



Πανεπιστήμιο
Κύπρου

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θερμοδυναμική Μελανών Οπών Σε
Χωροχρόνους Anti-de Sitter

Σταύρος Χριστοδούλου

ΜΑΪΟΣ 2017

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Θερμοδυναμική Μελανών Οπών Σε
Χωροχρόνο Anti-de Sitter

Σταύρος Χριστοδούλου

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Τούμπας

Η διπλωματική εργασία υποβλήθηκε προς μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων απόκτησης του πτυχίου Φυσικής στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Κύπρου

ΜΑΪΟΣ 2017

Εισαγωγή

Οι μελανές οπές αποτελούν αδιαμφισβήτητα ένα από τα πιο ενδιαφέροντα και συνάμα μυστήρια αντικείμενα μελέτης στη σύγχρονη φυσική. Τα ανοικτά ερωτήματα που σχετίζονται με αυτές ποικίλουν και απασχολούν ένα μεγάλο μέρος της επιστημονικής κοινότητας.

Η πρώτη πρόβλεψη για την ύπαρξη των μελανών οπών έγινε το 1796 από το φυσικό και μαθηματικό Pierre-Simon Laplace, ο οποίος βασίστηκε σε επιχειρήματα από τη Νευτώνεια θεωρία της Παγκόσμιας Έλξης. Τα πρώτα παρατηρησιακά δεδομένα, τα οποία αποδεικνύουν την ύπαρξη των ουράνιων αυτών σωμάτων, πάρθηκαν στις 15 Αυγούστου του 1992 στο αστεροσκοπείο GRANAT στη Ρωσία. Συγκεκριμένα, έγινε ανίχνευση ακτινοβολίας X από το δυαδικό σύστημα GRS 1915+105. Το δυαδικό σύστημα GRS 1915+105 αποτελείται από ένα αστέρι και μία μελανή οπή, των οποίων η μεταξύ τους βαρυτική έλξη προκαλεί την περιστροφή και των δύο γύρω από το βαρύκεντρό τους. Η ύλη από τον αστέρα επιταχύνεται λόγω της βαρυτικής έλξης και κατευθύνεται προς το κέντρο της μελανής οπής. Με αυτό τον τρόπο, παράγονται ακτίνες X, άμεσα ανιχνεύσιμες από τα συμβολόμετρα. Τα πιο πρόσφατα, από την άλλη, παρατηρησιακά επιτεύγματα που αποδεικνύουν την ύπαρξη των μελανών οπών είναι η ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων, προκαλούμενων από τη συγχώνευση δύο μελανών οπών. Βαρυτικά κύματα έχουν ήδη ανιχνευθεί τρεις φορές από το συμβολόμετρο LIGO, με την πιο πρόσφατη ανίχνευση να έχει γίνει στις 4 Ιανουαρίου του 2017.

Η έννοια των μελανών οπών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη θεωρία της βαρύτητας. Τόσο στην κλασική εικόνα, όσο και στη σχετικιστική, αποτελούν ένα ενδιαφέρον πλαίσιο μελέτης για την περαιτέρω κατανόηση της βαρύτητας. Συγκεκριμένα, είναι αναπόσπαστο κομμάτι της προσπάθειας που γίνεται για τη δημιουργία μιας ολοκληρωμένης θεωρίας βαρύτητας, η οποία θα σέβεται τους θεμελιώδεις νόμους της κβαντομηχανικής και θα περιγράφει ταυτοχρόνως τη συμπεριφορά τεράστιων ουράνιων σωμάτων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται μια εισαγωγή στη φυσική μελανών οπών, όπως την αντιλαμβανόμαστε από τη σκοπιά της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Περιγράφονται, επίσης, έννοιες όπως κβαντική σύμπλεξη και γίνεται συσχέτιση με τη θερμοδυναμική των μελανών οπών θεωρώντας κβαντικά πεδία σε καμπυλωμένους χωροχρόνους.

Ωστόσο, η διπλωματική εργασία έχει ως σκοπό τη μελέτη του πενταδιάστατου χωροχρόνου Anti-de Sitter και κατ'επέκταση την παρουσίαση πρόσφατων επιτευγμάτων, όπως η αντιστοιχία Anti-de Sitter/Conformal Field Theory. Τέλος, μελετώνται μελανές οπές στον εν λόγω χωροχρόνο και πιο συγκεκριμένα η δημιουργία τους μέσω της θεώρησης μιας αλλαγής φάσεως που ονομάζεται Hawking-Page.

Ευχαριστίες

Τις πιο θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας, αναπληρωτή καθηγητή κ. Νικόλαο Τούμπα, τόσο για την αδιάκοπη υπομονή που έδειξε, όσο και για την αμερόληπτη καθοδήγησή του. Είμαι βέβαιος ότι το γνωστικό υπόβαθρο και οι εμπειρίες που απεκόμισα στο πλαίσιο της διπλωματικής εργασίας θα φανούν πολύ χρήσιμα στη μετέπειτα σταδιοδρομία μου.

Ακόμα, ευχαριστώ ιδιαίτερα το συμφοιτητή μου Χρίστο Σιακά, ο οποίος υπήρξε συνοδοιπόρος στο μονοπάτι αυτό που ονομάζεται διπλωματική εργασία. Ευχαριστώ και τη συμφοιτήτριά μου Κάλια Χατζηχαραλάμπους για το χρόνο που ξόδεψε διαβάζοντας την εργασία, ούτως ώστε να είναι σε θέση να μου παρέχει σχόλια χρήσιμα για την επαναδιατύπωση μερικών εννοιών, αλλά και ιδεών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου, οι οποίοι προσέφεραν την αγάπη και την υποστήριξή τους, όχι μόνο κατά τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας, αλλά και καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Ιδιαίτερη αναφορά για στήριξη κατά τη διάρκεια των τελευταίων τεσσάρων χρόνων αξίζει στο νονό μου.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	i
Ευχαριστίες	i
Κατάλογος Σχημάτων	i
1 Εισαγωγή στη Φυσική των Μελανών Οπών	1
1.1 Μελανές Οπές: Ένα κλασσικό επιχείρημα	1
1.2 Μελανές Οπές στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας	2
1.2.1 Ακτινικές γεωδαιτικές εξισώσεις	6
1.2.2 Η γεωμετρία κοντά στον ορίζοντα και ο χωροχρόνος Rindler	8
1.2.3 Συντεταγμένες Tortoise	12
1.2.4 Συντεταγμένες Eddington-Finkelstein	13
1.2.5 Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres	14
1.3 Δημιουργία Μελανών Οπών	18
2 Διαγράμματα Penrose	20
2.1 Διάγραμμα Penrose για χωροχρόνο Minkowski	20
2.2 Διάγραμμα Penrose της μεγίστης γεωμετρίας Schwarzschild	22
2.3 Διάγραμμα Penrose για τη βαρυτική κατάρρευση σφαιρικού φλοιού φωτός	24
3 Κβαντική Σύμπλεξη και Εντροπία	27
3.1 Συστήματα δύο υποσυστημάτων	27
3.2 Πίνακες Πυκνότητας	30
3.3 Εντροπία	32
3.3.1 Εντροπία Σύμπλεξης	32
3.3.2 Θερμική Εντροπία	33
3.4 Κβαντικά Πεδία σε μη Μηδενική Θερμοκρασία	34
4 Πεδία σε Καμπυλωμένους Χωροχρόνους	36
4.1 Βαθμωτά Πεδία Στη Γεωμετρία Schwarzschild	36
4.2 Βαθμωτά Πεδία Στη Γεωμετρία Rindler	40
4.2.1 Κλασσικά Βαθμωτά Πεδία	40
4.2.2 Κβαντικά Βαθμωτά Πεδία	42
4.3 Ο Πίνακας Πυκνότητας Unruh	42

4.4	Ακτινοβολία Hawking και Εντροπία Μελανών Οπών	44
5	Ο Χωροχρόνος Anti-de Sitter και Ολογραφία	47
5.1	Γεωμετρία Σφαίρας σε ανώτερες διαστάσεις	47
5.2	Η Γεωμετρία Anti-de Sitter στις $d+1$ διαστάσεις	49
5.3	Η γεωμετρία Anti-de Sitter στις 5 διαστάσεις	51
5.3.1	Κίνηση φωτός στον AdS_5	52
5.3.2	Κίνηση σωματιδίων με μη μηδενική μάζα στον AdS_5	52
5.4	Ολογραφία και Αντιστοιχία με Σύμμορφες Θεωρίες Πεδίου	53
6	Μελανές οπές στον AdS_5	56
6.1	Θερμικός AdS	56
6.2	Μελανές οπές Schwarzschild σε χωροχρόνους AdS	58
6.3	Αλλαγή φάσης Hawking-Page	60
	Επίλογος	62
	Παραρτήματα	63
A'	Εισαγωγή στη Θεωρία Πεδίων	64
A'.1	Κλασικά πεδία	64
A'.1.1	Το Παράδειγμα του Πεδίου Klein-Gordon	65
A'.2	Κβαντικά πεδία	66
A'.2.1	Το Παράδειγμα του Πεδίου Klein-Gordon	66
B'	Λύση Schwarzschild	68
Γ'	Συναρτησιακά Ολοκληρώματα Feynman	72
Γ'.1	Συναρτησιακά και Υπόβαθρο Κβαντικής Μηχανικής	72
Γ'.2	Πλάτη Πιθανότητας και Φορμαλισμός Συναρτησιακών Ολοκληρωμάτων	74
	Βιβλιογραφία	76

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Το χωροχρονικό διάγραμμα Minkowski. Οι κόκκινες γραμμές απεικονίζουν τον κώνο φωτός του σημείου $T = 0, Z = 0$. Οι μπλε γραμμές απεικονίζουν τις χρονοειδείς γραμμές με σταθερή τη ρ συντεταγμένη, οι οποίες αντιστοιχούν σε κοσμικές γραμμές παρατηρητών Rindler. Οι διακεκομμένες μπλε γραμμές απεικονίζουν τις χωροειδείς ημιευθείες με σταθερή την ω συντεταγμένη.	11
1.2	Παλμοί φωτός που εκπέμπονται στην περιοχή II δεν μπορούν να εξέλθουν στην περιοχή I. Οι φωτοειδείς κοσμικές γραμμές απεικονίζονται με μαύρες κυματιστές γραμμές και έχουν κλίση ± 1	12
1.3	Η μεγίστη γεωμετρία Schwarzschild. Οι μπλε μη διακεκομμένες γραμμές απεικονίζουν τις γραμμές με r ή R σταθερό. Οι κυματιστές μαύρες γραμμές απεικονίζουν τους δύο κλάδους της φυσικής ανωμαλίας, $r = 0$. Οι καμπύλες αυτές είναι υπερβολές που τέμνουν τον χρονικό άξονα στα σημεία $T = \pm GM$	17
1.4	Οι φωτοειδείς συντεταγμένες U, V . Οι δύο άξονες $V = 0$ και $U = 0$ συμπίπτουν με τους ορίζοντες. Ο μελλοντικός ορίζοντας έχει συμβολιστεί με H^+ , ενώ ο ορίζοντας του παρελθόντος με H^-	17
2.1	Απεικόνιση του χωροχρόνου Minkowski. Κάθε σημείο του επιπέδου αναπαριστά μία σφαίρα με εμβαδόν $4\pi r^2$	21
2.2	Το διάγραμμα Penrose για το χωρόχρονο Minkowski.	22
2.3	Το διάγραμμα Penrose για τη μεγίστη γεωμετρία Schwarzschild.	23
2.4	Φλοιός φωτός που καταρρέει στο χωροχρόνο Minkowski. Το σκιασμένο τμήμα περιγράφει την εσωτερική περιοχή του φλοιού.	24
2.5	Ο φλοιός φωτός στο χωρόχρονο Schwarzschild. Το σκιασμένο τμήμα περιγράφει την εξωτερική περιοχή του φλοιού.	25
2.6	Τα δύο διαγράμματα που περιγράφουν το εσωτερικό και το εξωτερικό του σφαιρικού φλοιού πριν την ένωσή τους.	25
2.7	Το διάγραμμα Penrose που περιγράφει τη βαρυτική κατάρρευση σφαιρικού φλοιού φωτός απειροστού πάχους.	26
3.1	Τα υποσυστήματα A και B αποτελούν ένα σύνθετο χβαντικό σύστημα V	28
4.1	Το δυναμικό συναρτήσει της ακτινικής συντεταγμένης Schwarzschild για κάθε τιμή του χβαντικού αριθμού ℓ	39
4.2	Η ενέργεια ενός σωματιδίου απεικονισμένη στο γράφημα του δυναμικού	40

4.3	Κβαντικά πεδία στη χωροειδή επιφάνεια $T = 0$, ορισμένα στο χωροχρόνο Minkowski.	43
5.1	Ο χωροχρόνος AdS μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας κύλινδρος. Η χρονική κατεύθυνση τρέχει κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου. . .	51
Γ.1	Μερικές από τις πιθανές διαδρομές, που ακολουθεί ένα σωματίδιο για να φτάσει από την αρχική του θέση στην τελική μέσα σε ένα χρονικό διάστημα T	74

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στη Φυσική των Μελανών Οπών

Στο παρών κεφάλαιο δίνεται πρώτα μια κλασική εικόνα όσον αφορά στις μελανές οπές και έπειτα, μέσω μιας εισαγωγής στη γενική θεωρία της σχετικότητας, γίνεται και η αντίστοιχη σχετικιστική τους περιγραφή. Τέλος γίνεται λόγος τόσο για τη φυσική τους προέλευση όσο και για την περιγραφή της προέλευσης μέσω της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

1.1 Μελανές Οπές: Ένα κλασικό επιχείρημα

Το 1796, ο φυσικός και μαθηματικός Pierre-Simon Laplace, βασιζόμενος σε επιχειρήματα από τη Νευτώνεια θεωρία της Παγκόσμιας Έλξης, προέβλεψε την ύπαρξη των μελανών οπών. Έδειξε ότι εάν η ακτίνα R ενός σφαιρικού αστέρα μάζας M γίνει μικρότερη από την οριακή τιμή $r_0 = 2GM/c^2$, κανένα άλλο σώμα -ούτε καν φως- δεν μπορεί να διαφύγει στο άπειρο εξαιτίας της βαρυτικής έλξης, την οποία ο αστέρας προκαλεί στο σώμα αυτό. Επομένως, οι αστέρες αυτοί δεν είναι ορατοί σε μακρινούς παρατηρητές διότι το φως που οι ίδιοι παράγουν δεν μπορεί να διαφύγει από το βαρυτικό τους πεδίο. Ο Laplace ονόμασε τα αστέρια αυτά μελανά.

Για να αποδείξουμε το συλλογισμό του Laplace [1], υπολογίζουμε την ελάχιστη ταχύτητα εκτόξευσης, με την οποία ένα σώμα με μάζα $m \ll M$ διαφεύγει από την επιφάνεια του αστέρα σε άπειρη απόσταση από αυτόν. Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται ταχύτητα διαφυγής. Προσεγγίζουμε το σώμα ως υλικό σημείο και αμελούμε την ανάδραση του στο πεδίο βαρύτητας. Η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.1)$$

όπου v η ταχύτητα εκτόξευσης. Στην επιφάνεια του αστέρα, η βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος (σώματος - αστέρα) είναι ίση με

$$E_\Delta = -\frac{GMm}{R} \quad (1.2)$$

όπου G η σταθερά της Παγκόσμιας Έλξης του Νεύτωνα και R η ακτίνα του αστέρα.

Επιλέγουμε βαθμίδα, τέτοια ώστε το βαρυτικό δυναμικό να μηδενίζεται όταν το σώμα βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από τον αστέρα. Αφού οι βαρυτικές δυνάμεις είναι διατηρητικές, ισχύει η αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Εφαρμόζοντας την αρχή αυτή, εξισώνουμε τη μηχανική ενέργεια στο σημείο αφετηρίας, με την αντίστοιχη μηχανική ενέργεια στο σημείο όπου το σώμα έχει διαφύγει στο άπειρο

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \quad (1.3)$$

όπου v_∞ η ταχύτητα με την οποία το σώμα φτάνει στο άπειρο. Συνεπώς ισχύει η ανισότητα

$$v^2 \geq \frac{2GM}{R} \quad (1.4)$$

από την οποία προκύπτει η ταχύτητα διαφυγής του σώματος

$$v_\delta = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (1.5)$$

Η ταχύτητα διαφυγής εξαρτάται από τη μάζα και την ακτίνα του αστέρα. Καθώς αυξάνεται η μάζα M (κρατώντας την ακτίνα R σταθερή), η ταχύτητα διαφυγής αυξάνεται. Επειδή όμως η ταχύτητα κανενός σώματος δεν μπορεί να υπερβεί την ταχύτητα του φωτός, πρέπει να ισχύει η ανισότητα¹: $v_\delta \leq c$. Άρα λοιπόν

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \leq c \quad (1.6)$$

Λύνοντας ως προς την ακτίνα του αστέρα, προκύπτει η ακόλουθη οριακή τιμή της ακτίνας, για την οποία η ταχύτητα διαφυγής είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός:

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.7)$$

Για μικρότερες ακτίνες κανένα σώμα, ούτε καν φως, δεν μπορεί να διαφύγει από τη βαρυτική έλξη του αστέρα. Ο αστέρας αυτός θα είναι μελανός. Η ακτίνα r_0 ονομάζεται βαρυτική ακτίνα.

1.2 Μελανές Οπές στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Οι μελανές οπές δημιουργούνται ως αποτέλεσμα της βαρυτικής κατάρρευσης ενός αστέρα με μάζα αρκετά μεγαλύτερη από αυτήν του Ήλιου. Όταν ο αστέρας εξαντλήσει τα θερμοπυρηνικά του καύσιμα αρχίζει να κρυώνει, με αποτέλεσμα να ελαττώνεται η πίεση στο εσωτερικό του. Επικρατούν ισχυρές ελκτικές βαρυτικές δυνάμεις, υπό την επίδραση των οποίων, η ύλη του αστέρα συμπυκνώνεται ολοένα και περισσότερο μέχρις ότου καταρρεύσει εντός της βαρυτικής του ακτίνας, $r_0 = 2GM$. Στο εσωτερικό της μαύρης τρύπας που έχει δημιουργηθεί, η κατάρρευση συνεχίζεται, καταλήγοντας στο σχηματισμό μιας βαρυτικής σημειακής ανωμαλίας, με την πυκνότητα μάζας και την

¹Ο Νεύτωνας πίστευε ότι το φως αποτελείτο από γρήγορα σωματίδια με απειροελάχιστη μάζα.

ένταση του πεδίου βαρύτητας να απειρίζονται. Τόσο στην εξωτερική περιοχή της μαύρης τρύπας όσο και στο εσωτερικό ο χώρος παραμένει κενός, εκτός από το σημείο κατάρρευσης της μάζας.

Στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας οι μελανές οπές περιγράφονται από λύσεις των εξισώσεων του Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

όπου $g_{\mu\nu}$ ο μετρικός τανυστής, $R_{\mu\nu}$ ο τανυστής Ricci, R η βαθμωτή καμπυλότητα και $T_{\mu\nu}$ ο τανυστής ενέργειας και ορμής της ύλης που υπάρχει στο χωροχρόνο. Παίρνοντας το ίχνος της πιο πάνω τανυστικής εξίσωσης, βρίσκουμε την ακόλουθη έκφραση που συνδέει τη βαθμωτή καμπυλότητα με το ίχνος του τανυστή ενέργειας και ορμής:

$$R = 8\pi GT_{\mu}^{\mu} \quad (1.9)$$

Θα μελετήσουμε μη τετριμμένες λύσεις στον κενό χώρο, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα για να περιγράψουμε τις μελανές οπές που παράγονται από βαρυτική κατάρρευση. Όλες οι συνιστώσες του τανυστή $T_{\mu\nu}$, και επομένως το ίχνος του T_{μ}^{μ} , μηδενίζονται. Η βαθμωτή καμπυλότητα μηδενίζεται, και οι εξισώσεις του Einstein ανάγονται στην εξής μορφή:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.10)$$

Μας ενδιαφέρουν στατικές λύσεις, οι οποίες χαρακτηρίζονται από σφαιρική συμμετρία. Μια ομάδα τέτοιων λύσεων βρέθηκε από το Γερμανό φυσικό και αστρονόμο Karl Schwarzschild (βλ. Παράρτημα Α'). Οι λύσεις χαρακτηρίζονται από μια θετική παράμετρο M , συναρτήσεως της οποίας η μετρική δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.11)$$

όπου t ο χρόνος Schwarzschild, r η ακτινική συντεταγμένη Schwarzschild και θ, ϕ οι συνήθεις γωνιακές σφαιρικές συντεταγμένες. Εάν η παράμετρος M γίνει μηδέν, η λύση αντιστοιχεί στον επίπεδο χωροχρόνο Minkowski, εκπεφρασμένο σε σφαιρικές συντεταγμένες.

Η παράμετρος M ταυτίζεται με τη μάζα που κατέρρευσε, ούτως ώστε η μελανή οπή να σχηματιστεί. Η μετρική Schwarzschild περιγράφει επίσης τη γεωμετρία (ισοδύναμα το πεδίο βαρύτητας) στην εξωτερική περιοχή ενός σφαιρικού και ομογενούς ουράνιου σώματος με μάζα M . Στην περίπτωση που εξετάζουμε όμως, η μετρική ισχύει σε ολόκληρο το χωροχρόνο, $r \in [0, \infty)$, αφού αυτός είναι κενός.

Η ακτινική συντεταγμένη Schwarzschild δεν αντιστοιχεί σε κάποιο φυσικό μήκος. Εάν $r > 2GM$, η ποσότητα $4\pi r^2$ είναι ίση με το εμβαδόν σφαίρας με συντεταγμένη ακτίνα r . Επίσης, στα σημεία $r = 2GM$ και $r = 0$ η χρονική συνιστώσα και η ακτινική συνιστώσα της μετρικής -ή του αντιστρόφου της- εκδηλώνουν απειρισμούς. Ειδικότερα, η σφαίρα με (συντεταγμένη) ακτίνα $r = 2GM$ χωρίζει τη φέτα με σταθερή χρονική συντεταγμένη σε δύο περιοχές: την εξωτερική περιοχή I όπου $r > 2GM$ και την εσωτερική περιοχή II όπου $r < 2GM$. Το σημείο $r = 0$ βρίσκεται στην περιοχή II.

Στην περιοχή I, η λύση Schwarzschild είναι στατική και σφαιρικά συμμετρική. Οι συνιστώσες της μετρικής είναι ανεξάρτητες του χρόνου t , και καμιά διεύθυνση στο χώρο δεν ξεχωρίζει. Ο χρόνος Schwarzschild, t είναι ο ιδιόχρονος ενός ακίνητου ρολογιού στο άπειρο, όπου το πεδίο βαρύτητας της μελανής οπής εξασθενεί. Για μεγάλα r ισχύει η Νευτώνεια προσέγγιση της περιγραφής του πεδίου βαρύτητας. Συγκρίνοντας τη χρονική συνιστώσα της μετρικής Schwarzschild με τη χρονική συνιστώσα της μετρικής Minkowski, βρίσκουμε το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (1.12)$$

Για να κατανοήσουμε τη φυσική σημασία των απειρισμών της μετρικής για $r = 2GM$ και $r = 0$, υπολογίζουμε τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας Riemann. Γενικά ο τανυστής Riemann, $R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu}$, συνδέεται με τις δεύτερες μερικές παραγώγους της μετρικής και τα στοιχεία της σύνδεσης $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ ως εξής:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\alpha} R^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\kappa}} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\kappa}} \right) + g_{\alpha\beta} \left(\Gamma^{\alpha}_{\mu\kappa} \Gamma^{\beta}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\kappa} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} \right) \quad (1.13)$$

Ο τανυστής $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$ είναι αντισυμμετρικός ως προς την εναλλαγή των δύο πρώτων και των δύο τελευταίων δεικτών. Ο τανυστής Ricci προκύπτει από το ακόλουθο ίχνος του τανυστή Riemann

$$R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa} \quad (1.14)$$

Υπάρχουν επίσης και μερικά βαθμωτά μεγέθη, τα οποία παραμένουν αναλλοίωτα ως προς γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, όπως το τετράγωνο του τανυστή Riemann, $R_{\kappa\lambda\mu\nu} R^{\kappa\lambda\mu\nu}$ και η βαθμωτή καμπυλότητα, η οποία ισούται με το ίχνος του τανυστή Ricci

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} = R^{\mu}_{\mu} \quad (1.15)$$

Στην περίπτωση της γεωμετρίας Schwarzschild, η βαθμωτή καμπυλότητα είναι παντού ίση με μηδέν. Υπολογίζοντας τις συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας Riemann, μπορούμε να βρούμε το τετράγωνο του τανυστή

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} R^{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{48G^2 M^2}{r^6} \quad (1.16)$$

Παρατηρούμε ότι η πιο πάνω ποσότητα απειρίζεται στο σημείο $r = 0$. Το σημείο αυτό αποτελεί μια ανωμαλία, στην οποία απειρίζονται μεγέθη που περιγράφουν την καμπυλότητα του χωροχρόνου. Επειδή το τετράγωνο του τανυστή Riemann είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, αναλλοίωτο ως προς γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, απειρίζεται σε όλα τα συστήματα αναφοράς συντεταγμένων.

Αντιθέτως, για $r = 2GM$ προκύπτει

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} R^{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{3}{4G^4 M^4} \quad (1.17)$$

Παρατηρούμε ότι η πιο πάνω ποσότητα είναι πεπερασμένη, όπως και οι συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας Riemann. Η καμπυλότητα ελαττώνεται καθώς μεγαλώνει

η μάζα της μελανής οπής. Αντίστοιχα, το πεδίο βαρύτητας στη σφαιρική επιφάνεια με $r = 2GM$ για σταθερή χρονική συντεταγμένη εξασθενίζει, καθώς η μάζα αυξάνεται. Το γεγονός αυτό απορρέει από τη σχέση που συνδέει τη βαρυτική ακτίνα με τη μάζα της μελανής οπής. Επειδή μεγαλώνει η ακτίνα της μελανής οπής καθώς μεγαλώνει η μάζα, η μέση πυκνότητα μάζας ελαττώνεται, με αποτέλεσμα να ελαττώνεται και η ένταση του πεδίου βαρύτητας.

Συνεπώς, παρόλο που για $r = 2GM$ η μετρική Schwarzschild δεν ορίζεται, δεν υπάρχουν φυσικές ανωμαλίες. Όπως θα δούμε αργότερα, υπάρχουν συστήματα αναφοράς συντεταγμένων στα οποία όλες οι συνιστώσες της μετρικής είναι καλά ορισμένες.

Η σφαίρα ακτίνας $2GM$ για κάποια σταθερή χρονική συντεταγμένη αποτελεί τον ορίζοντα, ο οποίος οριοθετεί την περιοχή που είναι ορατή στον εξωτερικό παρατηρητή Schwarzschild, που βρίσκεται σε απόσταση $\bar{r} > 2GM$. Ο παρατηρητής αυτός παραμένει στάσιμος στη θέση \bar{r} με τη βοήθεια κατάλληλης δύναμης η οποία εξουδετερώνει τη βαρυτική έλξη της μαύρης τρύπας. Επιταχύνεται σε σχέση με έναν παρατηρητή που πέφτει ελεύθερα στην ίδια θέση. Κάθε σημείο του ορίζοντα (σταθερές τιμές της πολικής και αζιμουθιακής γωνίας) διαγράφει μια φωτεινή κοσμική γραμμή στο χωροχρόνο. Πράγματι, εάν $r = 2GM$ και θ, ϕ σταθερά, τότε μηδενίζεται το απειροστό διάστημα για κάθε t , επειδή

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{r} \rightarrow 0 \quad (1.18)$$

Όλη και φως δεν μπορούν να εξέλθουν από την περιοχή II και να εισέλθουν στην περιοχή I περνώντας από τον ορίζοντα. Αντίθετα ύλη και φως μπορούν να περάσουν από την περιοχή I στην περιοχή II.

Εξετάζοντας τη μετρική στην εσωτερική περιοχή II,

$$ds^2 = \left(\frac{2GM}{r} - 1 \right) dt^2 - \frac{dr^2}{\frac{2GM}{r} - 1} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.19)$$

φαίνεται ότι η ακτινική συντεταγμένη r αλλάζει είδος και μετατρέπεται σε μια χρονική συντεταγμένη. Ταυτόχρονα, η συντεταγμένη t γίνεται χωροειδής. Επομένως η μετρική στο εσωτερικό της μελανής οπής δεν είναι στατική. Η ανωμαλία $r = 0$ είναι μια χωροειδής ανωμαλία, ένα γεγονός, όπου ολόκληρος ο χώρος καταρρέει. Η ανωμαλία αυτή έχει παρόμοιες ιδιότητες με την ανωμαλία κατάρρευσης (Big Crunch) ενός Σύμπαντος που συστέλλεται. Στην περίπτωση της μελανής οπής η ανωμαλία $r = 0$ είναι κρυμμένη πίσω από τον ορίζοντα.

Εάν η παράμετρος M πάρει αρνητικές τιμές, δεν υπάρχει ορίζοντας, αλλά η ανωμαλία $r = 0$ συνεχίζει να υφίσταται. Στην περίπτωση αυτή η ανωμαλία είναι χρονοειδής υποδηλώνοντας ένα σημείο του χώρου στο οποίο απειρίζεται η καμπυλότητα. Επειδή δεν υπάρχει ορίζοντας για να κρύψει την ανωμαλία, αυτή καλείται γυμνή. Τέτοιες λύσεις δεν περιγράφουν φυσικές λύσεις. Μπορεί να αποδειχθεί ότι σε μια πλήρη θεωρία κβαντικής βαρύτητας, όπως η θεωρία των χορδών, αυτές οι λύσεις δεν επιβιώνουν.

Ας θεωρήσουμε έναν παρατηρητή Schwarzschild στη θέση \bar{r}_1 , και μία πηγή στάσιμη στη θέση $\bar{r}_2 < \bar{r}_1$ στο πεδίο βαρύτητας της μελανής οπής. Έστω ότι η πηγή παράγει παλμούς φωτός με ιδιοπερίοδο $d\tau$. Η περίοδος αυτή δεν εξαρτάται από το βαρυτικό πεδίο ή την κίνηση της πηγής, και έχει προκαθοριστεί κατά την κατασκευή της. Αφού

η πηγή είναι ακίνητη στη θέση \bar{r}_2 , το απειροστό χρονικό διάστημα dt_2 που μεσολαβεί για την εκπομπή δύο διαδοχικών παλμών φωτός δίδεται από τη σχέση

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}(\bar{r}_2)} dt_2 \quad (1.20)$$

Επειδή οι δύο παλμοί έχουν να διανύσουν την ίδια απόσταση μέχρι να φτάσουν στη θέση \bar{r}_1 , η περίοδος λήψης των φωτεινών παλμών από τον παρατηρητή Schwarzschild στη θέση αυτή είναι ίση με dt_2 . Εάν θεωρήσουμε μια πανομοιότυπη πηγή, στάσιμη στη θέση \bar{r}_1 , η περίοδος λήψης διαδοχικών παλμών είναι ίση με dt_1 και ισχύει

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}(\bar{r}_1)} dt_1 \quad (1.21)$$

Διαιρώντας τις πιο πάνω εξισώσεις κατά μέλη, και αντικαθιστώντας τις περιόδους με τις αντίστοιχες τους συχνότητες, βρίσκουμε

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{g_{00}(\bar{r}_2)}{g_{00}(\bar{r}_1)}} \quad (1.22)$$

ή

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{\bar{r}_2}}{1 - \frac{2GM}{\bar{r}_1}}} \quad (1.23)$$

Στην περίπτωση που η παρατήρηση συμβαίνει στο άπειρο, ή πολύ μακριά από την πηγή $\bar{r}_1 \rightarrow \infty$, τότε ο λόγος των συχνοτήτων παίρνει τη μορφή

$$\frac{\nu_2}{\nu_\infty} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{\bar{r}_2}} \quad (1.24)$$

Προφανώς έχουμε μετάβαση προς το ερυθρό, σε συμφωνία με το βαρυτικό φαινόμενο Doppler. Καθώς η πηγή πλησιάζει τον ορίζοντα, τα φωτεινά σήματα που παράγει και φτάνουν στο άπειρο, παρατηρούνται ολοένα και με μικρότερη συχνότητα, ή μεγαλύτερο μήκος κύματος. Για να μπορεί ο παρατηρητής στο άπειρο να διακρίνει πληροφορίες σε φωτεινά σήματα που προέρχονται από μια πηγή κοντά στον ορίζοντα, θα πρέπει η ιδιοσυχνότητα της πηγής να μεγαλώσει, αντιστρόφως ανάλογα με τον παράγοντα μετάβασης προς το ερυθρό. Σύμφωνα με την κβαντική φυσική, η ενέργεια του φωτεινού σήματος θα πρέπει να αυξηθεί αρκετά, ώστε να μην μπορεί να αμεληθεί η ανάδραση του στη γεωμετρία της μελανής οπής.

