

Κβαντικά φαινόμενα απο ηλεκτρομαγνητικές ροές και  
γενίκευσή τους σε γεωμετρικές και τοπολογικές  
φάσεις

Γιώργος Χ' Αντώνης

Μάιος 2020

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Μετασχηματισμοί βαθμίδας</b>	<b>5</b>
2.1	Βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό . . . . .	5
2.2	Μετασχηματισμός βαθμίδας στην κλασική μηχανική . . . . .	5
2.3	Μετασχηματισμός βαθμίδας στην κβαντική μηχανική . . . . .	7
2.4	Σωματίδιο σε δακτυλίδι . . . . .	12
2.5	Ροή μαγνητικού πεδίου μέσα από δακτυλίδι . . . . .	14
2.6	Παραδείγματα σχετικά με τα προηγούμενα . . . . .	19
2.6.1	Φορτίο σε κομμένο δακτυλίδι . . . . .	19
2.6.2	Φορτίο σε δακτυλίδι με $N$ σπείρες . . . . .	21
2.7	Ηλεκτρικό φαινόμενο <i>Aharonov - Bohm</i> . . . . .	23
2.7.1	Απειρόβαθο πηγάδι με πυκνωτή στο κέντρο . . . . .	23
2.7.2	Σωλήνες με χρονικά μεταβαλλόμενη διαφορά δυναμικού . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Επίπεδα <i>Landau</i></b>	<b>33</b>
3.1	Κίνηση φορτίου σε μαγνητικό πεδίο . . . . .	33
3.1.1	Κίνηση φορτίου σε επίπεδη επιφάνεια με κάθετο σε αυτή μαγνητικό πεδίο	33
3.1.2	Κίνηση φορτίου σε κυλινδρική επιφάνεια με κάθετο σε αυτή μαγνητικό πεδίο	35
3.2	Εισαγωγή σταθερής μαγνητικής ροής στο πρόβλημα . . . . .	38
3.3	Εισαγωγή μεταβαλλόμενης μαγνητικής ροής - επιβεβαίωση ακέραιου κβαντικού φαινομένου <i>Hall</i> . . . . .	40
3.4	Φαινόμενο <i>Aharonov - Bohm</i> από μαγνητικό πεδίο σε διπλανή περιοχή . .	41
<b>4</b>	<b><i>Berry</i> - ολογία</b>	<b>44</b>
4.1	Αδιαβατική διεργασία . . . . .	44
4.1.1	Εκκρεμές μέσα σε ένα κουτί . . . . .	44
4.1.2	Αδιαβατική διεργασία στο απειρόβαθο πηγάδι . . . . .	45
4.2	Απόδειξη του αδιαβατικού θεωρήματος . . . . .	46
4.3	Το παράδοξο του εκκρεμούς του Φουκώ . . . . .	50
4.4	Εξερευνώντας τα μυστικά της γεωμετρικής φάσης . . . . .	52

4.5	Καμπυλότητα και συνοχή <i>Berry</i> . . . . .	54
4.6	Κουτί γύρω από μαγνητική ροή . . . . .	55
4.7	Τοπολογία . . . . .	58
4.7.1	Θεώρημα <i>Gauss- Bonnet</i> . . . . .	58
4.7.2	Ο αριθμός <i>Chern</i> . . . . .	63
4.7.3	Η Τοπολογία στη Φυσική . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Πειραματική επαλήθευση του μαγνητικού <i>Aharonov-Bohm</i></b>	
	<b>φαινομένου</b>	<b>67</b>
5.1	Πείραμα <i>Chambers</i> . . . . .	67
5.2	Πείραμα των <i>Bayh-Mollenstedt</i> . . . . .	68
5.3	Πείραμα διπλής σχισμής . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Επίλογος - Τοπολογικές Φάσεις</b>	<b>74</b>
<b>7</b>	<b>Παραρτήματα</b>	<b>75</b>
7.1	Τρόποι εύρεσης της συνάρτησης βαθμίδας $\Lambda$ σε διάφορες περιπτώσεις . . .	75

# 1 Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι αφιερωμένη στις συνέπειες που έχουν μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία πάνω στις ιδιότητες κβαντικών σωματιδίων - και κυρίως όταν τα πεδία βρίσκονται "εντοπισμένα" σε περιοχές του χώρου (ή και του χρόνου) όπου δεν βρίσκεται το σωματίδιο. Ο συνηθισμένος όρος για τέτοιες περιπτώσεις είναι "φαινόμενα *Aharonou-Bohm* [3] τύπου I". Το πιο γνωστό από αυτά, το μαγνητικό *Aharonou - Bohm* φαινόμενο, αφορά την περίπτωση που ένα ηλεκτρικά φορτισμένο κβαντικό σωματίδιο επηρεάζεται από μια μαγνητική ροή που είναι έξω (και κλεισμένη/ περιβαλλόμενη) από το χώρο όπου κινείται. Στο χώρο που βρίσκεται το σωματίδιο το μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν. Η επίδραση (πάνω σε μετρήσιμες ποσότητες/ιδιότητες του σωματιδίου) οφείλεται σε μια επιπρόσθετη φάση στις κυματοσυναρτήσεις και για πολλά χρόνια η φάση αυτή δεν λαμβανόταν υπόψη, αφού υπήρχε ο ισχυρισμός ότι θα μπορούσαν να την ξεφορτωθούν με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας χωρίς να χαλάσουν τις μετρήσιμες ποσότητες του συστήματος. Όπως όμως αποδείχτηκε αυτή η ηλεκτρομαγνητική φάση δεν είναι τόσο "αθώα" όσο πίστευαν.

Μια πρώτη παρατήρηση για μια τέτοια πιθανή επίδραση έγινε το 1939 από τον *Walter Franz* [4]. Το 1949 ο *Werner Ehrenberg*, Άγγλος φυσικός, και ο *Raymond Eldred Siday* Άγγλος μαθηματικός παρατήρησαν ως "παράξενο" το ότι κάποιοι δείκτες διάθλασης επηρεάζονται από κάποιου είδους "κλεισμένες ροές" [9]. Το 1959 ο *David Bohm*, Αμερικάνος φυσικός και ο *Yakir Aharonou*, Ισραηλινός φυσικός (και τότε μεταπτυχιακός φοιτητής), δημοσίευσαν λεπτομερείς υπολογισμούς που επαληθεύουν αυτό το μαγνητικό φαινόμενο αλλά και ένα ηλεκτρικό ανάλογο. Μετά την δημοσίευση του άρθρου υπήρξε μεγάλος αντίλογος για το φαινόμενο αλλά σήμερα έχει πολλαπλά επαληθευτεί (και μάλιστα έχει γενικευθεί σε νέες περιοχές που είναι βασισμένες σε γεωμετρική και τοπολογική δομή της κβαντικής μηχανικής). Σε αυτή την διπλωματική θα μελετήσουμε μαθηματικά τέτοιου είδους φαινόμενα με χρήση κανονικού χαμιλτονιανού φορμαλισμού αλλά και θα αναφέρουμε και τις σημαντικές γενικεύσεις που έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια σε γεωμετρική και τοπολογική φυσική.

Το μαγνητικό *Aharonou - Bohm* φαινόμενο επαληθεύτηκε πειραματικά με ένα αρκετά μεγάλο σφάλμα. Δυστυχώς όταν το σφάλμα έφτασε στα επιτρεπτά όρια, ο *Bohm* είχε ήδη πεθάνει. Το φαινόμενο επαληθεύτηκε αρκετές φορές διότι υπήρχε μια δυσπιστία για το αν

γίνεται σωστά το πείραμα (οφειλόταν στην αβεβαιότητα για το κατά πόσο κάποιες μαγνητικές γραμμές ξεφεύγουν από τον "εντοπισμό" τους και έβγαιναν στο χώρο όπου κινείτο το σωματίδιο) αλλά μέχρι σήμερα όλα τα πειράματα που έγιναν επιβεβαιώνουν το φαινόμενο. Στο τέλος της διπλωματικής θα γίνει μια μικρή αναδρομή στα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν για την επαλήθευση του μαγνητικού φαινομένου *Aharonov – Bohm*.

## 2 Μετασχηματισμοί βαθμίδας

### 2.1 Βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό

Το μαγνητικό πεδίο είναι ένα διανυσματικό πεδίο του οποίου η απόκλιση είναι μηδέν (ισοδύναμο με την απουσία μαγνητικών μονοπόλων στο κενό). Γνωρίζουμε από μια άλλη διανυσματική ταυτότητα ότι:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times A) = 0 \quad (2.1.1)$$

Άρα αφού η απόκλιση του μαγνητικού πεδίου είναι μηδέν τότε μπορούμε να πούμε ότι το μαγνητικό πεδίο ισούται με την στροφή μιας διανυσματικής συνάρτησης που θα την ονομάσουμε διανυσματικό δυναμικό και συμβολίζεται με  $\vec{A}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (2.1.2)$$

Σε ηλεκτροστατικές συνθήκες το ηλεκτρικό πεδίο, είναι ένα διανυσματικό πεδίο του οποίου η στροφή του είναι πάντα μηδέν. Γνωρίζουμε επίσης την εξής διανυσματική ταυτότητα:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0 \quad (2.1.3)$$

Άρα αφού η στροφή του ηλεκτροστατικού πεδίου είναι μηδέν τότε μπορούμε να εκφράσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σαν την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης, η οποία ονομάζεται βαθμωτό δυναμικό και θα την συμβολίσουμε σε αυτή την εργασία με  $V$ .

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (2.1.4)$$

**Σημείωση:** Στην γενική περίπτωση[5] και ιδιαίτερα όταν υπάρχει χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο τότε το ηλεκτρικό πεδίο δεν ισούται μόνο με την κλίση του βαθμωτού δυναμικού. Λόγω του νόμου του *Faraday*, το πάνω διευρύνεται σε:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.1.5)$$

σε μονάδες *SI*. Από την πάνω βλέπουμε ότι αν το διανυσματικό δυναμικό δεν εξαρτάται από τον χρόνο τότε ο δεύτερος όρος μηδενίζεται και επιστρέφουμε στην ηλεκτροστατική σχέση.

### 2.2 Μετασχηματισμός βαθμίδας στην κλασική μηχανική

Από τις σχέσεις του ηλεκτρικού πεδίου και του μαγνητικού πεδίου δεν μπορούμε να ορίσουμε το βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό μονοσήμαντα. Για παράδειγμα αν ένα βαθμωτό

δυναμικό  $V$  και ένα διανυσματικό δυναμικό  $\vec{A}$  αντιστοιχούν σε ένα ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  και σε ένα μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$ , μπορούμε να κάνουμε ένα μετασχηματισμό του διανυσματικού και του βαθμωτού δυναμικού ώστε να παραμείνουν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αναλλοίωτα.

Τα δυναμικά μπορούν να μετασχηματιστούν, ώστε να μην αλλάξουν τα πεδία ως εξής:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad (2.2.1)$$

$$V' = V - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad (2.2.2)$$

όπου  $\Lambda$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση (στο Παράρτημα θα διαπραγματευθούμε τη "συνάρτηση βαθμίδας"  $\Lambda$  αντιστρέφοντας το πάνω σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων).

**Ας αποδείξουμε την αναλλοιότητα των πεδίων:** Έστω ότι τα δυναμικά  $V$  και  $\vec{A}$  αντιστοιχούν σε πεδία  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$ . Μετασχηματίζουμε τα δυναμικά χρησιμοποιώντας την (2.2.1) και την (2.2.2) στα δυναμικά  $V'$  και  $\vec{A}'$ .

Αντικαθιστώντας τα νέα δυναμικά στις σχέσεις των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων παίρνουμε

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' \\ &= \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Lambda) \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος ισούται με το αρχικό μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  και ο δεύτερος όρος σύμφωνα την σχέση (2.1.3) ισούται με μηδέν, οπότε  $\vec{B} = \vec{B}'$

Άρα το μαγνητικό πεδίο μένει το ίδιο (τουλάχιστον στο σημείο του χώρου όπου ισχύει η

(2.2.1) ) κάτω από ένα μετασχηματισμό βαθμίδας. Ας δούμε τώρα για το ηλεκτρικό πεδίο.

$$\begin{aligned}
 \vec{E}' &= -\vec{\nabla}V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\
 &= -\vec{\nabla}\left(V - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda) \\
 &= -\vec{\nabla}V + \vec{\nabla}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda \\
 &= -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda \\
 &= \vec{E} + \vec{\nabla}\frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda
 \end{aligned}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο λοιπόν για να παραμείνει αναλλοίωτο μετά από έναν τέτοιο μετασχηματισμό, πρέπει η συνάρτηση  $\Lambda$  να είναι μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάντηση αφού τότε ο δεύτερος όρος θα διαγραφεί με τον τρίτο. Θα δούμε όμως ότι υπάρχουν ενδιαφέρουσες περιπτώσεις όπου το  $\Lambda$  βγαίνει να είναι ασυνεχής συνάρτηση και μπορεί να οδηγήσει σε φαινόμενα που είναι κεντρικά σε αυτή την εργασία.

Σε ένα πείραμα μπορούμε να μετρήσουμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο (με δυνάμεις που αυτά ασκούν σε σωματίδια) αλλά όχι τα βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό (αν μη τι άλλο, δεν είναι μοναδικά). Αφού μπορούμε με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας να έχουμε αναλλοίωτο (μοναδικό σε κάθε σημείο του χωροχρόνου) ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, τότε μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα, που συνήθως διατυπώνεται στην κλασική φυσική, ότι τα πεδία είναι αυτά που έχουν άμεση φυσική σημασία και ότι οι μετασχηματισμοί βαθμίδας δεν επηρεάζουν τη φυσική συμπεριφορά ενός συστήματος και καμιά από τις μετρήσιμες ποσότητές του.

### 2.3 Μετασχηματισμός βαθμίδας στην κβαντική μηχανική

Στην κβαντική μηχανική θα δούμε πως επίσης ένας μετασχηματισμός βαθμίδας δεν θα πρέπει γενικά να επηρεάζει τις μετρήσιμες ποσότητες, όπως π.χ. τις επιτρεπτές ενέργειες που μπορεί να πάρει ένα σωματίδιο ούτε το ρεύμα πιθανότητάς του.

Αρχικά η χαμιλτονιανή σε ένα χώρο όπου δεν υπάρχει ούτε βαθμωτό ούτε διανυσματικό δυναμικό είναι

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (2.3.1)$$



Βάζουμε ένα βαθμωτό δυναμικό  $V$  στο σύστημα και τότε η χαμιλτονιανή επηρεάζεται με μια πρόσθεση της δυναμικής ενέργειας που θα αποκτήσει το σωματίδιο φορτίου  $q$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + qV \quad (2.3.2)$$

Τώρα για να βάλουμε και ένα διανυσματικό δυναμικό στο σύστημα θα πρέπει να αναφερθούμε στην κινηματική ορμή. Η κινηματική ορμή, την οποία θα συμβολίζουμε με  $\vec{\Pi}$ , είναι η φυσική ποσότητα που μετρούμε και είναι ίση με μάζα επί ταχύτητα (αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι ο τελεστής της ταχύτητας  $\vec{u} = \frac{i}{\hbar}[\vec{H}, \vec{r}] = \frac{\vec{\Pi}}{m}$ ). Η χαμιλτονιανή παίρνει τη μορφή:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\Pi}^2}{2m} + qV \quad (2.3.3)$$

ενώ η κανονική ορμή  $\vec{p}$  συσχετίζεται με την κινηματική ορμή ως εξής

$$\vec{\Pi} = \vec{p} - q\vec{A} \quad (2.3.4)$$

Βλέπουμε ότι αν το διανυσματικό δυναμικό είναι μηδέν τότε η κανονική ορμή και η κινηματική ορμή ταυτίζονται. Έτσι αν ένα σωματίδιο (χωρίς σπιν ή άλλους εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας) βρίσκεται σε ένα χώρο όπου υπάρχει μη μηδενικό βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό τότε η χαμιλτονιανή του είναι (υποθέτουμε παντού μη-σχετικιστικό σωματίδιο χωρίς εσωτερικούς βαθμούς ελευθερίας, το σπιν π.χ. αγνοείται)

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - q\hat{\vec{A}})^2 + q\hat{V} \quad (2.3.5)$$

Έστω τώρα ότι  $\Psi(\vec{r}, t)$  είναι ένα γενικό κυματοπακέτο, λύση της χρονικά-εξαρτημένης εξίσωσης του *Schrödinger*. Αν αλλάξουμε τα δυναμικά με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας τότε η χαμιλτονιανή θα αλλάξει ως εξής:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - q(\hat{\vec{A}} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t)))^2 + q(\hat{V} - \frac{\partial\Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}) \quad (2.3.6)$$

Η κυματοσυνάρτηση που θα ικανοποιήσει την εξίσωση *Schrödinger* με τη νέα χαμιλτονιανή προκύπτει ότι θα είναι ίδια με την προηγούμενη επί μια έξτρα φάση, η οποία περιέχει τη "συνάρτηση βαθμίδας"  $\Lambda$ , πιο συγκεκριμένα

$$\Psi'(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t)e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \quad (2.3.7)$$

**Ας το αποδείξουμε:** θα πάμε ανάποδα, και θα δράσουμε με τη νέα (μετά το μετασχηματισμό) Χαμιλτονιανή  $H'$  πάνω στην κυματοσυνάρτηση (2.3.7)

$$\hat{H}'\psi'(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - q(\hat{\vec{A}} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t)))^2\Psi(\vec{r}, t)e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} + q(\hat{V} - \frac{\partial\Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t})\Psi(\vec{r}, t)e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \quad (2.3.8)$$

Για να υπολογίσουμε τον 1<sup>ο</sup> όρο, αρχικά θα υπολογίσουμε το αντίστοιχο σε μια διάσταση: την δράση του τελεστή της κινηματικής ορμής (όπως αυτή είναι μετά από ένα μετασχηματισμό βαθμίδας) σε μια διάσταση στην κυματοσυνάρτηση  $\Psi'(x, t)$

$$(p_x - q(A_x + \frac{\partial \Lambda(x, t)}{\partial x}))\Psi(x, t)e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)}$$

όπου  $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  (η γνωστή αναπαράσταση θέσης της κανονικής ορμής). Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} & (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - q(A_x + \frac{\partial \Lambda(x, t)}{\partial x}))\Psi(x, t)e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} \\ &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(\Psi(x, t)e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)}) - q(A_x + \frac{\partial \Lambda(x, t)}{\partial x})\Psi(x, t)e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} \\ &= -i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} - i\hbar \Psi(x, t) (i\frac{q}{\hbar} \frac{\partial \Lambda(x, t)}{\partial x} e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)}) - qA_x \Psi(x, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} - q \frac{\partial \Lambda(x, t)}{\partial x} \Psi(x, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} \\ &= -i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} + \Psi(x, t) q \frac{\partial \Lambda(x, t)}{\partial x} e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} - qA_x \Psi(x, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} - q \frac{\partial \Lambda(x, t)}{\partial x} \Psi(x, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος με τον τελευταίο όρο διαγράφονται και έτσι καταλήγουμε στο αποτέλεσμα της δράσης της κινηματικής ορμής μετά ένα μετασχηματισμό βαθμίδας σε μια διάσταση

$$\left( p_x - q\left(A_x + \frac{\partial \Lambda(x, t)}{\partial x}\right) \right) \Psi(x, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(x, t)} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - qA_x) \Psi(x, t) \quad (2.3.9)$$

Παρατηρούμε ότι στο δεξιό μέλος εμφανίστηκε ο τελεστής της κινηματικής ορμής πριν τον μετασχηματισμό βαθμίδας. Ας δούμε τώρα το αντίστοιχο στις τρεις διαστάσεις:

$$\begin{aligned} & \left( (p_x \hat{x} + p_y \hat{y} + p_z \hat{z}) - q(A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} + \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Lambda(\vec{r}, t)}{\partial z} \hat{z}) \right) \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \\ & \left( \vec{p} - q(\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}, t)) \right) \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - qA_x) \Psi(\vec{r}, t) \hat{x} \\ & + e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - qA_y) \Psi(\vec{r}, t) \hat{y} + e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} - qA_z) \Psi(\vec{r}, t) \hat{z} \end{aligned}$$

και όλα αυτά συμμαζεύονται ως εξής

$$(\vec{p} - q(\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{r}, t))) \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\vec{p} - q\vec{A}) \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.3.10)$$

Αυτή η διανυσματική ταυτότητα είναι κεντρική - όπως θα δούμε σε αυτή την εργασία έχει πολλές όμορφες συνέπειες (όχι μόνο οδηγεί στη διάσημη "συμμετρία βαθμίδας", αλλά δίνει και τη γενικότερη δυνατότητα να αντιστοιχίζουμε δυό προβλήματα με διαφορετικά δυναμικά, το οποίο οδηγεί σε φαινόμενα τύπου *Aharonov-Bohm* που αναφέραμε παραπάνω). Τώρα

για να βρούμε τον πρώτο όρο της (2.3.8) θα πρέπει να πάρουμε την (2.3.10) και να τετραγωνίσουμε την κινηματική ορμή (που σημαίνει να δράσουμε με αυτήν δύο διαδοχικές φορές), δηλαδή

$$\begin{aligned} & (\vec{p} - q(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t)))^2 \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \\ &= (\vec{p} - q(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t)))(\vec{p} - q(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t))) \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \end{aligned}$$

Αυτό μπορεί να γίνει με το εξής τέχνασμα (αποφεύγοντας το "ανάπτυγμα"). Χρησιμοποιώντας στην πάνω ότι η δράση της κινηματικής ορμής έχει το αποτέλεσμα (2.3.10)

$$(\vec{p} - q(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t)))^2 \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} = (\vec{p} - q(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t))) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\vec{p} - q\vec{A}) \Psi(\vec{r}, t)$$

και ορίζοντας μια νέα κυματοσυνάρτηση  $f(\vec{r}, t) \equiv (\vec{p} - q\vec{A}) \Psi(\vec{r}, t)$ , έχουμε για την πάνω

$$(\vec{p} - q(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t))) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} f(\vec{r}, t)$$

Η δράση της κινηματικής ορμής θα είναι η ίδια (όπως στην (2.3.10)) αφού η ιδιότητα αυτή ισχύει για οποιαδήποτε συνάρτηση, δηλαδή

$$\begin{aligned} & (\vec{p} - (q\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda)) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} f(\vec{r}, t) = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\vec{p} - q\vec{A}) f(\vec{r}, t) \\ & (\vec{p} - (q\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda)) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} f(\vec{r}, t) = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\vec{p} - q\vec{A}) (\vec{p} - q\vec{A}) \Psi(\vec{r}, t) \\ \Rightarrow & (\vec{p} - q(\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}, t)))^2 \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\vec{p} - q\vec{A})^2 \Psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Τώρα θα αντικαταστήσουμε την (2.3.11) στην (2.3.8)

$$H' \Psi'(\vec{r}, t) = \frac{1}{2m} e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\vec{p} - q\vec{A})^2 \Psi(\vec{r}, t) + q(V - \frac{\partial\Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}) \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \quad (2.3.12)$$

Στην συνέχεια θα πάρουμε την (2.3.12) και θα την αντικαταστήσουμε στην εξίσωση *Schrödinger*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\vec{p} - q\vec{A})^2 \Psi(\vec{r}, t) + q(V - \frac{\partial\Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}) \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \Psi(\vec{r}, t)) \\ & \frac{1}{2m} e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\vec{p} - q\vec{A})^2 \Psi(\vec{r}, t) + q(V - \frac{\partial\Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t}) \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} = -q \frac{\partial\Lambda(\vec{r}, t)}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \\ & \quad + i\hbar e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \\ \Rightarrow & e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + qV) \Psi(\vec{r}, t) = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} i\hbar \frac{\partial\Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Αν διώξουμε τον παράγοντα φάσης  $e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)}$  και από τις δύο πλευρές (δικαιούμαστε μιας και δεν γίνεται ποτέ μηδέν) τότε καταλήγουμε στην εξίσωση *Schrödinger* για την  $\Psi(\vec{r}, t)$  πριν το μετασχηματισμό βαθμίδας. Με αυτόν τον τρόπο αποδείξαμε ότι η κυματοσυνάρτηση

$\Psi'(\vec{r}, t) = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)}\Psi(\vec{r}, t)$  όντως ικανοποιεί την εξίσωση *Schrödinger* μετά το μετασχηματισμό. (Στη βιβλιογραφία το γεγονός ότι η μορφή της εξίσωσης *Schrödinger* μένει ίδια κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας περιγράφεται από τον όρο "συμμετρία βαθμίδας".)

