ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ-Ι

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ-ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ-5

Καθ. Κυριάκος Ταμβάκης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Η Έννοια του Διανυσματικού Χώρου.

Θεωρείστε ένα σύνολο από αντικείμενα

$$\mathcal{E} = \{ |a\rangle, |b\rangle, \ldots \}$$

μεταξύ των οποίων έχουν ορισθεί οι ακόλουθες πράξεις:

1) Πρόσθεση: Για κάθε δύο στοιχεία στο $\mathcal{E}$ ορίζεται το «άθροισμα», το οποίο, επίσης, ανήκει στο $\mathcal{E}$.

$$|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{E} \Longrightarrow |a\rangle + |b\rangle \in \mathcal{E} \, .$$

Η πρόσθεση έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$$

$$|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$$

$$|a\rangle + \mathbf{0} = \mathbf{0} + |a\rangle = |a\rangle \, .$$

2. Πολλαπλασιασμός με μιγαδικούς αριθμούς: Για κάθε στοιχείο $|a\rangle$ του $\mathcal{E}$ και κάθε μιγαδικό αριθμό λ ορίζεται το «γινόμενο» $\lambda|a\rangle$, το οποίο ανήκει στο $\mathcal{E}$.

$$|a\rangle \in \mathcal{E}, \lambda \in \mathcal{C} \Longrightarrow \lambda \, |a\rangle \in \mathcal{E} \, .$$

Η πράξη αυτή έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\lambda \, (|a\rangle + |b\rangle) = \lambda \, |a\rangle + \lambda \, |b\rangle$$

$$(\lambda + \mu) \, |a\rangle = \lambda \, |a\rangle + \mu \, |a\rangle$$

$$0 \, |a\rangle = \mathbf{0}$$

$$1 \, |a\rangle = |a\rangle \, .$$

Το σύνολο $\mathcal{E}$ ονομάζεται *Διανυσματικός ή Γραμμικός Χώρος*. Επί πλέον, είναι δυνατόν να ορισθεί και πράξη του *εσωτερικού γινομένου*. Σε κάθε δύο στοιχεία $|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{E}$ η πράξη αυτή αντιστοιχεί ένα μιγανικό αριθμό $\langle a|b\rangle \in \mathcal{C}$.

$$|a\rangle, |b\rangle \in \mathcal{E} \Longrightarrow \langle a|b\rangle \in \mathcal{C} \, .$$

Το εσωτερικό γινόμενο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$$

$$|d\rangle = \lambda \, |a\rangle + \mu \, |b\rangle \Longrightarrow \langle c|d\rangle = \lambda\langle c|a\rangle + \mu\langle c|b\rangle$$

$$|d\rangle = \lambda \, |a\rangle + \mu \, |b\rangle \Longrightarrow \langle d|c\rangle = \lambda^*\langle a|c\rangle + \mu^*\langle b|c\rangle$$

$$\langle a|a\rangle \ge 0$$

$$\langle a|a\rangle \langle b|b\rangle \ge |\langle a|b\rangle|^2$$

Ένας διανυσματικός χώρος προικισμένος και με την πράξη του εσωτερικού γινομένου ονομάζεται *Ευκλείδιος Διανυσματικός Χώρος ή Χώρος Hilbert*.

2. Η Έννοια της «Βάσης».

Ένα σύνολο από διανύσματα $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, … $|a_n\rangle$ μεταξύ των οποίων *δεν μπορεί να γραφτεί μια σχέση*

$$\lambda_1|a_1\rangle + \lambda_2|a_2\rangle + \ldots + \lambda_n|a_n\rangle = \mathbf{0}\,,$$

παρά μόνο αν

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0\,,$$

ονομάζονται γραμμικώς ανεξάρτητα. Εάν μια τέτοια γραμμική σχέση είναι δυνατή με μη-μηδενικούς συντελεστές, τότε τα διανύσματα αυτά είναι *γραμμικώς εξηρτημένα*.