Στις ενότητες που ακολουθούν, αναδεικνύονται βασικές ιδιότητες της γεωμετρίας Schwarzschild, από τη σκοπιά διαφόρων συστημάτων αναφοράς συντεταγμένων. Αρχικά, θα μελετηθούν οι εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης στο πεδίο βαρύτητας μιας μελανής οπής.

1.2.1 Ακτινικές γεωδαιτικές εξισώσεις

Εξαγάγουμε τις γεωδαιτικές εξισώσεις στη γεωμετρία Schwarzschild ελαχιστοποιώντας τη Λαγκρανζιανή ενός σώματος που πέφτει ελεύθερα στο πεδίο βαρύτητας της

μελανής οπής. Θεωρούμε έναν παρατηρητή που πέφτει ελεύθερα μαζί με το σώμα. Η Λαγκρανζιανή δίνεται από τη σχέση

$$L = -m\sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} \quad (1.25)$$

όπου m η μάζα του σώματος και τ ο ιδίοχρονος ρολογιού που ακολουθεί το σώμα. Οι γεωδαιτικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες της μάζας του σώματος και συνεπώς, μπορεί να τεθεί ίση με τη μονάδα.

Επειδή κατά μήκος μιας γεωδαιτικής τροχιάς η Λαγκρανζιανή παραμένει σταθερή, $dL/d\tau = 0$, $L^2 = 1$, μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε το τετράγωνο της για να προσδιορίσουμε τις εξισώσεις κίνησης. Για τη μετρική Schwarzschild βρίσκουμε

$$L^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left[\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right] \quad (1.26)$$

Έστω το σώμα εκτελεί ακτινική κίνηση, στην εξωτερική περιοχή I, κινούμενο προς τον ορίζοντα της μελανής οπής. Τότε οι γωνιακές συντεταγμένες παραμένουν σταθερές και η Λαγκρανζιανή παίρνει τη μορφή

$$L^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \quad (1.27)$$

Οι εξισώσεις Euler-Langrange είναι:

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = K \quad (1.28)$$

όπου K σταθερά. Παρομοίως

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0 \quad (1.29)$$

Η τελευταία αυτή εξίσωση δεν θα χρειαστεί, καθώς μπορεί να προκύψει από την εξίσωση του χρόνου και την εξίσωση $L^2 = 1$, που ισχύει κατά μήκος γεωδαιτικής τροχιάς.

Θέτοντας το τετράγωνο της Λαγκρανζιανής ίσο με τη μονάδα και απαλείφοντας την παράγωγο του συντεταγμένου χρόνου, βρίσκουμε

$$K^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (1.30)$$

Έστω το σώμα αφήνεται από την ηρεμία στη θέση $r = R$. Τότε

$$K^2 = 1 - \frac{2GM}{R} \quad (1.31)$$

Με βάση την τιμή αυτή της σταθεράς K προκύπτει μια ολοκληρωτική έκφραση για τον χρόνο που καταγράφεται στο ρολόι που ακολουθεί το σώμα, μέχρι αυτό να φτάσει στη θέση $r < R$:

$$\tau = -\int_R^r \sqrt{\frac{Rr'}{2GM(R-r')}} dr' \quad (1.32)$$

Σημειώνεται ότι η ακτινική τετραταχύτητα είναι αρνητική επειδή η συντεταγμένη r φθίνει με τον ιδιόχρονο. Η λύση του ολοκληρώματος επιτυγχάνεται με τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$r' = R \cos^2 \left(\frac{\eta'}{2} \right) \quad (1.33)$$

Η νέα μεταβλητή η' παίρνει τιμές από μηδέν μέχρι η , όπου

$$\cos^2 \left(\frac{\eta'}{2} \right) = \frac{r}{R} \quad (1.34)$$

Εάν $r = 0$, $\eta = \pi/2$. Συναρτήσει της παραμέτρου η , ο ιδιόχρονος δίδεται από την ακόλουθη έκφραση

$$\tau = \sqrt{\frac{R^3}{8GM}} (\eta + \sin \eta) \quad (1.35)$$

Από την πιο πάνω σχέση, είναι εύκολο να φανεί ότι ο παρατηρητής Schwarzschild καταλήγει στην ανωμαλία ($\eta = \pi/2$) σε πεπερασμένο ιδιόχρονο

$$\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \quad (1.36)$$

Επειδή το σώμα εισέρχεται στην περιοχή II, διαπερνώντας τον ορίζοντα, σε πεπερασμένο ιδιόχρονο, η περιοχή αυτή αποτελεί αναπόσπαστο μέρος του χωροχρόνου. Κάθε σώμα που περνά στην περιοχή II θα καταλήξει στην ανωμαλία όπου θα υποστεί ισχυρές βαρυτικές δυνάμεις.

Αντιθέτως, ο εξωτερικός παρατηρητής Schwarzschild συμπεραίνει ότι χρειάζεται άπειρος χρόνος t για να φτάσει το σώμα τον ορίζοντα. Αυτό απορρέει από το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου. Θεωρήστε ένα ρολόι στάσιμο πολύ κοντά στον ορίζοντα: ο ιδιόχρονος του ρολογιού συνδέεται με το χρόνο t με τη σχέση

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt \quad (1.37)$$

Επομένως για να καταγράψει το ρολόι αυτό 1 δευτερόλεπτο πρέπει να περάσει άπειρος χρόνος t . Ισοδύναμα η συντεταγμένη ταχύτητα του σώματος φθίνει στο μηδέν καθώς αυτό πλησιάζει τον ορίζοντα:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{K} \left(\frac{dr}{d\tau} \right) \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad (1.38)$$

Συμπεραίνουμε ότι ο παρατηρητής Schwarzschild δεν θα δει ποτέ το σώμα να φτάνει στον ορίζοντα. Ως προς τον παρατηρητή αυτό, η ύλη που σχημάτισε την οπή είναι συγκεντρωμένη αρκετά κοντά στον ορίζοντα, χωρίς να τον έχει διαπεράσει. Αντίθετα ένας παρατηρητής που πέφτει ελεύθερα εισέρχεται τελικά στην περιοχή II, και υφίσταται πανίσχυρες βαρυτικές δυνάμεις.

1.2.2 Η γεωμετρία κοντά στον ορίζοντα και ο χωροχρόνος Rindler

Στο υποκεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε τη γεωμετρία του χωροχρόνου κοντά στον ορίζοντα. Για το σκοπό αυτό προσδιορίζουμε το μήκος ρ της ακτινικής γραμμής

που ενώνει ένα σημείο της εξωτερικής περιοχής I με τον ορίζοντα. Εάν r η ακτινική συντεταγμένη του σημείου αυτού, το μήκος $\rho(r)$ δίδεται από την ακόλουθη έκφραση [2]

$$\rho(r) = \int_{2GM}^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r'}}} \quad (1.39)$$

Κάνοντας τους υπολογισμούς, μπορεί ναδειχθεί ότι το μήκος (1.39) είναι ίσο με

$$\rho(r) = \sqrt{r(r - 2GM)} + 2GM \sinh^{-1} \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} \quad (1.40)$$

Συναρτήσει του μήκους ρ , η μετρική Schwarzschild (στην περιοχή I) γράφεται με την εξής μορφή

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r(\rho)} \right) dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho) d\Omega^2 \quad (1.41)$$

όπου $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ η μετρική μιας σφαίρας S^2 με μοναδιαία ακτίνα. Στη συνέχεια θέτουμε

$$\frac{r - 2GM}{2GM} = \epsilon, \quad r = 2GM(1 + \epsilon) \quad (1.42)$$

και εξετάζουμε το όριο μεγάλης μάζας, $M \rightarrow \infty$, κρατώντας τη συντεταγμένη ϵ σταθερή. Εστιάζουμε σε μια περιοχή γύρω από τον ορίζοντα, όπου $\epsilon \ll 1$. Στο όριο $M \rightarrow \infty$, οι συνιστώσες του τανυστή καμπυλότητας στην περιοχή αυτή φθίνουν στο μηδέν, βλ. εξίσωση (1.17), και μπορούμε να την προσεγγίσουμε ως επίπεδη. Πράγματι, εάν $\epsilon \ll 1$, το μήκος ρ έχει το ακόλουθο ανάπτυγμα Taylor:

$$\rho = (4GM)\sqrt{\epsilon} \left(1 + \frac{1}{6}\epsilon + \dots \right) \Rightarrow \epsilon = \left(\frac{\rho}{4GM} \right)^2 + \dots \quad (1.43)$$

Επομένως η μετρική δίδεται από την ακόλουθη έκφραση

$$ds^2 = -\epsilon(\rho) [1 - \epsilon(\rho) + \dots] dt^2 + d\rho^2 + (2GM)^2 [1 + 2\epsilon(\rho) + \dots] d\Omega^2 \quad (1.44)$$

$$ds^2 \approx -\frac{\rho^2}{16G^2M^2} dt^2 + d\rho^2 + (2GM)^2 d\Omega^2 \quad (1.45)$$

όπου στην τελευταία γραμμή αμελήσαμε όρους της τάξης ϵ ή $\rho^2/16G^2M^2$. Η προσέγγιση είναι καλή εφόσον $\epsilon \ll 1$. Ορίζοντας την αδιάστατη χρονική συντεταγμένη

$$\omega = \frac{t}{4GM} \quad (1.46)$$

η μετρική κοντά στον ορίζοντα παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 + (2GM)^2 d\Omega^2 \quad (1.47)$$

Αποτελεί γινόμενο του διδιάστατου χωροχρόνου Rindler επί μία σφαίρα S^2 , με ακτίνα $2GM$ η οποία τείνει στο άπειρο στο όριο της μεγάλης μάζας.

Η χρονική συντεταγμένη ω παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\infty, \infty)$, ενώ η ακτινική συντεταγμένη είναι θετική: $\rho \in [0, \infty)$. Ο ορίζοντας $r = 2GM$ αντιστοιχεί στη φέτα του χωροχρόνου με σταθερή συντεταγμένη $\rho = 0$.

Στο όριο μεγάλης μάζας μπορούμε να προσεγγίσουμε ένα αρκετά μεγάλο τμήμα της σφαίρας S^2 γύρω από το βόρειο πόλο, $\theta = 0$, ως επίπεδο και να το περιγράψουμε χρησιμοποιώντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες X, Y . Ορίζουμε, έπειτα, τις συντεταγμένες T και Z ως εξής:

$$\begin{aligned} T &= \rho \sinh \omega \\ Z &= \rho \cosh \omega \end{aligned} \tag{1.48}$$

Η μετρική (1.47) μετασχηματίζεται στη μετρική Minkowski:

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2 \tag{1.49}$$

Οι συντεταγμένες T, Z, X, Y ορίζουν το σύστημα αναφοράς ενός παρατηρητή που πέφτει ελεύθερα, κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής. Τοπικά, το σύστημα αναφοράς αυτό ισοδυναμεί με ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

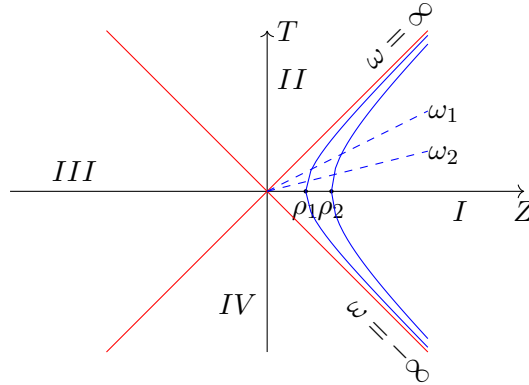
Οι συντεταγμένες Rindler επικαλύπτουν μόνο μια περιοχή του χωροχρόνου Minkowski, την περιοχή $Z \geq |T|$, η οποία περιέχει τον θετικό ημιάξονα Z . Η τομή της με το επίπεδο $X = Y = 0$ έχει σύνορα τις ημιευθείες $Z = \pm T, Z \geq 0$, οι οποίες βρίσκονται στον κώνο φωτός του σημείου $T = 0, Z = 0$.

Τοπικά λοιπόν ο παρατηρητής Schwarzschild ισοδυναμεί με τον επιταχυνόμενο παρατηρητή Rindler, ο οποίος ακολουθεί την κοσμική γραμμή $\rho = \bar{\rho}$, ή $Z^2 - T^2 = \bar{\rho}^2$ (οι συντεταγμένες X, Y παραμένουν σταθερές).

Στο Σχήμα 1.1, ο χωροχρόνος Rindler απεικονίζεται ως τμήμα του χωροχρόνου Minkowski. Για λόγους απλότητας, απεικονίζουμε την τομή με το επίπεδο $X = Y = 0$. Στις διευθύνσεις X, Y η μετρική Rindler έχει μεταφορική συμμετρία. Οι γραμμές με σταθερή ακτινική συντεταγμένη είναι υπερβολές με ασύμπτωτες τις ημιευθείες $Z = \pm T, Z \geq 0$. Οι γραμμές με σταθερή τη χρονική συντεταγμένη, ω , είναι οι χωροειδείς ημιευθείες με άκρο το σημείο $T = 0, Z = 0$ και με κλίση $\tanh \omega$. Καθώς $\omega \rightarrow \pm\infty$, αυτές τείνουν στις φωτοειδείς ημιευθείες $Z = \pm T, Z \geq 0$.

Η κοσμική γραμμή του παρατηρητή Rindler είναι η υπερβολή που τέμνει το θετικό ημιάξονα Z στο σημείο $Z = \bar{\rho}, T = 0$. Ο παρατηρητής Rindler κινείται κατά μήκος του άξονα Z , αρχικά από το $+\infty$ προς το μηδέν, εκτελώντας επιβραδυνόμενη κίνηση. Η αρχική ταχύτητα είναι περίπου ίση με την ταχύτητα του φωτός. Το μέτρο της ελαττώνεται και μηδενίζεται στιγμιαία τη χρονική στιγμή $T = 0$. Η επιτάχυνση τη στιγμή αυτή είναι ίση με $1/\bar{\rho}$. Έπειτα ο παρατηρητής επιταχύνεται, κινούμενος προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα Z , μέχρις ότου η ταχύτητα του πλησιάσει και πάλι την ταχύτητα του φωτός.

Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1.1, ο παρατηρητής Rindler βρίσκεται σε αιτιατική επαφή μόνο με την περιοχή I. Επειδή οι φωτεινές κοσμικές γραμμές είναι ευθείες με κλίση ± 1 και κατευθύνονται προς το μέλλον, φως που παράγεται στην περιοχή II δεν μπορεί να εξέλθει στην περιοχή I, και να κόψει την κοσμική γραμμή του παρατηρητή Rindler. Η περιοχή II είναι μελανή. Ο παρατηρητής Rindler μπορεί να λάβει φως από την περιοχή IV. Εντούτοις, στην περιοχή αυτή δεν μπορεί να στείλει φως. Συνεπώς η περιοχή IV είναι λευκή. Στην περιοχή III, η οποία περιέχει τον αρνητικό ημιάξονα



Σχήμα 1.1: Το χωροχρονικό διάγραμμα Minkowski. Οι κόκκινες γραμμές απεικονίζουν τον κώνο φωτός του σημείου $T = 0, Z = 0$. Οι μπλε γραμμές απεικονίζουν τις χρονοειδείς γραμμές με σταθερή τη ρ συντεταγμένη, οι οποίες αντιστοιχούν σε κοσμικές γραμμές παρατηρητών Rindler. Οι διακεκομμένες μπλε γραμμές απεικονίζουν τις χωροειδείς ημιευθείες με σταθερή την ω συντεταγμένη.

Z , δεν μπορεί να στείλει, αλλά ούτε και να λάβει φως. Για τον παρατηρητή Rindler, οι ημιευθείες $Z = \pm T, Z \geq 0$ είναι οριζόντες.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, οι συντεταγμένες Rindler επικαλύπτουν μόνο την περιοχή I του Σχήματος 1.1. Ξεκινώντας από την περιοχή αυτή, μπορούμε να μετασχηματίσουμε στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς συντεταγμένων, μέσω των εξισώσεων (1.48) και έπειτα να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού των συντεταγμένων T, Z , ώστε να επικαλυφθεί ολόκληρος ο χωροχρόνος Minkowski, ο οποίος χαρακτηρίζεται από γεωδαιτική πληρότητα.

Στο Σχήμα 1.2 φαίνονται οι κοσμικές γραμμές δύο παλμών φωτός. Ο ένας κινείται προς τα δεξιά, ενώ ο άλλος προς τα αριστερά. Επειδή οι ευθείες έχουν κλίση ± 1 και το φως κατευθύνεται προς το μέλλον, οι παλμοί δεν μπορούν να περάσουν από την περιοχή II στην περιοχή I .

Ισοδύναμα, εάν συνεχίσουμε αναλυτικά τις συντεταγμένες Rindler ως εξής

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \bar{\omega} - \frac{i\pi}{2} \\ \rho &\rightarrow iu \end{aligned} \quad (1.50)$$

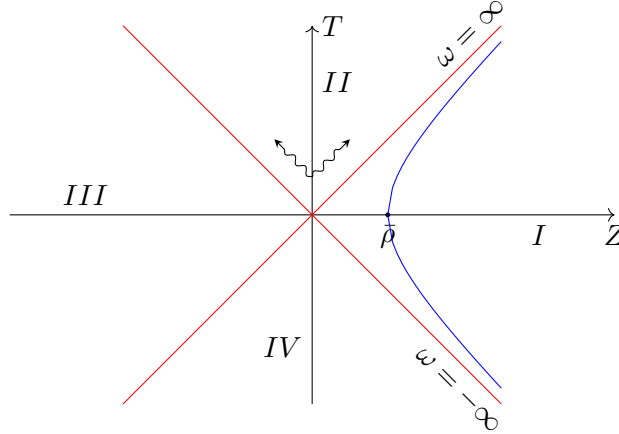
οι μετασχηματισμοί (1.48) παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} T &= u \cosh \bar{\omega} \\ Z &= u \sinh \bar{\omega} \end{aligned} \quad (1.51)$$

επικαλύπτοντας, έτσι, την περιοχή II : $T \geq |Z|$. Η χρονοειδής συντεταγμένη στην περιοχή II είναι η u , ενώ η χωροειδής είναι η $\bar{\omega}$. Στις συντεταγμένες $u, \bar{\omega}$, η μετρική είναι

$$ds^2 = u^2 d\bar{\omega}^2 - du^2 + dX^2 + dY^2 \quad (1.52)$$

Εάν η συντεταγμένη ρ παίρνει αρνητικές τιμές, επικαλύπτεται και η περιοχή III . Στην περιοχή III , ο χρόνος Rindler ω τρέχει αντίστροφα, σε σχέση με την I .



Σχήμα 1.2: Παλμοί φωτός που εκπέμπονται στην περιοχή II δεν μπορούν να εξέλθουν στην περιοχή I. Οι φωτοειδείς κοσμικές γραμμές απεικονίζονται με μαύρες κυματιστές γραμμές και έχουν κλίση ± 1 .

1.2.3 Συντεταγμένες Tortoise

Ας θεωρήσουμε μία ακτινική φέτα του χωροχρόνου Schwarzschild, που προκύπτει κρατώντας σταθερές τις γωνιακές συντεταγμένες θ και ϕ . Εστιάζουμε στην περιοχή I όπου $r \geq 2GM$. Θα αποδείξουμε ότι η μετρική που επάγεται στη φέτα αυτή, μετασχηματίζεται σε μία άλλη, που είναι σύμμορφη με τη μετρική Minkowski.

Δύο μετρικές $g_{\mu\nu}$ και $\tilde{g}_{\mu\nu}$ οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο που περιγράφεται από τις συντεταγμένες x^μ είναι σύμμορφες εάν η μια είναι ίση με το γινόμενο της άλλης επί μια θετική συνάρτηση του χώρου:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{A(x^\mu)} g_{\mu\nu} \quad (1.53)$$

Οι αιτιατικές σχέσεις μεταξύ δύο γεγονότων είναι οι ίδιες ως προς δύο σύμμορφες μετρικές. Για παράδειγμα, εάν δύο γειτονικά γεγονότα είναι χρονοειδώς διαχωρισμένα ως προς τη μετρική $g_{\mu\nu}$ (δηλαδή $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu < 0$), τότε θα είναι χρονοειδώς διαχωρισμένα και ως προς τη μετρική $\tilde{g}_{\mu\nu}$, αφού

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = e^{A(x^\mu)} ds^2 < 0 \quad (1.54)$$

Για σταθερές γωνιακές συντεταγμένες, η μετρική Schwarzschild παίρνει την εξής μορφή:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} \quad (1.55)$$

Εάν ορίσουμε τη συνάρτηση

$$F(r) = 1 - \frac{2GM}{r} \quad (1.56)$$

η οποία είναι θετική στην περιοχή I, τότε η εν λόγω μετρική μπορεί να γραφεί ως εξής

$$ds^2 = F(r) \left[-dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2} \right] \quad (1.57)$$

Έπειτα μετασχηματίζουμε την ακτινική συντεταγμένη ως ακολούθως

$$dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{2GM}{r}} \quad (1.58)$$

όπου r^* η ακτινική συντεταγμένη Tortoise. Η μετρική μετασχηματίζεται στην ακόλουθη, σύμμορφη επίπεδη μετρική

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r(r^*)}\right) \left[-dt^2 + (dr^*)^2\right] \quad (1.59)$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τη σχέση που τη συνδέει με τη συντεταγμένη Schwarzschild:

$$r^* = r + 2GM \ln \left(\frac{r - 2GM}{2GM}\right) \quad (1.60)$$

Σημειώνουμε ότι η συντεταγμένη r^* παίρνει τιμές στην ευθεία $(-\infty, \infty)$, σε αντίθεση με τη συντεταγμένη r , η οποία παίρνει τιμές στην ημιευθεία $[2GM, \infty)$. Εξάλλου, η μετρική Tortoise είναι σύμμορφη με τη μετρική Minkowski.

Στις συντεταγμένες Tortoise, οι ακτινικές φωτοειδείς γεωδαιτικές τροχιές είναι απλές, ακριβώς επειδή η μετρική είναι σύμμορφη επίπεδη. Οι εισερχόμενες τροχιές περιγράφονται από την εξίσωση

$$r^* + t = c \quad (1.61)$$

όπου c μια σταθερά. Οι εξερχόμενες τροχιές περιγράφονται από την εξίσωση

$$r^* - t = c \quad (1.62)$$

όπου c και πάλι κάποια σταθερά.

1.2.4 Συντεταγμένες Eddington-Finkelstein

Στο χωροχρονικό διάγραμμα t, r^* , οι φωτοειδείς κοσμικές γραμμές είναι ευθείες που σχηματίζουν γωνίες $\pm 45^\circ$ με το χωρικό άξονα. Ορίζουμε τις φωτοειδείς συντεταγμένες v, w ως εξής

$$v = t + r^*, \quad w = t - r^* \quad (1.63)$$

Οι συντεταγμένες αυτές είναι οι φωτοειδείς συντεταγμένες Eddington-Finkelstein. Η μετρική μετασχηματίζεται στην ακόλουθη

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv dw \quad (1.64)$$

Η εξίσωση με τη συντεταγμένη v σταθερή περιγράφει την τροχιά εισερχόμενων παλμών φωτός, ενώ η εξίσωση με την αντίστοιχη w σταθερή περιγράφει την τροχιά εξερχόμενων παλμών φωτός. Αντικαθιστώντας την συντεταγμένη Tortoise με τη συντεταγμένη Schwarzschild, προκύπτουν οι φωτοειδείς γεωδαιτικές τροχιές στο σύστημα συντεταγμένων Schwarzschild:

$$\begin{aligned} t + r + 2GM \ln \left(\frac{r - 2GM}{2GM}\right) &= c \\ t - r - 2GM \ln \left(\frac{r - 2GM}{2GM}\right) &= c \end{aligned} \quad (1.65)$$

όπου c σταθερά. Το φως θα φτάσει στον ορίζοντα σε άπειρο χρόνο t .

Στις συντεταγμένες v, r ή w, r η μετρική γράφεται, αντίστοιχα, ως εξής:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2 dr dv \\ ds^2 &= -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dw^2 - 2 dr dw \end{aligned} \quad (1.66)$$

Οι συνιστώσες τις μετρικής είναι πεπερασμένες για $r = 2GM$. Επιπρόσθετα η ορίζουσα της μετρικής είναι μη μηδενική, και άρα ο αντίστροφος της είναι καλά ορισμένος. Η ανωμαλία Schwarzschild έχει απαλειφθεί.

1.2.5 Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres

Οι συντεταγμένες Rindler δεν καλύπτουν ολόκληρο το χωροχρόνο, αλλά μόνο μια αρκετά μικρή περιοχή στην εξωτερική περιοχή του ορίζοντα της μελανή οπής. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις συντεταγμένες Kruskal-Szekeres, οι οποίες καλύπτουν ολόκληρο το χωροχρόνο και περιγράφουν τη μέγιστη γεωμετρία Schwarzschild. Στις συντεταγμένες αυτές απαλείφεται η ανωμαλία Schwarzschild για $r = 2GM$, αναδεικνύεται ο ορίζοντας και η μελανές περιοχές του χωροχρόνου.

Ας βρούμε πρώτα τη συντεταγμένη $R(r)$, ώστε η μετρική Schwarzschild στην εξωτερική περιοχή του ορίζοντα να αποκτήσει τη μορφή [2]:

$$ds^2 = F(R) (-R^2 d\omega^2 + dR^2) + r^2(R) d\Omega^2 \quad (1.67)$$

όπου $\omega = t/4GM$ η αδιάστατη χρονική συντεταγμένη Rindler. Αφού το απειροστό διάστημα παραμένει αναλλοίωτο ως προς γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων, πρέπει λοιπόν να ισχύει

$$\begin{aligned} F(R) R^2 &= 16G^2 M^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \\ F(R) dR^2 &= \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} \end{aligned} \quad (1.68)$$

Διαιρούμε τις εξισώσεις αυτές κατά μέλη και έπειτα ολοκληρώνουμε για να βρούμε τη συντεταγμένη R συναρτήσει της r :

$$R = GM e^{r/4GM} \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} \quad (1.69)$$

Η συνάρτηση $F(R)$ μπορεί να βρεθεί με αντικατάσταση

$$F(R) = \frac{16G^2 M^2}{R^2} \left[1 - \frac{2GM}{r(R)}\right] = \left(16e^{-r/2GM}\right) / r(R) \quad (1.70)$$

Καθώς $r \rightarrow 2GM$, τότε $R \rightarrow GM\sqrt{e\epsilon} = (\sqrt{e}\rho)/4$ και $F(R) \rightarrow 32GM/e$. Η μετρική προσεγγίζεται με την επίπεδη μετρική Rindler, την οποία μελετήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση $F(R)$ παραμένει θετική σε ολόκληρη την ημιευθεία $r \in [0, \infty)$. Δεν εκδηλώνεται κανένας απειρισμός στον ορίζοντα. Η $F(R)$ όμως, απειρίζεται στο σημείο $r = 0$.

Έπειτα, ας κάνουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} T &= R \sinh \omega \\ Z &= R \cosh \omega \end{aligned} \quad (1.71)$$

Οι συντεταγμένες T, Z καλούνται συντεταγμένες Kruskal-Szekeres. Συνδέονται με την ακτινική συντεταγμένη Schwarzschild με την εξής έκφραση

$$-T^2 + Z^2 = R^2 = (GM)^2 e^{r/2GM} \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right) \quad (1.72)$$

Στην εξωτερική περιοχή I, όπου $r \geq 2GM$, ισχύει επίσης η σχέση που συνδέει το χρόνο Schwarzschild με τις συντεταγμένες T, Z :

$$\tanh \left(\frac{t}{4GM} \right) = \frac{T}{Z} \quad (1.73)$$

Στις συντεταγμένες Kruskal-Szekeres, η μετρική (1.67) μετασχηματίζεται ως ακολούθως

$$ds^2 = \frac{16e^{-r/2GM}}{r} (-dT^2 + dZ^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (1.74)$$

Παρατηρούμε ότι οι συνιστώσες τις μετρικής είναι καλά ορισμένες στον ορίζοντα όπου $r = 2GM$. Επομένως, επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού των συντεταγμένων T, Z , ώστε να καλυφθεί ολόκληρη η ημιευθεία $r \in [0, \infty)$, συμπεριλαμβανομένης και της εσωτερικής περιοχής II, όπου $r < 2GM$. Προκύπτει η μεγίστη γεωμετρία Schwarzschild, το χωροχρονικό διάγραμμα της οποίας απεικονίζεται στο Σχήμα (1.2). Φυσικά, η μετρική συνεχίζει να απειρίζεται στο σημείο $r = 0$ όπου απειρίζεται ο τανυστής καμπυλότητας Riemann.

Η σχέση (1.72) ισχύει για όλες τις τιμές της ακτινικής συντεταγμένης r . Ο ορίζοντας $r = 2GM$ ανάγεται στις φωτοειδείς ευθείες $T = \pm Z$, που έχουν κλίση ± 1 , και ορίζουν τον κώνο φωτός του σημείου $T = 0, Z = 0$. Οι ευθείες αυτές χωρίζουν το χωροχρόνο σε τέσσερις περιοχές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Κάθε σημείο στο διάγραμμα αυτό αντιστοιχεί με μια σφαίρα με εμβαδόν $4\pi r^2$.

Η μετρική που επάγεται σε μια ακτινική φέτα με σταθερές γωνιακές συντεταγμένες είναι σύμμορφη με την επίπεδη μετρική Minkowski. Οι συντεταγμένες T, Z διατηρούν το είδος τους σε όλες τις περιοχές του χωροχρόνου, σε αντίθεση με τη συντεταγμένη r η οποία μετατρέπεται σε χρονοειδή στις περιοχές II και IV. Επειδή η συντεταγμένη r εξαρτάται από το χρόνο T , η μετρική Kruskal-Szekeres δεν είναι στατική. Εφόσον η μετρική είναι σύμμορφη με την επίπεδη μετρική Minkowski, οι φωτοειδείς ακτινικές κοσμικές γραμμές είναι ευθείες με κλίση ± 1 , παράλληλες με τους ορίζοντες.

Στο σχήμα 1.3 φαίνεται η αρχική περιοχή I, η οποία καλύπτεται από τις συντεταγμένες Schwarzschild $t, r \geq 2GM$ ή ω, R . Η περιοχή αυτή περιλαμβάνει μόνο το μισό χώρο, τον θετικό ημιάξονα Z . Οι χρονοειδείς γραμμές με σταθερή τη συντεταγμένη r είναι υπερβολές με ασύμπτωτες τις ευθείες $T = \pm Z$. Ο εξωτερικός παρατηρητής

Schwarzschild ακολουθεί μια τέτοια κοσμική γραμμή. Στο σχήμα απεικονίζονται και οι χωροειδείς ευθείες με σταθερή τη χρονική συντεταγμένη. Οι ευθείες $t = \pm\infty$ ταυτίζονται με τους δύο κλάδους του ορίζοντα. Για το λόγο αυτό, οι ορίζοντες καλούνται, αντίστοιχα, ο μελλοντικός ορίζοντας και ο ορίζοντας του παρελθόντος.

Στην περιοχή II, όπου $T \geq |Z|$, οι υπερβολές με σταθερή τη συντεταγμένη r είναι χωροειδείς, σε συμφωνία με το γεγονός ότι για $r < 2GM$, η συντεταγμένη r είναι χρονοειδής. Η ανωμαλία $r = 0$ ανάγεται στην υπερβολή $T^2 - Z^2 = (GM)^2$. Επειδή σε όλα τα σημεία της υπερβολής αυτής ο τανυστής καμπυλότητας απειρίζεται, δεν μπορούμε να επεκτείνουμε το χωροχρόνο πέραν της περιοχής που οριοθετούν οι ορίζοντες και η υπερβολή $T^2 - Z^2 = (GM)^2$. Όπως αναφέραμε προηγουμένως οι φωτοειδείς κοσμικές γραμμές είναι ευθείες με κλίση ± 1 , παράλληλες με τους ορίζοντες. Επειδή το φως πρέπει να κατευθύνεται προς το μέλλον, αυτό δεν μπορεί να εξέλθει από την περιοχή II στην περιοχή I. Ως προς τον εξωτερικό παρατηρητή Schwarzschild, η περιοχή II είναι μελανή. Μάλιστα, οι φωτοειδείς κοσμικές γραμμές καταλήγουν στην ανωμαλία $r = 0$.