Όπως είπαμε αναμένουμε ότι ένας μετασχηματισμός βαθμίδας δεν επηρεάζει μετρήσιμες ποσότητες. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε (π.χ. στο επίπεδο των αναμενόμενων τιμών που είναι μετρήσιμες ποσότητες). Αλλά πρώτα ας δούμε αν ο μετασχηματισμός βαθμίδας επηρεάζει την πυκνότητα πιθανότητας και το κβαντομηχανικό ρεύμα πιθανότητας.

Πυκνότητα πιθανότητας

$$\begin{aligned} |\Psi'(\vec{r}, t)|^2 &= \Psi^*(\vec{r}, t)e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)}\Psi(\vec{r}, t)e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} \\ &= \Psi^*(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t) \\ &= |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \end{aligned}$$

Η πυκνότητα πιθανότητας δεν αλλάζει με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας (αυτός άλλωστε είναι και ο λόγος που κανείς θα μπορούσε να είχε προβλέψει ότι θα έχουμε με το μετασχηματισμό μόνο μια έξτρα φάση στις κυματοσυναρτήσεις)

Ρεύμα πιθανότητας

$$J = \text{Re}\left(\Psi^* \frac{\vec{\Pi}}{m} \Psi\right) \quad (2.3.13)$$

όπου το  $\text{Re}(A)$  συμβολίζει το πραγματικό μέρος του  $A$  (και είναι ίσο με  $\frac{A+A^*}{2}$ ). Το πιο πάνω διαμορφώνεται ως εξής:

$$J = \frac{1}{2m}(\Psi^* \vec{\Pi} \Psi - \Psi \vec{\Pi} \Psi^*) \quad (2.3.14)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας το  $\vec{\Pi} = \vec{p} - q\vec{A}$  το ρεύμα πιθανότητας θα είναι:

$$J = \frac{\hbar}{2mi}(\Psi^*(\vec{r}, t)\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t)\vec{\nabla}\Psi^*(\vec{r}, t)) - q\frac{A}{m}|\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

Για να αποδείξουμε τώρα ότι αυτό το κβαντομηχανικό ρεύμα, αλλά και η αναμενόμενη τιμή του τελεστή της κινηματικής ορμής, παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από τον πάνω μετασχηματισμό θα χρησιμοποιήσουμε την (2.3.10). Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με  $e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)}\Psi^*(\vec{r}, t)$  έχουμε

$$\Psi^*(\vec{r}, t)e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)}(\vec{\Pi}')\Psi(\vec{r}, t)e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} = \Psi^*(\vec{r}, t)e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)}e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)}(\vec{\Pi})\Psi(\vec{r}, t) \quad (2.3.15)$$

και σε αυτό αν προσθέσουμε το μιγαδικό συζυγές και διαιρέσουμε με  $2m$

$$\frac{1}{2m}(\Psi'(\vec{r}, t)^*(\vec{\Pi}')\Psi'(\vec{r}, t)+\Psi'(\vec{r}, t)(\vec{\Pi}')\Psi'(\vec{r}, t)^*) = \frac{1}{2m}(\Psi(\vec{r}, t)^*(\vec{\Pi})\Psi(\vec{r}, t)+\Psi(\vec{r}, t)(\vec{\Pi})\Psi(\vec{r}, t)^*)$$

καταλήγουμε στο ότι το ρεύμα πιθανότητας πριν και το ρεύμα πιθανότητας μετά το μετασχηματισμό βαθμίδας ισούνται μεταξύ τους. Βλέπουμε ότι ούτε το τοπικό ρεύμα πιθανότητας αλλάζει με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας.

Παίρνοντας τέλος την (2.3.15) και ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη παίρνουμε

$$\int \int \int d^3r \Psi^*(\vec{r}, t) e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} (\vec{\Pi}') \Psi(\vec{r}, t) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r}, t)} = \int \int \int d^3r \Psi^*(\vec{r}, t) (\vec{\Pi}) \Psi(\vec{r}, t)$$

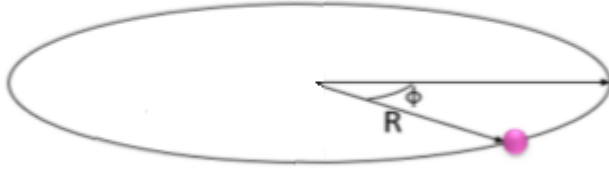
όπου εμφανίζεται η μέση τιμή της κινηματικής ορμής, που είναι ακόμα μια μετρήσιμη ποσότητα πριν το μετασχηματισμό βαθμίδας απο την μια και η μέση τιμή της κινηματικής ορμής μετά το μετασχηματισμό βαθμίδας απο την άλλη.

$$\langle \vec{\Pi}' \rangle = \langle \vec{\Pi} \rangle \quad (2.3.16)$$

Έτσι βλέπουμε ότι και η μέση τιμή της κινηματικής ορμής δεν αλλάζει μετά απο ένα μετασχηματισμό βαθμίδας (ένα ακόμα παράδειγμα της "gauge invariance" ενός φυσικού μεγέθους).

## 2.4 Σωματίδιο σε δακτυλίδι

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε το πρώτο παράδειγμα συστήματος όπου θα παρουσιαστούν συνέπειες "κλεισμένων" μαγνητικών ροών. Θα μελετήσουμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις επιτρεπτές ενέργειες ενός κβαντικού σωματιδίου μάζας  $m$  και φορτίου  $q$  το οποίο κινείται πάνω σε ένα δακτυλίδι ακτίνας  $R$ . Θα χρησιμοποιήσουμε την πρηγούμενη ιδιότητα (2.3.7) - η οποία σημειωτέον πρέπει να χρησιμοποιείται σε αρχικό στάδιο, πριν την επιβολή οποιωνδήποτε συνοριακών συνθηκών σε ένα πρόβλημα - για να αντιστοιχίσουμε (με μετασχηματισμό της πάνω μορφής) τις λύσεις (κυματοσυναρτήσεις) δύο διαφορετικών προβλημάτων. Κάνοντας αυτό θα "ξανά-ανακαλύψουμε" ένα καινούργιο φαινόμενο (μαγνητικό φαινόμενο *Aharonov - Bohm*) που - τουλάχιστον η μαθηματική του προέλευση - θα είναι το ότι η "συνάρτηση βαθμίδας"  $\Lambda$ , θα είναι κάπου στο χώρο ασυνεχής!



Ας ξεκινήσουμε λοιπόν με το απλό δακτυλίδι. Η χαμιλτονιανή του συστήματος σε αναπαράσταση θέσης θα είναι η εξής

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})^2 = \frac{1}{2m}(-i\hbar\vec{\nabla})^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

Για να βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις της θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση *Schrödinger* για κάθε ιδιοσυνάρτηση  $\Psi(\vec{r})$

$$\begin{aligned}\hat{H}\Psi(\vec{r}) &= E\Psi(\vec{r}) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}) &= E\Psi(\vec{r})\end{aligned}$$

Όπως φαίνεται και στο σχήμα το πρόβλημα είναι μονοδιάστατο (με την  $x$  - μεταβλητή να μπορεί να γραφτεί  $x = R\phi$ ), άρα η ιδιοκατάσταση έχει μόνο την αζιμουθιακή μεταβλητή  $\phi$  και έτσι από την Λαπλασιανή ( $\nabla^2$ ) επιβιώνει μόνο ο όρος  $\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2\Psi(R,\phi)}{\partial\phi^2} &= E\Psi(r,\phi) \\ -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\frac{\partial^2\Psi(R,\phi)}{\partial\phi^2} &= E\Psi(R,\phi)\end{aligned}$$

Η λύση της πιο πάνω εξίσωσης έχει την μορφή  $\sim e^{ikR\phi}$  ή ισοδύναμα

$$\Psi(R,\phi) = Ce^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}\phi} \quad (2.4.1)$$

Τώρα θα επιβάλουμε μονοτιμία στην (2.4.1), δηλαδή τη συνήθη απαίτηση σε κάθε σημείο του δακτυλιδιού να έχουμε μοναδική λύση

$$\Psi(R,\phi) = \Psi(R,\phi + 2\pi)$$

$$\begin{aligned}
C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}\phi} &= C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}(\phi+2\pi)} \\
e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}2\pi} &= 1 \\
\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}2\pi &= 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
E_n &= \frac{n^2\hbar^2}{2mR^2} \tag{2.4.2}
\end{aligned}$$

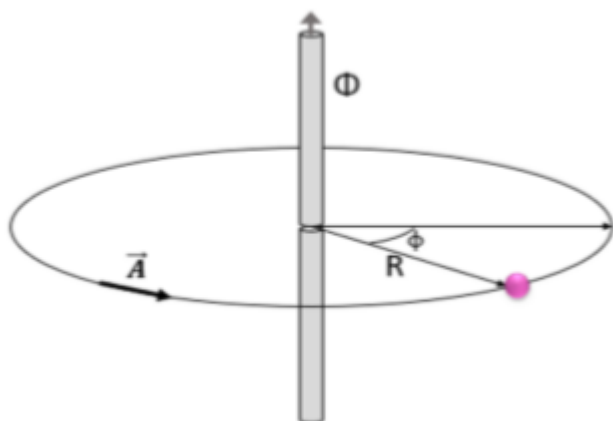
Με αυτόν τον τρόπο βρήκαμε όλες τις επιτρεπτές ενέργειες του σωματιδίου - το ενεργειακό φάσμα του προβλήματος. Και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις, από την (2.4.1), είναι  $\Psi(R, \phi) = C e^{in\phi}$  με το  $n$  να είναι οποιοσδήποτε ακέραιος (και το  $C$  σταθερά κανονικοποίησης που, αν τη διαλέξουμε πραγματική, είναι  $C = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$ ). Βλέπουμε ότι οι ενέργειες για  $n \neq 0$  είναι διπλά εκφυλισμένες. Οι  $\Psi_n, \Psi_{-n}$  (που έχουν αντίθετες "χειραλικότητες" (προκύπτει με δράση του τελεστή της στροφορμής  $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$ , ότι οι ιδιοτιμές της στροφορμής  $L_z$  είναι  $\hbar n$ ) έχουν την ίδια ενέργεια).

Είναι χρήσιμο για αργότερα να υπολογίσουμε τώρα το ρεύμα πιθανότητας, το οποίο βρίσκουμε ότι είναι ομογενές (το ίδιο σε κάθε σημείο του δακτυλιδιού), όπως αναμένεται για μια μόνο ιδιοκατάσταση (όχι υπέρθεση πολλών) από την εξίσωση της συνέχειας σε μια-διάσταση  $\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  και το γεγονός ότι η πυκνότητα πιθανότητας  $\rho$  είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Πράγματι άμεσος υπολογισμός με χρήση της (2.3.14) με  $A=0$  δίνει

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\hbar}{2mi} (\Psi'^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \Psi'(\vec{r}, t) - \Psi'(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \Psi'^*(\vec{r}, t)) \\
&= \frac{\hbar}{2mi} (C e^{-in\phi} \vec{\nabla} C e^{in\phi} - C e^{in\phi} \vec{\nabla} C e^{-in\phi}) \\
&= \frac{\hbar}{2mi} (C e^{-in\phi} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} C e^{in\phi} - C e^{in\phi} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} C e^{-in\phi}) \hat{\phi} \\
&= \frac{\hbar}{2mi} (C e^{-in\phi} \frac{1}{R} in C e^{in\phi} - C e^{in\phi} \frac{1}{R} (-in) C e^{-in\phi}) \\
&= \frac{\hbar n}{mR}
\end{aligned}$$

## 2.5 Ροή μαγνητικού πεδίου μέσα από δακτυλίδι

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις ενέργειες στο ίδιο σύστημα με μια απλή (αλλά σημαντική!) αλλαγή. Μέσα από τον κενό χώρο του δακτυλιδιού (οπουδήποτε) θα περάσουμε μια ροή μαγνητικού πεδίου. Στην κλασική μηχανική δεν θα βλέπαμε καμιά διαφορά αφού ένα σώμα αν δεν περνά μέσα από το μαγνητικό πεδίο δεν αντιλαμβάνεται την παρουσία του (γιατί δεν ασκείται πάνω του καμιά δύναμη *Lorentz*). Τι θα συμβεί σε αντίστοιχο πρόβλημα στην κβαντική μηχανική;



Αρχικά, να πούμε ξεκάθαρα ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή που υπάρχει το φορτίο είναι ίσα με μηδέν. Το βαθμωτό δυναμικό μπορούμε να το πάρουμε σταθερό, ή πιά απλά και μηδέν, αφού δεν υπάρχει πουθενά ηλεκτρικό πεδίο. Για το διανυσματικό δυναμικό  $\vec{A}$  δεν είναι τόσο απλά τα πράγματα. Πρέπει η στροφή του σε περιοχή έξω από τη ροή του μαγνητικού πεδίου να είναι μηδέν. (Αυτό σημειωτέον επιτρέπει - σε κυλινδρικές ή πολικές συντεταγμένες - και συναρτήσεις  $A(\rho, \phi, z)$  μη-σταθερές, π.χ. οποιαδήποτε συνάρτηση μόνο με αζιμουθιακή συνιστώσα και με μέτρο που πάει σαν  $\sim \frac{1}{\rho}$  έχει όντως μηδενική στροφή.) Το σίγουρο είναι ότι το  $A$  δεν πρέπει (ή μάλλον δεν μπορεί) να είναι μηδέν (όπως νόμιζαν παλαιότερα!). Γιατί αν πάρουμε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος μιάς καμπύλης που περικλείει το μαγνητικό πεδίο, τότε το αποτέλεσμα θα πρέπει να μας δώσει την συνολική μαγνητική ροή  $\Phi$  που περικλείεται από την καμπύλη (η οποία μπορεί να είναι η ίδια η περιφέρεια του δακτυλιδιού), λόγω του νόμου του *Stokes*. Η πιά απλή μορφή διανυσματικού δυναμικού είναι αυτό που έχει μόνο αζιμουθιακή συνιστώσα, δηλαδή είναι εφαπτομενικό σε κάθε σημείο του δακτυλιδιού, και έχει σταθερό μέτρο - και όπως είπαμε πρέπει να ικανοποιεί ότι

$$\oint d\vec{l} \cdot \vec{A} = \Phi$$

Και επειδή διαλέξαμε ένα διανυσματικό δυναμικό που έχει μόνο αζιμουθιακή συνιστώσα

$$\int_0^{2\pi} d\phi R A = \Phi$$

Αφού το  $AR$  είναι σταθερό τότε μπορούμε να το βγάλουμε έξω από το ολοκλήρωμα

$$AR \int_0^{2\pi} d\phi = \Phi$$



$$AR2\pi = \Phi$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi R} \hat{\phi} \quad (2.5.1)$$

Αυτό είναι ένα κατάλληλο (και το πιό απλό!) διανυσματικό δυναμικό για το πρόβλημά μας. Για να βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις επιτρεπτές ενέργειες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις επιτρεπτές ενέργειες του προηγούμενου προβλήματος, αξιοποιώντας την ιδιότητα (2.3.7) που αποδείξαμε νωρίτερα, κάνοντας μια αντιστοίχιση αυτού του προβλήματος με αυτό της προηγούμενης ενότητας (απουσία μαγνητικής ροής). Μπορούμε να δούμε ότι και στα δύο συστήματα οι εντάσεις του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή που βρίσκεται το σωματίδιο είναι ίδιες στα δύο προβλήματα (ίσες με μηδέν), αλλά τα διανυσματικά δυναμικά πάνω στο σωματίδιο δεν είναι ίσα (στο προηγούμενο σύστημα ήταν μηδέν, στο παρόν σύστημα είναι το (2.5.1)). Μπορούμε τότε να μεταβούμε από το ένα σύστημα στο άλλο με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας. Όπως είχαμε πει στο κεφάλαιο 2.3 οι κυματοσυναρτήσεις με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας αποκτούν ένα παράγοντα φάσης  $e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\vec{r};t)}$ . Ποιο θα είναι το  $\Lambda(\vec{r}, t)$  σε αυτή την περίπτωση που μας πάει από το ένα πρόβλημα στο άλλο;

Θυμίζουμε ότι μπορούμε να μεταφερθούμε από ένα διανυσματικό δυναμικό σε ένα άλλο με μετασχηματισμό βαθμίδας χρησιμοποιώντας την (2.2.1). Σε αυτή την περίπτωση το άτομο διανυσματικό δυναμικό θα είναι μηδέν ενώ το τονούμενο είναι το διανυσματικό δυναμικό (2.5.1). Με αυτόν το τρόπο βρίσκουμε την κλίση της συνάρτησης  $\Lambda$  που είναι απλά

$$\vec{\nabla}\Lambda(\vec{r}) = \frac{\Phi}{2\pi R} \hat{\phi}$$

$$\frac{\partial\Lambda(\vec{r})}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{R} \frac{\partial\Lambda(\vec{r})}{\partial\phi} \hat{\phi} + \frac{\partial\Lambda(\vec{r})}{\partial z} \hat{z} = \frac{\Phi}{2\pi R} \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \frac{\partial\Lambda(\vec{r})}{\partial\phi} = \frac{\Phi}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow \Lambda = \frac{\Phi}{2\pi} \phi \quad (2.5.2)$$

Με χρήση της (2.3.7) καταλήγουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις του νέου συστήματος είναι οι πιο κάτω

$$\Psi(\vec{r}) = e^{i\frac{q}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \phi} C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} \phi} \quad (2.5.3)$$

Ας μείνουμε λίγο στην πιο πάνω λύση. Σύμφωνα με όσα είπαμε για το μετασχηματισμό βαθμίδας το γεγονός ότι έχουμε μια έξτρα φάση δεν μας ενοχλεί αφού η πυκνότητα πιθανότητας

και το ρεύμα πιθανότητας παραμένουν αναλλοίωτα γι' αυτό και πολλοί φυσικοί την αγνοούσαν. Όμως ισχύει το ίδιο σε αυτήν την περίπτωση; Αρχικά ας επιβάλουμε μονοτιμία στις ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος, που θα μας βοηθήσει να βρούμε τις επιτρεπτές ενέργειες του συστήματος.

$$e^{i\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}\phi} C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}\phi} = e^{i\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}(\phi+2\pi)} C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}(\phi+2\pi)}$$

$$e^{i\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}2\pi} e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}2\pi} = 1 \quad (2.5.4)$$

$$\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}2\pi + \sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}2\pi = 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.5.5)$$

Αν λύσουμε ως προς το E θα βρούμε όλες τις επιτρεπτές ενέργειες του συστήματος

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( n - \frac{q\Phi}{\hbar} \right)^2 \quad (2.5.6)$$

και ορίζοντας το λεγόμενο κβάντο ροής ως  $\Phi_0 = \frac{\hbar}{e}$  παίρνουμε τελικά

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left( n - \frac{q}{e} \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad (2.5.7)$$

Οι επιτρεπτές ενέργειες δεν είναι ίδιες με προηγουμένως! Ο δεύτερος όρος χαλά τον εκφυλισμό των ενεργειών που είχαμε βρεί στο προηγούμενο σύστημα. Η παρουσία της μαγνητικής ροής έχει τώρα εισαγάγει μια "ασυμμετρία" στις χειραλιότητες (οι ενέργειες για ιδιοκαταστάσεις με  $n$  και  $-n$  δεν είναι ίδιες). Οι δε ιδιοκαταστάσεις είναι πλέον οι εξής:

$$\Psi(R, \phi) = e^{i\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}\phi} C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}\phi} \quad (2.5.8)$$

Αν αντικαταστήσουμε στις ιδιοκαταστάσεις τις επιτρεπτές ενέργειες τότε θα ξανά καταλήξουμε στις ιδιοκαταστάσεις που είχαμε πριν την εισαγωγή της μαγνητικής ροής  $\Psi(x) = e^{in\phi}$ . Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ενώ η πυκνότητα πιθανότητας είναι ίδια όπως και στο προηγούμενο πρόβλημα, το ρεύμα πιθανότητας αλλάζει! Εκτός λοιπόν από την ενέργεια έχουμε και άλλη μια τεράστια αλλαγή στο σύστημα στην απουσία μαγνητικής ροής, έχουμε την εμφάνιση ηλεκτρικού ρεύματος (που είναι  $I = qJ$ ), το οποίο μάλιστα μπορεί να βρεθεί και με μία απλή παραγωγή της ενεργειας ως προς τη μαγνητική ροή (απόρροια [1] του θεωρήματος *Hellmann-Feynman*), δηλαδή

$$I = -\frac{\partial E_n}{\partial \Phi}$$

$$I = \frac{\hbar^2}{mR^2} \left( n - \frac{q}{e} \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \frac{q}{e} \frac{1}{\Phi_0} \quad (2.5.9)$$

Το ρεύμα αυτό ονομάστηκε "επίμονο ρεύμα" διότι το ρεύμα αυτό θα διαρρέει το δακτυλίδι για πάντα (το οποίο δέν είναι και μεγάλη έκπληξη, μιάς και μιλάμε για μια κβαντική στάσιμη κατάσταση). Τέτοια ρεύματα έχουν βρεθεί σε νανοδιατάξεις στο εργαστήριο.