Ο μέγιστος αριθμός N των γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων ονομάζεται *διάσταση*[1] του χώρου $\mathcal{E}$. Είναι φανερό ότι $N+1$ διανύσματα θα είναι αναγκαστικά γραμμικώς εξηρτημένα. Επομένως, θα είναι δυνατόν να γραφτεί μια σχέση

$$\lambda_1|a_1\rangle + \lambda_2|a_2\rangle + \ldots + \lambda_N|a_N\rangle + \lambda_{N+1}|a_{N+1}\rangle = \mathbf{0}$$

ή

$$|a_{N+1}\rangle = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{N+1}}\right)|a_1\rangle + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_{N+1}}\right)|a_2\rangle + \ldots + \left(-\frac{\lambda_N}{\lambda_{N+1}}\right)|a_N\rangle\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφτεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός N γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων, όπου N η διάσταση του χώρου. Γιαυτό, ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται *βάση του χώρου Hilbert*.

Μια ειδική κατηγορία βάσεων είναι οι, λεγόμενες, *ορθοκανονικές βάσεις*

$$|e_1\rangle, |e_2\rangle, , \ldots |e_N\rangle,$$

των οποίων τα στοιχεία έχουν την ιδιότητα

$$\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}\,.$$

[1] Η διάσταση ενός χώρου Hilbert μπορεί να είναι άπειρη.

Θεωρείστε ένα στοιχείο του χώρου Hilbert γραμμένο συναρτήσει μιας ορθοκανονικής βάσης

$$|\psi\rangle = \psi_1|e_1\rangle + \psi_2|e_2\rangle + \ldots + \psi_N|e_N\rangle = \sum_{i=1}^{N} \psi_i\,|e_i\rangle\,.$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με ένα στοιχείο της βάσης $|e_k\rangle$, έχουμε

$$\langle e_k|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \psi_i\,\langle e_k|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} \psi_i\,\delta_{ki} = \psi_k\,.$$

Δηλαδή, στην περίπτωση ορθοκανονικής βάσης, οι συντελεστές του αναπτύγματος είναι τα εσωτερικά γινόμενα $\langle e_k|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \psi_i\,|e_i\rangle \Longrightarrow \psi_i = \langle e_i|\psi\rangle\,.$$

3. Τελεστές στον Χώρο Hilbert.

Τελεστές είναι αντικείμενα τα οποία δρούν στα διανύσματα του χώρου Hilbert. Το αποτέλεσμα της δράσης τους είναι πάλι διανύσματα του χώρου

$$|a\rangle,\,|b\rangle \in \mathcal{E} \Longrightarrow \mathbf{T}\,|a\rangle = |b\rangle\,.$$

Η δράση των τελεστών είναι *γραμμική*, δηλαδή

$$\mathbf{T}\,(\,\lambda\,|a\rangle + \mu\,|b\rangle\,) = \lambda\,\mathbf{T}|a\rangle + \mu\,\mathbf{T}|b\rangle\,.$$

Μεταξύ των τελεστών ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού τελεστών με ανάλογες ιδιότητες όπως και για τους συνήθεις αριθμούς αλλά με ουσιαστική διαφορά όσον αφορά τον πολλαπλασισαμό, ο οποίος δεν είναι μεταθετικός

$$\mathbf{TS} \neq \mathbf{ST}\,.$$

Ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές. Για κάθε τελεστή υπάρχει μια ειδική κλάση από διανύσματα, χαρακτηριστική του τελεστή, πάνω στα οποία ο τελεστής δρα ως αριθμός

$$\mathbf{A}\,|\alpha_i\rangle = \alpha_i|\alpha_i\rangle\,.$$

Τα διανύσματα $|\alpha_i\rangle$ ονομάζονται *ιδιοδιανύσματα* του τελεστή και οι αριθμοί α_i *ιδιοτιμές*.

Συζυγής ενός τελεστή. Για κάθε τελεστή $\mathbf{A}$ ορίζεται ένας άλλος τελεστής $\mathbf{A}^\dagger$ με την ακόλουθη ιδιότητα

$$\langle\psi|\mathbf{A}^\dagger|\chi\rangle = \langle\chi|\mathbf{A}|\psi\rangle^*\,.$$

Ο τελεστής $\mathbf{A}^\dagger$ ονομάζεται *Ερμιτιανός Συζυγής* του τελεστή $\mathbf{A}$.