Αντίθετα, άμαζα και σωματίδια με μάζα μπορούν να εισέλθουν στην περιοχή II περνώντας από το μελλοντικό ορίζοντα. Συγκεκριμένα ας θεωρήσουμε τον παρατηρητή Kruskal-Szekeres ο οποίος ακολουθεί την κοσμική γραμμή $Z = \bar{Z}$ στην περιοχή I. Αυτός θα εισέλθει στην περιοχή II περνώντας από τον ορίζοντα σε πεπερασμένο χρόνο $T = \bar{Z}$. Το γεγονός αυτό συμβαίνει σε άπειρο συντεταγμένο χρόνο t (ή ω), σύμφωνα με το φαινόμενο της διαστολής του χρόνου. Η κοσμική γραμμή καταλήγει στην ανωμαλία $r = 0$.

Η περιοχή II μπορεί να καλυφθεί από τις συντεταγμένες $\bar{\omega}$, u , οι οποίες σχετίζονται με τις συντεταγμένες ω , R της περιοχής I μέσω αναλυτικής συνέχειας τους στο μιγαδικό επίπεδο. Συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}\omega &\rightarrow \bar{\omega} - \frac{i\pi}{2} \\ R &\rightarrow iu\end{aligned}\tag{1.75}$$

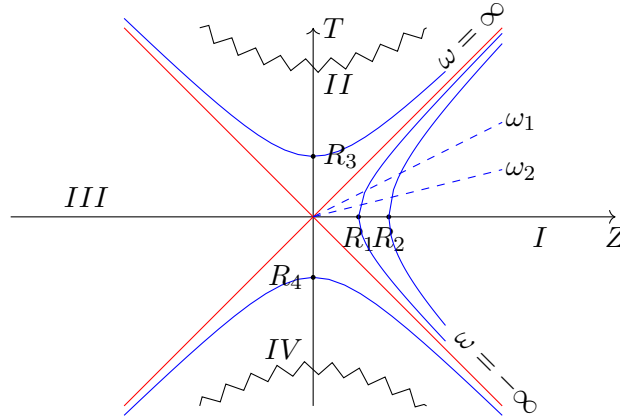
με τη μετρική στην περιοχή II να παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = F(u) (u^2 d\bar{\omega}^2 - du^2) + r^2(u) d\Omega^2\tag{1.76}$$

Στην περιοχή II η u είναι χρονοειδής συντεταγμένη, ενώ η $\bar{\omega}$ χωροειδής.

Η μεγίστη γεωμετρία Schwarzschild περιέχει ακόμα δύο περιοχές: 1) την ασυμπτωτική περιοχή III, η οποία περιέχει τον αρνητικό ημιάξονα Z και όπου $r \geq 2GM$ και 2) την περιοχή IV, η οποία περιέχει τον αρνητικό ημιάξονα T και όπου $r < 2GM$. Είναι προφανές ότι ο παρατηρητής Schwarzschild στην περιοχή I δεν βρίσκεται καθόλου σε αιτιατική επαφή με την περιοχή III. Δεν μπορεί να στείλει ούτε και να λάβει φωτεινά σήματα από την περιοχή III. Στην περιοχή III το βέλος του χρόνου t έχει αντίθετη κατεύθυνση από το βέλος του χρόνου Kruskal T .

Ενώ ο παρατηρητής Schwarzschild μπορεί να λάβει πληροφορίες από την περιοχή IV, δεν μπορεί να στείλει σε αυτήν σήματα. Για τον παρατηρητή Schwarzschild στην περιοχή I, η περιοχή IV είναι λευκή. Όλα τα φωτεινά σήματα που εισέρχονται στην περιοχή I από την περιοχή IV περνούν από τον ορίζοντα του παρελθόντος, όταν δηλαδή $t = -\infty$. Σε αντίθεση με τις μελανές οπές, είναι σχεδόν αδύνατο, να παραχθούν λευκές οπές στο Σύμπαν.



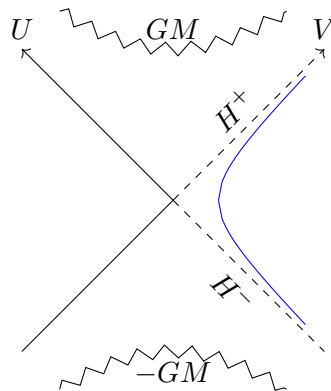
Σχήμα 1.3: Η μέγιστη γεωμετρία Schwarzschild. Οι μπλε μη διακεκομμένες γραμμές απεικονίζουν τις γραμμές με r ή R σταθερό. Οι κυματιστές μαύρες γραμμές απεικονίζουν τους δύο κλάδους της φυσικής ανωμαλίας, $r = 0$. Οι καμπύλες αυτές είναι υπερβολές που τέμνουν τον χρονικό άξονα στα σημεία $T = \pm GM$.

Ακολουθώντας, ορίζουμε ‘φωτοειδείς’ συντεταγμένες (βλέπε Σχήμα 1.4), τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} V &= T + Z \\ U &= T - Z \end{aligned} \quad (1.77)$$

Οι άξονες των συντεταγμένων αυτών συμπίπτουν με τους ορίζοντες $T = \pm Z$. Η μετρική παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -\frac{16e^{-r/2GM}}{r} dU dV + r^2 d\Omega^2 \quad (1.78)$$



Σχήμα 1.4: Οι φωτοειδείς συντεταγμένες U, V . Οι δύο άξονες $V = 0$ και $U = 0$ συμπίπτουν με τους ορίζοντες. Ο μελλοντικός ορίζοντας έχει συμβολιστεί με H^+ , ενώ ο ορίζοντας του παρελθόντος με H^- .

1.3 Δημιουργία Μελανών Οπών

Έχει προαναφερθεί ότι οι μελανές οπές παράγονται από αστέρες, μέσω της διαδικασίας της βαρυτικής κατάρρευσης. Ωστόσο, πολλά ερωτήματα μπορούν να τεθούν τόσο για τη διαδικασία αυτή, όσο και για τη σχετικιστική περιγραφή του φαινομένου.

Τσως τα πιο αξιοσημείωτα γεγονότα στον κύκλο ζωής ενός αστέρα είναι η γένεση και ο θάνατος του. Αρχικά, για να σχηματιστεί ο αστέρας, πρέπει αέριο υδρογόνο να συγκεντρωθεί σε κάποια περιοχή του χώρου. Εξαιτίας της βαρυτικής έλξης, το αέριο αρχίζει να καταρρέει. Τα άτομα του αερίου αποκτούν μεγαλύτερες ταχύτητες και αρχίζουν να συγκρούονται ολοένα και συχνότερα. Ως αποτέλεσμα, αυξάνεται η θερμοκρασία του αερίου. Όταν οι ταχύτητες των ατόμων υδρογόνου γίνουν αρκετά μεγάλες, λαμβάνουν χώρα πυρηνικές συντήξεις, σχηματίζοντας πυρήνες Ηλίου. Η θερμότητα που παράγεται επιφέρει αύξηση της πίεσης του αερίου. Η πίεση αυξάνεται μέχρι να αντισταθμίσει τις βαρυτικές ελκτικές δυνάμεις. Παράλληλα η θερμοκρασία αυξάνεται σε τέτοιο βαθμό, ώστε ο αστέρας να αρχίσει να ακτινοβολεί, όπως ένα μέλαν σώμα.

Για αστέρες με μάζα μικρότερη από το όριο Chandrasekhar, $M < 1.4 M_{\odot}$ όπου M_{\odot} η μάζα του ήλιου, το υδρογόνο αποτελεί το κύριο καύσιμο για τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στο εσωτερικό τους. Σε αυτές τις αντιδράσεις οφείλεται παραγωγή της αναγκαίας ενέργειας, έτσι ώστε ο αστέρας να ακτινοβολεί. Όταν τα θερμοπυρηνικά καύσιμα του αστέρα εξαντληθούν, η θερμοκρασία του αρχίζει να ελαττώνεται. Ως αποτέλεσμα, η πίεση μειώνεται, και ο αστέρας αρχίζει να συστέλλεται υπό την επίδραση της βαρύτητας του. Τα ηλεκτρόνια των ατόμων δεν μπορούν να βρεθούν στην ίδια κατάσταση, λόγω της απαγορευτικής αρχής του Pauli. Επομένως, όταν τα άτομα του αστέρα έλθουν πιο κοντά μεταξύ τους, αναπτύσσεται πίεση Fermi εξαιτίας της απαγορευτικής αρχής του Pauli. Τελικά, η πίεση Fermi εξισορροπεί τη βαρυτική κατάρρευση, με τον αστέρα να μετατρέπεται σε ένα λευκό νάνο [3]. Σε αντίθεση με τον αρχικό αστέρα, ο λευκός νάνος δεν ακτινοβολεί.

Για αστέρες με μάζες μεγαλύτερες από τη μάζα Chandrasekhar, η πίεση Fermi των ηλεκτρονίων δεν είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να αντισταχθεί της βαρυτικής κατάρρευσης. Η βαρύτητα αναγκάζει το λευκό νάνο να αρχίσει να καταρρέει, με αποτέλεσμα την περαιτέρω συρρίκνωση του. Καθώς αυτός συστέλλεται, τα ηλεκτρόνια αλληλεπιδρούν με τα πρωτόνια στους πυρήνες των ατόμων παράγοντας νετρόνια και νεutrίνο. Τα νεutrίνο διαφεύγουν, ενώ τα νετρόνια, ως φερμιόνια που είναι, δημιουργούν επιπρόσθετη πίεση Fermi, η οποία αντισταθμίζεται στη βαρυτική έλξη. Εάν η πίεση Fermi αντισταθμιστεί με τη βαρυτική κατάρρευση, ο αστέρας μετατρέπεται σε ένα σώμα που καλείται αστέρας νετρονίου.

Εάν η μάζα του αστέρα γίνει μεγαλύτερη από τη μάζα Oppenheimer-Volkoff, περίπου $3-4M_{\odot}$, τότε η βαρυτική κατάρρευση δεν μπορεί να συγκρατηθεί από την πίεση Fermi των νετρονίων. Η κατάρρευση συνεχίζει μέχρις ότου η ακτίνα του αστέρα γίνει οριακά πιο μικρή από τη βαρυτική του ακτίνα. Όταν συμβεί αυτό, παράγεται μια μελανή οπή. Η βαρυτική κατάρρευση θα καταλήξει στο σχηματισμό της ανωμαλίας.

Τι εμποδίζει λοιπόν ένα πλανήτη από το να μετατραπεί, μέσω βαρυτικής κατάρρευσης, σε μια μελανή οπή; Η απάντηση σχετίζεται με τις μάζες των ουράνιων σωμάτων. Όσο μεγαλύτερη μάζα έχει ένα ουράνιο σώμα, τόσο πιο δυνατή είναι η βαρυτική του έλξη. Συνεπώς, επειδή η μάζα ενός πλανήτη είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα ενός

τυπικού αστέρα, η βαρυτική του έλξη, τότε, είναι πολύ μικρότερη από την πίεση Fermi που προκαλούν τα ηλεκτρόνια των ατόμων του. Η πίεση Fermi είναι αρκετά μεγάλη, εμποδίζοντας τη βαρυτική κατάρρευση του πλανήτη.

Η βαρυτική κατάρρευση μπορεί να περιγραφεί επακριβώς στη γενική θεωρία της σχετικότητας. Η λύση του Vaidya (1943) περιγράφει τη γεωμετρία που παράγεται από μια συμμετρική κατανομή φωτοειδούς ύλης, η οποία καταρρέει υπό την επίδραση της βαρύτητας της. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε έναν λεπτό φλοιό φωτός, με το φως να κινείται ακτινικά προς τα μέσα. Η μετρική Vaidya είναι [4]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM(v)}{r}\right)dv^2 + 2 drdv + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.79)$$

όπου $v = t + r^*$ η φωτοειδής συντεταγμένη Eddington-Finkelstein. Η παράμετρος M έχει χρονική εξάρτηση. Παρόλο που η μετρική δεν είναι στατική, αυτή διατηρεί τη σφαιρική της συμμετρία.

Προσδιορίζοντας τον ταυστή του Einstein εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η μόνη μη μηδενική συνιστώσα του ταυστή ενέργειας και ορμής είναι η T_{vv} , η οποία έχει τη μορφή

$$T_{vv} = \frac{\mathcal{E}(v)}{4\pi r^2} \quad (1.80)$$

όπου $\mathcal{E}(v) = dM(v)/dv$.

Στην ειδική περίπτωση ενός σφαιρικού φλοιού, απειροστού πάχους, του οποίου η κατάρρευση περιγράφεται από την εξίσωση $v = t + r^* = v_0$, όπου v_0 σταθερά, η συνάρτηση \mathcal{E} παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{E}(v) = M\delta(v - v_0) \quad (1.81)$$

όπου M η συνολική ενέργεια του φλοιού. Το εμβαδόν της επιφάνειας του φλοιού ελαττώνεται με το χρόνο. Ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε

$$M(v) = 0, \quad v < v_0 \quad (1.82)$$

και

$$M(v) = M, \quad v \geq v_0 \quad (1.83)$$

Συνεπώς, στο εσωτερικό του φλοιού, όπου $v < v_0$, η μετρική είναι η επίπεδη μετρική Minkowski, ενώ στην εξωτερική περιοχή όπου $v > v_0$ παίρνουμε τη στατική γεωμετρία Schwarzschild. Η μελανή οπή σχηματίζεται όταν ο φλοιός καταρρεύσει εντός της βαρυτικής του ακτίνας $r_0 = 2GM$. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε το διάγραμμα Penrose για τη γεωμετρία Vaidya.

Κεφάλαιο 2

Διαγράμματα Penrose

Μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών μπορούμε να συνδέσουμε έναν άπειρο χωροχρόνο με σφαιρική συμμετρία με ένα πεπερασμένο, δισδιάστατο διάγραμμα που καλείται διάγραμμα Penrose [2]. Τα διαγράμματα αυτά αναδεικνύουν τις αιτιατικές σχέσεις μεταξύ δύο οποιονδήποτε γεγονότων του χωροχρόνου. Όλες οι φωτοειδείς κοσμικές γραμμές απεικονίζονται ως ευθείες που σχηματίζουν γωνία $\pm 45^\circ$ με τον χωρικό άξονα.

2.1 Διάγραμμα Penrose για χωροχρόνο Minkowski

Ας θεωρήσουμε τον επίπεδο χωροχρόνο Minkowski. Χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες για να περιγράψουμε το χώρο και εξετάζουμε μια ακτινική φέτα. Η μετρική που επάγεται στη φέτα αυτή είναι

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 \quad (2.1)$$

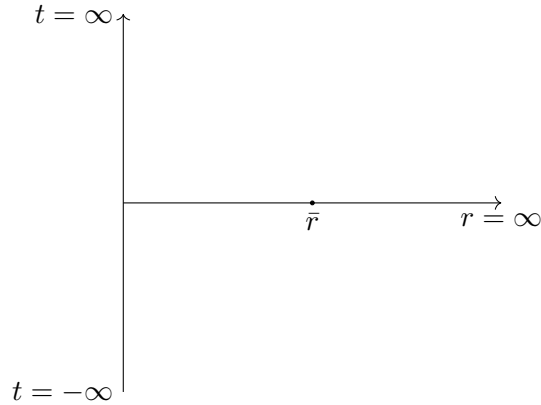
Ορίζουμε έπειτα τις φωτοειδείς συντεταγμένες

$$\begin{aligned} y^+ &= t + r \\ y^- &= t - r \end{aligned} \quad (2.2)$$

Επειδή η ακτινική συντεταγμένη r παίρνει θετικές τιμές, ισχύει η εξής ανισότητα: $y^+ - y^- \geq 0$. Ο χωροχρόνος Minkowski απεικονίζεται από το ημιεπίπεδο $r \geq 0$ του Σχήματος 2.1. Περιλαμβάνει τον θετικό ημιάξονα y^+ και τον αρνητικό ημιάξονα y^- . Ο χωροχρόνος περιλαμβάνει τις εξής ασυμπτωτικές περιοχές:

- Μελλοντικό χρονοειδές άπειρο, i^+ : $r = \text{σταθερό}$, $t \rightarrow \infty$.
- Παρελθοντικό χρονοειδές άπειρο, i^- : $r = \text{σταθερό}$, $t \rightarrow -\infty$.
- Χωροειδές άπειρο, i^0 : $t = \text{σταθερό}$, $r \rightarrow \infty$.
- Μελλοντικό φωτοειδές άπειρο, \mathcal{I}^+ : $y^- = \text{σταθερό}$, $y^+ \rightarrow \infty$.
- Παρελθοντικό φωτοειδές άπειρο, \mathcal{I}^- : $y^+ = \text{σταθερό}$, $y^- \rightarrow -\infty$.

Τα χρονοειδή άπειρα i^+ και i^- περιλαμβάνουν όλα τα γεγονότα του χωροχρόνου Minkowski τα οποία έχουν σταθερή χωρική συντεταγμένη και χρονική συντεταγμένη που τείνει στο $\pm\infty$ αντίστοιχα. Κάθε χρονοειδής κοσμική γραμμή ξεκινά από ένα



Σχήμα 2.1: Απεικόνιση του χωροχρόνου Minkowski. Κάθε σημείο του επιπέδου αναπαριστά μία σφαίρα με εμβαδόν $4\pi r^2$.

σημείο στο i^- και καταλήγει σε ένα σημείο στο i^+ . Το χωροειδές άπειρο i^0 περιλαμβάνει γεγονότα που έχουν σταθερή χρονική συντεταγμένη και χωρική συντεταγμένη που τείνει στο άπειρο. Όλες οι χωροειδείς φέτες έχουν ως σύνορο το i^0 . Τέλος όλες οι εξερχόμενες ακτίνες φωτός καταλήγουν στο μελλοντικό φωτοειδές άπειρο \mathcal{I}^+ και όλες οι εισερχόμενες ακτίνες φωτός ξεκινούν από το παρελθοντικό φωτοειδές άπειρο \mathcal{I}^- . Οι άξονες y^+ ($y^- = 0$) και y^- ($y^+ = 0$) έχουν για άκρη τους την αρχή των αξόνων, κλίση ± 1 και καταλήγουν στα \mathcal{I}^+ και \mathcal{I}^- αντίστοιχα.

Ακολουθώντας, εφαρμόζουμε τους εξής μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned} Y^+ &= f(y^+) \\ Y^- &= f(y^-) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Επιλέγοντας κατάλληλα τη συνάρτηση f , μπορούμε να απεικονίσουμε το ημιεπίπεδο $r \geq 0$ ως ένα πεπερασμένο χωρίο. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας συνάρτησης είναι η υπερβολική εφαπτομένη, που απεικονίζει την ευθεία των πραγματικών αριθμών στο πεπερασμένο διάστημα $[-1, 1]$. Η μετρική μετασχηματίζεται ως ακολούθως

$$ds^2 = -\frac{dY^+ dY^-}{f'(y^+) f'(y^-)} \tag{2.4}$$

όπου $f'(y^+) = \frac{df(y^+)}{dy^+}$ και $f'(y^-) = \frac{df(y^-)}{dy^-}$. Οι συντεταγμένες T και R , τότε παίρνουν την εξής μορφή

$$\begin{aligned} T &= \frac{Y^+ + Y^-}{2} \\ R &= \frac{Y^+ - Y^-}{2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

και το απειροστό διάστημα γίνεται

$$ds^2 = \frac{-dT^2 + dR^2}{f'(y^+) f'(y^-)} \tag{2.6}$$

Παρατηρούμε ότι η καινούρια μετρική είναι σύμμορφη με τη μετρική Minkowski. Εάν ο παράγοντας κλίμακας $1/(f'(y^+)f'(y^-))$ είναι θετικός, διατηρούνται οι αιτιατικές σχέσεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε γεγονότων. Φωτοειδώς διαχωρισμένα γεγονότα ως προς μια μετρική $g_{\mu\nu}$ παραμένουν φωτοειδώς διαχωρισμένα ως προς μια σύμμορφη μετρική $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Παρομοίως και για χρονοειδώς και χωροειδώς διαχωρισμένα γεγονότα. Για να διεκπεραιώσουμε το μετασχηματισμό, επιλέγουμε την υπερβολική εφαπτομένη:

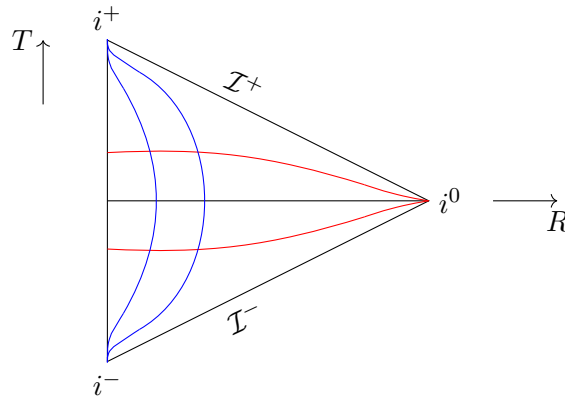
$$\begin{aligned} Y^+ &= \tanh(y_+) \\ Y^- &= \tanh(y_-) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Οι συναρτήσεις $f'(y_+) = 1/\cosh^2(y_+)$ και $f'(y_-) = 1/\cosh^2(y_-)$ παίρνουν θετικές τιμές και ο παράγοντας κλίμακας είναι θετικός.

Λαμβάνοντας υπόψη το πεδίο τιμών της υπερβολικής εφαπτομένης, καθώς και το γεγονός ότι είναι αύξουσα συνάρτηση, το άπειρο ημιέπιπεδο $r \geq 0$ μετασχηματίζεται στο πεπερασμένο τριγωνικό χωρίο που ορίζουν οι ευθείες

$$\begin{aligned} Y^+ &= 1 \\ Y^- &= -1 \\ Y^+ - Y^- &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Τα χρονοειδή άπειρα i^+ και i^- μετασχηματίζονται στα σημεία τομής των ευθειών $Y^+ = 1$ και $Y^- = -1$ με την ευθεία $Y^+ = Y^-$ αντίστοιχα. Το διάγραμμα Penrose του χωροχρόνου Minkowski απεικονίζεται, στην τελική του μορφή, στο Σχήμα 2.2. Οι μπλε γραμμές αναπαριστούν τις κοσμικές γραμμές με σταθερή ακτινική συντεταγμένη, ενώ οι κόκκινες απεικονίζουν τις χωροειδείς επιφάνειες με t σταθερό.



Σχήμα 2.2: Το διάγραμμα Penrose για το χωρόχρονο Minkowski.

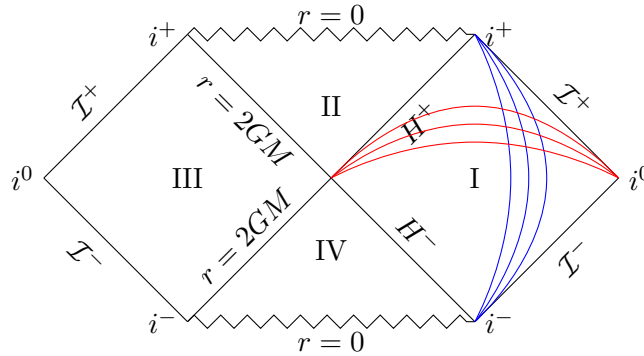
2.2 Διάγραμμα Penrose της μεγίστης γεωμετρίας Schwarzschild

Για να κατασκευάσουμε το διάγραμμα Penrose της μεγίστης γεωμετρίας Schwarzschild ακολουθούμε μια παρόμοια διαδικασία. Οι αρχικές συντεταγμένες είναι οι

Kruskal-Szekeres, T, Z . Σε αντίθεση με την ακτινική συντεταγμένη Minkowski, η χωρική συντεταγμένη Kruskal-Szekeres, Z παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Μετασχηματίζουμε τις T, Z ως εξής

$$\begin{aligned} Y^+ &= f(T + Z) \\ Y^- &= f(T - Z) \end{aligned} \quad (2.9)$$

όπου για τη συνάρτηση f μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την υπερβολική εφαπτομένη. Το διάγραμμα Penrose φαίνεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Το διάγραμμα Penrose για τη μεγίστη γεωμετρία Schwarzschild.

Στο διάγραμμα Penrose, οι τέσσερις περιοχές της μεγίστης γεωμετρίας Schwarzschild απεικονίζονται σε πεπερασμένα χωρία. Η εξωτερική περιοχή I διαχωρίζεται από την μελανή περιοχή II με τον μελλοντικό ορίζοντα και από την λευκή οπή IV με τον παρελθοντικό ορίζοντα. Υπάρχει ακόμα μια ασυμπτωτική περιοχή, η οποία περιέχει χωροειδές άπειρο και αυτή είναι η περιοχή III. Στο σχήμα απεικονίζονται επίσης τα φωτοειδή και χρονοειδή άπειρα.

Οι δύο κλάδοι της ανωμαλίας $r = 0$ απεικονίζονται με κυματιστές γραμμές και βρίσκονται στις περιοχές II και IV. Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο οι λευκές οπές δεν είναι φυσικά πραγματοποιήσιμες.

Στα διαγράμματα Penrose οι φωτεινές ακτίνες απεικονίζονται με ευθείες γραμμές που έχουν κλίση ± 1 . Όλες οι εξερχόμενες ακτίνες φωτός καταλήγουν στο μελλοντικό φωτοειδές άπειρο. Οι εισερχόμενες ακτίνες φωτός, που παράγονται στην περιοχή I, περνούν στην περιοχή II διαμέσου του ορίζοντα και καταλήγουν στην ανωμαλία [5].

Επιπρόσθετα, οι χρονοειδείς γραμμές με σταθερή την r συντεταγμένη στην περιοχή I, αρχίζουν από το i^- και καταλήγουν στο i^+ . Οι φέτες με σταθερή την t συντεταγμένη, έχουν αρχή το σημείο τομής των δύο οριζόντων και τέλος το i^0 .

Κανένας παρατηρητής δεν μπορεί να περάσει από την ασυμπτωτική περιοχή I στην ασυμπτωτική περιοχή III (μέσω της περιοχής II). Αυτό δεν είναι εφικτό διότι κανένας παρατηρητής δεν μπορεί να ταξιδέψει με ταχύτητα μεγαλύτερη από αυτήν του φωτός. Οι περιοχές I και III συνδέονται με μια γεωμετρία που ονομάζεται σκουληκότρυπα. Πρόκειται για μια διάταξη με δύο στόμια, διαμέσου των οποίων σχηματίζεται μια σήραγγα. Η σήραγγα αυτή δεν μπορεί να διαπεραστεί. Μια τέτοια σκουληκότρυπα μπορεί να βρεθεί μέσα στη μεγίστη γεωμετρία Schwarzschild και καλείται σκουληκότρυπα Schwarzschild.

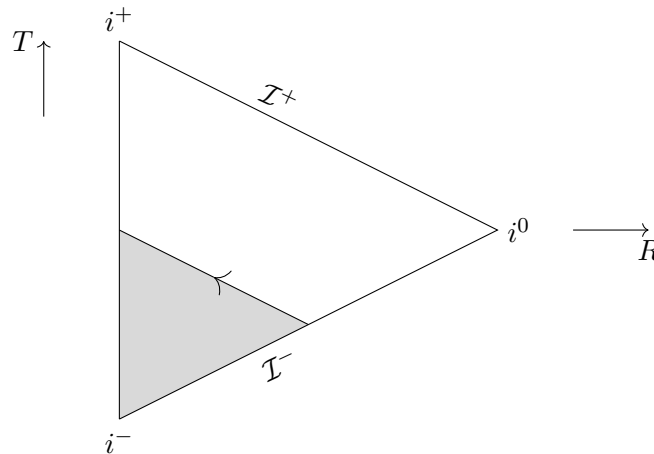
2.3 Διάγραμμα Penrose για τη βαρυτική κατάρρευση σφαιρικού φλοιού φωτός

Στην ενότητα 1.3 περιγράψαμε τη βαρυτική κατάρρευση ενός λεπτού σφαιρικού φλοιού φωτός, η οποία οδηγεί στο σχηματισμό μιας μελανής οπής¹.

Σε όλη τη διάρκεια της βαρυτικής κατάρρευσης υπάρχει σφαιρική συμμετρία. Στο εσωτερικό του φλοιού δεν υπάρχει ύλη ή ενέργεια. Επομένως η γεωμετρία περιγράφεται από τη μετρική Minkowski. Ισοδύναμα το βαρυτικό πεδίο είναι μηδενικό στο εσωτερικό του φλοιού, όπως εξάλλου θα ανέμενε κανείς με βάση το θεώρημα του Gauss. Στην εξωτερική περιοχή του φλοιού, η γεωμετρία περιγράφεται από τη μετρική Schwarzschild. Πράγματι, με βάση το θεώρημα του Birkhoff, η μετρική Schwarzschild περιγράφει την εξωτερική περιοχή μιας οποιασδήποτε κατανομής μάζας (ή ενέργειας) με σφαιρική συμμετρία, ακόμα και εάν αυτή μεταβάλλεται με το χρόνο [6]. Οι δύο γεωμετρίες ενώνονται επιβάλλοντας συνέχεια στις συνιστώσες της μετρικής διαμέσου του φλοιού. Οι πρώτες παράγωγοι της μετρικής είναι ασυνεχείς, με την ασυνέχεια να προσδιορίζεται με βάση τις ολοκληρωτικές εξισώσεις του Einstein. Αντίστοιχα στη Νευτώνεια θεωρία, το βαρυτικό πεδίο που παράγει ένας φλοιός απειροστού πάχους είναι ασυνεχές διαμέσου του φλοιού, ενώ το βαρυτικό δυναμικό είναι συνεχές.

Το διάγραμμα Penrose προκύπτει εάν ενώσουμε τμήματα των διαγραμμάτων Penrose του χωροχρόνου Minkowski και της μεγίστης γεωμετρίας Schwarzschild.

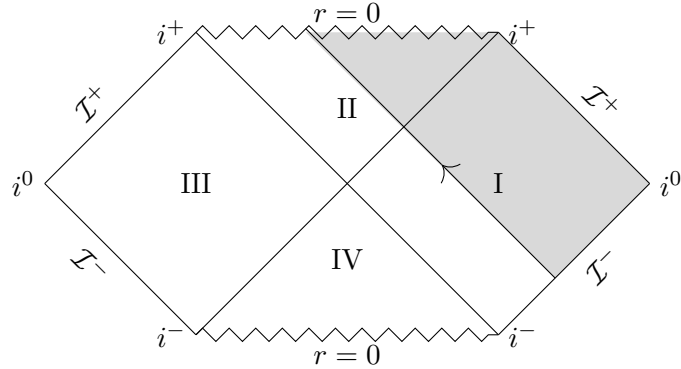
Θεωρούμε πρώτα το διάγραμμα Penrose του χωροχρόνου Minkowski. Η κίνηση του φλοιού περιγράφεται από μια εισερχόμενη ακτίνα φωτός, η οποία ξεκινά από το φωτεινές άπειρο \mathcal{I}^- . Αυτή χωρίζει το διάγραμμα σε δύο τμήματα. Η εσωτερική περιοχή του φλοιού αντιστοιχεί στο τμήμα για το οποίο η ακτινική συντεταγμένη είναι μικρότερη από τη συντεταγμένη ακτίνα του φλοιού: Στο Σχήμα 2.4 η περιοχή αυτή έχει σκιαστεί.



Σχήμα 2.4: Φλοιός φωτός που καταρρέει στο χωροχρόνο Minkowski. Το σκιασμένο τμήμα περιγράφει την εσωτερική περιοχή του φλοιού.

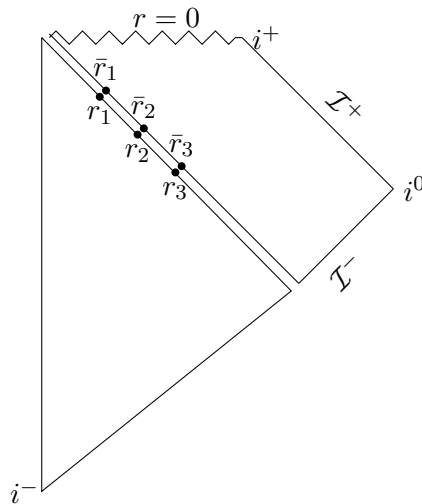
¹Τα φωτόνια είναι άμαζα σωματίδια. Στη γενική θεωρία της σχετικότητας, η μάζα είναι ισοδύναμη με την Ενέργεια. Η συνολική ενέργεια του φλοιού μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια που ισοδυναμεί με τη μάζα Oppenheimer-Volkoff.