### Πώς γίνεται όμως αυτό;

Ένας μετασχηματισμός βαθμίδας δεν θα έπρεπε να κάνει τόσο σοβαρές αλλαγές στο σύστημα. Γιατί σε αυτήν την περίπτωση δεν έχουμε τις ίδιες επιτρεπτές ενέργειες και ηλεκτρικό ρεύμα; Η απάντηση είναι πολύ απλή. Αυτό που κάναμε πιο πάνω δεν είναι ο πιο "αθώος" μετασχηματισμός βαθμίδας. Όταν ορίσαμε τον μετασχηματισμό βαθμίδας είπαμε ότι μπορούμε να μετασχηματίσουμε το διανυσματικό και το βαθμωτό δυναμικό χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.1) και (2.2.2) με μια βασική προϋπόθεση, η συνάρτηση  $\Lambda$  να είναι συνεχής και διαφορίσιμη. Βέβαια η συνάρτηση  $\Lambda = \frac{\Phi}{2\pi}\phi$  με μια ματιά φαίνεται αξιοπρεπής οπότε που είναι το πρόβλημα; Το πρόβλημα οφείλεται στο ότι δέν είναι μονότιμη όταν κάνουμε πλήρη αζιμουθιακά ταξίδια κατά  $2\pi$  - και για να γυρίζει στον εαυτό της θα πρέπει να εισαγάγουμε μια ασυνέχεια (ένα άλμα κατά  $-\Phi$ ). Επιβάλλοντας λοιπόν στην συνάρτηση περιοδικές συνθήκες  $\Lambda(\phi) = \Lambda(\phi + 2\pi)$  δεν μπορεί πλέον η συνάρτηση να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη καθώς κάθε  $2\pi$  η συνάρτηση θα πρέπει να μηδενίζεται απότομα. Ένας άλλος λόγος που καθιστά αυτόν τον μετασχηματισμό βαθμίδας ως ένα μη αθώο μετασχηματισμό είναι το αν μπορούσαμε μαθηματικά να διώξουμε το διανυσματικό δυναμικό με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας. Αν πράγματι το μπορούσαμε, τότε θα παραβιαζόταν το γεγονός ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού δυναμικού κατά μήκος του δακτυλιδιού θα πρέπει να μας δίνει την κλεισμένη μαγνητική ροή. (Παρόλο που πρέπει να ειπωθεί ότι, όταν εισαγάγουμε στο  $\Lambda$  την απότομη ασυνέχεια, ώστε να γίνει η  $\Lambda$  μονότιμη, τότε η παράγωγος της ασυνέχειας ως προς  $\phi$  (που είναι μέρος της κλίσης) θα δώσει μιά έξτρα συνεισφορά δέλτα συνάρτησης στο  $\Lambda$  (πολλαπλασιασμένης με  $-\Phi$ ), έτσι ώστε τελικά να αποκαθιστά στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα το σωστό αποτέλεσμα). Με οποιοδήποτε τρόπο κι αν το δούμε, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα δύο προβλήματα, το δακτυλίδι χωρίς την μαγνητική ροή και το δακτυλίδι με την μαγνητική ροή, δεν είναι ισοδύναμα. Γι' αυτό έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα στο δεύτερο πρόβλημα ενώ στο πρώτο δεν έχουμε και γι' αυτό έχουμε διαφορετικά ενεργειακά φάσματα. Δεν είναι όμως λάθος να χρησιμοποιούμε το μετασχηματισμό βαθμίδας, μάλιστα το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε είναι ορθό ανεξαρτήτως του πως το υπολογίσαμε. (Γι' αυτό έχει αποφανθεί

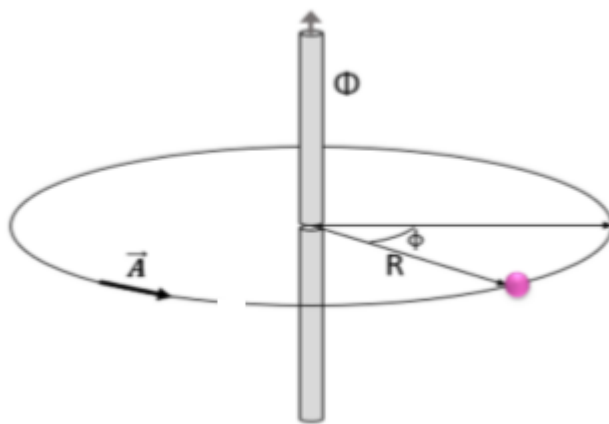
θετικά το πείραμα - και μάλιστα εις πολλαπλούν.)

## 2.6 Παραδείγματα σχετικά με τα προηγούμενα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε και θα υπολογίσουμε τις κυματοσυναρτήσεις και τις επιτρεπτές ενέργειες σε δύο παραλλαγές του φαινομένου που μόλις μελετήσαμε. Επίσης θα δούμε ότι μόνο η εισαγωγή μαγνητικής ροής δεν είναι αρκετή για να έχουμε αυτά τα αποτελέσματα που παρατηρήσαμε αλλά θα πρέπει να υπάρχουν και οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

### 2.6.1 Φορτίο σε κομμένο δακτυλίδι

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετήσουμε πάλι ένα φορτίο που κινείται μέσα σε ένα δακτυλίδι με μαγνητική ροή με μια μικρή διαφοροποίηση: το δακτυλίδι είναι κομμένο σε ένα σημείο του (και μάλιστα μπορούμε να επιβάλουμε συνοριακές συνθήκες άπειρου τοίχου δυναμικού (μηδενισμού της κυματοσυνάρτησης) στα 2 ελεύθερα άκρα).



Αρχικά θα βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις ενέργειες του σωματιδίου μέσα στο κομμένο δακτυλίδι χωρίς την μαγνητική ροή.

Η χαμιλτονιανή του συστήματος θα είναι πάλι η εξής:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

και η εξίσωση *Schrödinger* θα είναι η εξής:

$$-\frac{\hbar^2}{2mR^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \quad (2.6.1)$$

Για να μην μπορεί το σωματίδιο να φύγει από το δακτυλίδι στην περιοχή που το δακτυλίδι είναι κομμένο θα πρέπει η κυματοσυνάρτηση όπως ήδη είπαμε να μηδενίζεται. Αυτό μας οδηγεί σε συνθήκες απειρόβαθου πηγαδιού του οποίου οι ιδιοκαταστάσεις του είναι ημίτονα και συνημίτονα

$$\Psi(\vec{r}) = A \sin \sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} \phi + B \cos \sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} \phi \quad (2.6.2)$$

Τώρα θα εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες του συστήματος στις ιδιοκαταστάσεις. Στην μια άκρη του δακτυλιδιού ( $\phi = 0$ ) η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται. Για να γίνει αυτό πρέπει το B να είναι μηδέν. Επίσης και στην άλλη άκρη του δακτυλιδιού ( $\phi = 2\pi$ ) η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται από εκεί θα βγάλουμε τις επιτρεπτές ενέργειες του συστήματος.

$$\begin{aligned} A \sin \sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} 2\pi &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} 2\pi &= n\pi, n = 1, 2, 3... \\ \Rightarrow E_n &= \frac{n^2 \hbar^2}{8mR^2} \end{aligned}$$

Οι ιδιοκαταστάσεις αν αντικαταστήσουμε τις ενέργειες μέσα θα είναι:

$$\Psi(\vec{r}) = A \sin \frac{n}{2} \phi \quad (2.6.3)$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τις πιο πάνω σχέσεις και το μετασχηματισμό βαθμίδας για να βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις επιτρεπτές ενέργειες όταν προστεθεί η μαγνητική ροή. Η συνάρτηση  $\Lambda$  είναι ίδια με προηγουμένως, έτσι οι νέες ιδιοκαταστάσεις είναι οι εξής:

$$\Psi'(\vec{r}) = e^{i\frac{q}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} \phi} \left( A \sin \sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} \phi + B \cos \sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} \phi \right)$$

Οι συνοριακές συνθήκες παραμένουν ίδιες

$$(1) \Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$(2) \Psi(2\pi) = 0 \Rightarrow e^{i\frac{q}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi} 2\pi} A \sin \sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} 2\pi = 0$$

Το μιγαδικό εκθετικό δεν μπορεί να μηδενιστεί οπότε

$$\sin \sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} 2\pi = 0$$

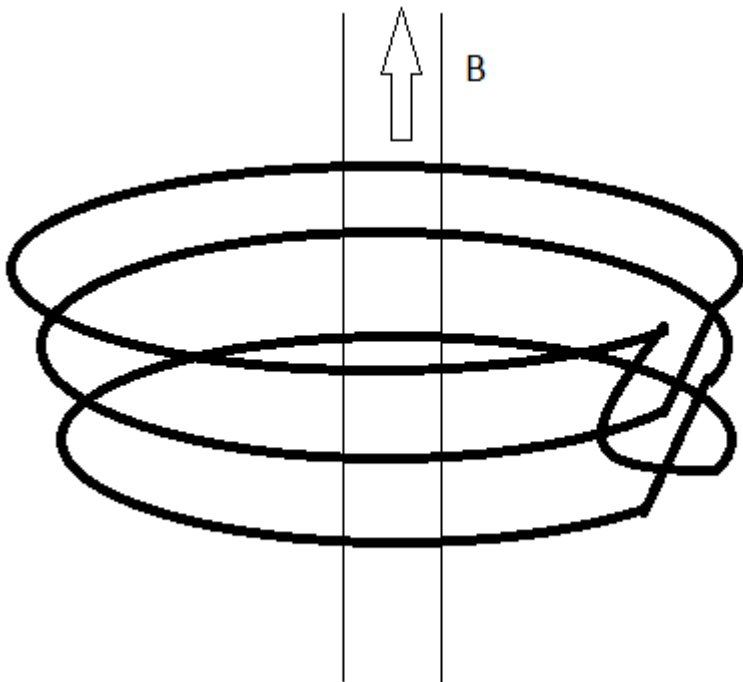
Αυτό θα μας οδηγήσει στις επιτρεπτές ενέργειες του συστήματος

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8mR^2}$$

Οι επιτρεπτές ενέργειες του συστήματος μετά την προσθήκη μαγνητικής ροής είναι συνεπώς οι ίδιες με το σύστημα χωρίς τη μαγνητική ροή. Τι διαφορά έχει αυτό το πρόβλημα με το προηγούμενο; Θα το συζητήσουμε μετά το επόμενο παράδειγμα. Αμέσως πάντως μπορούμε να πούμε ότι η ανεξαρτησία των ενεργειών από την κλεισμένη ροή δείχνει (από τη σχέση  $I = -\frac{\partial E_n}{\partial \Phi}$  που αναφέραμε πάνω) ότι δεν έχουμε ηλεκτρικό ρεύμα - το οποίο ήταν μάλλον αναμενόμενο για ένα κομμένο δακτυλίδι (ειδωμένο ως ηλεκτρικό κύκλωμα) σε στατικές συνθήκες!

### 2.6.2 Φορτίο σε δακτυλίδι με N σπείρες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε μια άλλη παραλλαγή του συστήματος. Αυτή τη φορά το δακτυλίδι φτιάχνει N σπείρες πριν να επιστρέψει σε ένα αρχικό του σημείο.



Όπως και στην προηγούμενη παραλλαγή θα βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις ενέργειες του συστήματος χωρίς την ροή μαγνητικού πεδίου. Αυτή την φορά δεν έχουμε τις συνθήκες του απειρόβαθου πηγαδιού άρα η κυματοσυνάρτηση θα είναι η πιο κάτω:

$$\Psi(R, \phi) = C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2 E}{\hbar^2}} \phi} \quad (2.6.4)$$

Επιβάλλουμε την συνοριακή συνθήκη ότι μετά από  $N$  σπείρες επιστρέφουμε στο αρχικό του σημείο, οπότε έχουμε

$$\Psi(R, \phi) = \Psi(R, \phi + 2N\pi) \quad (2.6.5)$$

$$C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}\phi} = C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}(\phi+2N\pi)}$$

$$e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}4N\pi} = 1 \quad (2.6.6)$$

$$\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}2N\pi = 2n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.6.7)$$

και κάπως έτσι βρίσκουμε τις επιτρεπτές ενέργειες

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2}{2mR^2N^2} \quad (2.6.8)$$

και από τις ενέργειες καταλήγουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις έχουν πάλι τη μορφή

$$\Psi(r, \phi) = C e^{in\phi} \quad (2.6.9)$$

Τώρα θα δούμε πως αυτά θα τροποποιηθούν όταν προσθέσουμε μαγνητική ροή. Η ιδιοκαταστάσεις θα είναι ίδιες με τις αρχικές με ένα έξτρα παράγοντα φάσης

$$\Psi'(R, \phi, z) = e^{i\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}\phi} C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}\phi} \quad (2.6.10)$$

Όπως προηγουμένως θα επιβάλουμε συνοριακές συνθήκες ώστε η κυματοσυνάρτηση να επιστρέψει στον εαυτό της μετά από  $\phi + 2N\pi$  ώστε να βρούμε τις επιτρεπτές ενέργειες του σωματιδίου.

$$e^{i\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}\phi} C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}\phi} = e^{i\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}(\phi+2N\pi)} C e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}(\phi+2N\pi)} \quad (2.6.11)$$

$$\Rightarrow e^{i\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}2N\pi} A e^{i\sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}2N\pi} = 1 \quad (2.6.12)$$

$$\left(\frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}2N\pi + \sqrt{\frac{2mR^2E}{\hbar^2}}\right)2N\pi = 2n\pi \quad (2.6.13)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(\frac{n}{N} - \frac{q}{\hbar}\frac{\Phi}{2\pi}\right)^2 \quad (2.6.14)$$

Απ' ότι βλέπουμε οι ενέργειες αυτού του προβλήματος επηρεάζονται από τη μαγνητική ροή.

**Συμπέρασμα:** Η προσθήκη μαγνητικής ροής στο σύστημα σε απαγορευμένη περιοχή δεν επηρεάζει πάντα τις επιτρεπτές ενέργειες του συστήματος. Οι επιτρεπτές ενέργειες ενός σώματος επηρεάζονται από μια μαγνητική ροή μόνο όταν υπάρχουν οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες (ή, απ' ότι φαίνεται, όταν υπάρχει πλήρης χβαντική συνοχή παντού γύρω-γύρω στην αζιμουθιακή διεύθυνση χωρίς διακοπή).

Σε όλα τα προβλήματα που έως τώρα υπολογίσαμε το ενεργειακό φάσμα είδαμε ότι αυτά επηρεάζονται από το "κλεισμένο" μαγνητικό πεδίο καταστρέφοντας τον εκφυλισμό τους. Αυτό όμως έχει μια βασική εξαίρεση! Στις επιτρεπτές ενέργειες που υπολογίσαμε πιο πάνω υπάρχει ένας όρος (π.χ. ο συνδυασμός παραμέτρων  $(\frac{q}{e} \frac{\Phi}{\Phi_0})$  στο απλό δακτυλίδι) που περιέχει τη μαγνητική ροή. Αν αυτός ο όρος είναι ακέραιος τότε επιστρέφει ο εκφυλισμός των ενεργειών και τότε το σύστημα συμπεριφέρεται σαν να μην υπάρχει κλεισμένο μαγνητικό πεδίο στο χώρο!! Προκύπτει πράγματι ότι, π.χ. για  $q = e$ , η φυσική του συστήματος επανέρχεται κάθε φορά που η  $\Phi$  είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του  $\Phi_0$  - και όλες οι ιδιότητες του συστήματος είναι περιοδικές συναρτήσεις του  $\Phi$ , με περίοδο  $\Phi_0$ .

## 2.7 Ηλεκτρικό φαινόμενο *Aharonov - Bohm*

Στα πιο πάνω παραδείγματα αναφέραμε την εμφάνιση του φαινομένου *Aharonov - Bohm* εξ' αιτίας παρουσίας μαγνητικής ροής που περικλείεται από το σύστημα, χωρίς οι μαγνητικές γραμμές να εισέρχονται στο χώρο του συστήματος (επαναλαμβάνουμε ότι αυτό συνήθως περιγράφεται από τον όρο "τύπου I"). Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε 3 παραδείγματα ενός ηλεκτρικού αναλόγου, δηλαδή φαινομένου *Aharonov - Bohm* εξ' αιτίας ηλεκτρικού πεδίου, που είναι πάλι "κλεισμένο", αλλά αυτή τη φορά όπως θα δούμε στο χωρόχρονο!

### 2.7.1 Απειρόβαθο πηγάδι με πυκνωτή στο κέντρο

Το πρώτο παράδειγμα είναι αρκετά απλό. Έχουμε ένα διπλό απειρόβαθο μονοδιάστατο πηγάδι (δηλ. στα 2 άκρα του έχουμε άπειρους τοίχους βαθμωτού δυναμικού). Στο κέντρο του πηγαδιού υπάρχει ένας πυκνωτής που όμως αρχικά οι δύο αντίθετα φορτισμένοι οπλισμοί του βρίσκονται ο ένας πάνω στον άλλο, έτσι ώστε αρχικά να μην έχουμε οποιαδήποτε κατανομή φορτίου στο χώρο και να είναι ωσάν ο πυκνωτής να μην υπάρχει. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει ένα σωματίδιο στο κέντρο του πηγαδιού και την χρονική στιγμή μηδέν το κύμα πιθανότητας χωρίζεται σε δύο μέρη (κυματοπακέτα), το ένα μέρος προχωρά προς τα δεξιά ενώ το άλλο μέρος προχωρά προς τα αριστερά, το καθένα με την ίδια ομαδική ταχύτητα. Τα δύο κυματοπακέτα θα ανακλαστούν στα τοιχώματα και θα επιστρέψουν πίσω στην αρχική τους θέση. Όταν θα ξανασυναντηθούν, η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυματοπακέτων



θα είναι προφανώς μηδέν και θα έχουμε ενισχυτική συμβολή.

Ας κάνουμε όμως μια αλλαγή στο πρόβλημα: Λίγο μετά απο τη στιγμή που θα χωριστούν τα δύο κύματα ας απομακρύνουμε τις πλάκες του πυκνωτή, έτσι ώστε να δημιουργηθεί για λίγο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του (αλλά πάντα μηδέν ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του, εκεί δηλαδή που βρίσκονται τα δύο κυματοπακέτα), με την προοπτική να ξανακλείσουμε τις πλάκες σύντομα, πριν γίνει η επανασύνδεση και τα δυό κυματοπακέτα ξανασυναντηθούν στο κέντρο. Έστω οτι οι πλάκες έχουν διαφορά δυναμικού  $\Delta V(t)$  με αποτέλεσμα μέσα στον πυκνωτή να δημιουργηθεί ηλεκτρικό πεδίο έντασης  $\vec{E}(t) = \frac{\Delta V(t)}{d(t)} \hat{x}$ , όπου  $d(t)$  η (γενικά χρονο-εξαρτημένη) απόσταση μεταξύ των δύο πλακών του πυκνωτή. (Θα πρέπει βέβαια οι πλάκες να μην απέχουν πολύ μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ τους σε σχέση με τις διαστάσεις των πλακών ώστε το ηλεκτρικό πεδίο να είναι κατα καλή προσέγγιση ομογενές). Και όπως ήδη είπαμε οτι είχαμε πρόθεση να κάνουμε, οι πλάκες θα πρέπει να ξανά ενωθούν πριν τα δύο κύματα ξανά συναντηθούν στο κέντρο ώστε τα κύματα να μην αλληλεπιδράσουν ποτέ άμεσα με το ηλεκτρικό πεδίο.



Η διαδικασία είναι πλέον γνωστή. Θα μεταφερθούμε από την αρχική κατάσταση, όπου δεν υπάρχει καθόλου στο χώρο ηλεκτρικό πεδίο, στην νέα κατάσταση με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας, το μόνο που θα χρειαστεί να υπολογίσουμε είναι την συνάρτηση  $\Lambda$ . Στην αρχική

περίπτωση το βαθμωτό δυναμικό είναι μηδέν παντού. Στην δεύτερη περίπτωση θα πρέπει να δούμε τα βαθμωτά δυναμικά πως μεταβάλλονται στο χώρο (και στο χρόνο).

Είχαμε πει ότι οι δύο πλάκες του πυκνωτή έχουν διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  (που εδώ είναι αρνητικό). Για ευκολία θα γειώσουμε την μία πλάκα (ας πούμε την αριστερή) ώστε το δυναμικό σε αυτή να είναι μηδέν, έτσι το δυναμικό στην άλλη πλάκα είναι  $\Delta V$ . Έξω από τον πυκνωτή το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, και σύμφωνα με την σχέση  $E = -\nabla V$  θα πρέπει το  $V$  να είναι σταθερό. Επειδή το βαθμωτό δυναμικό πρέπει να είναι και συνεχής συνάρτηση παντού στο χώρο (αφού δεν έχουμε οπουδήποτε ηλεκτρικά δίπολα), τότε το δυναμικό αριστερά από τον πυκνωτή θα είναι ίσιο με το δυναμικό στην γειωμένη πλάκα του πυκνωτή (άρα μηδέν), ενώ το δυναμικό στα δεξιά του δεξιού πυκνωτή είναι ίσο με το δυναμικό στην άλλη πλάκα του πυκνωτή (άρα  $\Delta V$ ). Τέλος έξω από το πηγάδι το δυναμικό είναι άπειρο για να μην μπορεί το σωματίδιο να διαφύγει.

$$\Rightarrow V = \begin{cases} \infty, & \text{έξω από το πηγάδι} \\ 0, & \text{αριστερά από τον πυκνωτή} \\ \Delta V, & \text{δεξιά από τον πυκνωτή} \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Καιρός να βρούμε την συνάρτηση  $\Lambda$ . Το διανυσματικό δυναμικό  $A$  είναι μηδέν παντού και πριν την μετατόπιση και κατά την διάρκεια της μετατόπισης των πλακών του πυκνωτή. Με αυτό φτάνουμε στην ακόλουθη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial x} \Lambda(x, t) = 0 \quad (2.7.2)$$

με άλλα λόγια η συνάρτηση  $\Lambda$  είναι ανεξάρτητη του χώρου. Στο αριστερό κομμάτι του πυκνωτή στο οποίο και πριν και κατά την διάρκεια της απομάκρυνσης των δύο πλακών του πυκνωτή το βαθμωτό δυναμικό πρέπει να είναι ίσο με μηδέν, για ευκολία θα πάρουμε ότι η συνάρτηση  $\Lambda$  είναι μηδέν. Δεξιά από τον πυκνωτή το βαθμωτό δυναμικό δεν είναι μηδέν μετά την απομάκρυνση, μάλιστα όλος ο χώρος δεξιά από τον πυκνωτή (εως βέβαια τον δεξιό άπειρο τοίχο) θα είναι "ισοδυναμικός όγκος" με δυναμικό  $\Delta V$ . Άρα έχουμε

$$\frac{\partial \Lambda(t)}{\partial t} = -V_{\text{δεξια}} = -\Delta V \quad (2.7.3)$$

