\nu} &= R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} + \delta_{[\beta}^{\alpha}\nabla_{\nu]}\nabla_{\mu}\Omega - g_{\mu[\beta}\nabla_{\nu]}\nabla^{\alpha}\Omega - 3\delta_{[\beta}^{\alpha}\nabla_{\nu]}\Omega\nabla_{\mu}\Omega \\ &\quad + 3g_{\mu[\beta}\nabla_{\nu]}\Omega\nabla^{\alpha}\Omega - 3g_{\mu[\beta}\delta_{\nu]}^{\alpha}\nabla_{\lambda}\Omega\nabla^{\lambda}\Omega. \end{aligned} \quad (A'.5)$$

Παίρνοντας το ίχνος ως προς τους δείκτες α και β έχουμε τον μετασχηματισμό του τανυστή Ricci

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \tilde{R}_{\mu\nu} - 2\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\nabla}_{\nu}\Omega - \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{\nabla}_{\lambda}\tilde{\nabla}^{\lambda}\Omega + 2\tilde{\nabla}_{\mu}\Omega\tilde{\nabla}_{\nu}\Omega - 2\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{\nabla}_{\lambda}\Omega\tilde{\nabla}^{\lambda}\Omega \\ \tilde{R}_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + 2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Omega + g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\nabla^{\lambda}\Omega - 6\nabla_{\mu}\Omega\nabla_{\nu}\Omega + 6g_{\mu\nu}\nabla_{\lambda}\Omega\nabla^{\lambda}\Omega \end{aligned} \quad (A'.6)$$

και τέλος, πολλαπλασιάζοντας με $g^{\mu\nu} = e^{-2\Omega}\tilde{g}^{\mu\nu}$, τον μετασχηματισμό της βαθμωτής καμπυλότητας

$$\begin{aligned} R &= e^{-2\Omega}(\tilde{R} - 6\tilde{\square}\Omega - 6\tilde{\nabla}_{\lambda}\Omega\tilde{\nabla}^{\lambda}\Omega) \\ \tilde{R} &= e^{2\Omega}(R + 6\square\Omega + 18\nabla_{\lambda}\Omega\nabla^{\lambda}\Omega). \end{aligned} \quad (A'.7)$$

A'.1 Χρήσιμες σχέσεις

Παραθέτουμε εδώ μια σειρά από χρήσιμες σχέσεις που συνδέουν ποσότητες από το Jordan frame στο Einstein frame.

Υπενθυμίζουμε πως $\phi = e^{-\frac{2\chi}{M_P}}$. Σχέσεις μεταξύ των παραγώγων των πεδίων ϕ και $\tilde{\chi}$ δίνονται πιο κάτω

$$\begin{aligned}
 \frac{\nabla_\mu \phi}{\phi} &= -\frac{2}{M_P} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\chi} \\
 \frac{\nabla_\mu \nabla_\nu \phi}{\phi} &= \frac{8}{M_P^2} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\chi} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\chi} - \frac{2}{M_P} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\chi} - \frac{2}{M_P^2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\chi} \\
 \frac{\square \phi}{\phi} &= -\frac{2}{M_P} \tilde{\square} \tilde{\chi} e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} \\
 \left(\frac{\nabla_\mu \phi}{\phi} \right) \left(\frac{[\square, \nabla_\mu] \phi}{\phi} \right) &= \frac{4}{M_P^2} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\chi} [\tilde{\square}, \tilde{\nabla}_\mu] e^{-\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \\
 &+ \frac{4}{M_P^2} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\chi} \tilde{\nabla}^\nu \tilde{\chi} \left(-\frac{2}{M_P} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\chi} - \frac{1}{M_P} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\square} \tilde{\chi} \right. \\
 &\left. + \frac{2}{M_P} \tilde{\nabla}^\mu \tilde{\chi} \tilde{\nabla}_\nu \tilde{\chi} - \frac{2}{M_P} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\nabla}^\lambda \tilde{\chi} \tilde{\nabla}_\lambda \tilde{\chi} \right) e^{-\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \quad (A'.8)
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις μετρικές FRW έχουμε από την σχέση (A'.1)

$$\tilde{g}_{00} = -e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}}, \quad \tilde{g}_{ii} = b^2(t) \gamma_{ii}. \quad (A'.9)$$