Η εξωτερική περιοχή του φλοιού περιγράφεται από ένα τμήμα του διαγράμματος Penrose του χωροχρόνου Schwarzschild. Μια εισερχόμενη ακτίνα φωτός χωρίζει το χωροχρόνο σε δύο περιοχές, με την εσωτερική να απορρίπτεται.



Σχήμα 2.5: Ο φλοιός φωτός στο χωροχρόνο Schwarzschild. Το σκιασμένο τμήμα περιγράφει την εξωτερική περιοχή του φλοιού.

Ενώνουμε τις δύο σκιασμένες περιοχές για να προκύψει το διάγραμμα Penrose που περιγράφει τη βαρυτική κατάρρευση ενός σφαιρικού φλοιού φωτός. Τώρα κάθε σημείο ενός διαγράμματος Penrose αντιστοιχεί σε μια σφαίρα. Η συνέχεια των συνιστωσών της μετρικής διαμέσου του φλοιού επιβάλλει συνέχεια στο εμβαδόν της σφαίρας αυτής, το οποίο προσδιορίζεται με βάση τις δύο γεωμετρίες εκατέρωθεν του φλοιού.



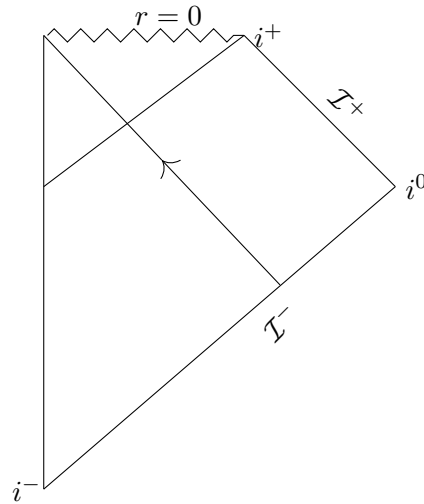
Σχήμα 2.6: Τα δύο διαγράμματα που περιγράφουν το εσωτερικό και το εξωτερικό του σφαιρικού φλοιού πριν την ένωσή τους.

Στο Σχήμα 2.7 απεικονίζεται η τελική μορφή του διαγράμματος Penrose. Όπως φαίνεται, ο ορίζοντας σχηματίζεται προτού ο φλοιός καταρρεύσει εντός της βαρυτικής του ακτίνας. Στο σημείο τομής του ορίζοντα με την ακτίνα που απεικονίζει την

2.3. Διάγραμμα Penrose για τη βαρυτική κατάρρευση σφαιρικού φλοιού φωτός

κίνηση του φλοιού, το εμβαδόν του σφαιρικού φλοιού συμπίπτει με τον εμβαδόν του οριζοντα. Ακολούθως, το εμβαδόν του σφαιρικού φλοιού γίνεται μικρότερο από αυτό του οριζοντα, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μια μελανή οπή. Στο τέλος, ο φλοιός καταρρέει σχηματίζοντας την ανωμαλία. Το πιο κάτω διάγραμμα Penrose περιγράφει τη γεωμετρία Vaidya με τον ταυστή ενέργειας και ορμής να δίνεται από την έκφραση

$$T_{\nu\nu} = \frac{M\delta(\nu - \nu_0)}{4\pi r^2} \quad (2.10)$$



Σχήμα 2.7: Το διάγραμμα Penrose που περιγράφει τη βαρυτική κατάρρευση σφαιρικού φλοιού φωτός απειροστού πάχους.

Κεφάλαιο 3

Κβαντική Σύμπλεξη και Εντροπία

Όπως είναι γνωστό, στην κβαντική μηχανική μπορούμε να συνδυάσουμε δύο ή περισσότερα συστήματα, ούτως ώστε να δημιουργήσουμε ένα μεγαλύτερο. Ακόμα και εάν οι βαθμοί ελευθερίας των υποσυστημάτων δεν αλληλεπιδρούν, αυτοί μπορεί να βρίσκονται σε κβαντική σύμπλεξη.

Οι καταστάσεις ενός οποιουδήποτε κβαντικού συστήματος ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο Hilbert. Στην περίπτωση σύνθετων συστημάτων ο διανυσματικός χώρος Hilbert είναι ισομορφικός με το τανυστικό γινόμενο των διανυσματικών χώρων που περιγράφουν τα υποσυστήματα του [7].

Παράλληλα, μπορούμε να χωρίσουμε ένα σύστημα σε υποσυστήματα. Όπως θα δούμε, γενικά η κβαντική σύμπλεξη δεν επιτρέπει την περιγραφή των υποσυστημάτων με καθαρές (pure) καταστάσεις, αλλά από μεικτές (mixed) καταστάσεις που αντιστοιχούν σε πίνακες πυκνότητας.

Έστω ότι ένα σύστημα αποτελείται από N υποσυστήματα. Κάθε κατάσταση του συστήματος αυτού μπορεί να γραφεί ως επαλληλία καταστάσεων της μορφής

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle \quad (3.1)$$

όπου $|\psi_i\rangle$ η κατάσταση του i -οστού υποσυστήματος. (Ο δείκτης i παίρνει τιμές από 1 μέχρι N). Οι επαλληλίες αυτές απαρτίζουν ένα διανυσματικό χώρο Hilbert, \mathcal{H} , που είναι ισομορφικός με το τανυστικό γινόμενο των διανυσματικών χώρων \mathcal{H}_i , που συνδέονται με τα επί μέρους υποσυστήματα:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$$

Η διαστατικότητα του χώρου \mathcal{H} ισούται με το γινόμενο των διαστατικότητων των κβαντικών υποσυστημάτων.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε σύνθετα συστήματα, που αποτελούνται από δύο υποσυστήματα.

3.1 Συστήματα δύο υποσυστημάτων

Έστω ένα κβαντικό σύστημα V αποτελείται από τα υποσυστήματα A και B . Το κάθε υποσύστημα μπορεί να αποτελείται από άλλα μικρότερα. Εξετάζουμε τις περι-

πτώσεις που το συνολικό σύστημα περιγράφεται από μια καθαρή κατάσταση $|\Psi\rangle$. Το συνολικό σύστημα V είναι ισομορφικό με το τανυστικό γινόμενο των υποσυστημάτων [2, 8]:

$$V = A \otimes B \quad (3.2)$$

Έστω τα σύνολα $B_A = \{|\alpha\rangle\}$ και $B_B = \{|\beta\rangle\}$ αποτελούν ορθοκανονικές βάσεις στους χώρους A και B αντίστοιχα. Οι καταστάσεις κάθε υποσυστήματος μπορούν να γραφτούν ως επαλληλίες των διανυσμάτων της βάσης

$$\begin{aligned} |\Psi_A\rangle &= \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\alpha\rangle \\ |\Psi_B\rangle &= \sum_{\beta} c_{\beta} |\beta\rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

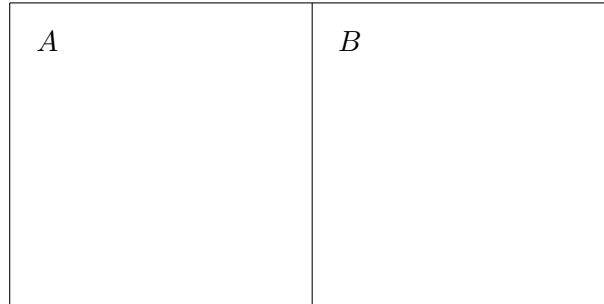
Το σύνολο $B = \{|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle\}$ αποτελεί βάση στο χώρο V . Συνεπώς ισχύει η σχέση

$$D_V = D_A D_B \quad (3.4)$$

όπου D_V η διαστατικότητα του χώρου V και D_A, D_B οι διαστατικότητες των υποσυστημάτων.

Σύμφωνα με τα αξιώματα της κβαντομηχανικής, κάθε κατάσταση $|\Psi\rangle$ του συστήματος V αποτελεί επαλληλία των διανυσμάτων της βάσης $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$. Γενικά υπάρχουν καταστάσεις στο χώρο V που είναι γινόμενα καταστάσεων των υποσυστημάτων A και B , αλλά και καταστάσεις που δεν μπορούν να γραφούν σαν γινόμενα. Στην τελευταία περίπτωση αυτή, τα υποσυστήματα A και B βρίσκονται σε κβαντική σύμπλεξη. Θα συμβολίζουμε επίσης το γινόμενο $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ και με το ket $|\alpha, \beta\rangle$.

Ως ένα απλό παράδειγμα ας θεωρήσουμε ένα σύστημα με δύο μη αλληλεπιδρώντα Qbits. Κάθε Qbit περιγράφεται από ένα διδιάστατο διανυσματικό χώρο A με τα στοιχεία $|0\rangle$ και $|1\rangle$ να απαρτίζουν μια βάση. Τα τέσσερα στοιχεία $|0\rangle \otimes |0\rangle, |0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle$ και $|1\rangle \otimes |1\rangle$ αποτελούν μια βάση στο τανυστικό γινόμενο $A \otimes A$. Η αντισυμμετρική κατάσταση $(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle) / \sqrt{2}$ ανήκει στο χώρο $A \otimes A$ και δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο καταστάσεων.



Σχήμα 3.1: Τα υποσυστήματα A και B αποτελούν ένα σύνθετο κβαντικό σύστημα V

Το τανυστικό γινόμενο ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες

$$1. \left(|\Psi_A\rangle + |\widetilde{\Psi}_A\rangle \right) \otimes |\Psi_B\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle + |\widetilde{\Psi}_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$$

2. $|\Psi_A\rangle \otimes (|\Psi_B\rangle + |\widetilde{\Psi}_B\rangle) = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle + |\Psi_A\rangle \otimes |\widetilde{\Psi}_B\rangle$
3. $\lambda(|\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle) = \lambda|\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes \lambda|\Psi_B\rangle$

όπου λ μιγαδικός αριθμός.

Το εσωτερικό γινόμενο των καταστάσεων $|\alpha_1, \beta_1\rangle$ και $|\alpha_2, \beta_2\rangle$ ορίζεται με τον εξής τρόπο

$$\langle \alpha_1, \beta_1 | \alpha_2, \beta_2 \rangle = \langle \alpha_2 | \alpha_1 \rangle \langle \beta_2 | \beta_1 \rangle \quad (3.5)$$

Συνεπώς μια κατάσταση του σύνθετου συστήματος V δίδεται ως ακολούθως

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta} \Psi(\alpha, \beta) |\alpha, \beta\rangle \quad (3.6)$$

όπου οι μιγαδικοί συντελεστές $\Psi(\alpha, \beta)$ προσδιορίζουν την επαλληλία των διανυσμάτων της βάσης. Έστω α και β οι ιδιοτιμές Ερμιτιανών τελεστών, οι οποίες χαρακτηρίζουν πλήρως τα υποσυστήματα A και B αντίστοιχα. Τότε η κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην κατάσταση του ολικού συστήματος $|\Psi\rangle$, δίνεται από το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \alpha, \beta | \Psi \rangle = \Psi(\alpha, \beta) \quad (3.7)$$

και συμπίπτει με τους συντελεστές $\Psi(\alpha, \beta)$.

Εάν η ολική κυματοσυνάρτηση $\Psi(\alpha, \beta)$ είναι γινόμενο μιας συνάρτησης των ιδιοτιμών α και μιας συνάρτησης των ιδιοτιμών β , $\Psi(\alpha, \beta) = \Psi_A(\alpha)\Psi_B(\beta)$, τότε η κατάσταση $|\Psi\rangle$ αποτελεί γινόμενο:

$$|\Psi\rangle = \left(\sum_{\alpha} \Psi_A(\alpha) |\alpha\rangle \right) \otimes \left(\sum_{\beta} \Psi_B(\beta) |\beta\rangle \right) \quad (3.8)$$

Εάν όμως η $\Psi(\alpha, \beta)$ δεν παραγοντοποιείται, τότε η $|\Psi\rangle$ δεν αποτελεί γινόμενο και οι βαθμοί ελευθερίας του υποσυστήματος A είναι συμπλεγμένοι με τους βαθμούς ελευθερίας του υποσυστήματος B . Η συνθήκη κανονικοποίησης της κατάστασης $|\Psi\rangle$ είναι

$$\sum_{\alpha, \beta} \Psi^*(\alpha, \beta) \Psi(\alpha, \beta) = 1 \quad (3.9)$$

Έστω \hat{A} και \hat{B} δύο γραμμικοί τελεστές, οι οποίοι δρουν στις καταστάσεις των υποσυστημάτων A και B αντίστοιχα. Ο τελεστής $\hat{A} \otimes \hat{B}$ δρα στο χώρο V ως εξής

$$(\hat{A} \otimes \hat{B}) |\Psi\rangle = (\hat{A} |\Psi_A\rangle) \otimes (\hat{B} |\Psi_B\rangle) \quad (3.10)$$

Οι μετρήσιμες ποσότητες περιγράφονται από τους Ερμιτιανούς τελεστές. Η δράση του $\hat{A} \otimes \hat{B}$ είναι γραμμική:

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})(|\Psi\rangle + |\widetilde{\Psi}\rangle) = (\hat{A} \otimes \hat{B}) |\Psi\rangle + (\hat{A} \otimes \hat{B}) |\widetilde{\Psi}\rangle \quad (3.11)$$

Τέλος, ορίζουμε το μερικό ίχνος ως προς το υποσύστημα B :

$$tr_B(\hat{A} \otimes \hat{B}) = tr(\hat{B})\hat{A} \quad (3.12)$$

Κατ' αναλογία

$$tr_A(\hat{A} \otimes \hat{B}) = tr(\hat{A})\hat{B} \quad (3.13)$$

Και στις δύο περιπτώσεις προκύπτουν τελεστές που δρουν στα υποσυστήματα A και B αντίστοιχα.

3.2 Πίνακες Πυκνότητας

Έστω ότι το ολικό σύστημα V βρίσκεται στην κατάσταση $|\Psi\rangle$. Ισοδύναμα, το ολικό σύστημα περιγράφεται από τον πίνακα πυκνότητας

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_{\alpha,\beta} \sum_{\alpha',\beta'} \Psi^*(\alpha',\beta') \Psi(\alpha,\beta) (|\alpha\rangle\langle\alpha'| \otimes |\beta\rangle\langle\beta'|) \quad (3.14)$$

ο οποίος είναι ένας προβολικός τελεστής. Έστω επίσης, ότι το υποσύστημα B δεν είναι προσβάσιμο σε κάποιο παρατηρητή. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα κβαντικών πεδίων στο χωροχρόνο Minkowski. Ως προς έναν επιταχυνόμενο παρατηρητή Rindler ο μισός χώρος (περιοχή III) δεν είναι προσβάσιμος με αποτέλεσμα να μην μπορεί να μετρήσει τους τοπικούς πεδιακούς τελεστές στην περιοχή αυτή. Το υποσύστημα A περιγράφεται από έναν πίνακα πυκνότητας που προκύπτει παίρνοντας το μερικό ίχνος του τελεστή ρ ως προς το υποσύστημα B :

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho = \sum_{\alpha,\alpha'} \sum_{\beta} \Psi^*(\alpha',\beta) \Psi(\alpha,\beta) (|\alpha\rangle\langle\alpha'|) \quad (3.15)$$

Τα στοιχεία του πίνακα ρ_A δίνονται ως εξής

$$\rho_A(\alpha,\alpha') = \sum_{\beta} \Psi^*(\alpha',\beta) \Psi(\alpha,\beta) \quad (3.16)$$

Ένας πίνακας πυκνότητας πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες, ούτως ώστε να περιγράφει σωστά ένα (υπο)σύστημα:

1. Το ίχνος του είναι ίσο με τη μονάδα.
2. Είναι ένας Ερμιτιανός τελεστής.
3. Οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί.

Ας εξετάσουμε ότι ο ρ_A ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες. Το ίχνος του πίνακα είναι ίσο με το άθροισμα των διαγώνιων του στοιχείων:

$$\text{tr} \rho_A = \sum_{\alpha} \rho_A(\alpha,\alpha) = \sum_{\alpha,\beta} \Psi^*(\alpha,\beta) \Psi(\alpha,\beta) = \langle\Psi|\Psi\rangle = 1 \quad (3.17)$$

Εάν ο ρ_A είναι Ερμιτιανός, τα πινακοστοιχεία του πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση: $\rho_A(\alpha,\alpha') = \rho_A^*(\alpha',\alpha)$. Πράγματι

$$\rho_A^*(\alpha',\alpha) = \left(\sum_{\beta} \Psi^*(\alpha,\beta) \Psi(\alpha',\beta) \right)^* = \rho_A(\alpha,\alpha') \quad (3.18)$$

Επομένως ο ρ_A είναι Ερμιτιανός. Τέλος πάντοτε μπορούμε να επιλέξουμε τη βάση $B_A = \{|\alpha\rangle\}$ να συμπίπτει με το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή ρ_A . Σε αυτή τη βάση, μόνο τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία είναι τα διαγώνια, με την έκφραση (3.16) να συνεχίζει να ισχύει. Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του πίνακα ρ_A είναι μη αρνητικές.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να κατασκευαστεί ο πίνακας πυκνότητας $\rho_B = \text{tr} \rho$, όταν το υποσύστημα A δεν είναι προσβάσιμο. Τα στοιχεία του ρ_B είναι

$$\rho_B(\beta, \beta') = \sum_{\alpha} \Psi^*(\alpha, \beta') \Psi(\alpha, \beta) \quad (3.19)$$

Θεωρήστε τώρα τελεστές της μορφής $\mathcal{O}_A \otimes \hat{I}_B$ οι οποίοι δρουν στα γινόμενα $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ αφήνοντας τα $|\beta\rangle$ αναλλοίωτα. Η αναμενόμενη τιμή του τελεστή αυτού στην κατάσταση $|\Psi\rangle$ είναι ίση με

$$\langle \Psi | \mathcal{O}_A \otimes \hat{I}_B | \Psi \rangle = \text{tr}(\rho_A \mathcal{O}_A) \quad (3.20)$$

Έστω επιλέγουμε μια βάση, στην οποία ο ρ_A είναι διαγώνιος. Έστω λ_i οι ιδιοτιμές του πίνακα, με τον δείκτη i να παίρνει τιμές από $1 \dots D_A$. Ο ρ_A παίρνει τη μορφή

$$\rho_A = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \quad (3.21)$$

Τότε ο πίνακας περιγράφει μια μεικτή κατάσταση, μια συλλογή των καταστάσεων $|i\rangle$, με τις ιδιοτιμές λ_i να προσδιορίζουν την πιθανότητα το υποσύστημα A να βρίσκεται στην κατάσταση $|i\rangle$. Πράγματι οι ιδιοτιμές λ_i είναι μη αρνητικοί αριθμοί, μικρότεροι από τη μονάδα, αφού $\text{tr} \rho_A = 1$. Τότε ισχύει

$$\text{tr}(\rho_A \mathcal{O}_A) = \sum_i \lambda_i \langle i | \mathcal{O}_A | i \rangle \quad (3.22)$$

Εάν μια ιδιοτιμή είναι ίση με τη μονάδα και όλες οι άλλες μηδέν, $\lambda_k = 1$, ο πίνακας πυκνότητας ανάγεται σε έναν προβολικό τελεστή. Το σύστημα θα βρίσκεται στην κατάσταση $|k\rangle$ με πιθανότητα 1, δηλαδή το σύστημα θα βρίσκεται σε μια καθαρή κατάσταση.

Εάν ο πίνακας πυκνότητας είναι ανάλογος με τον μοναδιαίο, $\lambda_i = 1/D_A$, για κάθε τιμή του i , τότε περιγράφει μια κατάσταση μεικτή που αποκλίνει όσο το δυνατό πιο πολύ από μια καθαρή κατάσταση.

Εστιάζοντας στην περίπτωση, στην οποία η ολική κυματοσυνάρτηση μπορεί να γραφεί ως γινόμενο των επιμέρους κυματοσυναρτήσεων, μπορεί ναδειχθεί ότι ισχύει

$$\sum_{\beta} |\Psi_B(\beta)|^2 = 1, \quad (3.23)$$

Ο πίνακας πυκνότητας ρ_A παίρνει τη μορφή προβολικού τελεστή

$$\rho_A = \sum_{\alpha, \alpha'} \Psi^*(\alpha') \Psi(\alpha) (|\alpha\rangle \langle \alpha'|) = |\Psi_A\rangle \langle \Psi_A| \quad (3.24)$$

Το υποσύστημα A βρίσκεται σε μια καθαρή κατάσταση. Θα βρίσκεται στην κατάσταση $|\Psi_A\rangle$ με πιθανότητα 1. Σε αυτή την περίπτωση, δεν υπάρχει σύμπλεξη των βαθμών ελευθερίας του υποσυστήματος A με αυτούς του B .

3.3 Εντροπία

Η εντροπία Von Neumann παρέχει ένα μέτρο απόκλισης μιας μεικτής κατάστασης, που περιγράφεται από τον πίνακα πυκνότητας ρ , από μια καθαρή κατάσταση. Ορίζεται ως εξής

$$S = -tr(\rho \log \rho) \quad (3.25)$$

Η εντροπία μπορεί να υπολογιστεί σε μια βάση όπου ο πίνακας πυκνότητας ρ είναι διαγώνιος. Επειδή οι ιδιοτιμές του ρ είναι μικρότερες από τη μονάδα, η εντροπία Von Neumann είναι μη αρνητική. Συνεισφέρουν μόνο οι μη μηδενικές ιδιοτιμές. Όταν ο πίνακας ρ περιγράφει μια καθαρή κατάσταση, έχει δηλαδή μόνο μια μη μηδενική ιδιοτιμή ίση με τη μονάδα, η εντροπία μηδενίζεται.

Η εντροπία Von Neumann αποτελεί ένα μέτρο των βαθμών ελευθερίας ενός κβαντικού συστήματος. Πράγματι, μπορεί ναδειχθεί ότι η μέγιστη τιμή της είναι ίση με

$$S = \log N \quad (3.26)$$

όπου N η διαστατικότητα του χώρου που περιγράφεται από τον πίνακα ρ . Η μέγιστη τιμή αυτή προκύπτει στην περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές είναι ίσες με $1/N$, δηλαδή όταν όλες οι καταστάσεις της συλλογής είναι ισοπίθανες και ο πίνακας πυκνότητας είναι ανάλογος του μοναδιαίου πίνακα.

3.3.1 Εντροπία Σύμπλεξης

Η εντροπία σύμπλεξης του υποσυστήματος A με το υποσύστημα B είναι ίση με την εντροπία Von Neumann, που συνδέεται με τον πίνακα ρ_A :

$$S_{\text{ent}}^A = -tr(\rho_A \log \rho_A) \quad (3.27)$$

Αποτελεί μέτρο του βαθμού σύμπλεξης των δύο υποσυστημάτων. Όταν τα υποσυστήματα δεν είναι συμπλεγμένα, ο ρ_A ανάγεται σε έναν προβολικό τελεστή και η εντροπία σύμπλεξης μηδενίζεται.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $S_{\text{ent}}^B = -tr(\rho_B \log \rho_B) = S_{\text{ent}}^A$. Αρχεί, δηλαδή, να δείξουμε ότι οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των ρ_A και ρ_B είναι ίσες. Έστω λοιπόν το διάνυσμα $|\phi\rangle$, ιδιοδιάνυσμα του τελεστή ρ_A με μη μηδενική ιδιοτιμή λ :

$$\rho_A |\phi\rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} \sum_{\beta} \Psi^*(\alpha', \beta) \Psi(\alpha, \beta) \langle \alpha' | \phi \rangle |\alpha\rangle = \lambda |\phi\rangle \quad (3.28)$$

Τότε εάν $\langle \alpha | \phi \rangle = \phi(\alpha)$, ισχύει

$$\sum_{\alpha'} \sum_{\beta} \Psi^*(\alpha', \beta) \Psi(\alpha, \beta) \phi(\alpha') = \lambda \phi(\alpha) \quad (3.29)$$

Ακόμα, έστω το διάνυσμα $|\chi\rangle$ με κυματοσυνάρτηση την

$$\langle \beta' | \chi \rangle = \chi(\beta') = \sum_{\alpha'} \Psi(\alpha', \beta') \phi^*(\alpha') \quad (3.30)$$

Το τελευταίο είναι ιδιοδιάνυσμα του ρ_B με την ίδια ιδιοτιμή:

$$\sum_{\beta'} \rho_B(\beta, \beta') \chi(\beta') = \lambda \sum_{\alpha} \Psi(\alpha, \beta) \phi^*(\alpha) = \lambda \chi(\beta) \quad (3.31)$$

Επειδή οι μη μηδενικές ιδιοτιμές των ρ_A και ρ_B συμπίπτουν, έπεται ότι

$$S_{\text{ent}}^B = S_{\text{ent}}^A \quad (3.32)$$

3.3.2 Θερμική Εντροπία

Όπως έχουμε αναφέρει, οι τελεστές πυκνότητας περιγράφουν συλλογές. Στη στατιστική μηχανική υπάρχουν τριών ειδών συλλογές: η μικροκανονική, η κανονική και η μεγαλοκανονική. Η κανονική συλλογή ενός συστήματος, που βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με μια δεξαμενή θερμότητας θερμοκρασίας T , περιγράφεται από τον ακόλουθο θερμικό πίνακα πυκνότητας:

$$\hat{\rho}_{\text{thermal}} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z(T)} \quad (3.33)$$

όπου $\beta = 1/T$ το αντίστροφο της θερμοκρασίας, \hat{H} η Χαμιλτονιανή του συστήματος και

$$Z(T) = \text{tr}(e^{-\beta \hat{H}}) \quad (3.34)$$

η συνάρτηση επιμερισμού. Παρεμβάλλοντας τη σχέση πληρότητας που συνδέεται με τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας $|E_i\rangle$, ο θερμικός πίνακας παίρνει τη μορφή

$$\hat{\rho}_{\text{thermal}} = \sum_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z(T)} |E_i\rangle \langle E_i| \quad (3.35)$$

Στη βάση $\{|E_i\rangle\}$ ο θερμικός πίνακας είναι διαγώνιος. Οι ιδιοτιμές του προσδιορίζουν την πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση με ενέργεια E_i .

Στο όριο της μεγάλης θερμοκρασίας ($\beta \rightarrow 0$), ο θερμικός πίνακας πυκνότητας είναι ανάλογος του μοναδιαίου, πράγμα που υποδηλώνει ότι η σύμπλεξη του συστήματος με τη δεξαμενή θερμότητας αυξάνεται.

Η θερμική εντροπία του συστήματος είναι η εντροπία Von Neumann που συνδέεται με το θερμικό πίνακα πυκνότητας:

$$S_{th} = -\text{tr}(\rho_{th} \log \rho_{th}) \quad (3.36)$$

Ορίζοντας κατάλληλα την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz

$$F = -T \log Z \quad (3.37)$$

προκύπτει

$$S_{th} = \beta(U - F) \quad (3.38)$$

όπου U η μέση ενέργεια. Άρα λοιπόν προκύπτει η γνωστή θερμοδυναμική σχέση

$$TS_{th} = U - F \quad (3.39)$$

Επίσης, στο όριο όπου $T \rightarrow \infty$, παίρνουμε

$$S \rightarrow \log Z = \log N \quad (3.40)$$

όπου N ο αριθμός των ανεξάρτητων βαθμών ελευθερίας του συστήματος. Στο όριο της μεγάλης θερμοκρασίας αποκαλύπτονται οι στοιχειώδεις βαθμοί ελευθερίας του συστήματος.

3.4 Κβαντικά Πεδία σε μη Μηδενική Θερμοκρασία

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα κβαντικών πεδίων στο χωροχρόνο Minkowski. Το απλούστερο σύστημα αντιστοιχεί σε ένα ελεύθερο βαθμωτό πεδίο $\phi(x)$. Στο παράρτημα Γ, εξηγούμε πως να εκφράζουμε πλάτη μετάβασης της μορφής

$$\langle \phi_f | e^{-i\hat{H}t} | \phi_i \rangle \quad (3.41)$$

(όπου ϕ_i η διάταξη του πεδίου την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ και ϕ_f η διάταξη του πεδίου τη χρονική στιγμή t) ως συναρτησιακά ολοκληρώματα [8, 9]:

$$\langle \phi_f | e^{-i\hat{H}t} | \phi_i \rangle = \int [d\phi]_{\phi_i,0}^{\phi_f,t} e^{iS(\phi)} \quad (3.42)$$

Αθροίζουμε ως προς διατάξεις του πεδίου από $t = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t , με την κάθε διάταξη να σταθμίζεται με το εκθετικό της κλασσικής δράσης

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x (-\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2) \quad (3.43)$$

όπου m η μάζα του πεδίου.

Συνεχίζοντας αναλυτικώς στον Ευκλείδειο χρόνο, $t = -i\beta$, μπορούμε να υπολογίσουμε στοιχεία του θερμικού πίνακα πυκνότητας με θερμοκρασία $T = 1/\beta$:

$$\langle \phi_f | e^{-\beta\hat{H}} | \phi_i \rangle = \int [d\phi]_{\phi_i,0}^{\phi_f,\beta} e^{-S_{Eucl}(\phi)} \quad (3.44)$$

όπου οι διατάξεις του πεδίου σταθμίζονται με το εκθετικό της Ευκλείδειας δράσης $S_{Eucl}(\phi)$. Η συνάρτηση επιμερισμού δίδεται από το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων

$$Z = \text{tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \int d\phi \langle \phi | e^{-\beta\hat{H}} | \phi \rangle \quad (3.45)$$

Επομένως μπορεί να εκφραστεί ως ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα, όπου αθροίζουμε ως προς περιοδικές διατάξεις ($\phi_i = \phi_f = \phi$):

$$Z = \int [d\phi]_P e^{-S_{Eucl}(\phi)} \quad (3.46)$$

Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε το συναρτησιακό ολοκλήρωμα σε ένα Ευκλείδειο χώρο της μορφής $S^1 \times R^3$, όπου ο χρόνος συμπαγοποιείται σε κύκλο με περιφέρεια το αντίστροφο της θερμοκρασίας $\beta = 1/T$. Στο κεφάλαιο 4 υπολογίζουμε την ελεύθερη

ενέργεια και τη θερμική εντροπία άμαζου, ελεύθερου βαθμωτού πεδίου σε μη μηδενική θερμοκρασία T .

Τέλος μπορούμε να εκφράσουμε την κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στη βασική κατάσταση του συστήματος $|0\rangle$ ως ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-\beta \hat{H}} |\phi_i\rangle \sim |0\rangle \quad (3.47)$$

Πράγματι, γράφοντας την κατάσταση $|\phi_i\rangle$ ως επαλληλία ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας, κάθε διάνυσμα $|E_i\rangle$ πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $e^{-\beta(E_i-E_0)}$, με αποτέλεσμα μόνο η βασική κατάσταση να επιβιώνει στο όριο $\beta \rightarrow \infty$.

Η κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στο κενό γράφεται τότε ως ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα στο μισό Ευκλείδειο χώρο $\tau < 0$:

$$\Psi[\phi_0] = \langle \phi_0 | 0 \rangle = \int [d\phi(\tau < 0)]_{\phi_0(0)} e^{-S_{Eucl}[\phi]} \quad (3.48)$$

όπου αθροίζουμε ως προς όλες τις πεδριακές διατάξεις με συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες στη φέτα $\tau = 0$: $\phi(\tau = 0, \vec{x}) = \phi_0(\vec{x})$. Θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση αυτή για να περιγράψουμε κβαντικά πεδία στο σύστημα αναφοράς ενός επιταχυνόμενου παρατηρητή Rindler.

Κεφάλαιο 4

Πεδία σε Καμπυλωμένους Χωροχρόνους

Στο παρών κεφάλαιο θα μελετηθούν κλασσικά βαθμωτά πεδία σε καμπύλες γεωμετρίας, όπως επίσης και χβαντικά. Συγκεκριμένα, θα εξαχθούν οι εξισώσεις κίνησης των πεδίων και έπειτα θα βρεθεί ο θερμικός πίνακας για μια διάταξη βαθμωτών πεδίων στο χωροχρόνο Rindler. Τέλος, θα μελετηθεί η ακτινοβολία Hawking και θα εξαχθεί η σχέση που δίνει την εντροπία μελανών οπών στη γεωμετρία Schwarzschild.