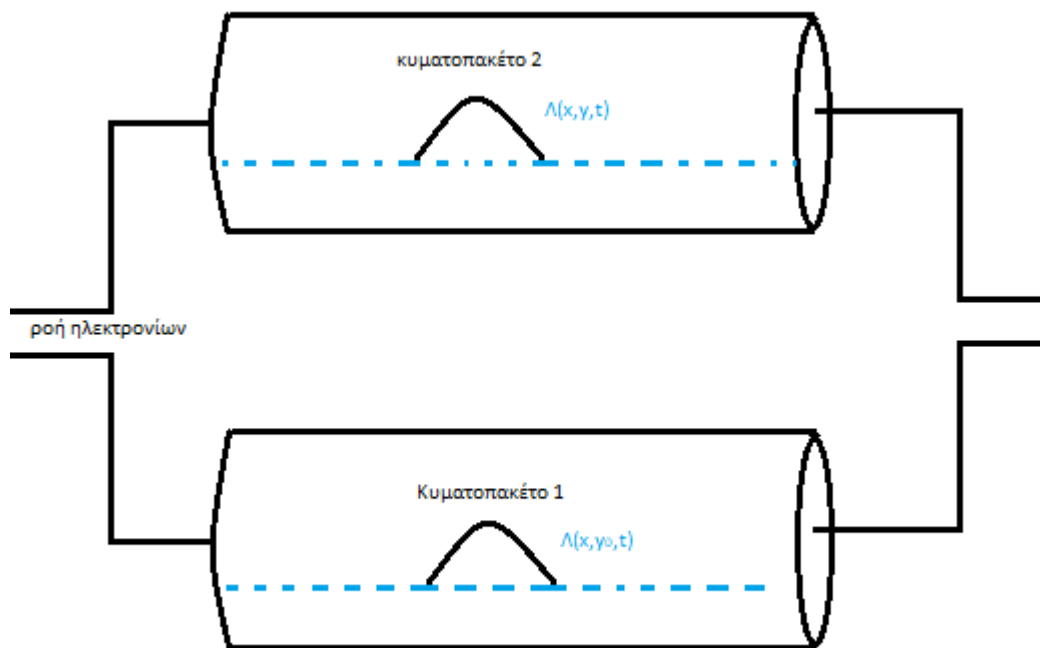
Ολοκληρώνοντας ως προς  $t$  μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση  $\Lambda(t)$

$$\Lambda(t) = - \int_0^t d\tau \Delta V \quad (2.7.4)$$

Για να βρούμε την διαφορά φάσης που θα έχουν τα δύο κύματα όταν θα ξανασυναντηθούν στο κέντρο θα πρέπει να βρούμε τις κυματοσυναρτήσεις των κυματοπακέτων και αυτό θα το κάνουμε με την χρήση μετασχηματισμού βαθμίδας  $\Psi'(x, t) = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda(t)}\Psi(x, t)$  Το κύμα που κινείται αριστερά από τον πυκνωτή τότε δεν θα έχει κάποια διαφορά στην κυματοσυνάρτησή του αφού το  $\Lambda$  είναι μηδέν. Το κύμα που κινείται δεξιά από τον πυκνωτή θα έχει στην κυματοσυνάρτησή του μια έξτρα φάση  $e^{-i\frac{q}{\hbar}\Delta VT}$  (εδώ υποθέσαμε για απλότητα ότι το  $\Delta$  είναι ανεξάρτητο του χρόνου). Όταν τα δύο κύματα θα επιστρέψουν η μεταβολή φάσης θα είναι λοιπόν η πάνω. Είναι άξιο προσοχής το ότι αυτό το ηλεκτρικό πεδίο ήταν πάντα "μακριά" από τα κυματοπακέτα (και σε χώρο και σε χρόνο!), με μιά έννοια "κλεισμένο" από το σύστημα στο χωρόχρονο.! Έχουμε δηλαδή και εδώ συνθήκες ενός ηλεκτρικού φαινομένου *Aharonov-Bohm*, που τώρα οφείλεται σε "κλεισμένη ροή" στο χωρόχρονο. (Μπορεί κανείς να δει ότι το πάνω γενικό αποτέλεσμα για την έξτρα διαφορά φάσης που δημιουργείται - τώρα από τα βαθμωτά δυναμικά - μπορεί πάλι να γραφτεί με τον ίδιο τύπο που γράφεται συνήθως για τη διαφορά φάσης στο σύννητες μαγνητικό φαινόμενο *Aharonov-Bohm*, δηλαδή  $\Delta\phi = 2\pi\frac{q}{e}\frac{\Phi}{\Phi_0}$ , αρκεί κανείς να ορίσει κατάλληλα τη "ροή"  $\Phi$  ως ένα ολοκλήρωμα χρονικό και ένα ολοκλήρωμα χωρικό του ηλεκτρικού πεδίου  $E(x', t')$ ). Παρακάτω θα δούμε εφαρμογές του πάνω ηλεκτρικού φαινομένου *Aharonov - Bohm*.

### 2.7.2 Σωλήνες με χρονικά μεταβαλλόμενη διαφορά δυναμικού

Σε αυτή την ενότητα θα εφαρμόσουμε την πάνω λογική (της κλεισμένης ηλεκτρικής ροής στο χωρόχρονο) σε δύο οριζόντιους σωλήνες, με τον κάθε σωλήνα να διαρρέεται από δύο κυματοπακέτα.



Για να βρούμε την συνάρτηση  $\Lambda$  θα χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία που αναπτύσσεται με λεπτομέρεια στο παράρτημα: Πώς υπολογίζεται η συνάρτηση  $\Lambda$  αντιστρέφοντας το σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων. Αρχικά να θυμίσουμε αυτές τις μερικές διαφορικές εξισώσεις για την συνάρτηση  $\Lambda$

$$\frac{\partial \Lambda(x, y, t)}{\partial x} = A_x(x, y, t) \quad (2.7.5)$$

$$\frac{\partial \Lambda(x, y, t)}{\partial y} = A_y(x, y, t) \quad (2.7.6)$$

$$\frac{\partial \Lambda(x, y, t)}{\partial t} = -V(x, y, t) \quad (2.7.7)$$

όπου τα δυναμικά σημαίνουν γενικά τις διαφορές των δυναμικών μεταξύ των 2 προβλημάτων που αντιστοιχίζουμε, δηλ.  $\vec{A} = \vec{A}_2 - \vec{A}_1$  και  $V = V_2 - V_1$ . Τα πάνω δίνουν αμέσως (στο σημείο παρατήρησης  $(x, y, t)$  όπου ισχύουν αυτές οι εξισώσεις) ότι οι παρακάτω διαφορές πεδίων και είναι μηδέν ακριβώς στο χωροχρονικό σημείο  $(x, y, t)$  – αλλά δεν αποκλείεται να είναι μη-μηδενικές σε άλλα σημεία του χωρόχρονου..!. πρέπει να είναι τέτοια ώστε να ισχύουν τα πιο κάτω

$$B_z(x', y', t') = \frac{\partial A_y(x', y', t')}{\partial x'} - \frac{\partial A_x(x', y', t')}{\partial y'} \quad (2.7.8)$$

$$E_x(x', y', t') = -\frac{\partial V(x', y', t')}{\partial x'} - \frac{\partial A_x(x', y', t')}{\partial t'} \quad (2.7.9)$$

$$E_y(x', y', t') = -\frac{\partial V(x', y', t')}{\partial y'} - \frac{\partial A_y(x', y', t')}{\partial t'} \quad (2.7.10)$$

Ας ξεκινήσουμε με την (2.7.5)

$$\frac{\partial \Lambda(x, y, t)}{\partial x} = A_x(x, y, t) \quad (2.7.11)$$

$$\int_{x_0}^x dx' \frac{\partial \Lambda(x', y, t)}{\partial x'} = \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + f(y, t) \quad (2.7.12)$$

$$\Lambda(x, y, t) - \Lambda(x_0, y, t) = \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + f(y, t) \quad (2.7.13)$$

$$\frac{\partial \Lambda(x, y, t)}{\partial y} - \frac{\partial \Lambda(x, y_0, t)}{\partial y} = \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial A_x(x', y, t)}{\partial y} + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \quad (2.7.14)$$

$$A_y(x, y, t) - \frac{\partial \Lambda(x, y_0, t)}{\partial y} = \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial A_x(x', y, t)}{\partial y} + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \quad (2.7.15)$$

$$A_y(x, y, t) - \frac{\partial \Lambda(x, y_0, t)}{\partial y} = \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial A_x(x', y, t)}{\partial y} + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \quad (2.7.16)$$

$$A_y(x, y, t) - \frac{\partial \Lambda(x_0, y, t)}{\partial y} = \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial A_y(x', y, t)}{\partial x'} - \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y, t) + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \quad (2.7.17)$$

$$A_y(x, y, t) - \frac{\partial \Lambda(x_0, y, t)}{\partial y} = A_y(x, y, t) - A_y(x_0, y, t) - \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y, t) + \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \quad (2.7.18)$$

$$\frac{\partial \Lambda(x_0, y, t)}{\partial y} = A_y(x_0, y, t) + \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y, t) - \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \quad (2.7.19)$$

$$\int_{y_0}^y dy' \frac{\partial \Lambda(x_0, y', t)}{\partial y'} = \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) - \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial f(y', t)}{\partial y'} + g(x, t) \quad (2.7.20)$$

$$\Lambda(x_0, y, t) - \Lambda(x_0, y_0, t) = \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) - f(y, t) + f(y_0, t) + g(x, t) \quad (2.7.21)$$

Το αριστερό μέλος της συνάρτησης (2.7.21) είναι ανεξάρτητο του  $x$  έτσι και το δεξιό μέλος της συνάρτησης πρέπει να είναι ανεξάρτητο του  $x$ . Έτσι καταλήγουμε ότι το πιο κάτω

$$\int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) + g(x, t) \quad (2.7.22)$$

πρέπει να είναι ανεξάρτητο του  $x$  (αυτή η συνθήκη θα είναι χρήσιμη για να βρεθεί η κατάλληλη συνάρτηση  $g$ ).

$$\Lambda(x_0, y, t) = \Lambda(x_0, y_0, t) + \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) - f(y, t) + f(y_0, t) + g(x, t) \quad (2.7.23)$$

Τώρα θα αντικαταστήσουμε το πιο πάνω στην (2.7.13)

$$\begin{aligned}\Lambda(x, y, t) &= \Lambda(x_0, y_0, t) + \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) - f(y, t) \\ &\quad + f(y_0, t) + g(x, t) + \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + f(y, t)\end{aligned}\tag{2.7.24}$$

$$\begin{aligned}\Lambda(x, y, t) &= \Lambda(x_0, y_0, t) + \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) + \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) \\ &\quad + f(y_0, t) + g(x, t)\end{aligned}\tag{2.7.25}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda(x, y, t)}{\partial t} &= \frac{\partial \Lambda(x_0, y_0, t)}{\partial t} + \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial A_y(x_0, y', t)}{\partial t} + \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial A_x(x', y, t)}{\partial t} \\ &\quad + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t)}{\partial t} + \frac{\partial f(y_0, t)}{\partial t} + \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.7.26}$$

$$\begin{aligned}-V(x, y, t) &= \frac{\partial \Lambda(x_0, y_0, t)}{\partial t} + \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial A_y(x_0, y', t)}{\partial t} + \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial A_x(x', y, t)}{\partial t} \\ &\quad + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t)}{\partial t} + \frac{\partial f(y_0, t)}{\partial t} + \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.7.27}$$

$$\begin{aligned}-V(x, y, t) &= \frac{\partial \Lambda(x_0, y_0, t)}{\partial t} - \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial V(x_0, y', t)}{\partial y'} - \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t) - \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial V(x', y, t)}{\partial x'} \\ &\quad - \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t)}{\partial t} + \frac{\partial f(y_0, t)}{\partial t} + \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.7.28}$$

$$\begin{aligned}-V(x, y, t) &= \frac{\partial \Lambda(x_0, y_0, t)}{\partial t} - V(x_0, y, t) + V(x_0, y_0, t) - \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t) - V(x, y, t) + V(x_0, y, t) \\ &\quad - \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t)}{\partial t} + \frac{\partial f(y_0, t)}{\partial t} + \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.7.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Lambda(x_0, y_0, t)}{\partial t} &= -V(x_0, y_0, t) + \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t) + \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t) - \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t)}{\partial t} \\ &\quad - \frac{\partial f(y_0, t)}{\partial t} - \frac{\partial g(x, t)}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.7.30}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda(x_0, y_0, t) - \Lambda(x_0, y_0, t_0) = & - \int_{t_0}^t dt' V(x_0, y_0, t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') \\
& - \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t')}{\partial t'} - \int_{t_0}^t dt' \frac{\partial f(y_0, t')}{\partial t'} - \int_{t_0}^t dt' \frac{\partial g(x, t')}{\partial t'} \\
& + h(x, y)
\end{aligned} \tag{2.7.31}$$

Τώρα βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος της πιο πάνω σχέσης είναι ανεξάρτητο και του  $x$  και του  $y$  άρα και το δεξί μέλος θα είναι ανεξάρτητο του  $x$  και του  $y$ . Έτσι καταλήγουμε ότι το

$$\int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') + h(x, y) \tag{2.7.32}$$

πρέπει να είναι ανεξάρτητο του  $x$  (και πάλι συνθήκη απαραίτητη για να βρεθεί η συνάρτηση  $h(x, y)$ ) και ότι το

$$\int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') - \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t')}{\partial t'} + h(x, y) \tag{2.7.33}$$

πρέπει να είναι ανεξάρτητο του  $y$ . Τελος θα αντικαταστήσουμε την (2.7.31) στην (2.7.24)

$$\begin{aligned}
\Lambda(x, y, t) = & \Lambda(x_0, y_0, t_0) - \int_{t_0}^t dt' V(x_0, y_0, t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') \\
& - \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t')}{\partial t'} - f(y_0, t) + f(y_0, t_0) - g(x, t) + g(x, t_0) \\
& + h(x, y) + \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) + \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) \\
& + f(y_0, t) + g(x, t)
\end{aligned} \tag{2.7.34}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda(x, y, t) = & \Lambda(x_0, y_0, t_0) - \int_{t_0}^t dt' V(x_0, y_0, t') + \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) \\
& + \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') - \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t')}{\partial t'} \\
& + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) + f(y_0, t_0) + g(x, t_0) + h(x, y)
\end{aligned} \tag{2.7.35}$$

Το μαγνητικό πεδίο μπορεί χωρικά να έχει ασυνέχειες (απο το εξωτερικό στο εσωτερικό των σωλήνων) αλλά χρονικά θα μπορούσε να είναι μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση οπότε στο τριπλό ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου στην πάνω έκφραση μπορούμε να

αλλάζουμε σειρά στο χρονικό ολοκλήρωμα με τα χωρικά

$$\begin{aligned}
\Lambda(x, y, t) &= \Lambda(x_0, y_0, t_0) - \int_{t_0}^t dt' V(x_0, y_0, t') + \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) \\
&+ \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') - \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \int_{t_0}^t dt' \frac{\partial B_z(x', y', t')}{\partial t'} \\
&+ \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) + f(y_0, t_0) + g(x, t_0) + h(x, y)
\end{aligned} \tag{2.7.36}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda(x, y, t) &= \Lambda(x_0, y_0, t_0) - \int_{t_0}^t dt' V(x_0, y_0, t') + \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) \\
&+ \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') - \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) \\
&+ \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) + f(y_0, t_0) + g(x, t_0) + h(x, y)
\end{aligned} \tag{2.7.37}$$

Έτσι καταλήγουμε σε μια γενική συνάρτηση  $\Lambda$ .

$$\begin{aligned}
\Lambda(x, y, t) &= \Lambda(x_0, y_0, t_0) - \int_{t_0}^t dt' V(x_0, y_0, t') + \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) \\
&+ \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') + f(y_0, t_0) + g(x, t_0) \\
&+ h(x, y)
\end{aligned} \tag{2.7.38}$$

όπου οι ποσότητες  $f(y_0, t_0)$ ,  $g(x, t_0)$  και  $h(x, y)$  πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε:

$\int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) + g(x, t)$  και  $\int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') + h(x, y)$  να είναι ανεξάρτητα του  $x$

$\int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') - \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t')}{\partial t'} + h(x, y)$  να είναι ανεξάρτητο του  $y$

Μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι αυτή είναι μια γενική λύση που ικανοποιεί το αρχικό σύστημα των 3 μερικών διαφορικών εξισώσεων [12]

Χρησιμοποιώντας την πάνω γενική λύση για ένα σημείο  $y$  που βρίσκεται στον πάνω σωλήνα και για ένα σημείο αναφοράς  $y = y_0$  που βρίσκεται στον κάτω σωλήνα και αφαιρώντας τα δύο μπορούμε να βρούμε την διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυματοπακέτων, που όπως το



προβλέψαμε θα είναι μη μηδενική. Πράγματι παίρνουμε

$$\begin{aligned} \Delta\Lambda = & \int_{x_0}^x dx' (A_x(x', y, t) - A_x(x', y_0, t)) + \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' (E_x(x', y, t') - E_x(x', y_0, t')) \\ & + h(x, y) - h(x, y_0) \end{aligned} \tag{2.7.39}$$

Με τα αποτελέσματα αυτά υπάρχει η δυνατότητα κανείς να μελετήσει πίο προσεκτικά το ηλεκτρικό φαινόμενο *Aharonov-Bohm*, αξιοποιώντας τους πάνω έξτρα όρους - κάτι που το αφήνουμε για το μέλλον.

### 3 Επίπεδα Landau

Στο προηγούμενο μέρος της διπλωματικής αυτής εργασίας αποδείξαμε την ύπαρξη φαινομένων που οφείλονται σε μαγνητικά ή ηλεκτρικά πεδία που βρίσκονται "κλεισμένα" σε περιοχές που περικλείονται στο χώρο (ή στο χωρόχρονο) από το σύστημα υπό μελέτη. Αυτό το κάναμε με κανονικό Χαμιλτονιανό φορμαλισμό, συγκρίνοντας τις λύσεις της εξίσωσης *Schrödinger* μεταξύ ενός συστήματος που δεν περικλείει κανένα πεδίο και ενός που περικλείει κάποιο μαγνητικό ή ηλεκτρικό πεδίο και αυτή η σύγκριση έγινε με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας και με μία "συνάρτηση βαθμίδας"  $\Lambda$  που μας προέκυψε να είναι πλειότιμη (η ισοδύναμα ασυνεχής). Οι περιπτώσεις αυτές έχουν ονομασθεί στη βιβλιογραφία "φαινόμενα *Aharonov-Bohm* τύπου I", ενώ περιπτώσεις που τα σωματίδια του συστήματος υπό μελέτη περνούν και μέσα από π.χ. μαγνητικό πεδίο ονομάζονται συνήθως "τύπου II". Σε αυτό το μέρος της εργασίας θα διερευνήσουμε μία περίπτωση που θυμίζει το μαγνητικό φαινόμενο τύπου II, που είναι η περίπτωση κβαντικού σωματιδίου που κινείται σε χώρο όπου υπάρχει παντού ομογενές μαγνητικό πεδίο. Γι αυτό το πρόβλημα θα λύσουμε απ' ευθείας την εξίσωση *Schrödinger* του προβλήματος διαφημίζοντας έτσι ένα διάσημο πρόβλημα που έλυσε ο *Landau* το 1930 [7] και το οποίο τα τελευταία χρόνια έχει αποδειχθεί ότι είναι κεντρικό πρόβλημα, κυρίως στη Φυσική Συμπυκνωμένης Ύλης (στην περιοχή του Κβαντικού Φαινομένου *Hall*). Η λύση αυτού του προβλήματος θα οδηγήσει στις περίφημες στάθμες *Landau*. Θα φτάσουμε στην τελική λύση σιγά - σιγά λύνοντας παράπλευρα προβλήματα πριν καταλήξουμε σε αυτό που θέλουμε.

#### 3.1 Κίνηση φορτίου σε μαγνητικό πεδίο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την κίνηση ενός φορτίου σε ένα διδιάστατο χώρο όταν υπάρχει μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο.

##### 3.1.1 Κίνηση φορτίου σε επίπεδη επιφάνεια με κάθετο σε αυτή μαγνητικό πεδίο

Ένα κβαντικό σωματίδιο φορτίου  $q$  κινείται σε επίπεδο, ας πούμε στο εσωτερικό ενός πολύ μεγάλου ορθογωνίου με πλευρές  $L_x$  και  $L_y$ . Στο επίπεδο υπάρχει κάθετο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ . Ένα διανυσματικό δυναμικό που θα χρησιμοποιήσουμε γι' αυτό το πρόβλημα είναι

μιά απο τις δύο βαθμίδες *Landau*:

$$\vec{A} = xB_0\hat{y} \quad (3.1.1)$$

$$\vec{A} = -yB_0\hat{x} \quad (3.1.2)$$

Και οι δύο ικανοποιούν το γεγονός ότι η στροφή τους δίνει το πάνω μαγνητικό πεδίο οπότε έχουμε το δικαίωμα να διαλέξουμε οποιαδήποτε απο τις δύο. Θα επιλέξουμε την (3.1.1) για να λύσουμε το πρόβλημα (δηλαδή την αντίστοιχη εξίσωση *Schrödinger*).

Το διανυσματικό δυναμικό που διαλέξαμε παραμένει σταθερό κατα μήκος του  $y$  άξονα (αλλιώς, η χαμιλτονιανή σε αυτή τη βαθμίδα δεν έχει μέσα της το  $y$ , και άρα μετατίθεται με τον τελεστή της κανονικής ορμής  $p_y$ ,  $[H, p_y] = 0$  και άρα μπορούμε να βρούμε κοινές ιδιοσυναρτήσεις των  $H$  και  $p_y$ . Γι αυτό, κατά μήκος της  $y$  κατεύθυνσης έχουμε επίπεδα κύματα με ορμή  $\hat{p}_y = \hbar k_y$ . Η χαμιλτονιανη γί αυτή τη βαθμίδα (που δεν έχει  $x$ -συνιστώσα) θα είναι:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2m}(\hat{p}_y - q\hat{A}_y)^2 \quad (3.1.3)$$

Για να βρούμε τις ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής, μπορούμε όπως είπαμε να γράψουμε το *ansatz*

$$\Psi(x, y) = X(x)e^{ik_y y} \quad (3.1.4)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις ιδιοκαταστάσεις στην εξίσωση *Schrödinger* τότε θα βρούμε και τη μορφή της  $X(x)$

$$\frac{\hat{p}_x^2}{2m}X(x) + \frac{q^2 B_0^2}{2m} \left(\frac{\hbar k_y}{qB_0} - x\right)^2 X(x) = EX(x) \quad (3.1.5)$$

Η πιο πάνω εξίσωση έχει την μορφή αρμονικού ταλαντωτή

$$\frac{\hat{p}_x^2}{2m}X(x) + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2 X(x) = EX(x)$$

όπου  $|\omega| = \frac{qB_0}{m}$  και  $x_0 = \frac{\hbar k_y}{qB_0}$ . Για ηλεκτρόνιο  $q = -e$  και αυτή η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή μπορεί να γραφτεί ως  $x_0 = -k_y l_B^2$  όπου  $l_B$  το λεγόμενο μαγνητικό μήκος, με  $l_B^2 = \hbar/eB$ .