Ένας τελεστής ονομάζεται *Αυτοσυζυγής* ή, απλά, *Ερμιτιανός*, όταν

$$\mathbf{A}^\dagger \,=\, \mathbf{A}\,.$$

Για ένα αυτοσυζυγή θα ισχύει

$$\langle\psi|\mathbf{A}|\chi\rangle \,=\, \langle\chi|\mathbf{A}|\psi\rangle^*\,.$$

Ιδιότητες ιδιοτιμών και ιοδιοανυσμάτων των Αυτοσυζυγών τελεστών. Θεωρώντας την εξίσωση ιδιοτιμών ενός αυτοσυζυγούς τελεστή έχουμε

$$\mathbf{A}|\alpha_i\rangle \,=\, \alpha_i|\alpha_i\rangle$$

ή

$$\langle\alpha_j|\mathbf{A}|\alpha_i\rangle \,=\, \alpha_i\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle$$

ή

$$\langle\alpha_i|\mathbf{A}|\alpha_j\rangle^* \,=\, \alpha_i\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle$$

ή

$$\alpha_j^*\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle^* \,=\, \alpha_i\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle$$

ή

$$\alpha_j^*\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle \,=\, \alpha_i\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle$$

ή

$$\left(\alpha_j^* - \alpha_i\right)\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle \,=\, 0\,.$$

Εφαρμόζοντας αυτή την σχέση για $\alpha_i = \alpha_j$, έχουμε

$$(\alpha_i^* - \alpha_i)\,\langle\alpha_i|\alpha_i\rangle \,=\, 0 \;\Longrightarrow\; \alpha_i \,=\, \alpha_i^*$$

που σημαίνει ότι *οι ιδιοτιμές των αυτοσυζυγών τελεστών είναι πραγματικές*.

Εφαρμόζοντας αυτή την σχέση για $\alpha_i \neq \alpha_j$, έχουμε

$$(\alpha_j - \alpha_i)\,\langle\alpha_j|\alpha_i\rangle \,=\, 0 \quad\Longrightarrow\; \langle\alpha_i|\alpha_j\rangle$$

που σημαίνει ότι *τα ιδιοδιανύσματα των αυτοσυζυγών τελεστών είναι ορθογώνια*. Εάν, επί πλέον, τα ιδιοανύσματα είναι και κανονικοποιημένα[2], η σχέση αυτή αναβαθμίζεται σε σχέση *ορθοκανονικότητας*

$$\langle\alpha_i|\alpha_j\rangle \,=\, \delta_{ij}\,.$$

[2] Αυτό πάντοτε μπορεί να γίνει πολλαπλασιάζοντας με τον κατάλληλο αριθμό, π.χ.

$$|\psi\rangle \,\to\, |\psi_N\rangle \,=\, \left(\langle\psi|\psi\rangle\right)^{-1/2}\,|\psi\rangle \;\to\, \langle\psi_N|\psi_N\rangle \,=\, 1\,.$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των ιδιοανυσμάτων ενός αυτοσυζυγούς τελεστή είναι και «*πλήρες*», δηλαδή, ένα τυχαίο στοιχείο του χώρου μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων αυτών.

Πόρισμα. *Τα ιδιοδιανύσματα των αυτοσυζυγών τελεστών αποτελούν ορθοκανονικές βάσεις του χώρου Hilbert.*

Η «Πληρότητα» μιας βάσης.

Θεωρώντας το ανάπτυγμα ενός διανύσματος ως προς μια ορθοκανονική βάση έχουμε

$$|\psi\rangle \,=\, \sum_j \psi_j \,|e_j\rangle\,,$$

όπου $\psi_j = \langle e_j|\psi\rangle$. Αντικαθιστώντας το τελευταίο στο ανάπτυγμα, παίρνουμε

$$|\psi\rangle \,=\, \sum_j \langle e_j|\psi\rangle\,|e_j\rangle \,=\, \sum_j |e_j\rangle\langle e_j|\psi\rangle \,=\, \left(\sum_j |e_j\rangle\langle e_j|\right)|\psi\rangle\,.$$

Από αυτή την έκφραση μπορούμε να γράφουμε συμβολικά ότι

$$\sum_j |e_j\rangle\,\langle e_j| \,=\, \mathbf{1}\,.$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται «*Σχέση Πληρότητας*» της βάσης.