4.1 Βαθμωτά Πεδία Στη Γεωμετρία Schwarzschild

Για την περιγραφή βαθμωτών πεδίων στη γεωμετρία Schwarzschild, πρέπει πρώτα να θεωρήσουμε τη δράση ενός βαθμωτού άμαζου πεδίου Klein-Gordon σε κάποια τυχαία γεωμετρία. Έστω χ το άμαζο πεδίο Klein-Gordon[2]

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi \quad (4.1)$$

Έπειτα, αντικαθιστούμε τη μετρική Tortoise στη δράση (4.1) και προκύπτει η δράση της γεωμετρίας Schwarzschild

$$S = \frac{1}{2} \int dt \int dr^* \int d\theta \int d\phi F(r^*) r^2 \sin \theta \left\{ \frac{1}{F(r^*)} \left[(\partial_t \chi)^2 - (\partial_{r^*} \chi)^2 \right] - \frac{1}{r^2} (\partial_\theta \chi)^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} (\partial_\phi \chi)^2 \right\} \quad (4.2)$$

Ορίζοντας ένα καινούριο πεδίο ψ τέτοιο ώστε $\psi = r\chi$, η δράση απλοποιείται, παίρνοντας έτσι τη μορφή

$$S = \frac{1}{2} \int dt \int dr^* \int d\theta \int d\phi \sin \theta \left\{ (\partial_t \psi)^2 - \left[\partial_{r^*} \psi - \psi \frac{d(\ln r)}{dr^*} \right]^2 - \frac{F(r^*)}{r^2} (\partial_\theta \psi)^2 - \frac{F(r^*)}{r^2 \sin^2 \theta} (\partial_\phi \psi)^2 \right\} \quad (4.3)$$

Δεδομένου ότι το πεδίο ψ είναι συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών, της χρονικής και ακτινικής συντεταγμένης Tortoise αλλά και των γωνιακών σφαιρικών συντεταγμένων,

μπορεί να παραμετριοποιηθεί πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας. Με αυτό τον τρόπο, μας δίνεται η δυνατότητα να γράψουμε το πεδίο ψ ως συνάρτηση των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων

$$\psi(t, r^*, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \psi_{\ell m}(t, r^*) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (4.4)$$

όπου ℓ ο αζιμουθιακός κβαντικός αριθμός και m ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός.

Εφαρμόζοντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση στους γωνιακούς όρους της Λαγκρανζιανής και νοουμένου ότι η τιμή του πεδίου ψ μηδενίζεται στο άπειρο, οι γωνιακοί όροι μπορούν να γραφτούν ως εξής

$$-\frac{F(r^*)}{r^2} \left[\sin \theta (\partial_{\theta} \psi)^2 + \frac{1}{\sin \theta} (\partial_{\phi} \psi)^2 \right] = \frac{F(r^*)}{r^2} \left[\psi \sin \theta \Delta_{\Omega} \psi \right] \quad (4.5)$$

όπου Δ_{Ω} ο τελεστής γωνιακής στροφορμής στις σφαιρικές συντεταγμένες, τέτοιος ώστε

$$\Delta_{\Omega} Y_{\ell m}(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (4.6)$$

Η νέα μορφή της δράσης, συναρτήσει του τελεστή της γωνιακής στροφορμής, δίνεται από τη σχέση

$$S = \frac{1}{2} \int dt \int dr^* \int d\theta \int d\phi \sin \theta \left\{ (\partial_t \psi)^2 - \left[\partial_{r^*} \psi - \psi \frac{d(\ln r)}{dr^*} \right]^2 - \frac{F(r^*)}{r^2} \psi \Delta_{\Omega} \psi \right\} \quad (4.7)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (4.4) στη δράση, η τελευταία παίρνει την εξής μορφή

$$S = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} S_{\ell m} \quad (4.8)$$

όπου η επιμέρους δράση για κάθε ζεύγος κβαντικών αριθμών ℓ και m μπορεί να αποδοθεί ως εξής

$$S_{\ell m} = \frac{1}{2} \int dt \int dr^* \left\{ (\partial_t \psi_{\ell m}^*)(\partial_t \psi_{\ell m}) - \left[\partial_{r^*} \psi_{\ell m}^* - \psi_{\ell m}^* \frac{d(\ln r)}{dr^*} \right] \left[\partial_{r^*} \psi_{\ell m} - \psi_{\ell m} \frac{d(\ln r)}{dr^*} \right] - \frac{\ell(\ell + 1)F(r^*)}{r^2} |\psi_{\ell m}|^2 \right\} \quad (4.9)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τον ακτινικό όρο, προκύπτει ότι

$$\left[\partial_{r^*} \psi_{\ell m}^* - \psi_{\ell m}^* \frac{d(\ln r)}{dr^*} \right] \left[\partial_{r^*} \psi_{\ell m} - \psi_{\ell m} \frac{d(\ln r)}{dr^*} \right] = (\partial_{r^*} \psi_{\ell m}^*)(\partial_{r^*} \psi_{\ell m}) + |\psi_{\ell m}|^2 \left[\frac{d^2 \ln r}{r^{*2}} + \left(\frac{d \ln r}{dr^*} \right)^2 \right] \quad (4.10)$$

Τέλος και συνοψίζοντας τις πιο πάνω εκφράσεις, είναι δυνατό να φέρουμε τη δράση σε μια τελική μορφή

$$S = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2} \int dt \int dr^* \left\{ (\partial_t \psi_{\ell m}^*)(\partial_t \psi_{\ell m}) - (\partial_{r^*} \psi_{\ell m}^*)(\partial_{r^*} \psi_{\ell m}) - V_{\ell}(r^*) |\psi_{\ell m}|^2 \right\} \quad (4.11)$$

όπου με $V(r^*)$ έχουν συμβολιστεί οι όροι που πολλαπλασιάζουν τον όρο $|\psi_{\ell m}|^2$

$$V_{\ell}(r^*) = \frac{\ell(\ell+1)F(r^*)}{r^2} + \frac{d^2 \ln r}{r^{*2}} + \frac{d \ln r}{dr^*} \quad (4.12)$$

Μπορούμε να σκεφτούμε κάθε συντελεστή Fourier σαν ένα δισδιάστατο πεδίο. Η έκφραση (4.12) παίζει το ρόλο μίας χωροεξαρτημένης μάζας, ανάλογης και του κβαντικού αριθμού ℓ της στροφορμής που θα έχει ένα σωματίδιο στο χωροχρόνο. Όσο μεγαλύτερος είναι ο κβαντικός αριθμός ℓ , τόσο μεγαλύτερο είναι το δυναμικό στο πρόβλημά μας. Η έκφραση (4.12) μπορεί να εκφραστεί και ως συνάρτηση των συντεταγμένων Schwarzschild

$$V_{\ell}(r) = \frac{r - 2GM}{r} \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2GM}{r^3} \right] \quad (4.13)$$

Σύμφωνα με τη δράση (4.11), η Λαγκρανζιανή που περιγράφει ένα σωματίδιο στη γεωμετρία Schwarzschild δίνεται από

$$L = \frac{1}{2} \left[(\partial_t \psi_{\ell m}^*)(\partial_t \psi_{\ell m}) - (\partial_{r^*} \psi_{\ell m}^*)(\partial_{r^*} \psi_{\ell m}) - V_{\ell}(r^*) |\psi_{\ell m}|^2 \right] \quad (4.14)$$

και τώρα, με τη βοήθεια των εξισώσεων Euler-Langrange, μπορεί να εξαχθεί η εξίσωση κίνησης του δισδιάστατου άμαζου βαθμωτού πεδίου στο χωροχρόνο Schwarzschild

$$\frac{\partial^2 \psi_{\ell m}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi_{\ell m}}{\partial r^{*2}} - V_{\ell}(r^*) \psi_{\ell m} \quad (4.15)$$

Η εξίσωση κίνησης είναι γραμμική και θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος χωριζόμενων μεταβλητών, ούτως ώστε να βρεθεί η λύση για το δισδιάστατο πεδίο $\psi_{\ell m}$. Αρχικά, υποθέτουμε λύση της μορφής

$$\psi_{\ell m}(t, r^*) = e^{-i\nu t} \psi_{\ell m}(r^*) \quad (4.16)$$

όπου ν θετική συχνότητα. Τότε, η συνάρτηση $\psi_{\ell m}(r^*)$ ικανοποιεί τη μονοδιάστατη χρονοανεξάρτητη εξίσωση Shrödinger

$$\nu^2 \psi_{\ell m}(r^*) = -\frac{d^2 \psi_{\ell m}(r^*)}{dr^{*2}} + V_{\ell}(r^*) \psi_{\ell m}(r^*) \quad (4.17)$$

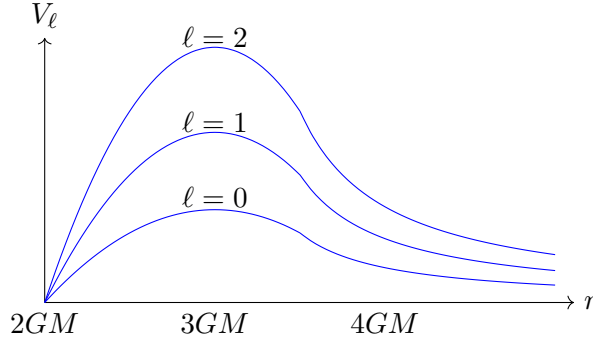
Η γενική λύση που περιγράφει κάποιο σωματίδιο σε μια δισδιάστατη γεωμετρία Schwarzschild δίνεται από

$$\Psi(t, r^*, \theta, \phi) = e^{-i\nu t} \psi_{\ell m}(r^*) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (4.18)$$

Η μορφή της $\psi_{\ell m}(r^*)$ καθορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες που θα επιβληθούν στο πρόβλημα. Κοντά στον ορίζοντα, η τιμή του δυναμικού μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Επομένως, η λύση μπορεί να προσεγγιστεί από

$$\Psi(t, r^*, \theta, \phi) = e^{i(r^* \pm \nu t)} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \quad (4.19)$$

Το διάγραμμα του δυναμικού συναρτήσει της ακτινικής συντεταγμένης Schwarzschild απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.1: Το δυναμικό συναρτήσει της ακτινικής συντεταγμένης Schwarzschild για κάθε τιμή του κβαντικού αριθμού ℓ

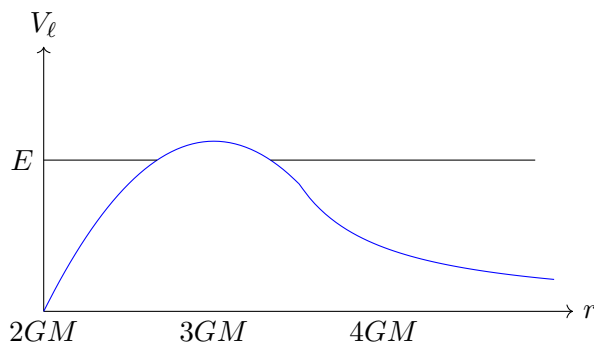
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1, για αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες του $r = 3GM$ το δυναμικό είναι απωστικό, ενώ καθώς προσεγγίζουμε τον ορίζοντα, η βαρυτική έλξη γίνεται ολοένα και πιο ισχυρή κάνοντας, έτσι, το δυναμικό ελκτικό. Μπορεί ναδειχθεί ότι το δυναμικό παίρνει τη μέγιστη του τιμή στο σημείο

$$r_0 = 3GM \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{14\ell^2 + 14\ell + 9}{9\ell^2(\ell + 1)^2}} \right] - \frac{1}{2\ell(\ell + 1)} \right\} \quad (4.20)$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η απόσταση για την οποία το δυναμικό είναι μέγιστο είναι αντιστρόφως ανάλογη του κβαντικού αριθμού της στροφορμής της μελανής οπής: καθώς η στροφορμή αυξάνεται, η απόσταση r_0 μειώνεται, με την ελάχιστη τιμή - για πολύ μεγάλες τιμές της στροφορμής - να είναι $r_0 = 3GM$, ενώ καθώς η στροφορμή μειώνεται, η απόσταση r_0 αυξάνεται με τη μέγιστη τιμή να φτάνει το $r_0 = \frac{3}{2}GM$.

Στο Σχήμα 4.2 απεικονίζεται με μια οριζόντια γραμμή η ενέργεια ενός σωματιδίου. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι τέμνει την καμπύλη του δυναμικού σε δύο σημεία. Η περιοχή ανάμεσα στα δύο αυτά σημεία είναι κλασικά απαγορευμένη περιοχή. Κάποιο σωματίδιο με ενέργεια μικρότερη της μέγιστης τιμής του δυναμικού μπορεί να βρεθεί εντός της κλασικής περιοχής, μέσω του φαινομένου της σήραγγας, και από εκεί να διαφύγει στο άπειρο. Εάν το σωματίδιο βρίσκεται κοντά στον ορίζοντα, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4.2, τότε είναι καταδικασμένο να πέσει μέσα στη μελανή οπή, ενώ αν βρίσκεται ήδη μακριά από τον ορίζοντα (για αποστάσεις από τον ορίζοντα μεγαλύτερες από το σημείο στο οποίο το δυναμικό παρουσιάζει μέγιστη τιμή) τότε το σωματίδιο θα διαφύγει στο άπειρο.

Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά ενός σωματιδίου στο σημείο όπου το δυναμικό παρουσιάζει μέγιστο, εξετάζουμε δύο ακραίες περιπτώσεις: Εάν η στροφορμή του



Σχήμα 4.2: Η ενέργεια ενός σωματιδίου απεικονισμένη στο γράφημα του δυναμικού

σωματιδίου είναι μηδενική, τότε το δυναμικό παρουσιάζει στο σημείο $r_0 = \frac{3}{2}GM$ και η τιμή του ισούται με

$$V_0 = \frac{1}{2G^2M^2} \left(\frac{3}{8}\right)^3 \quad (4.21)$$

Αυτό είναι το φράγμα δυναμικού το οποίο πρέπει να ξεπεραστεί από την ενέργεια του σωματιδίου ούτως ώστε το σωματίδιο να είναι ικανό να διαφύγει και στην κλασσική εικόνα. Ενώ εάν η στροφορμή του σωματιδίου είναι πολύ μεγάλη, η μέγιστη τιμή του δυναμικού δίνεται από

$$V_0 = \frac{1}{27} \frac{\ell^2}{G^2M^2} \quad (4.22)$$

Στις τέσσερις διαστάσεις, η τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο είναι κυκλική εάν η ενέργειά του ισούται με τη μέγιστη τιμή του δυναμικού. Η περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται από ασταθή ισορροπία. Στην περίπτωση όπου το σωματίδιο έχει μεγαλύτερη ενέργεια από τη μέγιστη τιμή του δυναμικού, τότε δεν είναι δέσιμο και μπορεί να διαφύγει στο άπειρο. Το ίδιο ισχύει και για την περίπτωση όπου το σωματίδιο έχει μικρότερη ενέργεια από τη μέγιστη τιμή του δυναμικού, αλλά βρίσκεται μακριά από τον ορίζοντα. Όταν, όμως το σωματίδιο έχει μικρότερη ενέργεια από τη μέγιστη τιμή του δυναμικού και βρίσκεται κοντά στον ορίζοντα, εκτελεί σπειροειδή τροχιά γύρω από τον ορίζοντα της μελανής οπής μέχρις ότου πέσει μέσα στη μελανή οπή.

Λόγω του ότι τα πεδία είναι κβαντικά, διακυμάνσεις του κενού δημιουργούν συνεχώς σωματίδια. Η ακτινοβολία Hawking οφείλεται στο φαινόμενο αυτό. Όταν ένα ζεύγος σωματιδίων δημιουργείται κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής, το σωματίδιο με την αρνητική ενέργεια θα πέσει μέσα στη μελανή οπή, ενώ όσον αφορά σε αυτό με τη θετική ενέργεια, υπάρχει πιθανότητα να διαφύγει στο άπειρο μέσω του φαινομένου της σήραγγας. Αυτό το σωματίδιο έχει θερμοκρασία, η οποία ονομάζεται θερμοκρασία Hawking. Η ακτινοβολία Hawking θα εξεταστεί περαιτέρω σε επόμενα κεφάλαια.

4.2 Βαθμωτά Πεδία Στη Γεωμετρία Rindler

4.2.1 Κλασσικά Βαθμωτά Πεδία

Έστω κλασσικό βαθμωτό πεδίο στη γεωμετρία Rindler. Μπορούμε να φανταστούμε τη συγκεκριμένη γεωμετρία ως μια διάταξη από διακριτούς τρισδιάστατους

ταλαντωτές, οι οποίοι απέχουν κάποια απόσταση μεταξύ τους και ταλαντώνονται με συγκεκριμένο πλάτος και συχνότητα. Στο όριο όπου η απόσταση που χωρίζει τους ταλαντωτές τείνει στο μηδέν, αναπαράγεται η γεωμετρία του κλασσικού πεδίου Rindler.

Κατ' αναλογία με τη γεωμετρία Schwarzschild, έτσι και στην αντίστοιχη Rindler, η περιγραφή βαθμωτών πεδίων απαιτεί να γνωρίζουμε τη δράση ενός άμαζου πεδίου Klein-Gordon στην εν λόγω γεωμετρία

$$S = \frac{1}{2} \int d\omega \int d\rho \int dX \int dY \rho \left[\frac{1}{\rho^2} (\partial_\omega \phi)^2 - (\partial_\rho \phi)^2 - (\partial_X \phi)^2 - (\partial_Y \phi)^2 \right] \quad (4.23)$$

όπου ϕ το άμαζο πεδίο. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του άμαζου πεδίου Klein-Gordon δίνεται από

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\rho} (\partial_\omega \phi)^2 - \frac{\rho}{2} (\partial_\rho \phi)^2 - \frac{\rho}{2} (\partial_X \phi)^2 - \frac{\rho}{2} (\partial_Y \phi)^2 \quad (4.24)$$

Τώρα, μπορεί κανείς να υπολογίσει τις εξισώσεις κίνησης του πεδίου, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler-Langrange

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \omega^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + e^{2u} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) \quad (4.25)$$

όπου $u = \log \rho$. Ο μετασχηματισμός Fourier του πεδίου ϕ στις δύο διαστάσεις δίνεται από

$$\phi(\omega, u, X, Y) = \int dk_X \int dk_Y e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_{\vec{k}}(\omega, u) \quad (4.26)$$

όπου $\vec{k} = (k_X, k_Y)$ και $\vec{x} = (X, Y)$ δισδιάστατα διανύσματα. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.25), προκύπτει η εξίσωση κίνησης του δισδιάστατου πεδίου $\phi_{\vec{k}}(\omega, u)$

$$\frac{\partial^2 \phi_{\vec{k}}}{\partial \omega^2} = \frac{\partial^2 \phi_{\vec{k}}}{\partial u^2} + e^{2u} |\vec{k}|^2 \phi_{\vec{k}} \quad (4.27)$$

όπου $e^{2u} |\vec{k}|^2$ η ενεργός μάζα του πεδίου, η οποία είναι ανάλογη του τρόπου ταλάντωσης του πεδίου. Μπορεί ναδειχθεί ότι καθώς το ρ τείνει στο μηδέν (ή το u στο μείον άπειρο) η ενεργός μάζα μηδενίζεται για όλους τους τρόπους ταλάντωσης. Θα περίμενε κανείς ότι στο όριο αυτό η ενέργεια του πεδίου είναι η θεμελιώδης, αλλά όπως θα δούμε και πιο μετά, κάτι τέτοιο δεν ισχύει.

Η σχέση μεταξύ του κάθετου κυματοδιανύσματος με τη στροφορμή μπορεί να προσεγγιστεί ως εξής

$$\ell = 2GM |\vec{k}| \quad (4.28)$$

όπου $2GM$ η ακτίνα της σφαιρικής επιφάνειας του ορίζοντα.

Για την επίλυση της εξίσωσης (4.27), υποθέτουμε χωριζόμενες λύσεις της μορφής

$$\phi_{\vec{k}}(\omega, u) = \phi_{\vec{k}}(u) e^{i\lambda\omega} \quad (4.29)$$

τότε η εν λόγω εξίσωση παίρνει μια χρονοανεξάρτητη μορφή

$$\lambda^2 \phi_{\vec{k}} = -\frac{d^2 \phi_{\vec{k}}}{du^2} - e^{2u} |\vec{k}|^2 \phi_{\vec{k}} \quad (4.30)$$

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (4.30), εκτός εάν το κάθετο κυματοδιάνυσμα \vec{k} έχει μηδενική τιμή, θα υπάρχει κάποιο μη μηδενικό δυναμικό, το οποίο θα περιορίζει τα κβάντα ενέργειας του πεδίου $\phi_{\vec{k}}$ στην περιοχή κοντά στον ορίζοντα.

4.2.2 Κβαντικά Βαθμωτά Πεδία

Στην περίπτωση όπου το πεδίο είναι κβαντικό και βρίσκεται στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειας, τότε παρατηρείται το φαινόμενο της σύμπλεξης μεταξύ διαφορετικών σημείων του χώρου, τα οποία προσεγγίζονται ως ταλαντωτές με την τιμή του πεδίου να παίζει το ρόλο της απομάκρυνσης του ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας. Για να κατανοήσουμε περαιτέρω την έννοια της σύμπλεξης για τη γεωμετρία Rindler στην κβαντική θεωρία πεδίου, μελετούμε συναρτήσεις συσχέτισης της μορφής

$$\langle 0 | \phi(X, Y, Z) \phi(X', Y', Z') | 0 \rangle \sim \frac{1}{\Delta^2} \quad (4.31)$$

όπου $\Delta^2 = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2$. Οι συντεταγμένες (X, Y, Z) προσδιορίζουν ένα σημείο στο χώρο, ενώ οι (X', Y', Z') προσδιορίζουν ένα γειτονικό σημείο, αυθαίρετα μακριά από το πρώτο. Όταν δύο σημεία -ένα από την περιοχή I και ένα από την αντίστοιχη III- έχουν μη μηδενική συσχέτιση, τότε λέμε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται σε κβαντική σύμπλεξη. Τότε, ένα κβάντο ενέργειας δεν περιγράφεται από μια καθαρή κατάσταση, όπως αυτές που προαναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3. Απεναντίας, υποσυστήματα στην περιοχή I (ή III) περιγράφονται από ένα πίνακα πυκνότητας.

4.3 Ο Πίνακας Πυκνότητας Unruh

Ας θεωρήσουμε ένα κβαντικό πεδίο χ στο χωροχρόνο Minkowski με την εξής ιδιότητα

$$\begin{aligned} \chi(X, Y, Z) &= \chi_R(X, Y, Z), \quad Z > 0 \\ \chi(X, Y, Z) &= \chi_L(X, Y, Z), \quad Z < 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

όπου χ_R και χ_L πεδία που είναι ορισμένα μόνο στις περιοχές I και III αντίστοιχα.

Στο Σχήμα 4.3, η χωροειδής επιφάνεια $T = 0$ χωρίζεται σε δύο κομμάτια. Το πρώτο κομμάτι χαρακτηρίζεται από θετικές τιμές της Z συντεταγμένης, ενώ το δεύτερο από τις αρνητικές της τιμές.

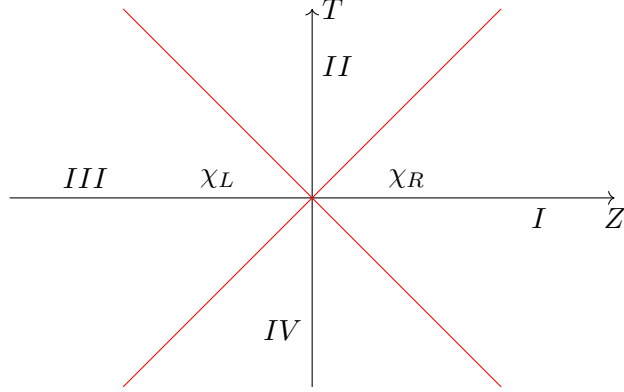
Η γενική κυματοσυνάρτηση, που περιγράφει το χωροχρόνο Minkowski είναι ένα συναρτησιακό της μορφής

$$\Psi = \Psi[\chi_L, \chi_R] \quad (4.33)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Hellman-Feynman, μπορούμε να σχεφτούμε την κυματοσυνάρτηση (4.33) ως ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα

$$\Psi[\chi_L, \chi_R] = \frac{1}{\sqrt{Z}} \int [d\chi]_{\chi(\tau_E=0)}^{\chi(\tau_E=\beta)} e^{-S_E} \quad (4.34)$$

όπου $Z = \int [d\chi]_P e^{-S_E}$ η συνάρτηση επιμερισμού, η οποία αποτελεί ένα ευκλείδειο συναρτησιακό ολοκλήρωμα, στο οποίο συνεισφέρουν περιοδικά πεδία με βάρος ανάλογο της ευκλείδειας τους δράσης. Το συναρτησιακό ολοκλήρωμα (4.34) έχει ως όρια την τιμή των πεδίων όταν ο ευκλείδειος χρόνος είναι μηδενικός και την αντίστοιχη τιμή τους όταν ο ευκλείδειος χρόνος πάρει μια αυθαίρετη τιμή β . Με S_E έχουμε συμβολίσει την ευκλείδεια αυτή δράση, η οποία περιγράφει το βαθμωτό πεδίο χ στη γεωμετρία Minkowski.



Σχήμα 4.3: Κβαντικά πεδία στη χωροειδή επιφάνεια $T = 0$, ορισμένα στο χωροχρόνο Minkowski.

Συνεχίζοντας αναλυτικώς τις συντεταγμένες ενός παρατηρητή Rindler παρατηρούμε ότι ο χωροχρόνος Minkowski μετατρέπεται σε ένα ευκλείδειο επίπεδο, εκπεφρασμένο σε πολικές συντεταγμένες.

$$\begin{aligned} \tau_E &= \rho \sin \phi \\ x_E &= \rho \cos \phi \end{aligned} \quad (4.35)$$

Η γωνιά ϕ σχετίζεται με το χρόνο Rindler ως εξής

$$\omega = -i\phi \quad (4.36)$$

Η κυματοσυνάρτηση (4.34) μπορεί να γραφεί και ως ένα πλάτος μετάβασης με αρχική κατάσταση την τιμή του πεδίου στην περιοχή I τη χρονική στιγμή $T = 0$ και τελική κατάσταση την τιμή του πεδίου στην περιοχή III την ίδια χρονική στιγμή. Για την επίτευξη αυτής της μετάβασης, είναι αναγκαία η χρονοεξέλιξη της αρχικής κατάστασης στην τελική μέσω ενός τελεστή χρονικής εξέλιξης. Έστω ότι θέλουμε να εξελίξουμε την κατάσταση στο σύστημα αναφοράς ενός παρατηρητή Rindler

$$\Psi[\chi_L, \chi_R] = \frac{1}{\sqrt{Z}} \langle \chi_L | e^{-\pi H_R} | \chi_R \rangle \quad (4.37)$$

όπου $H_R = i \frac{d}{d\omega}$ η Χαμιλτονιανή του εν λόγω παρατηρητή και π η γωνιά στο ευκλείδειο επίπεδο που αντιστοιχεί στο χρόνο Rindler που χρειάζεται η αρχική κατάσταση να μετατραπεί στην τελική.

Γνωρίζοντας ότι οι βαθμοί ελευθερίας της περιοχής I είναι συμπλεγμένοι με αυτούς της περιοχής III και ότι οι βαθμοί ελευθερίας της περιοχής III δεν είναι προσβάσιμοι, μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα πυκνότητας ενός παρατηρητή Rindler

$$\rho_R[\chi_R, \chi_R'] = \frac{1}{Z} \int [d\chi_L] \Psi^*[\chi_L, \chi_R] \Psi[\chi_L, \chi_R'] \quad (4.38)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.37) στον πίνακα πυκνότητας (4.38), ο πίνακας πυκνότητας του παρατηρητή Rindler παίρνει τη μορφή

$$\rho_R[\chi_R, \chi_R'] = \frac{1}{Z} e^{-2\pi H_R} \quad (4.39)$$

Από τον πίνακα πυκνότητας (4.39), συμπεραίνουμε ότι ο χωροχρόνος Minkowski, όπως τον αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής Rindler, περιγράφεται από ένα θερμικό πίνακα πυκνότητας ανεξάρτητο από το πεδίο. Επίσης, ως προς τον παρατηρητή Rindler ο χωροχρόνος είναι γεμάτος με σωματίδια, δηλαδή θερμικές διακυμάνσεις του κενού, ενώ ο Minkowski βλέπει μη μηδενική θερμοκρασία.

Η θερμοκρασία Rindler ορίζεται μέσω του πίνακα πυκνότητας (4.39), ως το αντίστροφο της τιμής β

$$T_R = \frac{1}{2\pi} \quad (4.40)$$

και είναι και αυτή ανεξάρτητη από το πεδίο. Με άλλα λόγια, είναι εξίσου σωστή τόσο για ένα ελεύθερο βαθμωτό πεδίο στην κβαντική ηλεκτροδυναμική θεωρία, όσο και για ένα παρόμοιο πεδίο στην κβαντική χρωμοδυναμική θεωρία.

Ένας παρατηρητής Rindler, εξοπλισμένος με ένα θερμόμετρο θα μετρά θερμοκρασία, διεσταλμένη κατά ένα παράγοντα $\sqrt{g_{00}}$, ίση με

$$T_{th} = \frac{1}{2\pi\bar{\rho}} = \frac{\alpha(\bar{\rho})}{2\pi} \quad (4.41)$$

όπου $\bar{\rho}$ η σταθερή θέση του παρατηρητή Rindler στο σύστημα αναφοράς του και $\alpha(\bar{\rho})$ η επιτάχυνση του παρατηρητή, όπως την αντιλαμβάνεται ο αντίστοιχος Minkowski. Από τη σχέση (4.41), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι παρατηρητής που κινείται με σταθερή ταχύτητα αντιλαμβάνεται μηδενική θερμοκρασία.

4.4 Ακτινοβολία Hawking και Εντροπία Μελανών Οπών

Το 1974, ο Βρετανός θεωρητικός φυσικός Steven Hawking υποστήριξε ότι λόγω κβαντικών διακυμάνσεων οι μελανές οπές εκπέμπουν θερμική ακτινοβολία, γνωστή ως ακτινοβολία Hawking. Συγκεκριμένα, ζεύγη σωματιδίων-αντισωματιδίων δημιουργούνται από τις διακυμάνσεις του ισχυρού βαρυτικού πεδίου. Στο χώρο κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής, το αντισωματίδιο έλκεται από το βαρυτικό πεδίο της μελανής οπής. Το αντισωματίδιο, έτσι, πέφτει μέσα στη μελανή οπή, ενώ το σωματίδιο ξεφεύγει στο άπειρο υπό μορφή θερμικής ακτινοβολίας. Με αυτό τον τρόπο, η μελανή οπή χάνει ενέργεια και τελικά εξαερώνεται.