Οι ιδιοσυναρτήσεις της χαμιλτονιανής ενός αρμονικού ταλαντωτή είναι:

$$X(x) \sim H_m(x - x_0)e^{-\frac{eB_0(x-x_0)^2}{2\hbar}} \quad (3.1.6)$$

με  $x_0$  το κέντρο ταλάντωσης του σωματιδίου. Επίσης οι επιτρεπτές ενέργειες που έχει το σωματίδιο δίνονται απο το ενεργειακό φάσμα ενός αρμονικού ταλαντωτή

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (3.1.7)$$

με  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Αυτές είναι οι περίφημες στάθμες Λανδau. Τώρα θα επιβάλουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες στην  $y$  διεύθυνση

$$e^{iky} = e^{ik(y+L_y)} \Rightarrow k = \frac{2n_y\pi}{L_y} \quad (3.1.8)$$

με  $n_y$  ακέραιο. Θα πρέπει να επιβάλουμε στο κέντρο ταλάντωσης του φορτίου να βρίσκεται εντός του ορθογωνίου, άρα

$$\begin{aligned} 0 < x_0 < L_x \\ \Rightarrow \frac{\hbar k_y}{eB_0} < L_x \\ \Rightarrow k_y < \frac{eB_0 L_x}{\hbar} \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

αν αντικαταστήσουμε την (3.1.8) στην (3.3.1) τότε θα δούμε ότι ο ακέραιος αριθμός  $n_y$  δεν μπορεί να πάρει όποια τιμή θέλει αλλά έχει περιορισμούς

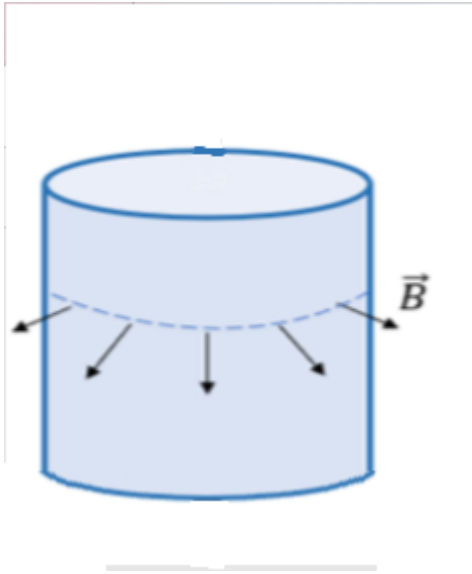
$$\frac{2n_y\pi}{L_y} < \frac{eB_0 L_x}{\hbar} \quad (3.1.10)$$

$$\Rightarrow n_y < \frac{eB_0 L_y L_x}{\hbar 2\pi} \quad (3.1.11)$$

Η ποσότητα  $B_0 L_x L_y$  είναι η μαγνητική ροή που περνάει απο το ορθογώνιο, και το πάνω αποτέλεσμα περιγράφει τον μεγάλο εκφυλισμό που έχει κάθε στάθμη *Landau*. Φαίνεται αμέσως οτι αυτός ο εκφυλισμός μπορεί να γραφτεί σαν  $\frac{\Phi}{\Phi_0}$ , όπου  $\Phi_0$  είναι το κβάντο ροής που είδαμε προηγουμένως ( $\Phi_0 = \frac{h}{e}$ ). Βλέπουμε οτι ο εκφυλισμός εξαρτάται από την μαγνητική ροή που περνά από μέσα απο το σύστημα.

### 3.1.2 Κίνηση φορτίου σε κυλινδρική επιφάνεια με κάθετο σε αυτή μαγνητικό πεδίο

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετήσουμε το ίδιο σύστημα με προηγουμένως με μια απλή διαφορά: η κίνηση του σωματιδίου γίνεται πάνω σε κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας  $R$ .



Για την εύρεση των κυματοσυναρτήσεων και των ενεργειών θα χρησιμοποιήσουμε την βαθμίδα *Landau* με μια απλή προσαρμογή ώστε η διεύθυνση του διανυσματικού δυναμικού να είναι παράλληλη με την αξιμουθιακή διεύθυνση.

$$\vec{A} = B_0 z R \hat{\phi} \quad (3.1.12)$$

$$\Psi(\vec{r}) = R(r)\Phi(\phi)Z(z) \quad (3.1.13)$$

Σε αυτή την περίπτωση βλέπουμε ότι κατά μήκος της αξιμουθιακής διεύθυνσης η ιδιοσυνάρτηση της χαμιλτονιανής θα συμπεριφέρεται σαν επίπεδο κύμα με ορμή  $p_\phi = \hbar k_\phi$ . Έτσι μπορούμε να πούμε για την  $\Phi(\phi)$ , ότι έχει την μορφή  $\sim e^{ik_\phi R\phi}$ . Το ακτινικό κομμάτι της κυματοσυνάρτησης δεν μας απασχολεί αφού το φορτίο κινείται στην επιφάνεια του κυλίνδρου. Για να βρούμε την κυματοσυνάρτηση στο  $Z$  άξονα όμως θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση *Schrödinger*

$$\hat{H}\Psi(R, \phi, z) = E\Psi(R, \phi, z)$$

$$\frac{\hat{p}_z^2}{2m}R(r)\Phi(\phi)Z(z) + \frac{1}{2m}(p_\phi - qA_\phi)^2R(r)\Phi(\phi)Z(z) = ER(r)\Phi(\phi)Z(z)$$

Η ακτινική συνιστώσα δεν έχει κάποια σημασία γιατί όπως είπαμε μελετούμε την κίνηση του σωματιδίου στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου. Αντικαθιστώντας την ορμή στην  $\phi$  κατεύθυνση βλέπουμε ότι μπορούμε να διώξουμε και την συνάρτηση του  $\phi$  χωρίς καμιά συνέπεια

$$\frac{\hat{p}_z^2}{2m}Z(z) + \frac{1}{2m}(\hbar k_\phi - qB_0 z R)^2 Z(z) = EZ(z)$$

Θα βγάλουμε κοινό παράγωγο στον δεύτερο όρο το  $B_0qR$

$$\frac{\hat{p}_z^2}{2m}Z(z) + \frac{B_0^2q^2R^2}{2m}\left(\frac{\hbar k_\phi}{qB_0R} - z\right)^2Z(z) = EZ(z)$$

Καταλήγουμε πάλι σε εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με τα  $\omega$  και  $z_0$  να ορίζονται όπως πιο κάτω:

$$|\omega| = \frac{B_0qR}{m}$$

$$z_0 = \frac{\hbar k_\phi}{qB_0R}$$

Θα επιβάλουμε τις συνοριακές συνθήκες στο σύστημα (που είναι πάλι η μονοτιμία, τώρα πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου). Θα πρέπει λοιπόν η  $\Phi(\phi)$  να είναι περιοδική.

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$$

$$\Rightarrow e^{ik_\phi R 2\pi} = 1$$

$$k_\phi R 2\pi = 2n_x\pi$$

$$k_\phi = \frac{n_x}{R}$$

Αν πούμε ότι η περίμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι  $L_x$  τότε μπορούμε να αλλάξουμε τις επιτρεπτές τιμές που μπορεί να πάρει το  $k_\phi$  σε κάτι πιο γνώριμο

$$k_\phi = \frac{2n_x\pi}{L_x} \quad (3.1.14)$$

Όπως και στο προηγούμενο σύστημα το κέντρο ταλάντωσης του πρέπει να βρίσκεται εντός του κυλίνδρου

$$0 < z_0 < L_z$$

$$\frac{\hbar k_\phi}{qB_0R} < L_z$$

$$\Rightarrow k_\phi < \frac{qB_0RL_z}{\hbar}$$

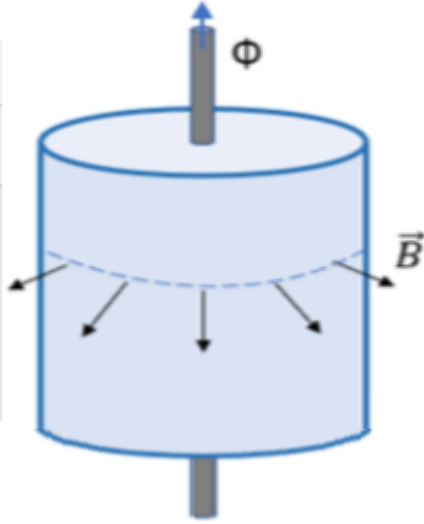
$$\Rightarrow \frac{2n_x\pi}{L_x} < \frac{qB_0RL_z}{\hbar}$$

$$\Rightarrow n_x < \frac{qB_0RL_zL_x}{2\pi\hbar} \quad (3.1.15)$$

Βλέπουμε ότι οι επιτρεπτές ενέργειες και ο εκφυλισμός κάθε στάθμης *Landau* είναι ίδια με προηγουμένως που η επιφάνεια ήταν επίπεδη (όλα αναμενόμενα, μιας και τα δύο προβλήματα είναι ουσιαστικά ισοδύναμα).

### 3.2 Εισαγωγή σταθερής μαγνητικής ροής στο πρόβλημα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το ίδιο παράδειγμα αλλά αυτή την φορά θα προσθέσουμε μαγνητική ροή  $\Phi$  μέσα απο τον κενό του κυλίνδρου τύπου *Aharonov - Bohm*.



Με αυτά που συζητήσαμε στο μέρος με τους μετασχηματισμούς βαθμίδας προαισθανόμαστε ότι θα αλλάξουν κάποια πράγματα αν και η μαγνητική ροή που προσθέσαμε δε "αγγίζει" τον κύλινδρο. Το διανυσματικό δυναμικό θα είναι το άθροισμα του διανυσματικού δυναμικού λόγω του μαγνητικού πεδίου που είναι κάθετο στην παράπλευρη επιφάνεια και του διανυσματικού δυναμικού λόγω της μαγνητικής ροής, σαν και αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο μονοδιάστατο δακτυλίδι

$$\vec{A} = (B_0 z R + \frac{\Phi}{2\pi R}) \hat{\phi} \quad (3.2.1)$$

Θα ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα με προηγούμενως. Θα κάνουμε χωρισμό μεταβλητών στην κυματοσυνάρτηση  $\Psi(R, \phi, z) = f(R)\Phi(\phi)Z(z)$ . Το αζιμουθιακό κομμάτι όπως και πριν, έχει την μορφή επίπεδων κυμάτων  $\sim e^{ik_\phi\phi}$ . Για να βρούμε την υπόλοιπη κυματοσυνάρτηση θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση *Schrödinger*

$$\frac{\hat{p}_z^2}{2m} R(r)\Phi(\phi)Z(z) + \frac{1}{2m} (p_\phi - qA_\phi)^2 R(r)\Phi(\phi)Z(z) = ER(r)\Phi(\phi)Z(z)$$

$$\frac{\hat{p}_z^2}{2m} R(r)\Phi(\phi)Z(z) + \frac{1}{2m} (p_\phi - q(B_0 z R + \frac{\Phi}{2\pi R}))^2 R(r)\Phi(\phi)Z(z) = ER(r)\Phi(\phi)Z(z)$$

Το ακτινικό κομμάτι της κυματοσυνάρτησης μπορούμε να το διώξουμε αφού η κίνηση γίνεται στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου. Επίσης μπορούμε να διώξουμε και το αζιμουθιακό

κομμάτι της κυματοσυνάρτησης χωρίς να έχουμε καμιά συνέπεια.

$$\frac{\hat{p}_z^2}{2m}Z(z) + \frac{1}{2m}(p_\phi - q(B_0zR + \frac{\Phi}{2\pi R}))^2Z(z) = EZ(z)$$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το  $qB_0R$

$$\frac{\hat{p}_z^2}{2m}Z(z) + \frac{q^2B_0^2R^2}{2m}\left(\frac{\hbar k_\phi}{qB_0R} - z - \frac{\Phi}{2\pi R^2B_0}\right)^2Z(z) = EZ(z) \quad (3.2.2)$$

Βλέπουμε ότι έχει τη μορφή της εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή με το ίδιο  $\omega$  όπως πριν (τη "συχνότητα κυκλότρου") αλλά το κέντρο ταλάντωσης επηρεάζεται από την προσθήκη της μαγνητικής ροής.

$$z_0 = \frac{\hbar k_\phi}{qB_0R} - \frac{\Phi}{2\pi R^2B_0} \quad (3.2.3)$$

Οι επιτρεπτές ενέργειες που έχει το φορτίο είναι και πάλι οι ενέργειες αρμονικού ταλαντωτή (και πάλι στάθμες *Landau!*)

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (3.2.4)$$

Βλέπουμε ότι οι επιτρεπτές ενέργειες που έχει το φορτίο δεν επηρεάζονται από τη μαγνητική ροή. Τί γίνεται όμως με τους εκφυλισμούς της κάθε στάθμης; Για μιά ακόμη φορά ας επιβάλουμε τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες στο σύστημα.

$$(1) : \Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi) \quad (3.2.5)$$

$$e^{ik_\phi R\phi} = e^{ik_\phi R(\phi+2\pi)}$$

$$e^{ik_\phi R2\pi} = 1$$

$$\Rightarrow k_\phi R2\pi = 2n_x\pi$$

$$k_\phi = \frac{n_x}{R} \quad (3.2.6)$$

$$(2) : 0 < z_0 < L_z \quad (3.2.7)$$

$$\frac{\hbar k_\phi}{eB_0R} - \frac{\Phi}{2\pi R^2B_0} < L_z$$

$$k_\phi < \frac{eB_0R}{\hbar}\left(L_z + \frac{\Phi}{2\pi R^2B_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{n_x}{R} < \frac{eB_0R}{\hbar}\left(L_z + \frac{\Phi}{2\pi R^2B_0}\right)$$

$$n_x < \frac{eB_0R^2}{\hbar}\left(L_z + \frac{\Phi}{2\pi R^2B_0}\right) \quad (3.2.8)$$

$$n_x < \frac{eB_0RL_xL_z}{2\pi\hbar} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (3.2.9)$$



επίσης ισχύει ότι

$$0 < z_0 \quad (3.2.10)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar k_\phi}{eB_0R} - \frac{\Phi}{2\pi R^2 B_0} > 0 \quad (3.2.11)$$

$$k_\phi > \frac{eB_0R}{\hbar} \frac{\Phi}{2\pi R^2 B_0} \quad (3.2.12)$$

$$\frac{n_x}{R} > \frac{1}{R} \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (3.2.13)$$

$$n_x > \frac{\Phi}{\Phi_0} \quad (3.2.14)$$

Απ' αυτά μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι αριθμός των κβαντωμένων τιμών του  $n_x$  - μέσα σε αυτή την καινούργια περιοχή τιμών που αυτό ζεί - είναι ο ίδιος με πριν την εισαγωγή της  $\Phi$ . Δηλαδή ο εκφυλισμός της κάθε στάθμης *Landau* παραμένει ο ίδιος).

### 3.3 Εισαγωγή μεταβαλλόμενης μαγνητικής ροής - επιβεβαιώση ακέραιου κβαντικού φαινομένου *Hall*

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως μια μεταβαλλόμενη ροή που περνά μέσα από τον κενό χώρο του κυλίνδρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μια θεωρητική διάταξη που να αποδεικνύει άμεσα το ακέραιο κβαντικό φαινόμενο *Hall* σε διδιάστατο σύστημα. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μια μαγνητική ροή μέσα από τον κενό χώρο του κυλίνδρου προκαλεί μετατόπιση στο κέντρο ταλάντωσης του φορτίου. Αν η μαγνητική ροή είναι χρονικά μεταβαλλόμενη (θεωρώντας όμως χρονικές αλλαγές της που είναι πολύ αργές) τότε το κέντρο ταλάντωσης είναι και αυτό χρονικά μεταβαλλόμενο

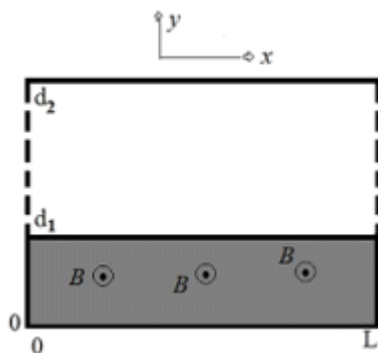
$$z_0 = \frac{\hbar k_\phi}{qB_0R} - \frac{\Phi(t)}{2\pi R^2 B_0} \quad (3.3.1)$$

Αν παραγωγίσουμε το κέντρο ταλάντωσης ως προς το χρόνο τότε θα βρούμε το ρυθμό μετατόπισης του κέντρου ταλάντωσης όπου αυτό έχει σχέση με την ένταση του ρεύματος. Προκύπτει (από το λεγόμενο επιχείρημα του *Laughlin*) ότι όταν η μαγνητική αυτή ροή μεταβάλλεται αργά κατά  $\Phi_0$ , τότε, για ένα σύστημα  $N = \nu \frac{B_0 A}{\Phi_0}$  μη-αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων (που καταλαμβάνουν έναν ακέραιο αριθμό  $\nu$  πλήρως κατειλημμένων σταθμών *Landau*), αυτά κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε κέντρο ταλάντωσης να μετατοπίζεται στην επόμενη κβαντωμένη του τιμή - και αυτή η κίνηση είναι ισοδυναμική με κίνηση ακριβώς  $\nu$  ηλεκτρονίων κατά απόσταση  $L_y$  (δηλ. από τη μία άκρη του κυλίνδρου στην άλλη).

Η αντίσταση *Hall* είναι το πηλίκο της τάσης *Hall* δια το ρεύμα. Και απο αυτό προκύπτει, αν κανείς χρησιμοποιήσει ως  $V_H$  την επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη απο Επαγωγή και ως ρεύμα  $I$  αυτό που προκύπτει απο την πάνω κίνηση των  $n$  ηλεκτρονίων απο τη μιά άκρη του κυλίνδρου στην άλλη, οτι η αντίσταση *Hall* παίρνει τις παγκόσμιες τιμές  $R_H = -\frac{h}{ne^2}$ . Αυτό είναι το πασίγνωστο πλέον Ακέραιο Κβαντικό Φαινόμενο *Hall*.

### 3.4 Φαινόμενο *Aharonov - Bohm* απο μαγνητικό πεδίο σε διπλανή περιοχή

Μέχρι στιγμής μελετούσαμε το φαινόμενο *Aharonov - Bohm* όταν το φορτίο βρισκόταν γύρω απο (δηλ. περιέβαλλε) τη μαγνητική ροή ή το ηλεκτρικό πεδίο. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε κατα πόσο μπορεί να συμβεί αλλαγή μετρήσιμων ποσοτήτων από μαγνητική ροή που βρίσκεται σε γειτονική περιοχή. Έστω μια επίπεδη επιφάνεια (βλ. σχήμα). Στην μισή (πάνω) επιφάνεια υπάρχει ένα φορτίο ενώ στην άλλη μισή (γραμμοσκιασμένη) επιφάνεια υπάρχει μαγνητική ροή  $\Phi$  κάθετη στο επίπεδο. Τα δύο κομμάτια της επιφάνειας δεν επικοινωνούν (π.χ. βάζουμε έναν άπειρο τοίχο δυναμικού στη διαχωριστική γραμμή  $y = d_1$ ) ώστε το φορτίο να μην μπορεί να αλληλεπιδράσει άμεσα με τη μαγνητική ροή. Και το σημαντικό είναι οτι έχουμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες στην  $x$ -διεύθυνση [13]. Θα δούμε οτι, παρόλο που η γραμμοσκιασμένη περιοχή είναι "απαγορευμένη" στο σωματίδιο, η παρουσία της μπορεί να έχει συνέπειες πάνω σε μετρήσιμες ποσότητες όπως το ενεργειακό φάσμα του σωματιδίου, ρεύματα κλπ.! (με μιά έννοια, λόγω των περιοδικών συνοριακών συνθηκών, το σύστημα είναι σαν να είναι διπλωμένο στη  $x$ -διεύθυνση, και μοιάζει με το δακτυλίδι - θα υπάρχει ένα "κρυμμένο" φαινόμενο μιάς "κλεισμένης" απο την άσπρη λωρίδα μαγνητικής ροής, και μάλιστα αυτό θα οφείλεται στην απουσία μαγνητικών μονοπόλων στο κενό!)



Θα πρέπει πρώτα να βρούμε ένα κατάλληλο διανυσματικό δυναμικό στα σημεία όπου βρίσκεται το σωματίδιο, αλλά και εντός της περιοχής της μαγνητικής ροής (και θα πρέπει αυτό το διανυσματικό δυναμικό  $\vec{A}$  (και στις 2 περιοχές) να είναι συμβατό με τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή αν διπλώσουμε στη  $x$ -διεύθυνση θα πρέπει το  $\vec{A}$  να είναι συνεχές!).

Μετρημένο από την κάτω βάση ένα κατάλληλο διανυσματικό δυναμικό είναι  $A = -yB_0\hat{x}$  μέσα στη μαγνητική περιοχή (διότι το  $curl$  του δίνει το σωστό  $B_0\hat{z}$ ) και  $A = -d_1B_0\hat{x}$  στην άσπρη περιοχή (λόγω συνέχειας, όταν περνάμε από τη μιά περιοχή στην άλλη - και επειδή το  $curl$  του δίνει το σωστό  $B=0$ ) Το ένα κομμάτι της κυματοσυνάρτησης έχει τη μορφή επίπεδων κυμάτων ενώ το άλλο έχει ημιτονοειδή μορφή.

$$\Psi(x, y) = Ce^{ik_x x} \sin k_y (y - d_1) \quad (3.4.1)$$

Θα επιβάλουμε τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες στην  $x$ -κατεύθυνση

$$\Psi(x, y) = \Psi(x + L, y) \Rightarrow k_x = \frac{2n_x\pi}{L} \quad (3.4.2)$$

και θα επιβάλουμε μηδενισμό της κυματοσυνάρτησης στο  $y = d_2$

$$\Psi(x, d_2) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n_y\pi}{d_2 - d_1} \quad (3.4.3)$$

Έτσι η συνάρτηση έχει διαμορφωθεί ως εξής:

$$\Psi(x, y) = Ce^{i\frac{2n_x\pi}{L}x} \sin \frac{n_y\pi}{d_2 - d_1}(y - d_1) \quad (3.4.4)$$

Για να υπολογίσουμε τις επιτρεπτές ενέργειες θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση *Shrödinger*.

$$\hat{H}\Psi(x, y) = E\Psi(x, y)$$

$$\frac{1}{2m}(\hat{p}_x - qA_x)^2\Psi(x, y) + \frac{\hat{p}_y^2}{2m}\Psi(x, y) = E\Psi(x, y)$$

Οι χβαντωμένες τιμές των  $p_x$ ,  $p_y$  είναι

$$p_x = \hbar k_x = \hbar \frac{2n_x\pi}{L} \quad (3.4.5)$$

$$p_y = \hbar k_y = \hbar \frac{n_y\pi}{d_2 - d_1} \quad (3.4.6)$$

Από αυτά προκύπτει ότι το ενεργειακό φάσμα είναι

$$E_{n_x, n_y} = \frac{1}{2m} \left[ \left( \hbar \frac{2n_x\pi}{L} + qd_1B_0 \right)^2 + \hbar^2 \frac{n_y^2\pi^2}{(d_2 - d_1)^2} \right] \quad (3.4.7)$$

**Παρατηρήσεις:** Βλέπουμε ότι οι επιτρεπτές ενέργειες του φορτίου επηρεάζονται από την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου σε διπλανή περιοχή. Αλλά... ποιός είναι ο βαθύτερος λόγος που συμβαίνει αυτό; Αυτός φαίνεται, αν διπλώσουμε το σύστημα στη  $x$ -διεύθυνση. Τότε το άνω διανυσματικό δυναμικό παράγει αυτόματα, εκτός από το (τώρα ακτινικό) μαγνητικό πεδίο κάθετα στη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια, και ένα κατάλληλο (ανομοιογενές!) μαγνητικό πεδίο  $B_z$  (στην διεύθυνση την παράλληλη στον άξονα του κυλίνδρου) το οποίο μπαίνει προς τα μέσα με τέτοιο τρόπο ώστε η ροή που μπαίνει (σε ένα κλειστό κύλινδρο) να είναι κατα απόλυτη τιμή ακριβώς ίση με την ροή ( $B_0 L d_1$ ) που βγαίνει από την παράπλευρη επιφάνεια (λόγω του ακτινικού πεδίου). Αυτό είναι συμβατό με την εξίσωση *Maxwell* που δείχνει ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα στη Φύση. Και έτσι, έχει αυθόρμητα δημιουργηθεί από το δίπλωμα μια ροή που είναι "κλεισμένη" από το σωματίδιό μας, που είναι ίδια με τη ροή στη μαγνητική περιοχή. Δηλαδή το φαινόμενο "απο γειτονική ροή" που βλέπουμε είναι ουσιαστικά ένα κρυμμένο μαγνητικό φαινόμενο *Aharonov-Bohm*.