4. Αναπαράσταση Τελεστών και Διανυσμάτων με Πίνακες και Στήλες.

Ας θεωρήσουμε μια δεδομένη ορθοκανονική βάση $\{\,|e_i\rangle\,\}$. Ένα τυχαίο στοιχείο του χώρου αναπτύσεται ως προς αυτήν ως

$$|\psi\rangle \,=\, \sum_{i=1}^{N} \psi_i \,|e_i\rangle\,,$$

όπου

$$\psi_i \,=\, \langle e_i|\psi\rangle\,.$$

Η *στήλη* ψ_i

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_N \end{bmatrix}$$

«*αναπαριστά*» το διάνυσμα $|\psi\rangle$ στην δεδομένη βάση.

Ας θεωρήσουμε τώρα μια τελεστική σχέση

$$\mathbf{A}\,|\psi\rangle \,=\, |\chi\rangle\,.$$

Αναπτύσσοντας τα εμφανιζόμενα διανύσματα ως προς την βάση, παίρνουμε

$$\mathbf{A}\sum_i \psi_i|e_i\rangle \,=\, \sum_i \chi_i|e_i\rangle\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά από δεξιά με ένα διάνυσμα της βάσης, έχουμε

$$\sum_i \psi_i\,\langle e_j|\mathbf{A}|e_i\rangle \,=\, \sum_i \chi_i\langle e_j|e_i\rangle \,=\, \chi_j\,.$$

Εδώ μπορούμε να εισαγάγουμε τον *πίνακα* $N \times N$

$$\mathcal{A}_{ji} \,\equiv\, \langle e_j|\mathbf{A}|e_i\rangle\,,$$

ο οποίος *αναπαριστά* τον τελεστή στην ανωτέρω βάση. Η σχέση μας γίνεται

$$\sum_i \mathcal{A}_{ji}\,\psi_i \,=\, \chi_j \,\Longrightarrow\, \mathcal{A}\,\psi \,=\, \chi\,,$$

όπου $\mathcal{A}$, ψ και χ είναι πίνακες και στήλες. Βλέπουμε ότι η αρχική αφηρημένη σχέση εκπροσωπείται από μια αντίστοιχη σχέση πινάκων. *Όλα τα αντικείμενα και ολες οι σχέσεις του χώρου Hilbert αντιστοιχούν σε πίνακες και σχέσεις πινάκων ως προς την συγκεκριμένη βάση.*

Ας θεωρήσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο στοιχείων του χώρου Hilbert και ας αντικαταστήσουμε τα αναπτύγματα των στοιχείων αυτών ως προς την δεδομένη ορθοκανονική βάση

$$\langle\psi|\chi\rangle \,=\, \sum_{ij}\psi_i^*\,\chi_j\langle e_i|e_j\rangle \,=\, \sum_i \psi_i^*\chi_i$$

ή

$$\langle\psi|\chi\rangle \,=\, [\psi_1^*,\,\psi_2^*,\,\ldots]\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \cdot\\ \cdot\end{bmatrix} \,=\, \psi^\dagger\,\chi\,.$$

Στην περίπτωση που έχουμε το ίδιο διάνυσμα

$$||\,|\psi\rangle\,||^2 \,=\, \langle\psi|\psi\rangle \,=\, |\psi_1|^2 \,+\, |\psi_2|^2 \,+\, \ldots \,=\, \sum_i^N |\psi_i|^2 \,=\, \psi^\dagger\,\psi$$

ή και

$$|||\psi\rangle\,|| \;=\; \sqrt{|\psi_1|^2 \,+\, |\psi_2|^2 \,+\, \dots}\;.$$

Είναι δυνατόν να θεωρήσουμε την αναπαράσταση των στοιχείων μιας βάσης *ως προς τον εαυτό τους*. Πράγματι, έχουμε

$$|e_k\rangle \;=\; \sum_j \langle e_j|e_k\rangle\,|e_j\rangle,$$

πράγμα που σημαίνει ότι

$$|e_k\rangle \;\Longrightarrow\; \delta_{kj} \;\Longrightarrow\; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \\ . \end{bmatrix}.$$