Η θερμοκρασία Hawking, η οποία προκαλείται από την ομώνυμη ακτινοβολία, υπολογίζεται θεωρώντας το απειροστό διάστημα της μετρικής. Στην περίπτωση μιας μελανής οπής Schwarzschild, θεωρούμε το απειροστό διάστημα της εν λόγω μετρικής

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (4.42)$$

Συνεχίζουμε αναλυτικώς τη χρονική συντεταγμένη ούτως ώστε η μετρική να περιλαμβάνει τον ευκλείδειο χρόνο αντί το χρόνο Schwarzschild και επομένως το απειροστό διάστημα να περιγράφει χώρο και όχι χωροχρόνο

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)d\tau_E^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (4.43)$$

Ακολούθως, προσεγγίζουμε τη μετρική (4.43) στο όριο όπου η ακτινική συνιστώσα τείνει να γίνει ίση με την αντίστοιχη ακτινική συνιστώσα στον ορίζοντα

$$\lim_{r \rightarrow 2GM} ds^2 = \left(\frac{r - 2GM}{2GM} \right) d\tau_E^2 + \left(\frac{2GM}{r - 2GM} \right) dr^2 + (2GM)^2 d\Omega^2 \quad (4.44)$$

και έπειτα κάνουμε κατάλληλες αντικαταστάσεις για να φέρουμε το απειροστό διάστημα (4.44) στη μορφή ενός απειροστού διαστήματος μίας δισδιάστατης σφαίρας πολλαπλασιασμένου με το αντίστοιχο απειροστό διάστημα ενός επιπέδου εκπεφρασμένου σε πολικές συντεταγμένες. Η τελική μορφή είναι η εξής

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} ds^2 = \frac{\tilde{r}^2 d\tau_E^2}{4(2GM)^2} + d\tilde{r}^2 + (2GM)^2 d\Omega^2 \quad (4.45)$$

όπου $\tilde{r} = 2\sqrt{2GM(r - 2GM)}$. Ορίζοντας γωνιά $\phi = \frac{\tau}{4GM}$ τότε είναι ξεκάθαρο ότι το απειροστό διάστημα έχει τη μορφή που προαναφέρθηκε

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} ds^2 = \tilde{r}^2 d\phi^2 + d\tilde{r}^2 + (2GM)^2 d\Omega^2 \quad (4.46)$$

Λόγω του ότι δεν πρέπει να υπάρχει κωνική ανωμαλία στο επίπεδο κομμάτι του απειροστού διαστήματος, η γωνιά ϕ πρέπει να είναι περιοδική

$$\phi \rightarrow \phi + 2n\pi \quad (4.47)$$

Η σχέση (4.47) υποδεικνύει ότι ο ευκλείδειος χρόνος πρέπει να υπακούει σε μια ανάλυση σχέση

$$\tau_E \rightarrow \tau_E + 2n\pi(4GM) \quad (4.48)$$

Υπενθυμίζεται ότι για κβαντικά στη γεωμετρία Schwarzschild, τα συναρτησιακά ολοκληρώματα είναι θερμικά και ταυτίζουν την περίοδο του επιπέδου της ευκλείδειας μορφής της μετρικής με το αντίστροφο της θερμοκρασίας. Στην περίπτωση μας η θερμοκρασία που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής Schwarzschild σε μια σταθερή θέση δίνεται από

$$T = \frac{1}{(1 - \frac{2GM}{r})8\pi GM} \quad (4.49)$$

όπου $8\pi GM$ η περίοδος του κύκλου με ακτίνα \tilde{r} . Η θερμοκρασία Hawking ορίζεται ως η θερμοκρασία (4.49) για σταθερό παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από τον ορίζοντα της μελανής οπής. Δηλαδή, για τη γεωμετρία Schwarzschild η θερμοκρασία Hawking δίνεται από

$$T_H = \frac{1}{8\pi GM} \quad (4.50)$$

Συγκρίνοντας τη θερμοκρασία Hawking με την αντίστοιχη θερμοκρασία Rindler, παρατηρούμε ότι ενώ η πρώτη έχει σταθερή τιμή σε άπειρη απόσταση από τον ορίζοντα της μελανής οπής, η δεύτερη μηδενίζεται.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα ποσότητα είναι η εντροπία της μελανής οπής Schwarzschild. Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής,

$$dE = T dS \quad (4.51)$$

εφόσον η μελανή οπή έχει ενέργεια και εκπέμπει θερμική ακτινοβολία, τότε πρέπει να εμφανίζει και μη μηδενική εντροπία. Η μεταβολή στην ενέργεια της μελανής οπής οφείλεται εξ' ολοκλήρου στη μεταβολή στη μάζα της λόγω της θερμικής ακτινοβολίας. Αντικαθιστώντας τη θερμοκρασία Hawking στην εξίσωση (4.51), προκύπτει ότι

$$dS = 8\pi GM dM \quad (4.52)$$

Ολοκληρώνοντας την πιο πάνω έκφραση και λαμβάνοντας υπόψη ότι όταν η μάζα της μελανής οπής είναι μηδενική δεν αναμένεται η μελανή οπή να έχει εντροπία, τότε προκύπτει η σχέση για την εντροπία της μελανής οπής

$$S = 4\pi GM^2 \quad (4.53)$$

Η εντροπία της μελανής οπής Schwarzschild μπορεί να γραφτεί και με τον εξής τρόπο

$$S = \frac{A}{4G} \quad (4.54)$$

όπου $A = 4\pi r_0^2$ η επιφάνεια του ορίζοντα της μελανής οπής και r_0 η βαρυτική ακτίνα της μελανής οπής. Η εντροπία αυτή ονομάζεται εντροπία Bekenstein-Hawking και επιδέχεται μιας στατιστικής ερμηνείας: Στις φυσικές μονάδες μέτρησης η σταθερά παγκόσμιας έλξης ισούται με το τετράγωνο του μήκους Planck. Συνεπάγεται ότι έχει μονάδες μέτρησης εμβαδού επιφάνειας. Επομένως, διαιρώντας το εμβαδόν της επιφάνειας του ορίζοντα με το αντίστοιχο εμβαδόν της στοιχειώδους επιφάνειας Planck το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός των στοιχειωδών επιφανειών Planck, οι οποίες συναποτελούν την επιφάνεια της μελανής οπής. Με άλλα λόγια, η εντροπία Bekenstein-Hawking αποτελεί μέτρο των στοιχειωδών βαθμών ελευθερίας της μελανής οπής.

Χρησιμοποιώντας το νόμο των Stefan-Boltzmann, είναι εφικτό να υπολογιστεί ο χρόνος ζωής της μελανής οπής. Από το νόμο αυτό προκύπτει ο ρυθμός με τον οποίο η μελανή οπή χάνει τη μάζα της

$$\frac{dM}{dt} = 16\sigma T^4 \pi (GM)^2 \quad (4.55)$$

Αντικαθιστώντας τη θερμοκρασία Hawking στην έκφραση (4.55) και ολοκληρώνοντας προκύπτει ο χρόνος ζωής της μελανής οπής

$$T = \frac{256\pi G^2}{3} M^3 \quad (4.56)$$

Κεφάλαιο 5

Ο Χωροχρόνος Anti-de Sitter και Ολογραφία

Ο χωροχρόνος Anti-de Sitter (AdS) είναι ένας ομογενής και ισοτροπικός χώρος με σταθερή αρνητική καμπυλότητα. Αποτελεί λύση των εξισώσεων του Einstein στην παρουσία αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς. Η λύση αυτή, καθώς και η λύση που περιγράφει τον κοσμολογικό χωροχρόνο de Sitter, βρέθηκε από τον Ολλανδό μαθηματικό και φυσικό Willem de Sitter.

Οι χωροχρόνοι AdS σε διάφορες διαστάσεις παίζουν σημαντικότατο ρόλο στη θεωρία των χορδών, η οποία αποτελεί μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας. Αποτελούν ακριβείς λύσεις των εξισώσεων των χορδών, στο κβαντικό επίπεδο. Μια θεωρία κβαντικής βαρύτητας στο χωροχρόνο AdS επιδέχεται μιας μη διαταρακτικής, ολογραφικής περιγραφής, βάσει μιας αντιστοιχίας με μια σύμμορφη κβαντική θεωρία πεδίων (CFT) χωρίς βαρύτητα (αντιστοιχία AdS/CFT) [10–13]. Η σύμμορφη θεωρία πεδίων ζει στο σύνορο του χωροχρόνου AdS, το οποίο έχει μια χωρική διάσταση λιγότερη από τον ίδιο το χωροχρόνο. Η βαρύτητα μαζί με επιπρόσθετες χωρικές διαστάσεις δημιουργούνται ως αποτέλεσμα ισχυρών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των στοιχειωδών βαθμών ελευθερίας της CFT. Παραδείγματα τέτοιων δυϊσμών προκύπτουν στη θεωρία των χορδών, με σπουδαιότερο παράδειγμα την αντιστοιχία της θεωρίας χορδών τύπου IIB στο χωροχρόνο AdS_5 με μια τετραδιάστατη θεωρία βαθμίδας [2].

Στη συνέχεια του κεφαλαίου, όπως και στο επόμενο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε τις θεωρίες αυτές σε μη μηδενικές θερμοκρασίες, θερμοκρασίες στις οποίες σχηματίζονται μελανές οπές στον AdS. Αρχικά, όμως, θα μελετηθεί η γεωμετρία AdS στις $d + 1$ διαστάσεις και ακολούθως, θα επικεντρωθούμε στην πενταδιάστατη γεωμετρία AdS_5 . Στη συνέχεια, θα γίνει μια αναφορά στην ολογραφική αντιστοιχία AdS/CFT.

5.1 Γεωμετρία Σφαίρας σε ανώτερες διαστάσεις

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το σύνορο του χωροχρόνου AdS_{d+1} αποτελεί γινόμενο ενός σφαιρικού χώρου $d - 1$ διαστάσεων επί το χρονικό άξονα. Θα μελετήσουμε πρώτα τη γεωμετρία μιας σφαίρας στις $d - 1$ διαστάσεις.

Ας θεωρήσουμε πρώτα μια διδιάστατη σφαίρα S^2 με μοναδιαία ακτίνα. Μπορούμε να την αναπαραστήσουμε ως μια παραμετρική επιφάνεια στον τρισδιάστατο επίπεδο

χώρο, εισάγοντας δύο γωνιακές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}x^1 &= \sin \theta \sin \phi \\x^2 &= \sin \theta \cos \phi \\x^3 &= \cos \theta\end{aligned}\tag{5.1}$$

όπου $\phi \in [0, 2\pi)$ η αζιμουθιακή γωνία και $\theta \in [0, \pi]$ η πολική γωνία. Τότε ικανοποιείται η εξίσωση $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$. Ένα απειροστό τόξο της σφαίρας έχει μήκος ds , όπου

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 = d\Omega_2^2\tag{5.2}$$

Το απειροστό διάστημα (5.2) μπορεί να γραφεί και ως

$$d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_1^2\tag{5.3}$$

όπου $d\Omega_1^2$ η μετρική του κύκλου S^1 με μοναδιαία ακτίνα.

Μια τρισδιάστατη σφαίρα S^3 (με μοναδιαία ακτίνα) μπορεί να εμβαπτιστεί στον τετραδιάστατο επίπεδο χώρο. Για να την περιγράψουμε πλήρως, χρειαζόμαστε μια επιπρόσθετη πολική γωνία ψ . Θέτουμε:

$$\begin{aligned}x^1 &= \sin \psi \sin \theta \sin \phi \\x^2 &= \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\x^3 &= \sin \psi \cos \theta \\x^4 &= \cos \psi\end{aligned}\tag{5.4}$$

Τότε ικανοποιείται η εξίσωση $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1$. Το απειροστό διάστημα στην S^3 δίνεται από την έκφραση

$$d\Omega_3^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega_2^2\tag{5.5}$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορεί να προσδιοριστεί η μετρική μιας σφαίρας S^{d-1} , ως συνάρτηση της μετρικής μιας σφαίρας $d-2$ διαστάσεων:

$$d\Omega_{d-1}^2 = d\eta^2 + \sin^2 \eta d\Omega_{d-2}^2\tag{5.6}$$

όπου η η υπ' αριθμόν $d-1$ πολική γωνία. Η σφαίρα S^{d-1} εμβαπτίζεται στον d -διάστατο επίπεδο χώρο ως εξής

$$\begin{aligned}x^1 &= \sin \eta \cdots \sin \theta \sin \phi \\x^2 &= \sin \eta \cdots \sin \theta \cos \phi \\&\vdots \\x^d &= \cos \eta\end{aligned}\tag{5.7}$$

5.2 Η Γεωμετρία Anti-de Sitter στις $d+1$ διαστάσεις

Ο χωροχρόνος AdS_{d+1} μπορεί να εμβαπτιστεί στον επίπεδο χωροχρόνο $R^{2,d}$ ως ένα υπερβολοειδές

$$X_0^2 + X_{d+1}^2 - \sum_{i=1}^d X_i^2 = b^2 \quad (5.8)$$

με ακτίνα b . Η μετρική του επίπεδου χωροχρόνου $R^{2,d}$ είναι:

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_{d+1}^2 + \sum_{i=1}^d dX_i^2 \quad (5.9)$$

Οι ισομετρίες της μετρικής απαρτίζουν την ομάδα $SO(2, d)$. Ως προς τους μετασχηματισμούς αυτούς, σημεία του υπερβολοειδούς μετασχηματίζονται σε άλλα σημεία με αποτέλεσμα να παραμένει το υπερβολοειδές να παραμένει αναλλοίωτο. Επομένως ο χωροχρόνος AdS_{d+1} είναι ομογενής.

Στη συνέχεια, εισάγουμε υπερβολικές συντεταγμένες ρ και ω τέτοιες ώστε να ισχύουν οι εξής μετασχηματισμοί

$$X_0 = b \cosh \rho \cos \omega, \quad X_{d+1} = b \cosh \rho \sin \omega, \quad X_i = b \sinh \rho \Omega_i \quad (5.10)$$

όπου $\sum_{i=1}^d \Omega_i^2 = 1$. Τότε, η μετρική του AdS_{d+1} γράφεται ως εξής

$$ds^2 = b^2 (-\cosh^2 \rho d\omega^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2) \quad (5.11)$$

Η συντεταγμένη παίρνει όλες τις θετικές τιμές, συμπεριλαμβανομένου και της μηδενικής, και η χρονική συντεταγμένη ω αφήνεται να τρέξει από το $-\infty$ μέχρι το $+\infty$, ώστε να αποφευχθούν κλειστές χρονοειδείς γραμμές. Πιο κάτω θα μελετήσουμε τη γεωμετρία AdS_{d+1} και σε άλλα συστήματα αναφοράς συντεταγμένων, στα οποία αναδεικνύονται καλύτερα οι διαφορές ενδιαφέρουσες της ιδιότητας.

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, η πιο πάνω μετρική αποτελεί λύση των εξισώσεων Einstein στον κενό χώρο, στην παρουσία αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς Λ :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = 0 \quad (5.12)$$

Η σταθερά Λ έχει μονάδες $[\text{μήκους}]^{-2}$. Ας τη γράψουμε ως γινόμενο της σταθεράς παγκόσμιας έλξης G και μιας άλλης ποσότητας ρ_0

$$\Lambda = G \rho_0 \quad (5.13)$$

Στις $d+1$ διαστάσεις, η σταθερά G έχει μονάδες μήκους στη $d-1$ δύναμη, ώστε το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό μιας σημειακής μάζας M , $\Phi \sim GM/r^{d-2}$ να είναι αδιάστατο. Άρα λοιπόν, η ποσότητα ρ_0 πρέπει να έχει μονάδες μέτρησης $[\text{μήκους}]^{-(d+1)}$ ή μονάδες πυκνότητας ενέργειας. Η κοσμολογική σταθερά μπορεί να ερμηνευθεί ως η πυκνότητα ενέργειας του κενού, η οποία μπορεί να είναι μη μηδενική για ένα κβαντικό σύστημα πεδίων. Στη θεωρία των χορδών, ο κοσμολογικός αυτός όρος παράγεται όταν κάποια από τα πεδία αποκτήσουν μη τετριμμένες αναμενόμενες τιμές [2].

Παίρνοντας το ίχνος της εξίσωσης (5.12), μπορούμε να εκφράσουμε τη βαθμωτή καμπυλότητα του χωροχρόνου συναρτήσει της κοσμολογικής σταθεράς Λ :

$$\Lambda = \frac{d-1}{2(d+1)}R \quad (5.14)$$

Επομένως, η καμπυλότητα του χωροχρόνου AdS_{d+1} είναι παντού σταθερή και αρνητική, όπως θα αναμέναμε για έναν ομογενή χωροχρόνο.

Απαλοϊφώντας την κοσμολογική σταθερά από τις εξισώσεις Einstein, οι τελευταίες παίρνουν την εξής μορφή

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{d+1}g_{\mu\nu} \quad (5.15)$$

Επομένως ο τανυστής Ricci πρέπει να είναι ανάλογος της μετρικής. Μια μετρική με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται μετρική Einstein. Η μετρική (5.11) αποτελεί λύση των εξισώσεων του Einstein εάν η βαθμωτή καμπυλότητα και το μήκος b συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$R = -d(d+1)b^{-2} \quad (5.16)$$

Το μήκος b ονομάζεται η ακτίνα καμπυλότητας του χωροχρόνου AdS_{d+1} .

Μπορούμε να ορίσουμε τις (αδιάστατες) συντεταγμένες r, t , ως προς τις οποίες η μετρική μετασχηματίζεται στην ακόλουθη

$$ds^2 = \frac{b^2}{(1-r^2)^2} \left[-(1+r^2)^2 dt^2 + 4 dr^2 + 4r^2 d\Omega_{d-1}^2 \right] \quad (5.17)$$

Η ακτινική συντεταγμένη r παίρνει τιμές στο πεπερασμένο διάστημα $[0, 1]$. Το σημείο $r = 0$ είναι το κέντρο του χωροχρόνου AdS , ενώ καθώς $r \rightarrow 1$ πλησιάζουμε το σύνορο. Η χρονική συντεταγμένη τρέχει από $-\infty$ μέχρι $+\infty$. Επομένως ο χωροχρόνος μοιάζει με έναν κύλινδρο άπειρου μήκους, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 5.1. Ο άξονας του κυλίνδρου είναι η χρονική διεύθυνση. Η ακτινική συντεταγμένη μεταβάλλεται από το κέντρο $r = 0$ προς το σύνορο καθώς $r \rightarrow 1$, με τις φέτες, στις οποίες κρατούμε τη χρονική και ακτινική συντεταγμένη σταθερές, να είναι ισομορφικές με σφαίρες S^{d-1} .

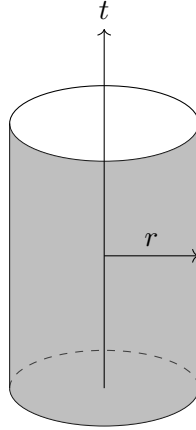
Μελετώντας το απειροστό διάστημα (5.17), φαίνεται ότι όλες οι συνιστώσες της μετρικής απειρίζονται καθώς $r \rightarrow 1$:

$$ds^2 \rightarrow \frac{b^2}{(1-r)^2} \left[-dt^2 + d\Omega_{d-1}^2 \right] \quad (5.18)$$

Παρόλα αυτά δεν προκύπτουν φυσικές ανωμαλίες αφού ο τανυστής καμπυλότητας δεν εκδηλώνει απειρισμούς και η βαθμωτή καμπυλότητα είναι πεπερασμένη, παντού ίση με μια αρνητική σταθερά.

Παρατηρούμε ότι ο χωροχρόνος AdS_{d+1} έχει ένα d -διάστατο, χρονοειδές σύνορο, σύμμορφο με το χώρο $R \times S^{d-1}$, που έχει μετρική

$$ds^2 = b^2 \left[-dt^2 + d\Omega_{d-1}^2 \right] \quad (5.19)$$



Σχήμα 5.1: Ο χωροχρόνος AdS μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας κύλινδρος. Η χρονική κατεύθυνση τρέχει κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου.

Κοντά στο σύνορο $r = 1$, μπορούμε να θέσουμε

$$y = 1 - r \quad (5.20)$$

και να προσεγγίσουμε μια περιοχή της σφαίρας S^{d-1} ως επίπεδη, ορίζοντας τις $d - 1$ καρτεσιανές συντεταγμένες x^i . Τότε η μετρική ανάγεται στην ακόλουθη

$$ds^2 = \frac{b^2}{y^2} \left[- dt^2 + dy^2 + (dx^i)^2 \right] \quad (5.21)$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι η πιο μορφή της μετρικής είναι ακριβής, καλύπτοντας ένα μεγάλο τμήμα του χωροχρόνου AdS_{d+1} . Η συντεταγμένη y παίρνει όλες τις θετικές τιμές, ενώ το σύνορο βρίσκεται στη θέση $y = 0$ και είναι ισομορφικό με τον επίπεδο χωροχρόνο Minkowski R^d . Επίσης, παρατηρούμε ότι καθώς $y \rightarrow \infty$, υπάρχει ορίζοντας.

5.3 Η γεωμετρία Anti-de Sitter στις 5 διαστάσεις

Ας εστιάσουμε την προσοχή μας στο χωροχρόνο AdS_5 . Το σύνορο είναι σύμμορφο με τον τετραδιάστατο χωροχρόνο Minkowski R^4 . Η μετρική είναι

$$ds^2 = \frac{b^2}{(1 - r^2)^2} \left[- (1 + r^2)^2 dt^2 + 4 dr^2 + 4r^2 d\Omega_3^2 \right] \quad (5.22)$$

Η απόσταση οποιουδήποτε σημείου στο εσωτερικό του χώρου από το σύνορο $r = 1$ είναι άπειρη. Ας υπολογίσουμε το μήκος μιας ακτινικής γραμμής που ξεκινά από το κέντρο και καταλήγει στο σύνορο:

$$L = 2b \int_0^1 \frac{dr}{1 - r^2} \quad (5.23)$$

Ολοκληρώνοντας με τη χρήση κατάλληλων αντικαταστάσεων, προκύπτει ότι το φυσικό μήκος απειρίζεται λογαριθμικά

$$L = 2b \left[\log \left(\tan \frac{\pi}{2} \right) + \log 2 - 1 \right] \quad (5.24)$$

5.3.1 Κίνηση φωτός στον AdS_5

Παρόλο που το κέντρο απέχει άπειρη απόσταση από το σύνορο, φως φτάνει στο σύνορο σε πεπερασμένο (συντεταγμένο) χρόνο t . Έστω παλμός φωτός παράγεται στο κέντρο του AdS_5 και εκτελεί ακτινική κίνηση προς το σύνορο. Κατά μήκος της τροχιάς το απειροστό διάστημα (5.17) μηδενίζεται, αφού γειτονικά της σημεία είναι φωτοειδώς διαχωρισμένα. Ισχύει, τότε

$$dt^2 = \frac{4dr^2}{(1+r^2)^2} \quad (5.25)$$

και ο χρόνος δίνεται από

$$t = \int_0^1 \frac{2dr}{1+r^2} = \pi \quad (5.26)$$

Το γεγονός ότι φωτόνια και άλλα άμαζα σωματίδια στο χωροχρόνο AdS_5 φτάνουν στο σύνορο του χωροχρόνου σε πεπερασμένο χρόνο, καθιστά επιτακτική την ανάγκη επιβολής συνοριακών συνθηκών. Επιβάλλουμε ανακλαστικές συνοριακές συνθήκες ούτως ώστε να διατηρείται η ενέργεια μέσα στο χωροχρόνο.

5.3.2 Κίνηση σωματιδίων με μη μηδενική μάζα στον AdS_5

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε ακτινικές κινήσεις ενός σωματιδίου με μη μηδενική μάζα. Όπως θα δούμε, ένα τέτοιο σωματίδιο ποτέ δε φτάνει στο σύνορο, αλλά ταλαντεύεται γύρω από το κέντρο $r = 0$. Η Λαγκρανζιανή που περιγράφει ένα τέτοιο σωματίδιο είναι η εξής:

$$L^2 = \frac{b^2}{(1-r^2)^2} \left[(1+r^2)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 4 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (5.27)$$

όπου τ ο ιδιόχρονος ρολογιού που ακολουθεί το σωματίδιο.

Χρειάζονται δύο εξισώσεις για να προσδιοριστεί η κίνηση του σωματιδίου. Για την πρώτη θέτουμε το τετράγωνο της Λαγκρανζιανής ίσο με μονάδα

$$\frac{(1-r^2)^2}{b^2} = (1+r^2)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 4 \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \quad (5.28)$$

Η δεύτερη είναι η χρονική εξίσωση κίνησης:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{K(1-r^2)^2}{2b^2(1+r^2)^2} \quad (5.29)$$

όπου K σταθερά. Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις, προκύπτει η ακτινική συνιστώσα της τετραταχύτητας του σωματιδίου

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{(1-r^2)^2}{4b^2} \left[\frac{K^2(1-r^2)^2}{4b^2(1+r^2)^2} - 1 \right] \quad (5.30)$$

Έστω ότι το σωματίδιο ξεκινά στο κέντρο $r = 0$ με τετραταχύτητα ίση με v_0 . Τότε $K^2/4b^2 = 1 + 4b^2v_0^2$. Το σώμα θα σταματήσει στιγμιαία σε μια θέση $r_{max} \sim bv_0$ (για μικρές ταχύτητες), και έπειτα θα επανέλθει πίσω. Το σώμα εκτελεί ταλάντωση γύρω από το κέντρο.

Για μικρές ταχύτητες γύρω από το κέντρο, η εξίσωση κίνησης προσεγγίζεται από την εξής σχέση

$$\ddot{r} = -\frac{4r}{b^2} \quad (5.31)$$

Η κίνηση είναι απλή αρμονική ταλάντωση με ιδιοπερίοδο πb .

Επειδή η μετρική είναι στατική και η καμπυλότητα φθίνει στο μηδέν καθώς το μήκος b τείνει στο άπειρο, μπορούμε να μελετήσουμε κινήσεις κοντά στο κέντρο $r = 0$ στη Νευτώνεια προσέγγιση. Πρώτα αλλάζουμε συντεταγμένες θέτοντας $\tilde{t} = bt$ και $\tilde{r} = br$. Η χρονική συνιστώσα της μετρικής είναι

$$g_{\tilde{t}\tilde{t}} = -\left(\frac{1 + \tilde{r}^2/b^2}{1 - \tilde{r}^2/b^2}\right)^2 \quad (5.32)$$

Εάν $\tilde{r}/b \ll 1$, προκύπτει

$$g_{\tilde{t}\tilde{t}} \approx -1 - 4\tilde{r}^2/b^2 \quad (5.33)$$

οπότε το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό είναι

$$\Phi_N = 2\tilde{r}^2/b^2 \quad (5.34)$$

το οποίο προκαλεί μια κοσμολογική δύναμη επαναφοράς ανάλογη και αντίθετη με την απομάκρυνση από το κέντρο.

Συνοψίζοντας, σωματίδια με μη μηδενική μάζα δεν καταφέρνουν ποτέ να φτάσουν στο σύνορο. Ασκείται σε αυτά δύναμη επαναφοράς. Η δύναμη αυτή υφίσταται λόγω της καμπύλωσης του χωροχρόνου. Αντιθέτως, άμαζα σωματίδια μπορούν να φτάσουν στο σύνορο, να ανακλαστούν και να γυρίσουν πίσω στο κέντρο του χωροχρόνου.

5.4 Ολογραφία και Αντιστοιχία με Σύμμορφες Θεωρίες Πεδίου

Η αρχή της ολογραφίας [14, 15] στηρίζεται στη θερμοδυναμική των μελανών οπών, και κυρίως στη σχέση που συνδέει την εντροπία Bekenstein–Hawking μιας μαύρης τρύπας με το εμβαδόν του ορίζοντα της. Απόρροια του δευτέρου Θερμοδυναμικού Νόμου και της εντροπίας Bekenstein–Hawking είναι ότι ο (λογάριθμος) αριθμός των θεμελιωδών βαθμών ελευθερίας ενός βαρυτικού συστήματος δεν μπορεί να ξεπεράσει το όριο

$$S = \frac{A(\Gamma)}{4G} \quad (5.35)$$

όπου Γ η χωρική περιοχή που καταλαμβάνει το σύστημα και $A(\Gamma)$ το εμβαδόν του συνόρου της [14]. Ο μέγιστος αριθμός των θεμελιωδών βαθμών ελευθερίας ενός συστήματος είναι ανάλογος του εμβαδού του συνόρου της περιοχής που καταλαμβάνει. Μη βαρυτικά συστήματα έχουν εντροπία ανάλογη του όγκου της περιοχής που καταλαμβάνουν. Οι στοιχειώδεις βαθμοί ελευθερίας του βαρυτικού συστήματος ζουν στο σύνορο με την πυκνότητά τους να μην ξεπερνά το αντίστροφο του μήκους Planck στο τετράγωνο.

Η αναλογία με ένα ολόγραμμα είναι έκδηλη. Συστήματα σε ένα χώρο (ή χωροχρόνο) με διαστατικότητα $d + 1$ μπορούν να περιγραφούν πλήρως από πιο βασικούς βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι ζουν στο d -διάστατο σύνορο του. Οι βαθμοί ελευθερίας αυτοί δημιουργούν το ολόγραμμα του βαρυτικού συστήματος. Οι ολογραφικές θεωρίες είναι συνήθως κβαντικές θεωρίες πεδίων χωρίς βαρύτητα. Μια τέτοια ολογραφική αντιστοιχία προτάθηκε από τον Αργεντινό Φυσικό Juan Maldacena το 1997 [10]. Θεωρίες κβαντικής βαρύτητας σε χωροχρόνους AdS περιγράφονται πλήρως από κβαντικές σύμμορφες θεωρίες πεδίων (CFT's) στο σύνορο του χωροχρόνου. Οι θεωρίες αυτές παραμένουν αναλλοίωτες ως προς μετασχηματισμούς αλλαγής της κλίμακας, ακόμα και στο κβαντικό επίπεδο. Κάθε κατάσταση της βαρυτικής θεωρίας αντιστοιχεί σε μια κατάσταση της CFT στο σύνορο.

Το πιο γνωστό παράδειγμα μιας ολογραφικής αντιστοιχίας είναι η αντιστοιχία μεταξύ της θεωρίας υπερχορδών τύπου IIB στο χωροχρόνο $AdS_5 \times S^5$, και της τετραδιάστατης υπερσυμμετρικής θεωρίας Yang-Mills, με 16 πραγματικές υπερσυμμετρίες και συμμετρία βαθμίδας την $SU(N)$. Η θεωρία βαθμίδας είναι μια σύμμορφη θεωρία πεδίων, αναλλοίωτη ως προς τετραδιάστατους σύμμορφους μετασχηματισμούς. Οι μετασχηματισμοί αυτοί απαρτίζουν την ομάδα $SO(2,4)$ η οποία είναι η ομάδα των ισομετριών του χωροχρόνου AdS_5 . Μπορεί ναδειχθεί ότι όλες οι συμμετρίες της βαρυτικής θεωρίας αποτελούν και συμμετρίες του ολογράμματος, συμπεριλαμβανομένου και των υπερσυμμετριών των δύο θεωριών. Εξαιτίας των υπερσυμμετριών αυτών τα φερμιονικά και τα 6 βαθμωτά πεδία της θεωρίας Yang-Mills μετασχηματίζονται στη συζυγή αναπαράσταση της ομάδας $SU(N)$, όπως και τα πεδία βαθμίδας [13].

Όπως έχουμε αναφέρει η μετρική στο σύνορο του χωροχρόνου AdS_5 απειρίζεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$ds^2 \rightarrow \frac{b^2}{(1-r)^2} \left[-dt^2 + d\Omega_3^2 \right] \quad (5.36)$$

Επειδή η θεωρία στο σύνορο είναι μια σύμμορφη θεωρία, η δράση της δεν εξαρτάται από τον άπειρο παράγοντα κλίμακας $1/(1-r)^2$, και επομένως μπορεί να οριστεί σε μια τρισδιάστατη σφαίρα S^3 με ακτίνα b (επί το χρόνο).

Μια ιδιαίτερη κατηγορία σύμμορφων μετασχηματισμών είναι οι μετασχηματισμοί αλλαγής κλίμακας. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της μετρικής σε επίπεδες συντεταγμένες

$$ds^2 = \frac{b^2}{y^2} \left[-dt^2 + dy^2 + (dx^i)^2 \right], \quad i = 1 \dots 3 \quad (5.37)$$

φαίνεται αμέσως ότι οι μετασχηματισμοί αλλαγής κλίμακας

$$t \rightarrow \lambda t, \quad x^i \rightarrow \lambda x^i, \quad y \rightarrow \lambda y \quad (5.38)$$

είναι ισομετρίες της μετρικής AdS_5 .

Η θεωρία των χορδών στο εσωτερικό του χωροχρόνου AdS_5 έχει δύο παραμέτρους. Η πρώτη είναι η σταθερά σύζευξης των χορδών g_s . Η άλλη αδιάστατη παράμετρος είναι ο λόγος της ακτίνας καμπυλότητας προς το μήκος των χορδών: b/l_s . Οι παράμετροι αυτοί σχετίζονται με τις παραμέτρους της θεωρίας βαθμίδας. Επειδή η θεωρία αυτή είναι σύμμορφη (στο κβαντικό επίπεδο), η σταθερά σύζευξης της g_{YM} είναι ανεξάρτητη της κλίμακας ενέργειας. Οι σταθερές σύζευξης των δύο θεωριών συνδέονται με την εξής σχέση [10, 13]

$$g_s = g_{YM}^2 \quad (5.39)$$

Η άλλη παράμετρος της θεωρίας βαθμίδας είναι η τάξη της ομάδας $SU(N)$, ο αριθμός χρωμάτων. Συνδέεται με το λόγο b/l_s με βάση τη σχέση

$$\frac{b}{l_s} = (Ng_{YM}^2)^{1/4} \quad (5.40)$$

Η παράμετρος Ng_{YM}^2 είναι η ενεργός σταθερά σύζευξης της θεωρίας βαθμίδας, και ονομάζεται σταθερά σύζευξης 't Hooft. Στο όριο 't Hooft

$$N \rightarrow \infty, \quad g_{YM}^2 N = \text{fixed} \quad (5.41)$$

Εάν $Ng_{YM}^2 \gg 1$, οι αλληλεπιδράσεις των γκλουονίων στη θεωρία βαθμίδας είναι πολύ ισχυρές. Αντίθετα στη βαρυτική θεωρία, ο λόγος $b/l_s \gg 1$ άρα και $g_s \rightarrow 0$ υποδεικνύει ότι οι αλληλεπιδράσεις των βαρυτονίων είναι ασθενείς και η θεωρία μπορεί να επιλυθεί διαταραχτικά.