## 4 *Berry* - ολογία

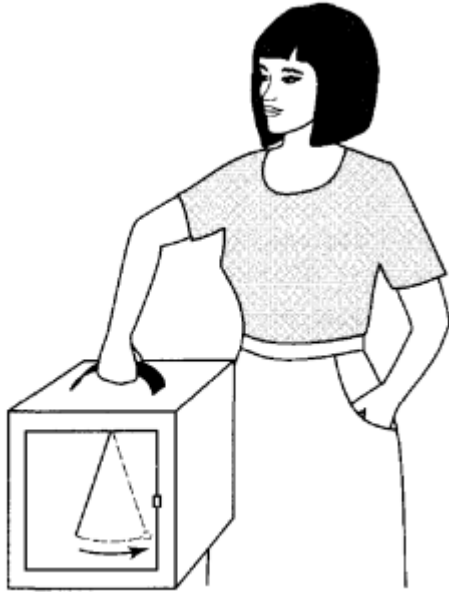
Σε αυτό το μέρος θα μιλήσουμε για αλλαγές στην κυματοσυνάρτηση ενός συστήματος του οποίου η Χαμιλτονιανή εξαρτάται από παραμέτρους αν κάνουμε μια αδιαβατική κυκλική διεργασία σε αυτό (δηλ. αργή μεταβολή των παραμέτρων μέχρι αυτές να επιτρέψουν στις αρχικές τους τιμές). Στο τέλος θα δούμε ότι το μαγνητικό φαινόμενο *Aharonov - Bohm* μπορεί να ειπωθεί ως ειδική περίπτωση μιάς γενικότερης γεωμετρικής φάσης, παρόλο που έχει και έναν ιδιαίτερο τοπολογικό χαρακτήρα. Με αυτό τον τρόπο, αρχίζουμε από αυτή την ενότητα ουσιαστικά την υπεσχημένη γενίκευση (των φαινομένων που είδαμε πριν) σε πιά ευρέα φαινόμενα που οφείλονται σε γεωμετρικές και τοπολογικές φάσεις.

### 4.1 Αδιαβατική διεργασία

Έστω ένα σύστημα του οποίου η Χαμιλτονιανή εξαρτάται από διάφορες παραμέτρους  $R_1, R_2, R_3 \dots$  και το οποίο βρίσκεται σε μια στάσιμη κατάσταση για κάποιες συγκεκριμένες ("παγωμένες") τιμές των παραμέτρων. Τώρα σε αυτό το σύστημα θα κάνουμε μια αργή (αδιαβατική) μεταβολή κάποιων (ή όλων των) παραμέτρων της. Το σύστημα σε αυτήν τη μεταβολή πιθανόν να μεταφερθεί από την στάσιμη κατάσταση, που βρισκόταν, σε μια άλλη. Αδιαβατική διεργασία είναι η διεργασία στην οποία η μεταβολή των παραμέτρων γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε το σύστημα να παραμείνει στην ίδια στάσιμη κατάσταση (αλλά βέβαια με διαφορετική τιμή των παραμέτρων). Πιο κάτω θα παραθέσουμε δύο παραδείγματα: ένα στην κλασική μηχανική και ένα στην κβαντική μηχανική για να δώσουμε ένα κίνητρο για το τί είναι μιά αδιαβατική διεργασία.

#### 4.1.1 Εκκρεμές μέσα σε ένα κουτί

Θεωρήστε ένα κουτί και μέσα του ένα τέλειο εκκρεμές το οποίο κινείται χωρίς τριβές ή αντίσταση του αέρα. Τώρα παίρνουμε το κουτί και ξεκινούμε να το κινούμε πέρα - δώθε με ακανόνιστο τρόπο. Θα παρατηρήσουμε ότι το εκκρεμές θα χάσει την αρμονική ταλάντωση στην οποία βρίσκεται και θα ξεκινήσει να κινείται χασοτικά. Αν όμως πάρουμε το εκκρεμές και ξεκινήσουμε να το ταλαντεύουμε αργά και αρμονικά τότε θα παρατηρήσουμε ότι το εκκρεμές θα συνεχίσει την ταλαντευτική του κίνηση του με το ίδιο πλάτος ταλάντωσης. Αυτή η μεταβολή που κάναμε ονομάζεται αδιαβατική μεταβολή ενώ η προηγούμενη όχι.



Τι εννοούμε όμως αργή κίνηση; Ας πούμε ότι η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς είναι  $T_i$  και ότι η περίοδος ταλάντωσης του κουτιού είναι  $T_e$ . Τότε η κίνηση θεωρείται αργή όταν  $T_e \gg T_i$ .

Τώρα θα κάνουμε μια άλλη αδιαβατική μεταβολή στο ίδιο σύστημα. Θα πάρουμε το εκκρεμές και θα ξεκινήσουμε αργά - αργά (όπως είχαμε πει πιο πάνω) να μεταβάλλουμε το μήκος του. Βέβαια η αλλαγή αυτή θα αλλάξει την περίοδο αφού αυτή εξαρτάται από τη μήκος του,  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , αλλά η ταλάντωση του εκκρεμούς θα έχει την ίδια διεύθυνση και το ίδιο πλάτος με προηγουμένως.

#### 4.1.2 Αδιαβατική διεργασία στο απειρόβαθο πηγάδι

Σε αυτό το παράδειγμα θα δούμε τι θα συμβεί αν μεταβάλλουμε το μήκος του απειρόβαθου πηγαδιού (α) μη αδιαβατικά και (β) αδιαβατικά. Αρχικά, έχουμε ένα σωματίδιο μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι στην θεμελιώδη του κατάσταση. Η θεμελιώδης κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου μπορεί να γραφτεί (αν βάλουμε την αρχή των αξόνων στην αριστερή πλευρά) ως εξής:

$$\Psi^i(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi}{a} x \quad (4.1.1)$$

όπου  $a$  το μήκος του πηγαδιού. Η ενέργειά του είναι  $E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$

(α) Αν η μεταβολή του μήκους του πηγαδιού γίνει με μη αδιαβατικό τρόπο τότε το σωματίδιο δεν θα προλάβει να αντιληφθεί την μεταβολή του μήκους έτσι η κυματοσυνάρτηση του θα συνεχίσει να είναι ως αρχική κατάσταση η 4.1.1. Όμως αυτή η κατάσταση δεν είναι πλέον στάσιμη κατάσταση (για τη νέα Χαμιλτονιανή) και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα η κυματοσυνάρτηση του σώματος θα αποτελεί ένα πολύπλοκο γραμμικό συνδυασμό των νέων ιδιοκαταστάσεων χαλώντας έτσι πλήρως την αρχική θεμελιώδη κατάσταση.

(β) Αν η μεταβολή του μήκους του πηγαδιού γίνει με αδιαβατικό τρόπο τότε η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου θα μεταβληθεί ως εξής:

$$\Psi^f(x) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi}{b}x \quad (4.1.2)$$

όπου  $b$  το νέο μήκος του πηγαδιού. Όπως είδαμε οι ενέργειες έχουν άμεση εξάρτηση από το μήκος του πηγαδιού έτσι η ενέργεια θα αλλάξει

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mb^2} \quad (4.1.3)$$

Μια στιγμή όμως, αφού η ενέργεια αλλάζει καθώς και η κυματοσυνάρτηση γιατί αυτή η μεταβολή θεωρείται αδιαβατική. Η μεταβολή θεωρείται αδιαβατική για ένα βασικό λόγο: το σύστημα και στην αρχή και στο τέλος βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση. Όπως ακριβώς στην κλασική περίπτωση, μπορεί αλλάζοντας το μήκος του σχοινιού να αλλάξε η περίοδος της ταλάντωσης αλλά η κίνηση παραμένει ίδια. Θα δούμε όμως παρακάτω ότι, παρόλο ότι μένουμε στην ίδια κατάσταση, γενικά κάτι αλλάζει στο κβαντικό επίπεδο: η κβαντική κατάσταση που μεταφέρεται αδιαβατικά θα δούμε ότι μπορεί να μαζεύει κάποια έξτρα φάση η οποία είναι μετρήσιμη (και είχε ξεφύγει της προσοχή της ανθρωπότητας για αρκετές δεκαετίες!) η οποία έχει καθαρά γεωμετρικά χαρακτηριστικά - δεν εξαρτάται από τη διάρκεια της μεταβολής αλλά από τις γεωμετρικές μόνο λεπτομέρειες της κίνησης (μεταβολής) των παραμέτρων.

## 4.2 Απόδειξη του αδιαβατικού θεωρήματος

Πώς μπορούμε να ξέρουμε σε κάθε αδιαβατική μεταβολή της χαμιλτονιανής πως θα αλλάξει η κυματοσυνάρτηση; Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως μπορούμε να βρούμε την νέα κυματοσυνάρτηση του συστήματος αν αλλάξουμε αδιαβατικά την χαμιλτονιανή.

Ας ξεκινήσουμε με κάτι απλό. Αν η χαμιλτονιανή είναι χρονοανεξάρτητη τότε η στάσιμη κατάσταση ικανοποιεί την χρονοανεξάρτητη εξίσωση *Schrödinger*.

$$\hat{H}|\Psi_n\rangle = E_n|\Psi_n\rangle \quad (4.2.1)$$

ενώ το χρονικό μέρος της πλήρους κυματοσυνάρτησης (η οποία ξεκίνησε με την πάνω στάσιμη κατάσταση ως αρχική κατάσταση) μεταβάλλεται με τον χρόνο ως εξής:

$$|\Psi_n(t)\rangle \sim e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \quad (4.2.2)$$

και ο πάνω παράγοντας φάσης έχει μέσα του την πιο απλή περίπτωση "δυναμικής φάσης" (εδώ αυτή είναι απλά  $-E_n\frac{t}{\hbar}$ ). Αυτή ήταν η πιο τετριμμένη περίπτωση. Άν τώρα η χαμιλτονιανή μεταβάλλεται αργά (αδιαβατικά) με τον χρόνο ( $H(t)$ ), τότε πάλι έχει νόημα να μιλάμε για "στιγμιαίες ιδιοκαταστάσεις" της  $H$  και "στιγμιαίες ιδιοτιμές" της (ή "ενεργειακές στάθμες"), ιδιαίτερα λόγω της αδιαβατικότητας, και αυτές θα έχουν (αργή) χρονική εξάρτηση ικανοποιώντας την

$$\hat{H}(t)|\Psi_n(t)\rangle = E_n(t)|\Psi_n(t)\rangle \quad (4.2.3)$$

Παρόλο που η χαμιλτονιανή είναι χρονεξαρτημένη, οι ιδιοκαταστάσεις της είναι ορθοκανονικές

$$\langle\Psi_m(t)|\Psi_n(t)\rangle = \delta_{n,m} \quad (4.2.4)$$

Ταυτόχρονα όμως, η κυματοσυνάρτηση θα πρέπει να ικανοποιεί και την χρονεξαρτημένη εξίσωση *Schrödinger*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\Psi(t)\rangle \quad (4.2.5)$$

Η λύση της χρονεξαρτημένης εξίσωσης *Schrödinger* είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δυνατών ιδιοκαταστάσεων

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|\Psi_n(t)\rangle e^{i\theta_n(t)} \quad (4.2.6)$$

όπου

$$\theta_n(t) = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t E_n(\tau)d\tau \quad (4.2.7)$$

ονομάζεται δυναμική φάση (και είναι βέβαια η φυσιολογική γενίκευση της απλής φάσης που είδαμε πάνω, όπου το παρόν ολοκλήρωμα γίνεται απλό γινόμενο λόγω του ότι οι  $E_n$  εκεί ήταν σταθερές και θα έβγαιναν έξω από αυτό το ολοκλήρωμα, δίνοντας το γινόμενο). Και είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι αυτή εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της χρονικής μεταβολής



των "στιγμιαίων ενεργειών" και βέβαια απο τη διάρκεια της αδιαβατικής μεταβολής. Αν αντικαταστήσουμε την (4.2.6) στην (4.2.5) τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_n c_n(t) |\Psi_n(t)\rangle \right] &= \hat{H}(t) \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} |\Psi_n(t)\rangle \\
i\hbar \sum_n \left[ \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} e^{i\theta_n(t)} |\Psi_n(t)\rangle + c_n(t) i \frac{\partial \theta_n(t)}{\partial t} |\Psi_n(t)\rangle + c_n(t) e^{i\theta_n(t)} \frac{\partial |\Psi_n(t)\rangle}{\partial t} \right] \\
&= \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} \hat{H}(t) |\Psi_n(t)\rangle \\
\sum_n i\hbar \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} e^{i\theta_n(t)} |\Psi_n(t)\rangle - \hbar \sum_n c_n(t) \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau \right) |\Psi_n(t)\rangle \\
+ \sum_n i\hbar c_n(t) e^{i\theta_n(t)} \frac{\partial |\Psi_n(t)\rangle}{\partial t} &= \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} \hat{H}(t) |\Psi_n(t)\rangle \\
\Rightarrow \sum_n i\hbar \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} e^{i\theta_n(t)} |\Psi_n(t)\rangle + \sum_n c_n(t) E_n(t) |\Psi_n(t)\rangle + \sum_n i\hbar c_n(t) e^{i\theta_n(t)} \frac{\partial |\Psi_n(t)\rangle}{\partial t} \\
&= \sum_n c_n(t) e^{i\theta_n(t)} \hat{H}(t) |\Psi_n(t)\rangle \tag{4.2.8}
\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε την (4.2.3) στην (4.2.8) τότε ο δεύτερος όρος διαγράφεται με τον όρο μετά από το =

$$\begin{aligned}
\sum_n i\hbar \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} e^{i\theta_n(t)} |\Psi_n(t)\rangle + \sum_n i\hbar c_n(t) e^{i\theta_n(t)} \frac{\partial |\Psi_n(t)\rangle}{\partial t} &= 0 \\
\sum_n i\hbar \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} e^{i\theta_n(t)} |\Psi_n(t)\rangle &= - \sum_n i\hbar c_n(t) e^{i\theta_n(t)} \frac{\partial |\Psi_n(t)\rangle}{\partial t} \tag{4.2.9}
\end{aligned}$$

Τώρα θα πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (4.2.9) με την  $\langle \Psi_m(t) |$ . Να πούμε ότι  $m$  παίρνει μια από τις τιμές που μπορεί να πάρει το  $n$ .

$$\begin{aligned}
\sum_n i\hbar \frac{\partial c_n(t)}{\partial t} e^{i\theta_n(t)} \langle \Psi_m(t) | \Psi_n(t) \rangle &= - \sum_n i\hbar c_n(t) e^{i\theta_n(t)} \langle \Psi_m(t) | \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n(t)\rangle \\
i\hbar \frac{\partial c_m(t)}{\partial t} e^{i\theta_m(t)} &= -i\hbar \sum_n c_n(t) \langle \Psi_m(t) | \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n(t)\rangle \\
\frac{\partial c_m(t)}{\partial t} &= - \sum_n c_n(t) \langle \Psi_m(t) | \frac{\partial}{\partial t} |\Psi_n(t)\rangle e^{i(\theta_n(t) - \theta_m(t))} \tag{4.2.10}
\end{aligned}$$

Θα πάρουμε τώρα την (4.2.3) και θα την παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\hat{H}(t) |\Psi_n(t)\rangle) &= \frac{\partial}{\partial t} (E_n(t) |\Psi_n(t)\rangle) \\
\frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial t} |\Psi_n(t)\rangle + \hat{H}(t) \frac{\partial |\Psi_n(t)\rangle}{\partial t} &= \frac{\partial E_n(t)}{\partial t} |\Psi_n(t)\rangle + E_n(t) \frac{\partial |\Psi_n(t)\rangle}{\partial t} \tag{4.2.11}
\end{aligned}$$

Θα πολλαπλασιάσουμε στην (4.2.11) την  $\langle \Psi_m(t) |$  όπου  $n \neq m$

$$\langle \Psi_m(t) | \frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial t} | \Psi_n(t) \rangle + \langle \Psi_m(t) | \hat{H}(t) | \frac{\partial \Psi_n(t)}{\partial t} \rangle = \langle \Psi_m(t) | \frac{\partial E_n(t)}{\partial t} | \Psi_n(t) \rangle \quad (4.2.12)$$

Επειδή η χαμιλτονιανή είναι Ερμιτιανό μέγεθος τότε μπορούμε να πούμε ότι

$$\langle \Psi_m(t) | \hat{H} | \frac{\partial \Psi_n(t)}{\partial t} \rangle = E_m \langle \Psi_m(t) | \frac{\partial \Psi_n(t)}{\partial t} \rangle \quad (4.2.13)$$

και αφού ο όρος  $\frac{\partial E_n(t)}{\partial t}$  μπορεί να βγει έξω από το *bracket* στο δεξιό μέλος της (4.2.12)

$$\langle \Psi_m(t) | \frac{\partial E_n(t)}{\partial t} | \Psi_n(t) \rangle = \frac{\partial E_n(t)}{\partial t} \langle \Psi_m(t) | \Psi_n(t) \rangle \quad (4.2.14)$$

έχουμε ότι αυτό ισούται με μηδέν αφού οι καταστάσεις είναι ορθοκανονικές

$$\Rightarrow \langle \Psi_m(t) | \frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial t} | \Psi_n(t) \rangle = (E_n - E_m) \langle \Psi_m(t) | \frac{\partial \Psi_n(t)}{\partial t} \rangle \quad (4.2.15)$$

Τώρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε την (4.2.15) στην (4.2.10)

$$\Rightarrow \frac{\partial c_m(t)}{\partial t} = -c_m(t) \langle \Psi_m(t) | \frac{\partial \Psi_m(t)}{\partial t} \rangle - \sum_{n \neq m} \frac{\langle \Psi_m(t) | \frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial t} | \Psi_n(t) \rangle}{E_n - E_m} \quad (4.2.16)$$

Η (4.2.16) είναι η ακριβής λύση για την  $c_m(t)$ . Αφού μιλούμε όμως για αδιαβατική μεταβολή τότε ο τελευταίος όρος της (4.2.16) μπορεί να παραληφθεί και έτσι καταλήγουμε στην πιο απλή μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_m(t)}{\partial t} &= -c_m \langle \Psi_m | \frac{\partial \Psi_m(t)}{\partial t} \rangle \\ \frac{\partial c_m(t)}{c_m} &= - \langle \Psi_m(t) | \frac{\partial \Psi_m(t)}{\partial t} \rangle dt \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη και έτσι καταλήγουμε στο

$$\ln \frac{c_m(t)}{c_m(0)} = - \int_0^t \langle \Psi_m(\tau) | \frac{\partial \Psi_m(\tau)}{\partial \tau} \rangle d\tau \quad (4.2.17)$$

$$\Rightarrow c_m(t) = c_m(0) e^{- \int_0^t \langle \Psi_m(\tau) | \frac{\partial \Psi_m(\tau)}{\partial \tau} \rangle d\tau} \quad (4.2.18)$$

Παρατηρούμε ότι εμφανίστηκε ένας νέος παράγοντας φάσης! Πράγματι, αν το "πλήν" στον εκθέτη το γράψουμε ως  $i * i$ , τότε το αποτέλεσμα (4.2.18) γράφεται ως  $\sim e^{ig_m(t)}$  αρκεί να ορίσουμε την

$$\gamma_m(t) = i \int_0^t \langle \Psi_m(\tau) | \frac{\partial \Psi_m(\tau)}{\partial \tau} \rangle d\tau \quad (4.2.19)$$

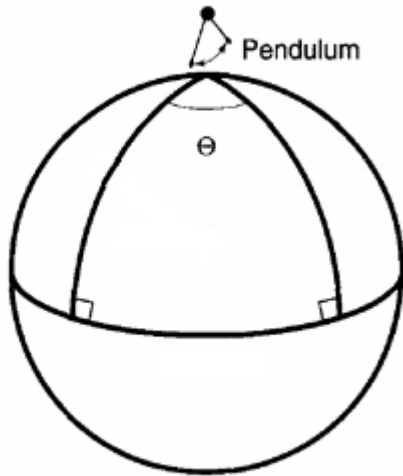
Θα δούμε παρακάτω ότι, παρ' όλη την παρουσία του  $i$  στον ορισμό της, αυτή η ποσότητα είναι πάντα πραγματική (χωρίς το  $i$ , θα ήταν καθαρά-φανταστική ποσότητα) - οφείλεται

στην κανονικοποίηση των στιγμιαίων ιδιοσυναρτήσεων  $\langle \Psi_n(\tau) | \Psi_n(\tau) \rangle = \text{σταθερά}$  κι άρα  $\frac{d}{d\tau} \langle \Psi_n(\tau) | \Psi_n(\tau) \rangle = 0$  - γεγονός πολύ ικανοποιητικό ώστε αυτή η ποσότητα να είναι όντως μιά φάση! (και όχι ένα πραγματικό εκθετικό που θα έσβηνε ή και μεγάλωνε εκθετικά με το χρόνο!). Επίσης θα δούμε παρακάτω ότι, αν με αυτό το αποτέλεσμα (4.2.19) κάνουμε μιά κλειστή μεταβολή, τότε η συνολική φάση  $\gamma_m$  που θα μαζευτεί απο τις κυματοσυναρτήσεις δεν θα εξαρτάται απο τη διάρκεια της κλειστής μεταβολής, αλλά θα είναι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο χώρο των παραμέτρων κατα μήκος του δρόμου της κυκλικής μεταβολής, και άρα η τιμή της θα καθορίζεται μόνο απο τη γεωμετρία. Γι' αυτό και ονομάζεται γεωμετρική φάση του *Berry* [2]. Έτσι, για να επιστρέψουμε στην περίπτωση της γενικής χρονικής στιγμής  $t$ , βρήκαμε ότι αν ένα σώμα βρίσκεται στην  $n$  στιγμιαία ιδιοκατάσταση και υποστεί αδιαβατική μεταβολή τότε σύμφωνα με όσα είπαμε η νέα του κατάσταση θα είναι η εξής

$$|\Psi'_n\rangle = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n(t)} |\Psi_n(t)\rangle \quad (4.2.20)$$

### 4.3 Το παράδοξο του εκκρεμούς του Φουκώ

Θα επιστρέψουμε για λίγο στο κλασικό παράδειγμα που είδαμε στο κεφάλαιο 4.1 με το ιδανικό εκκρεμές. Υποθέτουμε ότι παίρνουμε αυτό το εκκρεμές και ξεκινούμε και το μετακινούμε αδιαβατικά στο χώρο. Σύμφωνα με όσα είπαμε μέχρι τώρα δεν θα έχουμε καμιά αλλαγή του πλάτους ούτε της διεύθυνσης της κίνησης. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το εκκρεμές βρίσκεται αρχικά στο βόρειο πόλο. Τώρα μετακινούμε αδιαβατικά το εκκρεμές από τον βόρειο πόλο στον ισημερινό. Στην συνέχεια χωρίς να το περιστρέψουμε μετακινούμε αδιαβατικά το εκκρεμές κατά μήκος του ισημερινού και ξανά επιστρέφουμε το εκκρεμές στην αρχική του θέση στο βόρειο πόλο, ότι κάναμε δηλαδή προηγουμένως με ένα διάνυσμα (ενώ καθ' όλη την διάρκεια της κίνησης θεωρούμε ότι η  $\Gamma$  δεν περιστρέφεται)

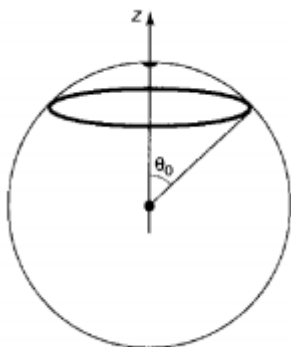


Θα λέγαμε ότι δεν θα αλλάξει το πλάτος ταλάντωσης του εκκρεμούς και ούτε το επίπεδο ταλάντωσης του. Όμως απ' ό τι φαίνεται το επίπεδο ταλάντωσης του αλλάζει, μάλιστα θα σχηματίζει γωνιά  $\theta$  (που φαίνεται στο σχήμα) με την αρχική διεύθυνση. Μάλιστα προκύπτει ότι η γωνιά  $\theta$  είναι η στερεά γωνιά θα ισούται με

$$\theta = \frac{A}{R^2} \quad (4.3.1)$$

όπου  $R$  η ακτίνα της σφαιρικής Γής και  $A$  η επιφάνεια που σχηματίζει η διαδρομή του εκκρεμούς.