Η ορθοκανονικότητα εκφράζεται ως

$$\langle e_i|e_j\rangle \;=\; \delta_{ij} \;\Longrightarrow\; \sum_k \delta_{ik}\delta_{kj} \;=\; \delta_{ij} \;\Longrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_i & 0 & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1_j \\ 0 \\ . \\ . \end{pmatrix} \;=\; \delta_{ij}\,.$$

Η πληρότητα

$$\sum_j |e_j\rangle\langle e_j| \;=\; \mathbf{1} \;\Longrightarrow\; \sum_j \delta_{kj}\,\delta_{j\ell} \;=\; \delta_{k\ell}$$

εκφράζεται ως

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... \\ & & \\ 0 & 1 & 0 \\ & & \end{pmatrix}.$$

Το Πρόβλημα Ιδιοτιμών στην γλώσσα των πινάκων. Ας θεωρήσουμε την εξίσωση ιδιοτιμών ενός αυτοσυζυγούς τελεστή εκφρασμένη υπό μορφή στηλών και πινάκων ως προς την ορθοκανονική βάση $\{|e_j\rangle\}$. Χάριν της απλοποίησης του φορμαλισμού θα ακολουθήσουμε την *σύμβαση Einstein* σύμφωνα με την οποία ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης πάντοτε θεωρείται α-θροιζόμενος. Έχουμε

$$\mathcal{A}_{ij}\,\psi_j^{(\alpha)} \,=\, \alpha\,\psi_i^{(\alpha)}$$

ή

$$(\,\mathcal{A}_{ij} \,-\alpha\,\delta_{ij}\,)\;\psi_j^{(\alpha)} \,=\, 0$$

ή

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_{11} \,-\alpha)\,\psi_1^{(\alpha)} \,+\, \mathcal{A}_{12}\,\psi_2^{(\alpha)} \,+\,\ldots +\, \mathcal{A}_{1N}\psi_N^{(\alpha)} \,&=\, 0\\
\mathcal{A}_{21}\,\psi_1^{(\alpha)} \,+\, (\mathcal{A}_{22} \,-\alpha)\,\psi_2^{(\alpha)} \,+\,\ldots +\, \mathcal{A}_{2N}\psi_N^{(\alpha)} \,&=\, 0\\
&\ldots\\
&\ldots\\
\mathcal{A}_{N1}\,\psi_1^{(\alpha)} \,+\, \mathcal{A}_{N2}\,\psi_2^{(\alpha)} \,+\,\ldots +\, (\mathcal{A}_{NN} \,-\alpha)\,\psi_N^{(\alpha)} \,&=\, 0
\end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα *γραμμικό ομογενές σύστημα* με N εξισώσεις και N αγνώστους. Όπως είναι γνωστο από την σχετική θεωρία, για να έχει λύση θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να μηδενίζεται, δηλαδή

$$\det|\mathcal{A} \,-\alpha\,\mathbf{1}| \,=\, 0\,.$$

Η συνθήκη αυτή, που ονομάζεται *«χαρακτηριστική εξίσωση»*, είναι μια αλγεβρική εξίσωση N-οστού βαθμού ως προς το α από την οποία προσδιορίζονται οι N ιδιοτιμές. Αντικαθιστώντας τις ιδιοτιμές αυτές στο σύστημα, προσδιορίζουμε και τα N ιδιοανύσματα $\psi^{(\alpha)}$, τα οποία θα είναι αυτόματα ορθογώνια και κανονικοποιήσιμα

$$\left(\psi^{(\alpha)}\right)^{\dagger}\,\psi^{(\alpha')} \,=\, \delta_{\alpha\alpha'}\,.$$

Εφαρμογή: Εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοανυσμάτων του πίνακα

$$\mathcal{A} \,=\, \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}\,,$$

όπου a, c είναι πραγματικοί. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ b^* & c-x \end{vmatrix} \,=\, 0$$

ή

$$(a-x)(c-x)\,-|b|^2\,=\,0\,\Longrightarrow\,x_{\pm}\,=\,\frac{1}{2}\left(-(a+c)\,\pm\sqrt{(a-c)^2+4|b|^2}\right)\,.$$

Τα ιδιοανύσματα προσδιορίζονται από το σύστημα

$$a\,\psi_1\,+\,b\,\psi_2\,=\,x_{\pm}\,\psi_1$$
$$b^*\psi_1\,+\,c\psi_2\,=\,x_{\pm}\,\psi_2$$