με

$$b(\tilde{t}) = e^{\frac{\tilde{\chi}}{M_P}} a(t), \quad d\tilde{t} = e^{-\frac{\tilde{\chi}}{M_P}} dt \quad (A'.10)$$

όπου ταυτόχρονα ορίσαμε την καινούρια συντεταγμένη \tilde{t} . Θα συμβολίζουμε παραγωγή ως προς t με $\dot{}$ και παραγωγή ως προς \tilde{t} με $\tilde{}'$. Οι παράμετροι Hubble ορίζονται ως $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ και $\tilde{H} \equiv \frac{b'}{b}$ και συνδέονται μέσω της σχέσης

$$H = \left(\tilde{H} + \frac{\tilde{\chi}'}{M_P} \right) e^{-\frac{\tilde{\chi}}{M_P}} \quad (A'.11)$$

ενώ οι παράγωγοι

$$\dot{H} = \left(\tilde{H}' + \frac{1}{M_P} \tilde{\chi}'' \right) e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} - \frac{1}{M_P} \tilde{\chi}' \left(\tilde{H} + \frac{1}{M_P} \tilde{\chi}' \right) e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} \quad (A'.12)$$

Για τα πεδία ϕ και $\tilde{\chi}$ έχουμε

$$\dot{\phi} = -\frac{2}{M_P} \tilde{\chi}' e^{-\frac{3\tilde{\chi}}{M_P}}, \quad \ddot{\phi} = -\frac{2}{M_P} \tilde{\chi}'' e^{-\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} + \frac{6}{M_P^2} \tilde{\chi}'^2 e^{-\frac{4\tilde{\chi}}{M_P}} \quad (A'.13)$$

Παράρτημα Β'

Ποσότητες Καμπυλότητας για FRW Μετρική

Β'.1 Jordan Frame

1. Μετρική

$$ds^2 = - dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dt^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (\text{B'.1})$$

2. Σύμβολα Christoffel

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= a\dot{a}\gamma_{ij} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1 - kr^2} & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2) & \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2)\sin^2\theta & & \end{aligned} \quad (\text{B'.2})$$

3. Τανυστής Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{ij} &= (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k)\gamma_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B'.3})$$

4. Βαθμωτή Καμπυλότητα

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (\text{B'.4})$$

5. Τανυστής Einstein

$$\begin{aligned} G_{00} &= 3\frac{k + \dot{a}^2}{a^2} \\ G_{ij} &= -(k + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a})\gamma_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B'.5})$$

B'.2 Einstein Frame

1. Μετρική

$$d\tilde{s}^2 = -e^{-\frac{2\tilde{\chi}}{M_P}} dt^2 + b^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right) \quad (\text{B'.6})$$

2. Σύμβολα Christoffel

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{00}^0 &= -\frac{1}{M_P} \tilde{\chi}' e^{-\frac{\tilde{\chi}}{M_P}} & \tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \tilde{\Gamma}_{ij}^0 &= bb' \gamma_{ij} e^{\frac{\tilde{\chi}}{M_P}} & \tilde{\Gamma}_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta \\ \tilde{\Gamma}_{0j}^i &= \frac{b'}{b} e^{-\frac{\tilde{\chi}}{M_P}} \delta_j^i & \tilde{\Gamma}_{13}^3 &= \frac{1}{r} \\ \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{kr}{1 - kr^2} & \tilde{\Gamma}_{23}^3 &= \cot\theta \\ \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= -r(1 - kr^2) \\ \tilde{\Gamma}_{33}^1 &= -r(1 - kr^2) \sin^2\theta \end{aligned} \quad (\text{B'.7})$$