Το εκκρεμές του Φουκά είναι το ζωντανό παράδειγμα αυτού του φαινομένου, με τη μόνη διαφορά ότι, αντί να μετακινείται το ίδιο το εκκρεμές, περιστρέφεται η Γη



Πιο κάτω θα υπολογίσουμε αυτή την στερεά γωνιά

$$\theta = \frac{A}{R^2} = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} d\theta R^2 \sin \theta}{R^2} = \int_0^{2\pi} d\phi (-\cos \theta) \Big|_0^{\theta_0} \quad (4.3.2)$$

$$\Rightarrow \theta = \int_0^{2\pi} d\phi (1 - \cos \theta_0) = 2\pi(1 - \cos \theta_0) \quad (4.3.3)$$

Το φαινόμενο αυτό λέγεται συνήθως (ιδιαίτερα όταν μελετάται δυναμικά, με εξισώσεις κίνησης) ότι οφείλεται στις δυνάμεις *Coriolis* που ασκούνται στο εκκρεμές. Όμως παρατηρήστε ότι η γωνιά αυτή δεν εξαρτάται από τη διάρκεια του ταξιδιού, ή από τη διάρκεια μιάς πλήρους περιστροφής της Γης γύρω από τον άξονα της - ακόμα και αν αυτή διαρκούσε περισσότερο από 24 ώρες, η γωνιά περιστροφής του επιπέδου ταλάντωσης θα ήταν ακριβώς η ίδια. Το αποτέλεσμα (4.3.3) είναι καθαρά γεωμετρικό και δεν εξαρτάται από τη δυναμική (δεν χρειάζονται δυνάμεις *Coriolis* για την κατανόηση ή και την πλήρη περιγραφή του!) Το σύστημα αυτό δεν επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση μετά την επιστροφή του στην αρχική του θέση και οι λόγοι είναι στην ουσία καθαρά γεωμετρικοί - η γωνιά που βλέπουμε εδώ είναι το κλασικό ανάλογο της γεωμετρικής φάσης του *Berry* που είδαμε πριν και που θα δούμε και καλύτερα στη συνέχεια. Επι τη ευκαιρία, τέτοια συστήματα ονομάζονται μη ολόνομα.

**Σημείωση:** Η κίνηση δεν είναι απαραίτητο να γίνει στο πραγματικό χώρο για να παρατηρήσουμε το φαινόμενο αλλά μπορεί να κινηθεί και σε ένα αφηρημένο χώρο των παραμέτρων. Με αυτά που είδαμε στο κεφάλαιο 4.2 μετά από μια αδιαβατική μεταβολή η κυματοσυνάρτηση είδαμε ότι εξαρτάται από τον χρόνο που διήρκεσε η μεταβολή μέσω της "δυναμικής φάσης". Πού βρίσκεται όμως η εξάρτηση από τη μεταβολή των παραμέτρων ; Η μεταβολή των παραμέτρων βρίσκεται κρυμμένη μέσα στην γεωμετρική φάση.

#### 4.4 Εξερευνώντας τα μυστικά της γεωμετρικής φάσης

Θυμίζουμε ότι η κυματοσυνάρτηση ενός συστήματος με αδιαβατικά μεταβαλλόμενη χαμιλτονιανή είναι

$$|\Psi'_n(t)\rangle = e^{i\theta_n(t)} e^{i\gamma_n} |\Psi_n(t)\rangle \quad (4.4.1)$$

όπου  $\gamma_n$  είναι η γεωμετρική φάση και όπως υπολογίσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ισούται με

$$\gamma_n = i \int_0^t \langle \Psi_n(\vec{R}(\tau)) | \frac{\partial}{\partial \tau} | \Psi_n(\vec{R}(\tau)) \rangle d\tau \quad (4.4.2)$$

Είναι τότε φυσικό να γράψουμε την χρονική παράγωγο της κυματοσυνάρτησης μέσω της χρονικής μεταβολής των παραμέτρων, δηλαδή

$$\frac{\partial |\Psi_n(\vec{R}(t))\rangle}{\partial t} = \frac{\partial |\Psi_n(\vec{R}(t))\rangle}{\partial R_1} \frac{dR_1}{dt} \hat{R}_1 + \frac{\partial |\Psi_n(\vec{R}(t))\rangle}{\partial R_2} \frac{dR_2}{dt} \hat{R}_2 + \dots \frac{\partial |\Psi_n(\vec{R}(t))\rangle}{\partial R_m} \frac{dR_m}{dt} \hat{R}_m$$

όπου  $m$  είναι ο συνολικός αριθμός των παραμέτρων

$$\Rightarrow \frac{\partial |\Psi_n(\vec{R}(t))\rangle}{\partial t} = \nabla_R |\Psi_n(\vec{R}(t))\rangle \cdot \frac{d\vec{R}(t)}{dt} \quad (4.4.3)$$

και το αντικαθιστούμε στην γεωμετρική φάση

$$\begin{aligned} \gamma_n &= i \int_0^t \langle \Psi_n(\vec{R}(\tau)) | \nabla_R \Psi_n(\vec{R}(\tau)) \rangle \cdot \frac{d\vec{R}(\tau)}{d\tau} d\tau \\ \Rightarrow \gamma_n &= i \int_{R_i}^{R_f} \langle \Psi_n(\vec{R}) | \nabla_R \Psi_n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

και απ' αυτήν μπορούμε να δούμε την εξάρτηση της γεωμετρικής φάσης από τη μεταβολή των παραμέτρων (προσέξτε ότι ο χρόνος  $t$  έχει εξαφανισθεί από το αποτέλεσμα!). Αν οι τιμές των αρχικών παραμέτρων ισούνται με τις τιμές των τελικών παραμέτρων (δηλ. η κυκλική διαδικασία που είχαμε προαναφέρει), τότε η γεωμετρική φάση διαμορφώνεται ως ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός κλειστού βρόχου στον χώρο των παραμέτρων

$$\gamma_n = i \oint \langle \Psi_n(\vec{R}) | \nabla_R \Psi_n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R} \quad (4.4.5)$$

και φαίνεται τώρα ξεκάθαρα ότι εξαρτάται μόνο από γεωμετρικές λεπτομέρειες του βρόχου. Το 1984 ο *Michael Berry* εξήγαγε την εξίσωση (4.4.5) και γι' αυτό ονομάστηκε, εκτός από γεωμετρική φάση και ως φάση *Berry* (παρόλο που πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος "γεωμετρική φάση" είναι σήμερα πιά γενικός - υπάρχει για παράδειγμα η γεωμετρική φάση *Aharonov-Anandan* η οποία δεν αφορά αδιαβατική διαδικασία (ούτε καν αναφέρεται σε προβλήματα με παραμέτρους), με την οποία όμως δεν θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργασία). Είναι χρήσιμο να επαναλάβουμε την παρατήρηση ότι η γεωμετρική φάση, με την προϋπόθεση ότι έχουμε αδιαβατική μεταβολή, δεν εξαρτάται από τον χρόνο που διήρκεσε η μεταβολή αλλά από το πόσο (και πώς) άλλαξαν οι παράμετροι, σε αντίθεση με την δυναμική φάση που εξαρτάται μόνο από το πόσο χρόνο διήρκεσε η μεταβολή. Πολλοί αγνοούσαν αυτές τις φάσεις γιατί όπως είπαμε στο μέρος των μετασχηματισμών βαθμίδας πίστευαν ότι μια οποιαδήποτε έξτρα φάση δεν αλλάζει το σύστημα. Στη συνέχεια θα δούμε αν είχαν δίκαιο ή όχι.

## 4.5 Καμπυλότητα και συνοχή *Berry*

Το όρισμα του ολοκληρώματος της γεωμετρικής φάσης ονομάζεται συνοχή *Berry* και συμβολίζεται με  $\vec{A}_n(\vec{R}(t))$

$$\vec{A}_n(\vec{R}) = i\langle\Psi_n(\vec{R})|\vec{\nabla}_R|\Psi_n(\vec{R})\rangle \quad (4.5.1)$$

και όπως ήδη αναφέραμε (και πιο κάτω θα το αποδείξουμε) η συνοχή *Berry* είναι ένας πραγματικός αριθμός για οποιαδήποτε κατάσταση και τιμές παραμέτρων. Αρχικά θα ξεκινήσουμε από το γεγονός ότι η κάθε κατάσταση είναι κανονικοποιημένη

$$\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle = 1$$

Παραγωγίζοντας την (7.1.14) προκύπτει

$$\vec{\nabla}_R\langle\Psi_n|\Psi_n\rangle = 0$$

$$\langle\vec{\nabla}_R\Psi_n|\Psi_n\rangle + \langle\Psi_n|\vec{\nabla}_R\Psi_n\rangle = 0$$

Ο δεύτερος όρος είναι ο μιγαδικός συζυγής του πρώτου. Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$A + A^* = 2ReA$$

όπου  $A$  είναι μιγαδικός αριθμός προκύπτει ότι

$$2Re\langle\Psi_n|\vec{\nabla}_R\Psi_n\rangle = 0$$

Έτσι φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι ο όρος  $\langle\Psi_n|\vec{\nabla}_R\Psi_n\rangle$  είναι καθαρά φανταστική ποσότητα το οποίο δείχνει ότι η συνοχή *Berry* (4.5.1) είναι πάντα πραγματική.

Η στροφή της συνοχής *Berry* (σε δισδιάστατο ή και τρισδιάστατο χώρο παραμέτρων) ορίζεται ως η καμπυλότητα *Berry*

$$\vec{\Omega}_n(\vec{R}(t)) = \vec{\nabla}_R \times \vec{A}_n(\vec{R}) \quad (4.5.2)$$

$$\begin{aligned} & \vec{\nabla}_R \times i\langle\Psi_n|\vec{\nabla}_R|\Psi_n\rangle \\ \Rightarrow & i\vec{\nabla}_R \times \int \Psi_n^* \cdot \vec{\nabla}_R \cdot \Psi_n d\vec{R} \end{aligned}$$

θα χρησιμοποιήσουμε την πιο κάτω σχέση

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla}f)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}_R \times (\Psi_n^* \vec{\nabla}_R \Psi_n) = \Psi_n^* (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Psi_n) - \vec{\nabla} \Psi_n \times \vec{\nabla} \Psi_n^*$$

Επίσης ξέρουμε ότι  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Psi_n = 0$  (αυτό μπορεί να αλλάξει όταν έχουμε "μονόπολα *Berry*" στο χώρο των παραμέτρων - και αυτό συμβαίνει όποτε, κατά τη διάρκεια της μεταβολής των παραμέτρων, ενεργειακές στάθμες για διαφορετικά  $n$  ακουμπούν μεταξύ τους - και τότε παραβιάζεται η αδιαβατική υπόθεση) και τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_R \times (\Psi_n^* \vec{\nabla}_R \Psi_n) &= -\vec{\nabla} \Psi_n \times \vec{\nabla} \Psi_n^* = \vec{\nabla} \Psi_n^* \times \vec{\nabla} \Psi_n \\ \Rightarrow \vec{\Omega}_n &= i \int \vec{\nabla} \Psi_n^* \times \vec{\nabla} \Psi_n \\ \Rightarrow \vec{\Omega}_n &= i \langle \vec{\nabla} \Psi_n^* | \times | \vec{\nabla} \Psi_n \rangle \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

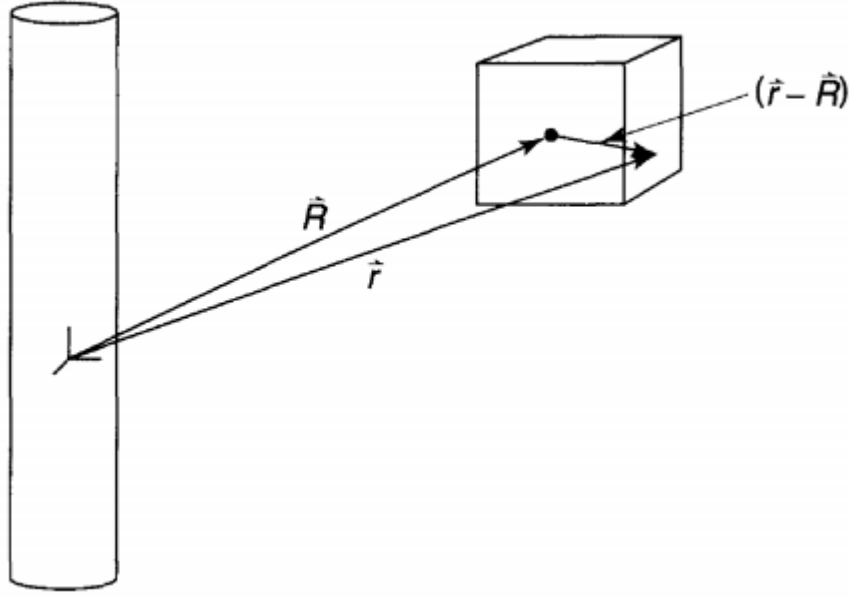
Μπορούμε να εντάξουμε την καμπυλότητα *Berry* στην γεωμετρική φάση μετατρέποντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε επιφανειακό (ουσιαστικά με χρήση του νομου του *Stokes*), δηλαδή

$$\gamma_n = \oint_c \vec{A}_n \cdot d\vec{R} = \int \int_s \vec{\Omega}_n(\vec{R}) \cdot d\vec{S} \quad (4.5.4)$$

## 4.6 Κουτί γύρω από μαγνητική ροή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ένα παράδειγμα όπου η φάση του μαγνητικού φαινομένου *Aharonov-Bohm* προκύπτει ως ειδική περίπτωση μιάς φάσης του *Berry*. Στο τρισδιάστατο αληθινό Ευκλείδιο χώρο, έχουμε ένα σωματίδιο μέσα σε ένα κουτί με αδιαπέραστα τοιχώματα. Έξω από το κουτί υπάρχει μιά στατική μαγνητική ροή  $\Phi$ . Τώρα θα πάρουμε το κουτί και αδιαβατικά θα το μεταφέρουμε (δηλαδή με άλλα λόγια σε αυτό το παράδειγμα ο χώρος των παραμέτρων είναι ο αληθινός χώρος, κάθε σημείο το οποίου περιγράφεται απο ένα συνηθισμένο διάνυσμα θέσης  $R$ ) ώστε το κέντρο του κουτιού να διαγράψει μιά κλειστή διαδρομή (οποιοδήποτε σχήματος) γύρω απο την  $\Phi$ , με το άνυσμα  $R$  να μεταβάλλεται χρονικά, παρακολουθώντας το ταξίδι του κουτιού (το οποίο πρέπει μόνο να μεταφέρεται, όχι να περιστρέφεται γύρω απο τον εαυτό του).





Σκοπός μας είναι να βρούμε την γεωμετρική φάση που προστίθεται στην κυματοσυνάρτηση όταν γίνει κλειστή διαδικασία, όταν δηλαδή το άνυσμα  $\vec{R}$  επιστρέψει (κάνοντας μία πλήρη μεταφορά του κουτιού) στην αρχική του θέση. Αρχικά όμως θα κάνουμε μια γνώριμη διαδικασία. Υποθέτουμε ότι η κυματοσυνάρτηση χωρίς τη μαγνητική ροή είναι  $|\Psi_n\rangle$ . Τώρα θα μεταφερθούμε στο πρόβλημα με την μαγνητική ροή με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας, έτσι η νέα κυματοσυνάρτηση θα είναι

$$|\Psi'_n(\vec{R}, \vec{r})\rangle = e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda} |\Psi_n(\vec{R} - \vec{r})\rangle \quad (4.6.1)$$

όπου η βαθμίδα  $\Lambda$  είναι

$$\Lambda = \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad (4.6.2)$$

Τώρα αφού βρήκαμε την κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου μέσα στο κουτί θα το μετακινήσουμε γύρω από την μαγνητική ροή όπως είπαμε στην αρχή. Έτσι όταν επιστρέψει το κουτί στην αρχική του θέση η κυματοσυνάρτηση θα είναι

$$|\Psi''(\vec{R} - \vec{r})\rangle = e^{i\gamma_n} |\Psi'_n(\vec{R} - \vec{r})\rangle \quad (4.6.3)$$

όπου η γεωμετρική φάση ισούται με

$$\gamma_n = i \oint \langle \Psi'_n(\vec{R} - \vec{r}) | \vec{\nabla}_R | \Psi'_n(\vec{R} - \vec{r}) \rangle \cdot d\vec{R} \quad (4.6.4)$$

Ας ξεκινήσουμε υπολογίζοντας το  $\langle \Psi'_n(\vec{R} - \vec{r}) | \vec{\nabla}_R | \Psi'_n(\vec{R} - \vec{r}) \rangle$

$$\langle \Psi'_n(\vec{R} - \vec{r}) | \vec{\nabla}_R | \Psi'_n(\vec{R} - \vec{r}) \rangle = \int \Psi_n'^*(\vec{R} - \vec{r}) \vec{\nabla}_R \Psi_n'(\vec{R} - \vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \int e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda} \Psi_n^*(\vec{R}-\vec{r}) \vec{\nabla}_R e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda} \Psi_n(\vec{R}-\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&= \int e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda} \Psi_n^*(\vec{R}-\vec{r}) \left(i\frac{q}{\hbar}\right) \vec{\nabla}_R \Lambda e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda} \Psi_n(\vec{R}-\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda} \Psi_n^*(\vec{R}-\vec{r}) e^{i\frac{q}{\hbar}\Lambda} \vec{\nabla}_R \Psi_n(\vec{R}-\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&= \int \Psi_n^*(\vec{R}-\vec{r}) \left(-i\frac{q}{\hbar}\right) \vec{\nabla}_R \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \Psi_n(\vec{R}-\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int \Psi_n^*(\vec{R}-\vec{r}) \vec{\nabla}_R \Psi_n(\vec{R}-\vec{r}) \cdot d\vec{r}
\end{aligned}$$

Αφού το διανυσματικό δυναμικό πρέπει να είναι συνεχές και παραγωγίσιμο τότε  $\vec{\nabla}_R \int_{\vec{R}}^{\vec{r}} d\vec{x} \vec{A}(\vec{x}) = -\vec{A}(\vec{R})$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_n'(\vec{R}-\vec{r}) | \vec{\nabla}_R | \Psi_n'(\vec{R}-\vec{r}) \rangle &= -i\frac{q}{\hbar} \int \Psi_n^*(\vec{R}-\vec{r}) \vec{A}(\vec{R}) \Psi_n(\vec{R}-\vec{r}) \cdot d\vec{r} \\
&+ \int \Psi_n^*(\vec{R}-\vec{r}) \vec{\nabla}_R \Psi_n(\vec{R}-\vec{r}) \cdot d\vec{r}
\end{aligned}$$

Ο όρος  $\vec{A}(\vec{R})$  είναι σταθερός και μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα. Το πρώτο ολοκλήρωμα τώρα, αφού η συνάρτηση είναι κανονικοποιημένη, ισούται με μονάδα. Έτσι:

$$\langle \Psi_n'(\vec{R}-\vec{r}) | \vec{\nabla}_R | \Psi_n'(\vec{R}-\vec{r}) \rangle = -i\frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}) + \int \Psi_n^*(\vec{R}-\vec{r}) \vec{\nabla}_R \Psi_n(\vec{R}-\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

ο δεύτερος όρος μπορεί να ειπωθεί ως η κλίση της σταθεράς κανονικοποίησης  $\int \Psi_n^* \Psi_n d^3r$  (η οποία είναι σταθερά =1), άρα αυτή η κλίση (σταθερού αριθμού) είναι μηδέν.

$$\langle \Psi_n'(\vec{R}-\vec{r}) | \vec{\nabla}_R | \Psi_n'(\vec{R}-\vec{r}) \rangle = -i\frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}) \quad (4.6.5)$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε επιτέλους την γεωμετρική φάση:

$$\gamma_n = i \oint \left(1 - \frac{q\vec{A}(\vec{R})}{\hbar}\right) d\vec{R} = \oint \frac{q}{\hbar} \vec{A}(\vec{R}) d\vec{R} \quad (4.6.6)$$

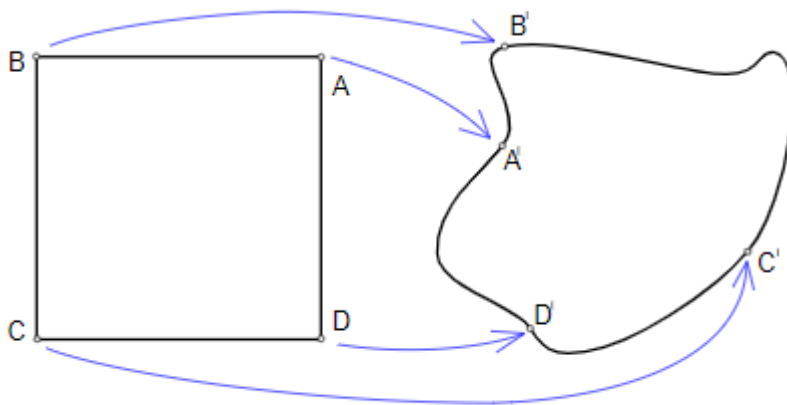
Το διανυσματικό δυναμικό όποιο και αν είναι, απο το νόμο του *Stokes*, δίνει οτι το πάνω κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι πάντα ίσο με την κλεισμένη (περιβαλλόμενη) ροή  $\Phi$ . Άρα

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A}(\vec{R}) \cdot d\vec{R} \\
\gamma_n &= \frac{q}{\hbar} \Phi \quad (4.6.7)
\end{aligned}$$

δηλαδή η φάση του *Berry* σε αυτό το σύστημα προκύπτει να είναι ίση με την *Aharonov-Bohm* φάση. Βλέπουμε οτι το φαινόμενο *Aharonov - Bohm* μπορεί να ειπωθεί ως ένα παράδειγμα γεωμετρικής φάσης (παρόλο που είναι δίκαιο να πούμε οτι η φάση *Aharonov-Bohm* δέν είναι μόνο γεωμετρική, αλλά και τοπολογική - για παράδειγμα είναι αναίσητη σε γεωμετρικές λεπτομέρειες (π.χ. τί ειδους βρόχο διέγραψε το  $R$ ), ή και ανεξάρτητη απο την ακριβή θέση της ροής  $\Phi$  - θέματα που αφορούν τοπολογικές φάσεις θα δούμε στη συνέχεια.)