που δίνει

$$\psi_2/\psi_1\,=\,\frac{(x_{\pm}\,-a)}{b}\,\Longrightarrow\,\psi^{(+)}\,=\,N_+\left(\begin{array}{c}x_+-a\\ \\ b\end{array}\right),\,\psi^{(-)}\,=\,N_-\left(\begin{array}{c}x_--a\\ \\ b\end{array}\right)\,.$$

Τα ιδιοανύσματα είναι αυτομάτως ορθογώνια χάρις στην ταυτότητα

$$(x_+-a)(x_--a)\,+\,|b|^2\,=\,0\,.$$

Οι παράγοντες κανονικοποίησης είναι

$$N_{\pm}\,=\,\left(\,(a-x_{\pm})^2+|b|^2\right)^{-1/2}\,.$$

Συνεχείς Βάσεις.

Είναι δυνατόν τα διανύσματα μιας βάσης $|\alpha\rangle$, όχι απλά να είναι άπειρα, αλλά να ταξινομούνται με μια συνεχή παράμετρο $\alpha\in[\alpha_1,\,\alpha_2]$. Η ορθοκανονικότητα μιας τέτοιας βάσης εκφράζεται με την βοήθεια της *συνάρτησης Δέλτα του Dirac* ως

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle\,=\,\delta(\alpha-\alpha')\,.$$

Ένα τυχαίο στοιχείο του χώρου μπορεί να αναπτυχθεί ως προς μια συνεχή βάση με τον ίδιο τρόπο που αναπτύσσεται και ως προς μια αριθμήσιμη βάση με μόνη διαφορά την αντικατάσταση της άθροισης με ολοκλήρωση

$$|\psi\rangle\,=\,\int d\alpha\,\psi(\alpha)\,|\alpha\rangle\,\Longrightarrow\,\psi(\alpha)\,=\,\langle\alpha|\psi\rangle\,.$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων έχει την ακόλουθη έκφραση

$$\langle\psi|\chi\rangle\,=\,\left(\int d\alpha\,\psi^*(\alpha)\langle\alpha|\right)\left(\int d\alpha'\,\chi(\alpha')|\alpha'\rangle\right)\,=\,\int d\alpha\,\int d\alpha'\,\psi^*(\alpha)\,\chi(\alpha)\,\langle\alpha|\alpha'\rangle$$
$$=\,\int d\alpha\,\int d\alpha'\,\psi^*(\alpha)\,\chi(\alpha)\,\delta(\alpha\,-\alpha')\,=\,\int d\alpha\,\psi^*(\alpha)\chi(\alpha)\,.$$

Στην περίπτωση του ίδιου διανύσματος έχουμε

$$\langle\psi|\psi\rangle\,=\,\int d\alpha\,|\psi(\alpha)|^2\,.$$

5. Οι Καταστάσεις ενός Φυσικού Συστήματος ως Διανύσματα ενός Χώρου Hilbert.

Το μαθηματικό υπόβαθρο της Κβαντομηχανικής συνοψίζεται στα κάτωθι «Αξιώματα»

1) Οι καταστάσεις ενός φυσικού συστήματος συναποτελούν ένα χώρο Hilbert

$$\mathcal{E} = \{ |\psi\rangle, \dots \} .$$

Κάθε τέτοιο καταστατικό διάνυσμα $|\psi\rangle$ *ονομάζεται «ket» και αντιστοιχεί σε μια δυνατή κατάσταση του συστήματος.*

2) Κάθε φυσικό μέγεθος $\mathbf{A}$ *αντιστοιχεί σε ένα Αυτοσυζυγή Τελεστή που δρα στον χώρο Hilbert.*

3) Τα μόνα δυνατά αποτελέσματα των μετρήσεων είναι οι ιδιοτιμές $\alpha_1, \alpha_2, \dots .$ *των φυσικών μεγεθών.*

4) Το πλάτος πιθανότητας να ευρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $|\alpha\rangle$ *που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* α *του μεγέθους* $\mathbf{A}$ *δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο* $\langle\alpha|\psi\rangle$.