3. Τανυστής Ricci

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{00} &= -3\frac{b''}{b}e^{-\frac{2\tilde{x}}{M_P}} \\ \tilde{R}_{ij} &= (bb'' + 2b'^2 + 2k)\gamma_{ij}\end{aligned}\tag{B'.8}$$

4. Βαθμωτή Καμπυλότητα

$$\tilde{R} = 6\left(\frac{b''}{b} + \frac{b'^2}{b^2} + \frac{k}{b^2}\right)\tag{B'.9}$$

5. Τανυστής Einstein

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{00} &= 3\frac{k + b'^2}{b^2}e^{-\frac{2\tilde{x}}{M_P}} \\ \tilde{G}_{ij} &= -(k + b'^2 + 2bb')\gamma_{ij}\end{aligned}\tag{B'.10}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Timothy Clifton et al. “Modified gravity and cosmology”. In: *Physics Reports* 513.1 (2012), pp. 1–189.
- [2] Kurt Hinterbichler, Mark Trodden, and Daniel Wesley. “Multi-field galileons and higher co-dimension branes”. In: *arXiv preprint arXiv:1008.1305* (2010).
- [3] Michele Maggiore. “Gravitational waves. Vol 1, Theory and Experiments”. In: (2008).
- [4] Thanu Padmanabhan. “From gravitons to gravity: Myths and reality”. In: *International Journal of Modern Physics D* 17.03n04 (2008), pp. 367–398.
- [5] Michael E Peskin and Daniel V Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Westview, 1995.
- [6] Claudia de Rham. ” *Massive Gravity*. 2014.
- [7] Austin Joyce et al. “Beyond the cosmological standard model”. In: *Physics Reports* (2014).
- [8] Richard P Woodard. “How far are we from the quantum theory of gravity?”. In: *Reports on Progress in Physics* 72.12 (2009), p. 126002.
- [9] Claudia de Rham. “Galileons in the Sky”. In: *Comptes Rendus Physique* 13.6 (2012), pp. 666–681.
- [10] Gia Dvali, Gregory Gabadadze, and Massimo Porrati. “4D gravity on a brane in 5D Minkowski space”. In: *Physics Letters B* 485.1 (2000), pp. 208–214.
- [11] Gia Dvali and Gregory Gabadadze. “Gravity on a brane in infinite-volume extra space”. In: *Physical Review D* 63.6 (2001), p. 065007.
- [12] Cedric Deffayet, Gia Dvali, and Gregory Gabadadze. “Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions”. In: *Physical Review D* 65.4 (2002), p. 044023.
- [13] Cedric Deffayet. “Cosmology on a brane in Minkowski bulk”. In: *Physics Letters B* 502.1 (2001), pp. 199–208.
- [14] Alberto Nicolis and Riccardo Rattazzi. “Classical and quantum consistency of the DGP model”. In: *Journal of High Energy Physics* 2004.06 (2004), p. 059.

- [15] Markus A Luty, Massimo Porrati, and Riccardo Rattazzi. “Strong interactions and stability in the DGP model”. In: *Journal of High Energy Physics* 2003.09 (2003), p. 029.
- [16] Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini. “Galileon as a local modification of gravity”. In: *Physical Review D* 79.6 (2009), p. 064036.
- [17] David B Fairlie and J Govaerts. “Euler hierarchies and universal equations”. In: *Journal of mathematical physics* 33.10 (1992), pp. 3543–3566.
- [18] Claudia de Rham, Matteo Fasiello, and Andrew J Tolley. “Galileon duality”. In: *Physics Letters B* 733 (2014), pp. 46–51.
- [19] A Avilez and C Skordis. “Cosmological constraints on Brans-Dicke theory”. In: *Physical review letters* 113.1 (2014), p. 011101.