Επομένως βλέπουμε πως παρόλο που υπάρχουν αντιστοιχίες μεταξύ των παρατηρήσιμων ποσοτήτων στις δύο θεωρίες, σε κάποια όρια μια παρατηρήσιμη ποσότητα μπορεί να υπολογιστεί ευκολότερα στη μία από τις δύο θεωρίες, ενώ ο υπολογισμός της αντίστοιχης ποσότητας στην άλλη είναι πολύ πιο δύσκολος.

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την αντιστοιχία αυτή σε μη μηδενική θερμοκρασία και θα δούμε ότι μελανές οπές σε χωροχρόνους AdS παίζουν σπουδαίο ρόλο στην κατανόηση των δύο φάσεων της θεωρίας (Θερμικός AdS και μεγάλη μελανή στον AdS) [13, 16, 17]. Παράλληλα η αντιστοιχία της βαρυτικής θεωρίας με μια κβαντική θεωρία βαθμίδας οδηγεί στην επίλυση δύσκολων παραδόξων όπως τη μη διατήρηση της πληροφορίας στην παρουσία μαύρων τρυπών [2].

Κεφάλαιο 6

Μελανές οπές στον AdS_5

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την αντιστοιχία AdS/CFT σε μη μηδενική θερμοκρασία [13, 16, 17]. Επειδή η βαρύτητα στο εσωτερικό του χωροχρόνου AdS_{d+1} είναι δυναμική, στη συνάρτηση επιμερισμού συνεισφέρουν διαφορετικές γεωμετρίες, οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις του Einstein και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Η συνάρτηση επιμερισμού μπορεί να εκφραστεί ως ένα Ευκλείδειο συναρτησιακό ολοκλήρωμα, όπου ο Ευκλείδειος χρόνος έχει συμπαγοποιηθεί σε κύκλο με περιφέρεια το αντίστροφο της θερμοκρασίας. Όπως θα δούμε, οι κύριες συνεισφορές προέρχονται από δύο ευκλείδειους χώρους, με διαφορετική τοπολογία ο καθένας. Ο πρώτος είναι ένας μη απλά συνδεδεμένος χώρος που ονομάζεται ο θερμικός χώρος AdS . Ο δεύτερος χώρος είναι απλά συνδεδεμένος και αντιστοιχεί στην Ευκλείδεια γεωμετρία Schwarzschild στον χωροχρόνο AdS . Και οι δύο χώροι έχουν σύνορο που είναι σύμμορφο με τον d -διάστατο χώρο $S^1 \times S^{d-1}$. Η κυκλική κατεύθυνση αντιστοιχεί στο συμπαγή Ευκλείδειο χρόνο, και με περιφέρεια το αντίστροφο της θερμοκρασίας της σύμμορφης θεωρίας πεδίων που ζει στο σύνορο. Όπως θα δούμε, ο θερμικός χώρος AdS κυριαρχεί στις χαμηλές θερμοκρασίες ενώ η μελανή οπή Schwarzschild στις υψηλές. Σε μια κρίσιμη θερμοκρασία υπάρχει μια αλλαγή φάσης, η οποία είναι πρώτης τάξης, και ονομάζεται αλλαγή φάσης Hawking-Page [18].

6.1 Θερμικός AdS

Για τους σκοπούς της μελέτης αυτής, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη αναπαράσταση του χωροχρόνου AdS_{d+1}

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{b^2} + 1\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{b^2} + 1} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (6.1)$$

όπου b η ακτίνα καμπυλότητας και η ακτινική συντεταγμένη r παίρνει τιμές σε όλη την ημιευθεία. Το σύνορο του χωροχρόνου είναι στο $r \rightarrow \infty$.

Ο τανυστής Ricci ικανοποιεί την εξίσωση¹

$$R_{\mu\nu} = -\frac{d}{b^2} g_{\mu\nu} \quad (6.2)$$

¹ Οι συνιστώσες του τανυστή Ricci έχουν υπολογιστεί με τη βοήθεια μιας σειράς από εντολών στο υπολογιστικό λογισμικό Mathematica

και η βαθμωτή καμπυλότητα είναι $R = -d(d+1)b^{-2}$.

Συνεχίζουμε αναλυτικώς στον Ευκλείδειο χώρο, $t \rightarrow -it_E$, και συμπαγοποιούμε το χρόνο t_E , με αποτέλεσμα η μετρική να πάρει τη μορφή

$$ds_E^2 = \left(\frac{r^2}{b^2} + 1 \right) dt_E^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{b^2} + 1} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (6.3)$$

Έστω η περίοδος του ευκλείδειου χρόνου είναι ίση με β . Η πολλαπλότητα έχει τοπολογία $S^1 \times B_d$, όπου B_d ο εσωτερικός χώρος της σφαίρας S^{d-1} . Στο κέντρο $r = 0$, η περιφέρεια του κύκλου είναι μη μηδενική, ίση με β . Καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο προς το σύνορο, η περιφέρεια του κύκλου μεγαλώνει:

$$\beta_{proper} = \left(\frac{r^2}{b^2} + 1 \right)^{1/2} \beta \quad (6.4)$$

Η περιφέρεια απειρίζεται καθώς πλησιάζουμε το σύνορο. Καθώς $r \rightarrow \infty$ η μετρική του συνόρου ανάγεται στην ακόλουθη

$$ds_E^2 \rightarrow \frac{r^2}{b^2} dt_E^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (6.5)$$

Επομένως, η μετρική στο σύνορο είναι σύμμορφη με την

$$d\tilde{s}_E^2 = dt_E^2 + b^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (6.6)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε, τότε, ότι η σύμμορφη θεωρία πεδίων ζει στο χώρο $S^1 \times S^{d-1}$, με τον κύκλο να έχει περιφέρεια β και τη σφαίρα να έχει ακτίνα b .

Εάν τα μποζονικά πεδία είναι περιοδικά ως προς τον Ευκλείδειο χρόνο και τα φερμιονικά πεδία αντιπεριοδικά, τότε η συνάρτηση επιμερισμού είναι θερμοκή. Η σύμμορφη θεωρία πεδίων έχει μη μηδενική θερμοκρασία ίση με $1/\beta$. Εξαιτίας της αναλλοίωτητάς της ως προς μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας, όλα τα θερμοδυναμικά μεγέθη θα εξαρτώνται μόνο από τον αδιάστατο λόγο b/β . Εάν οι αλληλεπιδράσεις στην ολογραφική θεωρία στο σύνορο είναι ισχυρές, η συνάρτηση επιμερισμού, σε χαμηλές θερμοκρασίες, μπορεί να υπολογιστεί στη βαρυτική θεωρία η οποία ζει στο εσωτερικό του χωροχρόνου AdS .

Κοντά στο κέντρο έχουμε ένα θερμικό αέριο από βαρυτόνια και άλλα άμαζα σωματίδια σε θερμοκρασία β . Καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο, η θερμοκρασία ελαττώνεται. Ο πλείστος όγκος του χώρου είναι κρύος.

Εάν η θερμοκρασία είναι μικρή, η πυκνότητα ενέργειας του θερμικού αερίου είναι μικρή και μπορούμε να αμελήσουμε την ανάδραση του στη γεωμετρία. Όταν όμως η θερμοκρασία αυξηθεί, η πυκνότητα ενέργειας αυξάνεται με τελικό αποτέλεσμα το θερμικό αέριο να καταρρεύσει. Όπως θα δούμε, σχηματίζεται μια μελανή οπή, η οποία σε αντίθεση με τις μαύρες τρύπες στον ασυμπτωτικά επίπεδο χωροχρόνο, είναι θερμοδυναμικά ευσταθής [17, 18].

Όπως έχουμε αναφέρει ο χωροχρόνος AdS συμπεριφέρεται σαν μια κοιλότητα με ανακλαστικά τοιχώματα. Έστω ότι σχηματίζεται μια μελανή οπή στο χωροχρόνο αυτό. Η μελανή οπή παράγει ακτινοβολία Hawking, η οποία φτάνει στο σύνορο σε πεπερασμένο χρόνο, ανακλάται και επιστρέφει πίσω. Είναι δυνατό να επέλθουν συνθήκες θερμοκή ισορροπίας, με αποτέλεσμα την ευστάθεια των μελανών οπών σε χωροχρόνους AdS . Μελανές οπές με αυτή την ιδιότητα καλούνται αιώνιες [19].

6.2 Μελανές οπές Schwarzschild σε χωροχρόνους AdS

Η γεωμετρία Schwarzschild στο χωροχρόνο AdS_{d+1} αποτελεί μία ακόμη λύση των εξισώσεων του Einstein στον κενό χώρο, στην παρουσία μη μηδενικής αρνητικής κοσμολογικής σταθεράς. Η Ευκλείδεια λύση είναι [16, 18]

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{b^2} + 1 - \frac{w_d M}{r^{d-2}} \right) dt_E^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{b^2} + 1 - \frac{w_d M}{r^{d-2}}} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (6.7)$$

όπου M η μάζα της μαύρης τρύπας και w_d σταθερά έτσι ώστε

$$w_d = \frac{16\pi G}{(d-1)\text{Area}(S^{d-1})} \quad (6.8)$$

Στο όριο όπου $b \rightarrow \infty$, η μετρική τείνει στην ακόλουθη

$$ds^2 \rightarrow \left(1 - \frac{w_d M}{r^{d-2}} \right) dt_E^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{w_d M}{r^{d-2}}} + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (6.9)$$

Προκύπτει η γεωμετρία Schwarzschild στον $d+1$ -διάστατο επίπεδο χώρο. Πράγματι, εξετάζοντας τη χρονική συνιστώσα της μετρικής παίρνουμε το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό που παράγει σημειακή μάζα M στις $d+1$ διαστάσεις. Με βάση το Νόμο Gauss, αυτό φθίνει αντιστρόφως ανάλογα της ποσότητας r^{d-2} , όπου r η απόσταση από την πηγή.

Ο ορίζοντας μπορεί να βρεθεί θέτοντας τη χρονική συνιστώσα της μετρικής (6.7) ίση με μηδέν. Προκύπτει η ακόλουθη αλγεβρική εξίσωση

$$r^d + b^2 r^{d-2} - w_d M b^2 = 0 \quad (6.10)$$

Υπάρχει μια πραγματική λύση στην εξίσωση αυτή. Ας εξετάσουμε τη συνάρτηση

$$f(r) = r^d + b^2 r^{d-2} - w_d M b^2 \quad (6.11)$$

Η παράγωγος δίνεται από

$$f'(r) = r^{d-3} [r^2 d + (d-2)b^2] \quad (6.12)$$

και είναι θετική. Επομένως, η f είναι μονότονη και αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. Για αρκετά μικρά r , η f είναι αρνητική, ενώ για μεγάλα r , γίνεται θετική. Επομένως υπάρχει μια λύση, η r_+ , η οποία εξαρτάται από τη μάζα της μελανής οπής. Συνεπώς υπάρχει ένας και μοναδικός ορίζοντας.

Ας εξετάσουμε τη συμπεριφορά της Ευκλείδειας μετρικής καθώς η ακτινική συντεταγμένη προσεγγίζει τον ορίζοντα r_+ :

$$\lim_{r \rightarrow r_+} ds_E^2 = \frac{r - r_+}{b_0} dt_E^2 + \frac{b_0}{r - r_+} dr^2 + r_+^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (6.13)$$

όπου

$$b_0 = \frac{b^2 r_+^{d-2}}{f'(r_+)} = \frac{r_+ b^2}{r_+^2 d + (d-2)b^2} \quad (6.14)$$

Η πιο πάνω έκφραση προκύπτει εάν αναπτύξουμε τη συνάρτηση $f(r)$ κατά Taylor γύρω από τη ρίζα της r_+ . Έπειτα, θέτουμε

$$\tilde{r} = 2\sqrt{b_0(r - r_+)} \quad (6.15)$$

και η μετρική παίρνει την εξής μορφή

$$\lim_{r \rightarrow r_+} ds_E^2 = \frac{\tilde{r}^2}{4b_0^2} dt_E^2 + d\tilde{r}^2 + r_+^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (6.16)$$

Θεωρήστε μια ακτινική φέτα του χώρου αυτού. Παρατηρούμε ότι η επαγόμενη μετρική μοιάζει με τη δισδιάστατη επίπεδη μετρική σε πολικές συντεταγμένες \tilde{r} , ϕ , με τη γωνία ϕ να είναι ανάλογη του Ευκλείδειου χρόνου: $t_E/2b_0 = \phi$. Επομένως, η μετρική (6.16) δεν παρουσιάζει κωνική ανωμαλία εάν επιβληθεί η κατάλληλη περιοδικότητα στον Ευκλείδειο χρόνο. Επειδή η περίοδος της γωνίας ϕ είναι ίση με 2π , προκύπτει ότι η περίοδος του Ευκλείδειου χρόνου είναι

$$\beta = 4\pi b_0 = \frac{4\pi b^2 r_+}{r_+^2 d + (d-2)b^2} \quad (6.17)$$

Συνοπώς, στην περίπτωση της μελανής οπής, ο Ευκλείδειος χρόνος είναι συμπαγής με περίοδο $\beta = 4\pi b_0$. Ωστόσο, ο Ευκλείδειος χώρος έχει διαφορετική τοπολογία. Καθώς η ακτινική συντεταγμένη μεταβάλλεται από την τιμή r_+ στο άπειρο, η περιφέρεια του χρονικού κύκλου μεταβάλλεται από μηδέν μέχρι άπειρο. Ασυμπτωτικά, ο χώρος τείνει στον θερμικό χώρο AdS (για $\beta = 4\pi b_0$). Στον ορίζοντα ο χρονικός κύκλος καταρρέει (χωρίς να εκδηλώνονται ανωμαλίες), με αποτέλεσμα η πολλαπλότητα να είναι απλά συνδεδεμένη.

Ας μελετήσουμε την εξάρτηση της θερμοκρασίας από τη μάζα της μελανής οπής. Για μεγάλες μάζες προκύπτει

$$r_+ \approx (w_d b^2 M)^{1/d} \quad (6.18)$$

Συνοπώς

$$\beta \approx \frac{4\pi b^2}{d(w_d b^2 M)^{1/d}} \quad (6.19)$$

Η θερμοκρασία $T = 1/\beta$ είναι ανάλογη της μάζας στη δύναμη $1/d$, και η ειδική θερμοχωρητικότητα είναι θετική. Επομένως οι μεγάλες μελανές οπές είναι ευσταθείς και συνεισφέρουν στην κανονική συλλογή.

Στην περίπτωση του χωροχρόνου AdS_5 , η πενταδιάστατη μετρική (6.7) παίρνει την εξής μορφή

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{b^2} + 1 - \frac{w_4 M}{r^2} \right) dt_E^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{b^2} + 1 - \frac{w_4 M}{r^2}} + r^2 d\Omega_3^2 \quad (6.20)$$

όπου $w_4 = 8G/3\pi$. Η ακτίνα του ορίζοντα είναι

$$r_+^2 = \frac{b^2}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4w_4 M}{b^2}} \right] \quad (6.21)$$

και η περίοδος του χρονικού κύκλου δίνεται από τη σχέση

$$\beta = \frac{2\pi b^2 r_+}{2r_+^2 + b^2} \quad (6.22)$$

6.3 Αλλαγή φάσης Hawking-Page

Έχουμε βρει δύο γεωμετρίες, οι οποίες συνεισφέρουν στην κανονική συλλογή της θεωρίας: το θερμικό χώρο AdS και τη μελανή οπή AdS . Οι δύο γεωμετρίες έχουν διαφορετική τοπολογία. Από τη σκοπιά της βαρυτικής θεωρίας η συνάρτηση επιμερισμού μπορεί να εκφραστεί ως ένα Ευκλείδειο συναρτησιακό ολοκλήρωμα στο οποίο συνεισφέρουν τόσο η γεωμετρία υποβάθρου όσο και οι θερμικές διακυμάνσεις των πεδίων. Η κύρια συνεισφορά προέρχεται από τη γεωμετρία υποβάθρου, και έχει τη μορφή

$$Z \approx e^{-I} + \dots \quad (6.23)$$

όπου

$$I = -\frac{1}{16\pi G} \int d^{d+1}x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) \quad (6.24)$$

η Ευκλείδεια δράση Einstein στην παρουσία μη μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς. Στην περίπτωση λύσεων των εξισώσεων του Einstein στον κενό χώρο, ισχύουν οι σχέσεις $R = -d(d+1)/b^2$ και $\Lambda = -d(d-1)/b^2$, οπότε

$$I = \frac{d}{8\pi G b^2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} = \frac{dV}{8\pi G b^2} \quad (6.25)$$

Η δράση είναι ανάλογη του όγκου V του Ευκλείδειου χώρου.

Τόσο στην περίπτωση της μελανής οπής, αλλά και σε αυτήν του θερμικού AdS , ο όγκος είναι άπειρος. Μπορούμε να τον κανονικοποιήσουμε αποκόπτοντας τον φλοιό $r > R$ για κάποια μεγάλη ακτίνα R . Επομένως

$$V_{TH} = \text{Area}(S^{d-1}) \int_0^{\beta'} dt_E \int_0^R dr r^{d-1} \quad (6.26)$$

είναι ο κανονικοποιημένος όγκος του θερμικού χώρου AdS και

$$V_{BH} = \text{Area}(S^{d-1}) \int_0^\beta dt_E \int_{r_+}^R dr r^{d-1} \quad (6.27)$$

ο όγκος της μελανής οπής όπου β η περίοδος (6.17).

Θα συγκρίνουμε τις δύο συνεισφορές υπολογίζοντας τη διαφορά των όγκων και παίρνοντας το όριο $R \rightarrow \infty$. Η περίοδος β' πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε οι περιφέρειες των χρονικών κύκλων της φέτας $r = R$ να συμπίπτουν [16]:

$$\beta' \sqrt{\frac{R^2}{b^2} + 1} = \beta \sqrt{\frac{R^2}{b^2} + 1} - \frac{w_d M}{R^{d-2}} \quad (6.28)$$

Για μεγάλα R , παίρνουμε

$$\beta' = \beta \left(1 - \frac{w_d M b^2}{2R^d} \right) + \dots \quad (6.29)$$

Συνεπώς

$$V_{TH} = \frac{\text{Area}(S^{d-1}) \beta' R^d}{d} = \frac{\text{Area}(S^{d-1}) \beta}{d} \left(R^d - \frac{w_d M b^2}{2} \right) + \dots \quad (6.30)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (6.10) ο όγκος γράφεται

$$V_{TH} = \frac{\text{Area}(S^{d-1})\beta}{d} \left(R^d - \frac{r_+^d}{2} - \frac{b^2 r_+^{d-2}}{2} \right) + \dots \quad (6.31)$$

Για τη μελανή οπή ο όγκος είναι

$$V_{BH} = \frac{\text{Area}(S^{d-1})\beta}{d} \left(R^d - r_+^d \right) \quad (6.32)$$

Συνεπώς

$$V_{BH} - V_{TH} = \frac{\text{Area}(S^{d-1})\beta}{2d} \left(b^2 r_+^{d-2} - r_+^d \right) + \dots \quad (6.33)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση (6.17) για το αντίστροφο της θερμοκρασίας, προκύπτει

$$V_{BH} - V_{TH} = \frac{4\pi b^2 \text{Area}(S^{d-1})}{2d (r_+^2 d + (d-2)b^2)} \left(b^2 r_+^{d-1} - r_+^{d+1} \right) + \dots \quad (6.34)$$

Συνεπώς στο όριο $R \rightarrow \infty$ βρίσκουμε

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} (I_{BH} - I_{TH}) = \frac{\text{Area}(S^{d-1}) \left(b^2 r_+^{d-1} - r_+^{d+1} \right)}{4G (r_+^2 d + (d-2)b^2)} \quad (6.35)$$

Η Ευκλείδεια δράση I είναι ανάλογη της ελεύθερης ενέργειας. Κυριαρχεί η γεωμετρία με τη μικρότερη δράση. Καθώς η θερμοκρασία αυξάνεται, μεγαλώνει η ακτίνα r_+ του ορίζοντα. Για μεγάλες θερμοκρασίες, $r_+ > b$, κυριαρχεί η μελανή οπή. Για μικρότερες θερμοκρασίες, κυριαρχεί ο θερμικός AdS. Συνεπώς έχουμε μια αλλαγή φάσης η οποία είναι πρώτης τάξης για $\beta \sim 1/b$, ανεξάρτητα από τον αριθμό των χωρικών διαστάσεων d .

Για μεγάλες θερμοκρασίες λοιπόν,

$$I_{BH} = I = - \frac{\text{Area}(S^{d-1}) r_+^{d-1}}{4G} \quad (6.36)$$

και το αντίστροφο της θερμοκρασίας $\beta = 4\pi b^2 / d r_+$.

Ας επαληθεύσουμε ότι η ποσότητα M είναι η μάζα της μελανής οπής. Η Ευκλείδεια δράση I είναι ίση με τον αρνητικό λογάριθμο της συνάρτησης επιμερισμού. Συνεπώς η ενέργεια είναι

$$E = \frac{\partial I}{\partial \beta} = \frac{\partial I}{\partial r_+} \frac{dr_+}{d\beta} = \frac{(d-1)\text{Area}(S^{d-1})r_+^d}{16\pi G b^2} \quad (6.37)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.18) και (6.8) βρίσκουμε

$$E = \frac{(d-1)\text{Area}(S^{d-1})w_d M}{16\pi G} = M \quad (6.38)$$

Η εντροπία της μελανής οπής είναι

$$S = \beta M - I = \frac{A}{4G} \quad (6.39)$$

όπου $A = \text{Area}(S^{d-1})r_+^{d-1}$ το εμβαδόν του ορίζοντα. Αυτή είναι η εντροπία Bekenstein–Hawking. Επιδέχεται μιας στατιστικής ερμηνείας, ως η εντροπία της σύμμορφης θεωρίας πεδίων σε μη μηδενική θερμοκρασία.

Στην περίπτωση του χωροχρόνου AdS_5 η εντροπία ως συνάρτηση της θερμοκρασίας ισούται με

$$S = \frac{A}{4G} = \frac{\text{Area}(S^3)r_+^3}{4G} = \frac{b^6\pi^3\text{Area}(S^3)T^3}{4G} \quad (6.40)$$

Χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία μεταξύ της βαρυτικής θεωρίας και της θεωρίας βαθμίδας $b^3/G = N^2$, βρίσκουμε

$$S = \frac{\pi^3 N^2 V T^3}{4} \quad (6.41)$$

Η εντροπία είναι ανάλογη του τετραγώνου του αριθμού χρωμάτων N^2 , υποδηλώνοντας μια αλλαγή φάσης περιορισμού στις υψηλές θερμοκρασίες στην θεωρία βαθμίδας [16]. Σε χαμηλές θερμοκρασίες η εντροπία δεν εξαρτάται από τον αριθμό N . Παρόλο που ο χώρος στον οποίο ζει η θεωρία είναι συμπαγής, μια αλλαγή φάσης είναι επιτρεπτή στο όριο $N \rightarrow \infty$. Συγκρίνοντας με τη διαταραχτική έκφραση για μικρές σταθερές σύζευξης η εντροπία είναι μικρότερη κατά έναν παράγοντα ίσο με $3/4$ [2].

Επίλογος

Συνοψίζοντας, είναι ολοφάνερο ότι η αντιστοιχία Ads/CFT είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό ποσοτήτων σε θεωρίες κβαντικής βαρύτητας μέσω της αντιστοίχισής τους με ποσότητες από σύμμορφες υπερσυμμετρικές θεωρίες βαθμίδας και αντίστροφα.

Μελλοντική προέκταση της παρούσας διπλωματικής εργασίας μπορεί να είναι ο υπολογισμός ποσοτήτων, οι οποίες μπορούν ευκολότερα να υπολογιστούν στο περίβλημα ενός χωροχρόνου Ads, όπου ζει η σύμμορφη θεωρία πεδίου, ούτως ώστε να αντιστοιχηθεί με μια μετρήσιμη ποσότητα στην κβαντική θεωρία βαρύτητας (της οποίας ο υπολογισμός να είναι δυσκολότερος).

Παράρτημα Α΄

Εισαγωγή στη Θεωρία Πεδίων

Α΄.1 Κλασικά πεδία

Πεδία μπορούν να θεωρηθούν όλες οι χωροχρονοεξαρτημένες, στην πιο γενική τουλάχιστον περίπτωση, συναρτήσεις[20]. Υπάρχουν τεσσάρων ειδών πεδία. Εάν η εν λόγω συνάρτηση είναι βαθμωτό μέγεθος, τότε το πεδίο καλείται βαθμωτό πεδίο. Κατ' αναλογία, ένα πεδίο μπορεί να είναι διανυσματικό, σπινωριακό ή ταυυστικό. Ας εστιάσουμε την προσοχή μας στα βαθμωτά πεδία. Έστω πεδίο

$$\phi(x) \tag{A'.1}$$

όπου x το ανταλλοίωτο τετραδιάνυσμα του χρόνου και του χώρου.

Θέλουμε, χρησιμοποιώντας την αρχή της ελάχιστης δράσης, να εξαγάγουμε τις εξισώσεις Euler-Langrange για το βαθμωτό πεδίο. Πρώτα, όμως εισάγουμε την έννοια της Λαγκρανζιανής πυκνότητας

$$L[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^3 \vec{x} \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] \tag{A'.2}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τους συμβολισμούς L και \mathcal{L} για το συναρτησιακό της Λαγκρανζιανής και της Λαγκρανζιανής πυκνότητας αντίστοιχα. Για σκοπούς συντομίας θα γίνεται λόγος για Λαγκρανζιανή έναντι του όρου Λαγκρανζιανή πυκνότητα. Στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν, η Λαγκρανζιανή εξαρτάται μόνο από το πεδίο και την πρώτη συναλλοίωτή του παράγωγο. Έχουμε επιλέξει τέτοιες συνθήκες, ούτως ώστε να εξαγάγουμε μια δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση ως προς χρόνο, όπως όλες σχεδόν τις γνωστές εξισώσεις χρονοεξέλιξης που υπάρχουν στη φύση. Η εξίσωση αυτή θα περιγράψει τη χρονοεξέλιξη των πεδίων. Η δράση της Λαγκρανζιανής, τότε θα δίνεται ως το χωροχρονικό της ολοκλήρωμα

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^4 x \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] \tag{A'.3}$$

Ελαχιστοποιώντας την ανωτέρω δράση παίρνουμε τις εξισώσεις Euler-Langrange για ένα κλασικό βαθμωτό πεδίο:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0 \tag{A'.4}$$

Άλλα χρήσιμα μεγέθη στη μελέτη των πεδίων είναι η πυκνότητα ορμής και η πυκνότητα ενέργειας του πεδίου, τα οποία ορίζονται, αντίστοιχα, ως εξής:

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} \quad (\text{A'.5})$$

$$\mathcal{H} = \Pi(x) \partial_t \phi - \mathcal{L} \quad (\text{A'.6})$$

όπου το σύμβολο της μερικής παραγώγου με δείκτη t υποδηλώνει τη χρονική παράγωγο. Η εξίσωση (A'.6) γενικεύεται στην περίπτωση περισσότερων πεδίων, αν ο πρώτος όρος αντικατασταθεί με άθροισμα τέτοιων όρων για κάθε πεδίο.

A'.1.1 Το Παράδειγμα του Πεδίου Klein-Gordon

Ένα πεδίο με την εξής Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (\text{A'.7})$$

υπακούει στην ακόλουθη εξίσωση κίνησης, σύμφωνα με την εξίσωση (A'.4)

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0 \quad (\text{A'.8})$$

Η εξίσωση κίνησης (A'.8), στην οποία υπακούει το πεδίο ϕ , ονομάζεται εξίσωση Klein-Gordon. Ακολουθώντας, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (A'.5) και (A'.6) είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την ορμή και την πυκνότητα ενέργειας του πεδίου αντίστοιχα

$$\Pi(x) = \partial_t \phi \quad (\text{A'.9})$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \quad (\text{A'.10})$$

όπου ο συμβολισμός ∇ παριστάνει τον τελεστή ανάδελτα. Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα ενέργειας αποτελείται από τρεις όρους. Μπορεί κανείς να σκεφτεί τον πρώτο όρο σαν την ορμή του πεδίου, ενώ το δεύτερο και τρίτο όρο σαν την ενέργεια που χρειάζεται για να υπάρξει το πεδίο[21].

Η λύση για την εξίσωση κίνησης δίνεται από

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left[A_{\vec{p}} e^{-i\omega_{\vec{p}} t} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} + B_{\vec{p}} e^{i\omega_{\vec{p}} t} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \right] \quad (\text{A'.11})$$

Ορίζοντας συναρτήσεις αναβίβασης ($\alpha_{\vec{p}}^*$) και καταβίβασης ($\alpha_{\vec{p}}$), η λύση (A'.11) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \left[\frac{\alpha_{\vec{p}}}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} e^{-ix_\mu p^\mu} + \frac{\alpha_{\vec{p}}^*}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} e^{ix_\mu p^\mu} \right] \quad (\text{A'.12})$$

A'.2 Κβαντικά πεδία

Όσον αφορά στα κβαντικά πεδία, ο φορμαλισμός είναι ο ίδιος. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην κβαντική θεωρία πεδίων, τα πεδία προωθούνται σε τελεστές (όπως και η πυκνότητα της ορμής, αλλά και η Χαμιλτονιανή) και πρέπει να υπακούουν στις εξής σχέσεις μετάθεσης

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y})] &= 0 \\ [\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] &= 0 \\ [\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y})] &= i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (A'.13)$$

Προωθώντας τα πεδία σε τελεστές, μπορεί ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις αναβίβασης και καταβίβασης προωθούνται και αυτές σε τελεστές και υπακούουν τις εξής θέση μετάθεσης

$$\begin{aligned} [\hat{\alpha}_{\vec{p}}, \hat{\alpha}_{\vec{p}'}] &= 0 \\ [\hat{\alpha}_{\vec{p}}, \hat{\alpha}_{\vec{p}'}^\dagger] &= (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \end{aligned} \quad (A'.14)$$

A'.2.1 Το Παράδειγμα του Πεδίου Klein-Gordon

Στην περίπτωση του πεδίου Klein-Gordon, η Χαμιλτονιανή πυκνότητα (A'.10) μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης και να ολοκληρωθεί, ούτως ώστε να δώσει την ολική ενέργεια του συστήματος

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \omega_{\vec{p}} \hat{\alpha}_{\vec{p}}^\dagger \hat{\alpha}_{\vec{p}} + \frac{\omega_{\vec{p}}}{2} [\hat{\alpha}_{\vec{p}}, \hat{\alpha}_{\vec{p}}^\dagger] \right\} \quad (A'.15)$$

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (A'.15), η ενέργεια του συστήματος απειρίζεται εξ' αιτίας του δευτέρου όρου της εξίσωσης. Επειδή στις πλείστες περιπτώσεις μας ενδιαφέρει η διαφορά ενέργειας του συστήματος και όχι η ενέργεια αυτή καθαυτή, μπορούμε να ορίσουμε νέα Χαμιλτονιανή, από την οποία να αφαιρούμε τον άπειρο όρο. Έστω E_0 ο άπειρος όρος. Τότε, η Χαμιλτονιανή δίνεται από

$$H \rightarrow H - E_0 = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \hat{\alpha}_{\vec{p}}^\dagger \hat{\alpha}_{\vec{p}} \quad (A'.16)$$

Με αυτό τον τρόπο, η Χαμηλότερη στάθμη ενέργειας είναι η μηδενική ενέργεια και όλες οι τιμές της ενέργειας του συστήματος είναι πεπερασμένες.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε ιδιοκαταστάσεις της νέας Χαμιλτονιανής. Η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας πρέπει να καταστρέφεται από τον τελεστή καταστροφής. Πρέπει, δηλαδή, να ισχύει

$$\hat{\alpha}_{\vec{p}} |0\rangle = 0 \quad (A'.17)$$

για κάθε τιμή της ορμής του πεδίου. Επίσης, μπορούν να οριστούν μονοσωματιδιακές καταστάσεις εαν δράσει ο τελεστής αναβίβασης πάνω στην κατάσταση ελάχιστης ενέργειας (ή σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση)

$$\hat{\alpha}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = |1\rangle \quad (A'.18)$$

όπου με $|1\rangle$ συμβολίζεται η κατάσταση που θα έχουμε αν διεγείρουμε την κατάσταση ελάχιστης ενέργειας. Για να βρεθεί η ενέργεια της κατάστασης αυτής, αρκεί να δράσουμε με τον τελεστή της Χαμιλτονιανής

$$\hat{H}(\hat{\alpha}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle) = \omega_{\vec{p}} (\hat{\alpha}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle) \quad (\text{A'.19})$$

όπου $\omega_{\vec{p}}$ η ιδιοτιμή της ενέργειας της πρώτης διεγερμένης κατάστασης. Η κατάσταση (A'.18) είναι μια κατάσταση, όπου το κβάντο ενέργειας θα έχει ενέργεια $\omega_{\vec{p}}$ και ορμή \vec{p} με πιθανότητα 100%. Υπάρχουν, ωστόσο, καταστάσεις οι οποίες μπορεί να έχουν δύο πιθανές ενέργειες, μιας και το πεδίο είναι κβαντωμένο. Τέτοιες καταστάσεις είναι

$$(\hat{\alpha}_{\vec{p}}^\dagger + \hat{\alpha}_{\vec{p}'}^\dagger) |0\rangle \quad (\text{A'.20})$$

Επίσης, κατ' αναλογία με τις μονοσωματιδιακές καταστάσεις, υπάρχουν και οι πολυσωματιδιακές, οι οποίες έχουν την εξής μορφή

$$(\hat{\alpha}_{\vec{p}}^\dagger)^n (\hat{\alpha}_{\vec{p}'}^\dagger)^m \dots (\hat{\alpha}_{\vec{p}''}^\dagger)^w |0\rangle \quad (\text{A'.21})$$

Δηλαδή, θα δημιουργηθούν n κβάντα ενέργειας με ορμή \vec{p} (και ενέργεια $\omega_{\vec{p}}$), m κβάντα ενέργειας με ορμή \vec{p}' (και ενέργεια $\omega_{\vec{p}'}$), κάποια άλλα σωματίδια και w σωματίδια με ορμή \vec{p}'' (και ενέργεια $\omega_{\vec{p}''}$).