5) Η χρονική εξέλιξη του φυσικού συστήματος περιγράφεται από την εξίσωση Schroedinger

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle = \mathbf{H}|\psi\rangle .$$

6. Το Σύστημα των Δύο Καταστάσεων.

Στο εδάφιο αυτό θα κάνουμε μια εφαρμογή των ανωτέρω σε ένα φυσικό σύστημα για το οποίο ο χώρος Hilbert των δυνατών φυσικών καταστάσεων έχει διάσταση $N = 2$. Έστω μια δεδομένη ορθοκανονική βάση

$$|1\rangle, \, |2\rangle .$$

Η γενική κατάσταση του συστήματος $|\psi\rangle$ μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των διανυσμάτων της βάσης ως

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1,2} \psi_j \, |j\rangle = \psi_1 \, |1\rangle + \psi_2 \, |2\rangle ,$$

όπου $\psi_j = \langle j|\psi\rangle$. Στην δεδομένη βάση, η κατάσταση $|\psi\rangle$ παριστάνεται από την στήλη

$$|\psi\rangle \implies \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} .$$

Η κανονικοποίηση της κατάστασης $|\psi\rangle$ αντιστοιχεί στην αντίστοιχη κανονικοποίηση της στήλης Ψ

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \implies \Psi^\dagger \Psi = 1 \leftrightarrow |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1 .$$

Ο τελεστής Hamilton του συστήματος $\mathbf{H}$, στην δεδομένη βάση, παριστάνεται από τον πίνακα

$$\mathcal{H} \,=\, \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} ,$$

όπου

$$H_{ij} \,\equiv\, \langle i|\mathbf{H}|j\rangle \,.$$

Από το γεγονός ότι ο τελεστής Hamilton είναι αυτοσυζυγής έχουμε ότι

$$H_{ij} \,\equiv\, \langle i|\mathbf{H}|j\rangle \,=\, \langle j|\mathbf{H}|i\rangle^* \Longrightarrow H_{ij} \,=\, H_{ji}^* \,.$$

Αυτό σημαίνει ότι, αναγκαστικά,

$$H_{11}^* = H_{11}, \quad H_{22}^* = H_{22}, \quad H_{21} \,=\, H_{12}^* \,.$$

Χάριν απλότητος των τύπων θα θεωρήσουμε μια ειδική περίπτωση υποθέτοντας ότι

$$\mathcal{H} \,=\, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} ,$$

όπου οι παράμετροι α και β είναι πραγματικοί αριθμοί.

Το πρόβλημα ιδιοτιμών της ενέργειας διατυπώνεται μέσω της εξίσωσης

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \,=\, E \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ,$$

όπου η στήλη

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

παριστάνει το υπό αναζήτηση άγνωστο ιδιοδιάνυσμα της ενέργειας. Οι ιδιοτιμές της ενέργειας θα προκύψουν ως λύσεις της εξίσωσης

$$\det \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix} \,=\, 0 \Longrightarrow (\alpha - E)^2 \,=\, \beta^2$$

ή

$$E_\pm \,=\, \alpha \,\pm \beta \,.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση ιδιοτιμών και κάνοντας τον πολλαπλασιασμό πίνακα-στήλης παίρνουμε

$$\alpha\, x \,+\, \beta\, y \,=\, E_\pm\, x \,=\, (\alpha \,\pm \beta)\, x$$

$$\beta\, x \,+\, \alpha\, y \,=\, E_{\pm}\, y \,=\, (\alpha \,\pm\, \beta)\, y$$

ή

$$y \,=\, \pm x\,.$$

Έτσι παίρνουμε τα δύο ιδιοανύσματα

$$\eta^{(+)} \,=\, N_{+} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \;\; \eta^{(-)} \,=\, N_{-} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

όπου N_{+}, N_{-} είναι σταθερές κανονικοποίησης που θα προσδιοριστούν πάραυτα. Όπως είναι φανερό τα διανύσματα αυτά είναι πράγματι ορθογώνια όπως απαιτούν τα ισχύοντα θεωρήματα που αφορούν τα ιδιοανύσματα των αυτοσυζυγών τελεστών

$$\left(\eta^{(+)}\right)^{\dagger} \eta^{(-)} \,=\, N_{+} N_{-} \begin{bmatrix} 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\,.$$