Παράρτημα Β΄

Λύση Schwarzschild

Η δυσκολία επίλυσης των εξισώσεών του, ώθησε τον Einstein στη χρήση προσεγγιστικών μεθόδων για τον υπολογισμό μερικών προβλέψεων που αφορούσαν στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Ωστόσο, το 1916 ο Γερμανός φυσικός και αστρονόμος Karl Schwarzschild βρήκε την πρώτη ακριβή λύση για τις εξισώσεις Einstein. Η μετρική, που αποτελεί λύση στις εξισώσεις αυτές, ονομάστηκε μετρική Schwarzschild προς τιμήν του ομώνυμου φυσικού. Στο παρών παράρτημα, θα αναλυθεί το σκεπτικό για την εύρεση της μετρικής Schwarzschild μέσω της επίλυσης των πεδιακών εξισώσεων Einstein.

Οι εξισώσεις Einstein στις φυσικές μονάδες μέτρησης έχουν τη μορφή

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (\text{B'.1})$$

όπου $R_{\mu\nu}$ είναι ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για τον τανυστή Ricci, R για τη βαθμωτή καμπυλότητα Ricci και με $T_{\mu\nu}$ συμβολίζεται ο τανυστής ενέργειας και ορμής του υπό μελέτη χωροχρόνου. Με $g_{\mu\nu}$ συμβολίζεται η μετρική, η οποία αποτελεί λύση των εξισώσεων.

Εφόσον η ζητούμενη λύση πρέπει να περιγράφει τη γεωμετρία ενός κενού χώρου, ο τανυστής ενέργειας και ορμής πρέπει να έχει όλες τις συνιστώσες του μηδενικές. Άλλωστε κενός χώρος σημαίνει χώρος χωρίς μάζα και χωρίς ενέργεια. Επίσης, είναι γνωστό ότι η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci μηδενίζεται στον κενό χώρο. Οι εξισώσεις Einstein παίρνουν τη μορφή

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B'.2})$$

Δεν είναι προφανές, ωστόσο, ότι η βαθμωτή καμπυλότητα ενός κενού χωροχρόνου πρέπει να μηδενίζεται, ούτως ώστε να ισχύουν οι εξισώσεις (A'.2). Παίρνοντας, όμως, το ίχνος των εξισώσεων Einstein, όταν όλες οι συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής τεθούν ίσες με μηδέν, προκύπτει ότι

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (\text{B'.3})$$

Η εξίσωση (A'.3) μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$(1 - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu})R = 0 \quad (\text{B'.4})$$

Από την προηγούμενη σχέση φαίνεται ότι η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci μηδενίζεται, εφόσον το γινόμενο $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$ είναι αριθμός και συγκεκριμένα ο αριθμός 4, εφόσον η μετρική πρέπει να αναπαράγει τη μετρική Minkowski όταν το βαρυτικό πεδίο είναι ασθενές.

Οι λύσεις των εξισώσεων (Α'.2) είναι οι συνιστώσες της μετρικής $g_{\mu\nu}$. Το απειροστό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων που λαμβάνουν χώρα στο χωρόχρονο που περιγράφεται από τη μετρική δίνεται από

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B'.5})$$

Απαιτώντας σφαιρική συμμετρία και η λύση να χαρακτηρίζεται από στατικότητα, το απειροστό διάστημα (Α'.3) παίρνει τη μορφή[3]

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B'.6})$$

όπου t η χρονική συντεταγμένη, r η ακτινική και $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, όπου θ και ϕ οι γωνιακές. Το απειροστό διάστημα έχει εκφραστεί στις σφαιρικές συντεταγμένες για να είναι πιο εύκολο να επιβληθεί πάνω σε αυτό σφαιρική συμμετρία. Επίσης, εφόσον η μετρική είναι στατική, θα πρέπει και το απειροστό διάστημα να είναι συμμετρικό ως προς την αναστροφή του χρόνου. Αυτός είναι και ο λόγος που το απειροστό διάστημα δεν περιέχει γινόμενα της μορφής $\mathcal{O}(dt dr)$, $\mathcal{O}(dt d\theta)$ και $\mathcal{O}(dt d\phi)$. Αν περιείχε τέτοια γινόμενα, τότε η ταυτότητα της μετρικής θα άλλαζε κάτω από αναστροφή χρόνου. Επίσης, λόγω στατικότητας και πάλι, οι συναρτήσεις α , β και γ έχουν επιλεγεί να είναι ανεξάρτητες της χρονικής συνιστώσας t . Γινόμενα της μορφής $\mathcal{O}(dr d\theta)$, $\mathcal{O}(dr d\phi)$ και $\mathcal{O}(d\theta d\phi)$ δεν υπάρχουν λόγω σφαιρικής συμμετρίας. Ο λόγος είναι παρόμοιος με την περίπτωση της αναστροφής χρόνου. Έστω ότι ένας μετασχηματισμός της μορφής $r \rightarrow -r$ πρέπει να λάβει χώραν. Τότε, όροι της μορφής $\mathcal{O}(dr d\theta)$ και $\mathcal{O}(dr d\phi)$ θα αλλάζουν την ταυτότητα της μετρικής. Το ίδιο σκεπτικό ισχύει και για τις υπόλοιπες χωρικές συνιστώσες.

Στη συνέχεια, μπορεί να επαναοριστεί η ακτινική συντεταγμένη με τρόπο τέτοιο, ούτως ώστε ο συντελεστής του γωνιακού διαφορικού $d\Omega$ να είναι μονάδα

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r \quad (\text{B'.7})$$

Τότε, η μετρική παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -e^{2\alpha(\bar{r})} dt^2 + \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(\bar{r}) - 2\gamma(\bar{r})} dr^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (\text{B'.8})$$

Κάνοντας μερικές αλλαγές στις ονομασίες των μεταβλητών, το απειροστό διάστημα (Α'.6) μπορεί να έρθει στη μορφή

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B'.9})$$

Στη συνέχεια, πρέπει να υπολογιστούν οι συνιστώσες του τανυστή Ricci και να αντικατασταθούν στις εξισώσεις Einstein, όπως αυτές ισχύουν στον κενό χώρο. Για να γίνει αυτό όμως, πρέπει πρώτα να υπολογιστούν τα σύμβολα Christoffel, τα οποία δίνονται από τη σχέση

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (\text{B'.10})$$

Τα μόνα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι

$$\begin{aligned}
\Gamma^t_{tr} &= \partial_r \alpha & \Gamma^r_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha & \Gamma^r_{rr} &= \partial_r \beta \\
\Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r} & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r e^{-2\beta} & \Gamma^\phi_{r\phi} &= \frac{1}{r} \\
\Gamma^r_{\phi\phi} &= -r e^{-2\beta} & \Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}
\end{aligned} \tag{B'.11}$$

Υπολογίζοντας αυτά, μετά είναι εφικτό να υπολογιστούν και οι συνιστώσες του ταυυστή Riemann. Σύμφωνα με την εξίσωση (1.8), οι μη μηδενικές συνιστώσες του ταυυστή είναι

$$\begin{aligned}
R^t_{rtr} &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 \\
R^t_{\theta\theta} &= -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha \\
R^t_{\phi\phi} &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \\
R^r_{\theta r\theta} &= r e^{-2\beta} \partial_r \beta \\
R^r_{\phi r\phi} &= r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \\
R^\theta_{\phi\theta\phi} &= (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{B'.12}$$

Επίσης, οποιεσδήποτε συνιστώσες συσχετίζονται με τις συνιστώσες (A'.10) μέσω κάποιας συμμετρίας εναλλαγής δεικτών έχουν παραληφθεί. Τέλος, μέσω συστολής, προκύπτουν οι συνιστώσες του ταυυστή Ricci

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\
R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} \left[r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1 \right] + 1 \\
R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}
\end{aligned} \tag{B'.13}$$

Το πρόβλημά τώρα έχει αναχθεί σε ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων, με δύο αγνώστους: Τη συνάρτηση $\alpha(r)$ και τη συνάρτηση $\beta(r)$. Εφόσον οι συνιστώσες του ταυυστή Ricci R_{tt} και R_{rr} μηδενίζονται η μία ανεξάρτητα από την άλλη, τότε και ο γραμμικός τους συνδυασμός μηδενίζεται. Είναι βολικό να μηδενιστεί ο γραμμικός τους συνδυασμός για λόγους που θα φανούν σε λίγο

$$e^{2(\alpha-\beta)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} \partial_r (\alpha + \beta) = 0 \tag{B'.14}$$

Τότε προκύπτει

$$\alpha + \beta = c \tag{B'.15}$$

όπου c σταθερά ολοκλήρωσης. Η σταθερά c μπορεί να τεθεί μηδέν εφαρμόζοντας τον εξής μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$t \rightarrow e^{-c} t \tag{B'.16}$$

Τότε το απειροστό διάστημα παίρνει τη μορφή

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B'.17})$$

όπου $\alpha' = \alpha + c$. Εύκολα, μετά, μπορεί κανείς να δει ότι η εξίσωση (A'.13) μετατρέπεται σε

$$\alpha' + \beta = c \Rightarrow \alpha = -\beta \quad (\text{B'.18})$$

Κατόπιν, θεωρείται η εξίσωση της γωνιακής θ -συνιστώσας του ταυυστή Ricci

$$R_{\theta\theta} = 0 \quad (\text{B'.19})$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (A'.16) στην εξίσωση (A'.17), προκύπτει ότι

$$e^{2\alpha}(2r\partial_r\alpha + 1) = 1 \quad (\text{B'.20})$$

Η εξίσωση (A'.18) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$d(r e^{2\alpha}) = dr \quad (\text{B'.21})$$

Ολοκληρώνοντας προκύπτει ότι

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{c}{r} \quad (\text{B'.22})$$

όπου c μια νέα σταθερά ολοκλήρωσης. Αν και οι συναρτήσεις α και β έχουν καθοριστεί, πρέπει για να καθορισθεί εντελώς η λύση Schwarzschild να υπολογιστεί και η σταθερά ολοκλήρωσης.

Για να βρεθεί η σταθερά ολοκλήρωσης, πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι η μετρική που περιγράφει ένα στατικό και ασθενές βαρυτικό πεδίο έχει χρονική συνιστώσα

$$g_{tt} = -(1 + 2\Phi) \quad (\text{B'.23})$$

όπου Φ το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό. Μακριά από τη μελανή οπή, το βαρυτικό πεδίο εξασθενεί και η μετρική Schwarzschild μπορεί εύκολα να προσεγγιστεί με αυτή του στατικού και ασθενούς βαρυτικού πεδίου. Συγκρίνοντας τη χρονική συνιστώσα Schwarzschild με αυτήν της εξίσωσης (A'.21), προκύπτει ότι

$$c = -2GM \quad (\text{B'.24})$$

Εν τέλει, κάνοντας τις απαραίτητες αντικαταστάσεις, η μετρική Schwarzschild μπορεί να πάρει τη γνωστή της μορφή, όπως δίνεται και στο κεφάλαιο 1:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B'.25})$$

Παράρτημα Γ'

Συναρτησιακά Ολοκληρώματα Feynman

Τα συναρτησιακά ολοκληρώματα είναι ένα σημαντικό εργαλείο αναπαράστασης κβαντικών θεωριών[9]. Ο σκοπός τους είναι να προσδιορίσουν το πλάτος πιθανότητας για τη μετάβαση ενός σωματιδίου σε μια τελική θέση, ξεκινώντας από μια άλλη θέση -την αρχική- και διανύοντας αυτή τη διαδρομή σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.

Αρχικά, θα γίνει μια εισαγωγή στα συναρτησιακά και θα δοθεί ένα υπόβαθρο στην κβαντική μηχανική. Έπειτα, θα αναπτυχθεί ο φορμαλισμός των συναρτησιακών ολοκληρωμάτων Feynman για μονοδιάστατα μποζονικά πεδία.

Γ'.1 Συναρτησιακά και Υπόβαθρο Κβαντικής Μηχανικής

Στα μαθηματικά, ένα συναρτησιακό είναι μια συνάρτηση, της οποίας το πεδίο ορισμού αποτελείται από άλλες συναρτήσεις. Έχει, δηλαδή, τη γενική μορφή[22]

$$F[f] = \int dx F(f(x)) \quad (\Gamma'.1)$$

Ένα παράδειγμα συναρτησιακού είναι η δράση ενός σωματιδίου που κινείται σε κάποιο μονοδιάστατο χώρο. Ως γνωστόν, η θέση του σωματιδίου είναι συνάρτηση του χρόνου. Γι αυτό το λόγο, η δράση του είναι συναρτησιακό και έχει τη μορφή

$$S[x] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(x, \dot{x}) \quad (\Gamma'.2)$$

όπου L η Λαγκρανζιανή του σωματιδίου, x και \dot{x} η θέση και η ταχύτητά του σωματιδίου αντίστοιχα.

Όσον αφορά στην κβαντομηχανική περιγραφή του σωματιδίου, που κινείται σε μια γραμμή, είναι χρήσιμο να ορισθεί ο τελεστής γενικευμένης θέσης \hat{q} , αλλά και ο τελεστής γενικευμένης ορμής \hat{p} για το εν λόγω σωματίδιο. Οι τελεστές αυτοί υπακούν στη σχέση μετάθεσης

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i \quad (\Gamma'.3)$$

Η Χαμιλτονιανή του προβλήματος $\hat{H}(\hat{p}, \hat{q})$, είναι συνάρτηση των δύο τελεστών. Επίσης, μπορεί να οριστεί ο τελεστής χρονικής εξέλιξης, ως εξής

$$\hat{A}_S = e^{-i\Delta t \hat{H}} \quad (\Gamma'.4)$$

όπου $\Delta t = t_f - t_i$ το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ούτως ώστε το σωματίδιο να βρεθεί στην τελική του θέση q_f , ξεκινώντας από την αρχική q_i . Ο δείκτης S υποδεικνύει ότι ο τελεστής ανήκει στην εικόνα Schrödinger. Ο ρόλος ενός τέτοιου τελεστή είναι να εξελίξει χρονικά μια κατάσταση. Για παράδειγμα, η τελική θέση του σωματιδίου στην εικόνα Schrödinger, μπορεί να γραφεί ως η χρονοεξελιγμένη αρχική κατάσταση με τη χρήση αυτού του τελεστή. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό Dirac, η χρονική εξέλιξη περιγράφεται από

$$|q_f\rangle = e^{-i\Delta t \hat{H}} |q_i\rangle \quad (\Gamma'.5)$$

Το πλάτος πιθανότητας για να βρεθεί το σωματίδιο από την αρχική στην τελική κατάσταση, σε χρόνο Δt , δίνεται από τον όρο

$$\langle q_f | e^{-i\Delta t \hat{H}} | q_i \rangle \quad (\Gamma'.6)$$

Αλλάζοντας εικόνα, μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας, προκύπτει ο τελεστής χρονικής εξέλιξης στην εικόνα Heisenberg

$$\hat{A}_H = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t) \quad (\Gamma'.7)$$

όπου $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t}$. Ο τελεστής \hat{U} είναι μοναδιακός τελεστής. Η πιο πάνω έκφραση ισχύει στην περίπτωση, κατά την οποία η Χαμιλτονιανή δεν είναι ευθέως ανάλογη του χρόνου. Κατ' αναλογία, ο τελεστής θέσης στην εικόνα Heisenberg δίνεται από

$$\hat{q}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{q} e^{-i\hat{H}t} \quad (\Gamma'.8)$$

Μπορεί κανείς να ορίσει τα ιδιοδιανύσματα του πιο πάνω τελεστή. Πρόκειται για καταστάσεις που περιέχουν πληροφορία για τη θέση του σωματιδίου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t . Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιείται για αυτά τα ιδιοδιανύσματα είναι $|q.t\rangle$

$$\hat{q}(t) |q.t\rangle = q |q.t\rangle \quad (\Gamma'.9)$$

Επιλέγοντας τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή θέσης στην εικόνα Heisenberg να αποτελούν ορθοκανονική βάση, τότε ισχύει η ιδιότητα της πληρότητας

$$\int dq |q.t\rangle \langle q.t| = \mathbb{1} \quad (\Gamma'.10)$$

Επίσης, μπορεί να δειχθεί ότι τα ιδιοδιανύσματα της εικόνας Heisenberg σχετίζονται με αυτά της εικόνας Schrödinger ως εξής

$$|q.t\rangle = \hat{U}(t) |q\rangle \quad (\Gamma'.11)$$

Μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$, τόσο τα ιδιοδιανύσματα όσο και ο τελεστής θέσης της εικόνας Heisenberg ανάγονται, αντίστοιχα, στα ιδιοδιανύσματα και τον τελεστή θέσης της εικόνας Schrödinger.

Γ'.2 Πλάτη Πιθανότητας και Φορμαλισμός Συναρτησιακών Ολοκληρωμάτων

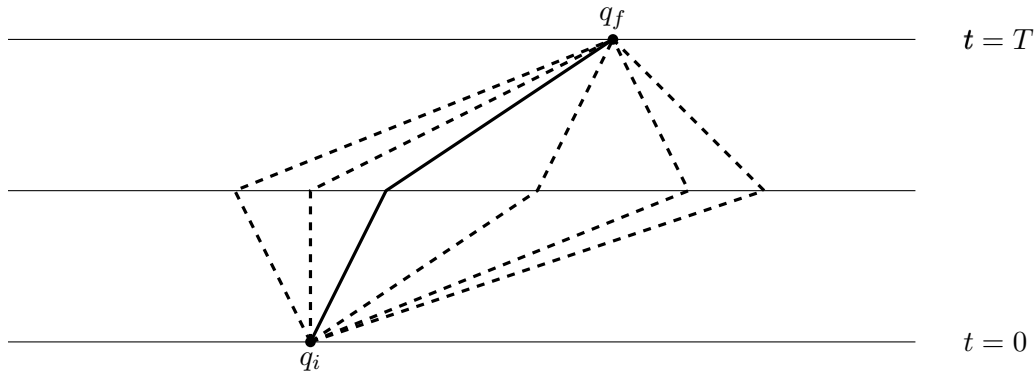
Στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, υπολογίστηκε το πλάτος πιθανότητας ένα σωματίδιο να βρεθεί στη θέση q_f , ξεκινώντας από την q_i , κατά τη διάρκεια ενός χρονικού διαστήματος Δt . Έστω ότι το σωματίδιο ξεκινά την πορεία το τη χρονική στιγμή $t = 0$ και η πορεία διαρκεί ένα χρονικό διάστημα ίσο με T . Τότε, το πλάτος πιθανότητας (Γ'.6) μπορεί να γραφεί ως

$$\langle q_f | e^{-i\hat{H}T} | q_i \rangle = \langle q_f, T | q_i, 0 \rangle \quad (\Gamma'.12)$$

Στο Σχήμα Γ'.1 απεικονίζονται διάφορες πιθανές τροχιές ενός τέτοιου σωματιδίου. Χωρίζοντας το χρονικό διάστημα σε δύο μέρη, μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι υπάρχουν άπειρες διαδρομές με αρχή το σημείο q_i και τέλος το q_f .

Στην κλασσική μηχανική, το σωματίδιο, υπακούοντας την αρχή της ελάχιστης δράσης, θα ακολουθήσει το κλασσικό μονοπάτι¹. Έστω ότι το κλασσικό μονοπάτι είναι αυτό που απεικονίζεται με τη συνεχόμενη γραμμή στο Σχήμα Γ'.1.

Εντούτοις, στην κβαντική μηχανική υπάρχουν πολλά μονοπάτια, τα οποία το σωματίδιο μπορεί να ακολουθήσει, ούτως ώστε να βρεθεί στον τελικό του προορισμό. Στο καθένα από αυτά τα μονοπάτια αντιστοιχεί μια πιθανότητα -άρα και ένα πλάτος πιθανότητας- το σωματίδιο να επιλέξει να κινηθεί μέσω αυτών. Μερικά πιθανά μονοπάτια απεικονίζονται με διακεκομμένες γραμμές στο Σχήμα Γ'.1. Μπορούν να γίνουν άπειροι συνδυασμοί μονοπατιών με σταθερό τόσο το αρχικό όσο και το τελικό σημείο.



Σχήμα Γ'.1: Μερικές από τις πιθανές διαδρομές, που ακολουθεί ένα σωματίδιο για να φτάσει από την αρχική του θέση στην τελική μέσα σε ένα χρονικό διάστημα T .

Παρεμβάλλοντας τη σχέση πληρότητας (Γ'.10) στο πλάτος πιθανότητας (Γ'.12), προκύπτει ότι

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int dq \langle q_f, T | q, t \rangle \langle q, t | q_i, 0 \rangle \quad (\Gamma'.13)$$

Στην προηγούμενη σχέση το $\langle q, t | q_i, 0 \rangle$ αντικατοπτρίζει το πλάτος πιθανότητας το σωματίδιο να βρεθεί από τη θέση q_i στην q σε χρονικό διάστημα t , ενώ το $\langle q_f, T | q, t \rangle$

¹ Το κλασσικό μονοπάτι είναι το μονοπάτι, για το οποίο η δράση του σωματιδίου ελαχιστοποιείται.

αντικατοπτρίζει το αντίστοιχο πλάτος πιθανότητας να βρεθεί από την q στην q_f σε χρονικό διάστημα $T - t$. Επομένως, σύμφωνα με την εξίσωση (Γ'.13), το πλάτος πιθανότητας (Γ'.12) μπορεί να υπολογιστεί εάν είναι γνωστά τα επιμέρους πλάτη, των οποίων το μέτρο στο τετράγωνο δίνει την πυκνότητα πιθανότητας ένα σωματίδιο να εκτελέσει ένα μέρος κάποιας από τις πιθανές διαδρομές. Το άθροισμα είναι ένα άπειρο άθροισμα μιας και σε αυτό συνεισφέρουν όλες τις πιθανές διαδρομές.

Ακολουθώντας, η διαδρομή μπορεί να διαιρεθεί σε περισσότερες από δύο, κάνοντας τις επί μέρους διαδρομές ακόμα πιο μικρές. Τότε, παρεμβάλλοντας ακόμα μία σχέση πληρότητας, το πλάτος πιθανότητας (Γ'.12) παίρνει τη μορφή

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int dq_1 \int dq_2 \langle q_f, T | q_2, t_2 \rangle \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_i, 0 \rangle \quad (\Gamma'.14)$$

Με τον ίδιο τρόπο, χωρίζοντας το χρονικό διάστημα σε $N + 1$ μικρότερα χρονικά διαστήματα, παρεμβάλλουμε N φορές τη σχέση πληρότητας και η εξίσωση (Γ'.12) παίρνει τη μορφή

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int dq_1 \dots \int dq_N \prod_{m=0}^N \langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle \quad (\Gamma'.15)$$

Ας εξετάσουμε ένα τυχαίο επιμέρους πλάτος μετάβασης. Έστω $\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle$ το πλάτος αυτό. Τότε ισχύει

$$\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle = \langle q_{m+1} | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q_m \rangle \quad (\Gamma'.16)$$

όπου $\epsilon = T/N$ τα χρονικά διαστήματα στα οποία είναι χωρισμένο το διάστημα T . Η έκφραση (Γ'.16) ισχύει για κάθε τιμή του m διότι τα χρονικά διαστήματα, στα οποία χωρίζεται το T είναι ίσα μεταξύ τους. Παρεμβάλλοντας μια σχέση πληρότητας των ιδιοδιανυσμάτων της ορμής, τότε το πλάτος μετάβασης (Γ'.16) παίρνει τη μορφή

$$\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle = \int dp_m \langle q_{m+1} | p_m \rangle \langle p_m | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q_m \rangle \quad (\Gamma'.17)$$

Η Χαμιλτονιανή είναι συνάρτηση των τελεστών \hat{q} και \hat{p} . Επομένως, μπορεί να γραφτεί με τρόπο τέτοιο ώστε ο τελεστής \hat{q} να είναι στα δεξιά και ο αντίστοιχος \hat{p} στα αριστερά, ούτως ώστε να δράσουν στα ιδιοδιανύσματα της θέσης και της ορμής αντίστοιχα. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός ελεύθερου σωματιδίου η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το σωματίδιο είναι ανάλογη της ορμής του σωματιδίου και μόνο. Ωστόσο πρόκειται για μια μεμονωμένη περίπτωση. Αφήνοντας τη Χαμιλτονιανή να δράσει πάνω στα ιδιοδιανύσματα, παίρνουμε

$$\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle = \int dp_m \langle q_{m+1} | p_m \rangle e^{-i\epsilon H} \langle p_m | q_m \rangle \quad (\Gamma'.18)$$

όπου H η ιδιοτιμή της Χαμιλτονιανής, η ενέργεια, δηλαδή, του συστήματος. Χρησιμοποιώντας τη σχέση για το εσωτερικό γινόμενο των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή της ορμής με τις αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις του τελεστή θέσης

$$\langle q_m | p_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iq_m p_m} \quad (\Gamma'.19)$$

μπορούμε να δείξουμε ότι το πλάτος πιθανότητας (Γ'.16) μπορεί να γραφτεί και ως

$$\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle = \int \frac{dp_m}{2\pi} e^{-i\epsilon [H - (\frac{q_{m+1} - q_m}{\epsilon}) p_m]} \quad (\Gamma'.20)$$

Αντικαθιστώντας το πλάτος μετάβασης (Γ'.20) στην εξίσωση (Γ'.15), τότε οι εκθέτες του εκθετικού αθροίζονται και παίρνουμε

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int dq_1 \dots \int dq_N \int dp_0 \dots \int dp_N e^{-i\epsilon \sum_{m=0}^N [H - (\frac{q_{m+1} - q_m}{\epsilon}) p_m]} \quad (\Gamma'.21)$$

Παίρνοντας το όριο στο οποίο $N \rightarrow \infty$, τότε το άθροισμα μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα και έχουμε

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int dq_1 \dots \int dq_N \int dp_0 \dots \int dp_N e^{-i \int_0^T dt (H - \dot{q}p)} \quad (\Gamma'.22)$$

όπου $\dot{q} = \frac{q_{m+1} - q_m}{\epsilon}$ η χρονική παράγωγος της γενικευμένης θέσης στο όριο όπου $\epsilon \rightarrow 0$. Το όρισμα του ολοκληρώματος που βρίσκεται στον εκθέτη είναι ισοδύναμο με τη Λαγκρανζιανή του προβλήματος και επομένως, το πλάτος πιθανότητας μπορεί να γραφτεί και ως

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int [dq]_{q(0)}^{q(T)} e^{iS} \quad (\Gamma'.23)$$

όπου $S = \int_0^T L dt$ η δράση που περιγράφει το σύστημα. Το πλάτος πιθανότητας μπορεί να γραφτεί και συναρτήσει της ευκλειδείου δράσης του προβλήματος, ως εξής

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int [dq]_P e^{-SE} \quad (\Gamma'.24)$$

όπου $[dq]_P$ είναι όλες οι περιοδικές διαδρομές.

Βιβλιογραφία

- [1] Montgomery C., Orchiston W. and Whittingham I., “Michell, Laplace and the origin of the Black Hole Concept,” *Journal of Astronomical History and Heritage*, vol. 12, no. 2, pp. 90–96, 2009.
- [2] Susskind L. and Lindesay J., *An introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe*. World Scientific Publishing Company, 2005.
- [3] Sean Carroll, *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity*, ch. 5, pp. 230–236. Benjamin Cummings, 2003.
- [4] A. Strominger, “Les Houches lectures on black holes,” in *NATO Advanced Study Institute: Les Houches Summer School, Session 62: Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory Les Houches, France, August 2-September 9, 1994*, 1994.
- [5] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, ch. 17, pp. 234–238. Clarendon Press, 1992.
- [6] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*, ch. 10, pp. 263–264. Series in physics, Cambridge University Press, 1985.
- [7] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, ch. 2, pp. 80–97. Cambridge Series on Information and the Natural Sciences, Cambridge University Press, 2000.
- [8] M. Van Raamsdonk, “Lectures on gravity and entanglement,” in *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: New Frontiers in Fields and Strings (TASI 2015): Boulder, CO, USA, June 1-26, 2015*, pp. 297–351, 2017.
- [9] J. Polchinski, *String Theory: Volume 1, An Introduction to the Bosonic String*, ch. Appendix A, pp. 329–341. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1998.
- [10] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Int. J. Theor. Phys.*, vol. 38, pp. 1113–1133, 1999. [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)].

-
- [11] E. Witten, “Anti-de Sitter space and holography,” *Adv. Theor. Math. Phys.*, vol. 2, pp. 253–291, 1998.
- [12] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from noncritical string theory,” *Phys. Lett.*, vol. B428, pp. 105–114, 1998.
- [13] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys. Rept.*, vol. 323, pp. 183–386, 2000.
- [14] L. Susskind, “The World as a hologram,” *J. Math. Phys.*, vol. 36, pp. 6377–6396, 1995.
- [15] G. 't Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” in *Salamfest 1993:0284-296*, pp. 0284–296, 1993.
- [16] E. Witten, “Anti-de sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.*, vol. 2, pp. 1–11, 1998.
- [17] T. Hartman, “Lectures on quantum gravity and black holes,” Spring 2015.
- [18] S. W. Hawking and D. N. Page, “Thermodynamics of Black Holes in anti-De Sitter Space,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 87, p. 577, 1983.
- [19] J. M. Maldacena, “Eternal black holes in anti-de Sitter,” *JHEP*, vol. 04, p. 021, 2003.
- [20] Davison E. Soper, *Classical Field Theory*, ch. 1, pp. 13–15. Dover Books on Physics, Dover Publications, 2008.
- [21] Peskin M.E. and Schroeder D.V., *An Introduction to Quantum Field Theory*, ch. 2, pp. 15–19. Advanced book classics, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [22] A. Das, *Field Theory: A Path Integral Approach*, ch. 1, pp. 1–13. Field Theory, World Scientific, 1993.