ΟΙ σταθερές κανονικοποίησης είναι

$$|N_{\pm}|^2 \left(\eta^{(\pm)}\right)^{\dagger} \eta^{(\pm)} \,=\, 1 \Longrightarrow 2|N_{\pm}|^2 \,=\, 1 \Longrightarrow N_{\pm} \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Τελικά, έχουμε

$$\eta^{(+)} \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta^{(-)} \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ή

$$|+\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|1\rangle \,+\, |2\rangle\right), \quad |-\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle \,-\, |2\rangle\right)\,.$$

Και οι αντίστροφες σχέσεις έχουν την ίδια μορφή

$$|1\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|+\rangle \,+\, |-\rangle\,\right), \quad |2\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|+\rangle \,-\, |-\rangle\,\right)\,.$$

Τα ιδιοανύσματα της ενέργειας $|+\rangle$, $|-\rangle$ αποτελούν μια ισοδύναμη εναλλακτική ορθοκανονική βάση στον χώρο των καταστάσεων. Ένα τυχαίο ket μπορεί να αναπτυχθεί με δύο τρόπους ως

$$|\psi\rangle \,=\, \psi_1 |1\rangle \,+\, \psi_2 |2\rangle \,=\, \psi_{+} |+\rangle \,+\, \psi_{-} |-\rangle,$$

οπότε θα αντιστοιχεί σε διαφορετικές στήλες ως προς κάθε βάση

$$|\psi\rangle \Longrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \psi_{+} \\ \psi_{-} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις που συνδέουν τις δύο βάσεις στην έκφραση για το $|\psi\rangle$, παίρνουμε

$$\psi_+ \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,\psi_1\,+\,\psi_2)\,,\quad \psi_- \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\,\psi_1\,-\psi_2)$$

και

$$\psi_1 \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\psi_+\,+\,\psi_-)\,,\quad \psi_2 \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\psi_+\,-\psi_-)\;.$$

Στην βάση $|\pm\rangle$ ενέργεια αντιπροσωπεύεται από ένα διαγώνιο πίνακα, μια και $\langle+|\mathbf{H}|-\rangle \,=\, E_-\langle+|-\rangle \,=\, 0$

$$\mathcal{H} \,=\, \left(\begin{array}{cc} \alpha+\beta & 0 \\ \\ 0 & \alpha-\beta \end{array}\right)\,.$$

Η χρονική εξέλιξη του συστήματος διέπεται από την εξίσωση Schroedinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle \,=\, \mathbf{H}|\psi\rangle\,,$$

που, στην βάση $|\pm\rangle$, γίνεται

$$i\hbar\left[\begin{array}{c} \dot{\psi}_+ \\ \dot{\psi}_- \end{array}\right] = \left(\begin{array}{cc} \alpha+\beta & 0 \\ \\ 0 & \alpha-\beta \end{array}\right)\left[\begin{array}{c} \psi_+ \\ \psi_- \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (\alpha+\beta)\psi_+ \\ (\alpha-\beta)\psi_- \end{array}\right]$$

και δίνει

$$i\hbar\dot{\psi}_\pm \,=\, (\alpha\pm\beta)\psi_\pm$$

με λύσεις

$$\psi_\pm(t) \,=\, \psi_\pm(0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha\pm\beta)t}\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μεταξύ $\psi_\pm$ και $\psi_{1,2}$, μετά από πράξεις, παίρνουμε

$$\left[\begin{array}{c} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{array}\right] \,=\, e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha t}\cos(\beta t/\hbar)\left[\begin{array}{c} \psi_1(0) \\ \psi_2(0) \end{array}\right] - ie^{-\frac{i}{\hbar}\alpha t}\sin(\beta t/\hbar)\left[\begin{array}{c} \psi_2(0) \\ \psi_1(0) \end{array}\right]$$

ή

$$|\psi(t)\rangle \,=\, e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha t}\,\{\,[\,\psi_1(0)\cos(\beta t/\hbar)\,-i\psi_2(0)\sin(\beta t/\hbar)\,]\,|1\rangle$$
$$+\,[\,-i\psi_1(0)\sin(\beta t/\hbar)\,+\,\psi_2(0)\cos(\beta t/\hbar)\,]\,|2\rangle\,\}\;.$$