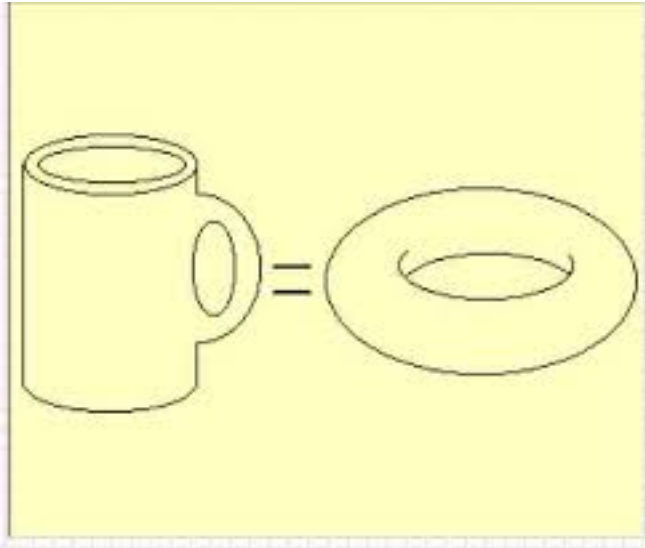
## 4.7 Τοπολογία

Η τοπολογία ασχολείται με εκείνες τις ιδιότητες ενός γεωμετρικού αντικειμένου που διατηρούνται αναλλοίωτες υπό συνεχείς παραμορφώσεις όπως τέντωμα, στρίψιμο και κάμψη αλλά όχι σχίσιμο ή κόλλημα. Ένας τοπολογικός χώρος είναι ένα σύνολο που είναι εφοδιασμένο με μια δομή, που ονομάζεται τοπολογία, η οποία επιτρέπει τον ορισμό της συνεχούς παραμόρφωσης των υποσυνόλων και γενικότερα, όλων των ειδών της συνέχειας. Οι Ευκλείδειοι χώροι και γενικότερα οι μετρικοί χώροι είναι παραδείγματα ενός τοπολογικού χώρου.



### 4.7.1 Θεώρημα Gauss- Bonnet

Αν μπορούμε να μεταβούμε με συνεχή παραμόρφωση από ένα τοπολογικό χώρο σε ένα άλλο τότε οι δύο τοπολογικοί χώροι είναι ισοδύναμοι. Για παράδειγμα μια σφαίρα και ένας κύβος αποτελούν ισοδύναμους τοπολογικούς χώρους, ενώ μια σφαίρα και ένα τοροειδές δεν είναι ισοδύναμοι τοπολογικοί χώροι. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως μπορούμε να συμπεράνουμε αν δύο τοπολογικοί χώροι είναι ισοδύναμοι ή όχι.



Το "Χαρακτηριστικό Euler"  $X_m$  είναι ένας δείκτης για κλειστές διδιάστατες επιφάνειες που συνδέεται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_s K ds = 2\pi X_m \quad (4.7.1)$$

όπου με  $K$  συμβολίζουμε τη λεγόμενη Γκαουσιανή καμπυλότητα. Πιο κάτω θα αποδείξουμε πως την υπολογίζουμε.

Φανταστείτε ότι έχουμε μια καμπύλη  $c$ . Μπορούμε να βρούμε την καμπυλότητα σε ένα σημείο της καμπύλης προσθέτοντας ένα κύκλο που να εφάπτεται με το σημείο αυτό. Τότε η καμπυλότητα στο σημείο θα ισούται με

$$k = \frac{1}{R} \quad (4.7.2)$$

όπου  $R$  η ακτίνα του κύκλου



Σε περισσότερες διαστάσεις θα πρέπει να προσθέσουμε ένα κύκλο και να υπολογίζουμε την καμπυλότητα όπως πάνω για κάθε διάσταση. Στην συνέχεια για να βρούμε την γκαουσιανή καμπυλότητα θα πάρουμε την μικρότερη καμπυλότητα  $k_1$  και την μεγαλύτερη καμπυλότητα

$k_2$ . Το γινόμενο τους ισούται με την γκαουσιανή τοπική καμπυλότητα  $K$  που γράψαμε στην (4.7.1). Π.χ. ας βρούμε την γκαουσιανή καμπυλότητα στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Η επιφάνεια είναι δισδιάστατη οπότε πρέπει να βρούμε 2 καμπυλότητες αλλά λόγω της γεωμετρίας της η καμπυλότητα κάθε διάστασης ισούται με  $\frac{1}{R}$  όπου  $R$  η ακτίνα της σφαίρας έτσι η γκαουσιανή καμπυλότητα ισούται με  $\frac{1}{R^2}$ . Τώρα απο την (4.7.1) ας υπολογίσουμε το  $X_m$  για την σφαίρα.

$$\begin{aligned} \iint_s \frac{1}{R^2} ds &= 2\pi X_m \\ \frac{4\pi R^2}{R^2} &= 2\pi X \\ \Rightarrow X_m &= 2 \end{aligned}$$

Μπορούμε να βρούμε το χαρακτηριστικό *Euler* πιο εύκολα χρησιμοποιώντας τον εσσιανό πίνακα (που είναι μια μέθοδος γεωμετρική - χρησιμοποιεί την τοπική λεπτομέρεια της πολυπλοκότητας (επιφάνειας) ).

Εσσιανός πίνακας: Είναι ο πίνακας όλων των παραγώγων 2<sup>ης</sup> τάξης ενός διανύσματος ή μιας βαθμωτής συνάρτησης. Πχ αν η  $f(x, y)$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση τότε ο εσσιανός της πίνακας θα είναι

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (4.7.3)$$

Απαραίτητη προϋπόθεση, επιφάνεια να είναι συνεχής και διπλά παραγωγίσιμη. Αν  $z = f(x, y)$  είναι η συνάρτηση που περιγράφει την επιφάνεια τότε η γκαουσιανή καμπυλότητα είναι η ορίζουσα του εσσιανού πίνακα.

$$K = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad (4.7.4)$$

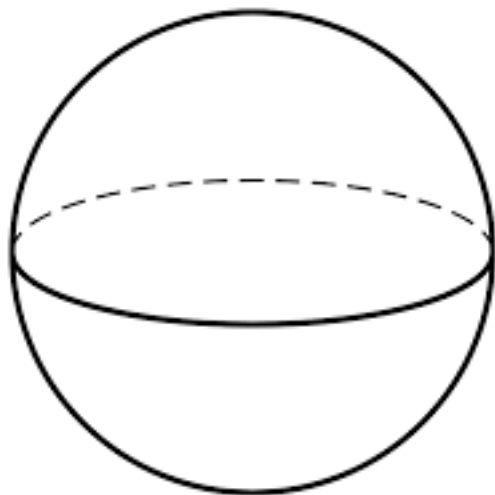
Για να βρούμε την γκαουσιανή καμπυλότητα για την σφαίρα θα πρέπει να βρούμε την συνάρτηση  $z = f(x, y)$ . Θυμίζουμε ότι η επιφάνεια της σφαίρας ακολουθεί την εξής σχέση

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (4.7.5)$$

Λύνουμε ως προς  $z$  τότε βρίσκουμε ότι η συνάρτηση  $z = f(x, y)$  είναι η εξής

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad (4.7.6)$$

το + κομμάτι ανήκει στην συνάρτηση της πάνω επιφάνειας και το - κομμάτι ανήκει στην συνάρτηση της κάτω επιφάνειας



Ας βρούμε την καμπυλότητα στο πάνω μέρος της σφαίρας. Αρχικά πρέπει να βρούμε τις ποσότητες

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{R^2 - x^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x}$$

επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη

$$\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{R^2 - x^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τα πιο πάνω για να βρούμε την καμπυλότητα

$$K = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
K &= -\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial y \partial x} \\
&= \frac{(R^2 - y^2)(R^2 - x^2)}{(R^2 - x^2 - y^2)^3} - \frac{x^2 y^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^3} \\
&= \frac{R^4 - R^2 x^2 - R^2 y^2 + x^2 y^2 - x^2 y^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^3} \\
&= R^2 \frac{R^2 - x^2 - y^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^3} \\
&\Rightarrow K = \frac{R^2}{(R^2 - x^2 - y^2)^2}
\end{aligned}$$

Αυτός είναι ο τύπος για την γενική σχέση της καμπυλότητας με ένα οποιοδήποτε σημείο. Ένα σημείο της επιφάνειας είναι το  $x = 0, y = 0$

$$\Rightarrow K = \frac{R^2}{(R^2 - 0 - 0)^2} = \frac{R^2}{R^4} = \frac{1}{R^2} \quad (4.7.7)$$

Βλέπουμε ότι επαληθεύσαμε την καμπυλότητα που υπολογίσαμε στην αρχή. Υπάρχει όμως και ένας πιο εύκολος (τοπολογικός και όχι γεωμετρικός) τρόπος να υπολογίσουμε το "χαρακτηριστικό *Euler*" χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε την τοπική καμπυλότητα. Προκύπτει στην Τοπολογία (και είναι το περίφημο θεώρημα *Gauss-Bonnet*) ότι το Χαρακτηριστικό *Euler* συνδέεται με το λεγόμενο γένος  $g$  (το οποίο ισούται με τον αριθμό των τρυπών του γεωμετρικού χώρου)

$$x_m = 2(1 - g) \quad (4.7.8)$$

Για την σφαίρα το  $g = 0$  αφού δεν έχει τρύπες έτσι:

$$x_m = 2(1 - 0) = 2 \quad (4.7.9)$$

όπως ακριβώς υπολογίσαμε και με την καμπυλότητα. Από αυτό μπορούμε να πούμε ότι οι γεωμετρικοί τόποι με τον ίδιο αριθμό τρυπών έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό *Euler* και τότε μπορούμε να μεταβούμε ομαλά (με συνεχή παραμόρφωση) από τον ένα γεωμετρικό τόπο στον άλλο. π.χ. μια σφαίρα και μια κούπα δεν έχουν καμία τρύπα έτσι μπορούμε να μεταφερθούμε από την μια στην άλλη με συνεχή τρόπο. Το ίδιο ισχύει και για ένα φλιτζάνι και ένα τοροειδές. Το γεγονός ότι μπορούμε να μεταβούμε με συνεχή παραμόρφωση από τον ένα τοπολογικό χώρο σε ένα άλλο και ότι το χαρακτηριστικό *Euler* είναι ίδιο και στους δύο τοπολογικούς χώρους κάνει το χαρακτηριστικό *Euler* τοπολογικά αναλλοίωτο (ένας πολύ σημαντικός όρος ο οποίος εμφανίζεται τα τελευταία χρόνια στη Φυσική! - αρκετές φυσικές ποσότητες έχει αποδειχθεί ότι είναι, με κάποια έννοια, τοπολογικά αναλλοίωτα και άρα αναίσθητες σε μικρές διαταραχές, μιά τέτοια είναι η αγωγιμότητα *Hall* στο Κβαντικό

φαινόμενο *Hall*).

Ας ξαναδοούμε τις σχέσεις που μας δίνουν το χαρακτηριστικό *Euler*

$$\begin{aligned}x_m &= \frac{1}{2\pi} \oint\!\!\!\oint_s K dS \\x_m &= 2(1 - g) \\ \Rightarrow 2(1 - g) &= \frac{1}{2\pi} \oint\!\!\!\oint_s K dS\end{aligned}$$

και αυτό είναι το θεώρημα *Gauss-Bonnet*.

Για κάποιους άλλους γεωμετρικούς τόπους (ή πολλαπλότητες) που η επιφάνειά τους δεν είναι παραγωγίσιμη όπως ένας κύβος, μια πυραμίδα κ.λ.π. τότε το χαρακτηριστικό *Euler* προκύπτει ότι δίνεται από τον τύπο

$$x_m = V - E + F \quad (4.7.10)$$

όπου  $V$  είναι ο αριθμός των κορυφών,  $E$  ο αριθμός των ακμών και  $F$  ο αριθμός των εδρών του. Παράδειγμα: Ο κύβος έχει 8 κορυφές, 12 ακμές και 6 έδρες τότε το χαρακτηριστικό *Euler* θα είναι

$$X_m = V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2 \quad (4.7.11)$$

Ας το επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας τον τύπο με το γένος  $g$ . Ένας κύβος δεν έχει τρύπες οπότε το γένος  $g = 0$

$$x_m = 2(1 - g) = 2 \quad (4.7.12)$$

#### 4.7.2 Ο αριθμός *Chern*

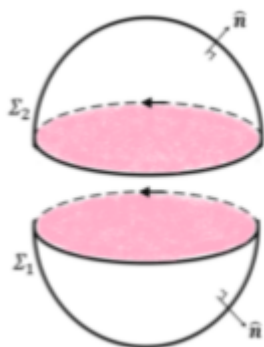
Σε αυτό το κεφάλαιο θα συνδυάσουμε αυτά που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο με την γεωμετρική φάση του *Berry*. Θυμίζουμε ότι η γεωμετρική φάση είχε προκύψει ότι μπορούσε να υπολογισθεί σαν μιά ροή της καμπυλότητας *Berry*  $\Omega$  μέσα από τον κλειστό δρόμο της κυκλικής αδιαβατικής διαδικασίας, δηλαδή

$$\gamma_n = \oint\!\!\!\oint_s \vec{\Omega}(\vec{R}) \cdot d\vec{S} \quad (4.7.13)$$

Μπορούμε τώρα να χωρίσουμε την σφαίρα σε δύο ημισφαίρια οπότε η γεωμετρική φάση θα ισούται με το άθροισμα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων της καμπυλότητας *Berry* στην



πάνω και κάτω επιφάνεια



$$\gamma_n = \oint_{\Sigma} \vec{\Omega}(\vec{R}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{\Omega}_\pi(\vec{R}) \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{\Omega}_x(\vec{R}) \cdot d\vec{S}$$

ενώ βέβαια με το νόμο του *Stokes*, εφαρμοσμένο τώρα στο χώρο των παραμέτρων, μπορούμε να μετατρέψουμε το κάθε επιφανειακό ολοκλήρωμα σε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατα μήκος του κλειστού δρόμου, δηλαδή

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{\Omega}_\pi(\vec{R}) \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{A}_\pi(\vec{R}(t)) \cdot d\vec{R}$$

$$\iint_{\Sigma_2} \vec{\Omega}_x(\vec{R}) \cdot d\vec{S} = - \oint_c \vec{A}_k(\vec{R}(t)) \cdot d\vec{R}$$

(το "πλήν" στο κάτω ολοκλήρωμα έχει να κάνει με το ότι η συγκεκριμένη φορά διαγραφής του επικαμπυλίου ολοκληρώματος, όταν εφαρμοσθεί ο νόμος του *Stokes*, χρειάζεται ένα έξτρα "πλήν" για να είναι συμβατή με το κάτω μοναδιαίο  $\hat{n}$  στην κάτω επιφανειακή ολοκλήρωση). Άρα η φάση του *Berry* θα είναι η διαφορά 2 επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της συνοχής *Berry* A, κατα μήκος του κοινού δρόμου. Τα όρια των δύο επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων είναι ίδια μιας και η καμπύλη είναι κοινή και για τα δύο ολοκληρώματα. Δεν μπορούμε όμως να πούμε ότι το αποτέλεσμα και των δύο ολοκληρωμάτων θα είναι ίδιο ασχέτως αν και στα δύο η καμπυλότητα *Berry* είναι ίδια. Αυτό συμβαίνει γιατί μια συνοχή *Berry* μπορεί να μετασχηματιστεί με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας. Το μόνο σίγουρο είναι ότι η διαφορά των δύο επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων θα ισούται με ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$  εφόσον έτσι κι αλλιώς μια φάση ορίζεται *modulo*  $2\pi$ , άρα

$$\oint_c \vec{A}_\pi(\vec{R}) \cdot d\vec{R} - \oint_c \vec{A}_k(\vec{R}) \cdot d\vec{R} = C2\pi \quad (4.7.14)$$

και αφού όπως δείξαμε πάνω η διαφορά των δύο επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων ισούται με το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα της καμπυλότητας *Berry* τότε

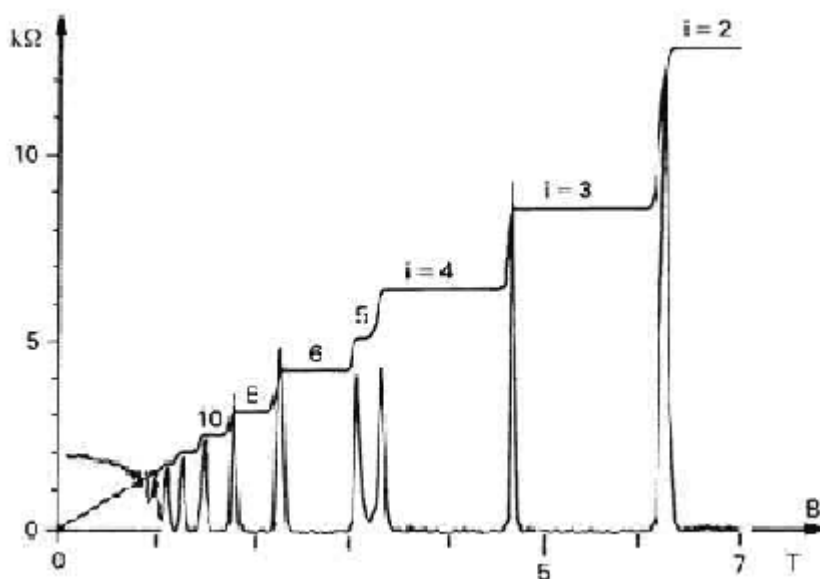
$$\oint \vec{\Omega}(\vec{R}) \cdot d\vec{S} = C 2\pi \quad (4.7.15)$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{\Omega}(\vec{R}) \cdot d\vec{S} \quad (4.7.16)$$

Αυτή η σταθερά ονομάζεται σταθερά *Chern* και είναι ακέραιος αριθμός (κατ' αναλογία με το θεώρημα *Gauss-Bonnet* που είδαμε πάνω, και με την καμπυλότητα *Berry* να παίζει το ρόλο της καμπυλότητας). Βλέπουμε πράγματι ότι αυτή η σταθερά έχει την ίδια μορφή με το χαρακτηριστικό *Euler* με την διαφορά ότι στο χαρακτηριστικό *Euler* υπάρχει η καμπυλότητα της επιφάνειας ενώ στον αριθμό *Chern* η καμπυλότητα *Berry*. Έτσι καταλαβαίνουμε ότι ο αριθμός *Chern* κρύβει μέσα του ένα τοπολογικό χαρακτήρα. Μάλιστα ο *Berry Simon* το 1983 δημοσίευσε ένα άρθρο [10] για την συσχέτιση της *Berry* - ολογίας με την τοπολογία πριν από την σχετική δημοσίευση του *Berry*.

### 4.7.3 Η Τοπολογία στη Φυσική

Τα προηγούμενα (π.χ. το "θεώρημα *Gauss-Bonnet-Chern*" όπως ονομάζεται τελευταία, με την καμπυλότητα *Berry*  $\Omega$  στη θέση της Καμπυλότητας  $K$ , και ο αριθμός *Chern* που προκύπτει ως τοπολογικό αναλλοίωτο) εμφανίστηκε στη Φυσική για πρώτη φορά (και μάλιστα πειραματικά!) στο Ακέραιο Κβαντικό Φαινόμενο *Hall*.



δηλ. στις μετρήσεις της αντίστασης *Hall*, με τα διάσημα *plateaux* και τις παγκόσμιες τιμές της (πάνω στα *plateaux*) που είναι  $-\frac{h}{\nu e^2}$ , με  $\nu$  ακέραιο. [Ο αναγνώστης ας θυμηθεί ότι αποδείξαμε αυτό το παγκόσμιο αποτέλεσμα στο Κεφ. 3.3 με χρήση του λεγόμενου επιχειρήματος του *Laughlin* - εδώ επισημαίνουμε ότι ο ακέραιος  $\nu$  δεν είναι αναγκαστικά ο αριθμός των πλήρως κατειλημμένων σταθμών *Landau* όπως είχαμε πεί πριν για ηλεκτρόνια μέσα σε απλό μαγνητικό πεδίο, αλλά γενικότερα (δηλ. όχι μόνο στην παρουσία ενός μαγνητικού πεδίου, αλλά και στην επίσης παρουσία των ιόντων του κρυστάλλου, αλλά και προσμίξεων κλπ.) αυτός ο ακέραιος έχει ευρύτερη σημασία: έχει πάντα τοπολογική προέλευση και είναι - σε όλες τις περιπτώσεις - ένας αριθμός *Chern*.]

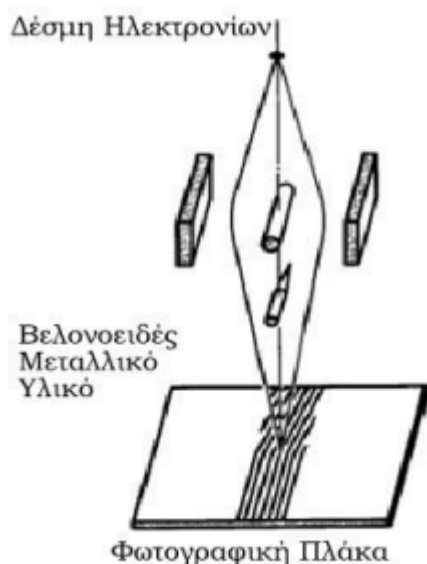
Αυτά τα *plateaux* είναι ιδιαίτερος ευσταθή κάτω από οποιεσδήποτε μικρές διαταραχές (και οι παγκόσμιες τιμές της αντίστασης *Hall* είναι ιδιαίτερος ακριβείς, με σχετική ακρίβεια  $10^{-10}$ ). Προκύπτει πράγματι (από τη δουλειά των *Thouless et al* το 1982 [6], πριν ανακαλυφθεί η φάση *Berry*! (και πριν το άρθρο του *Barry Simon* που έκανε τον προαναφερθέντα συσχετισμό με Τοπολογία) ), ότι αυτός ο ακέραιος που εμφανίζεται (τόσο σταθερός) στο πείραμα, είναι ακριβώς ένας αριθμός *Chern*. Καταστάσεις (ή θερμοδυναμικές φάσεις) που έχουν τέτοια (πολύ ευσταθή) χαρακτηριστικά ή ιδιότητες χαρακτηρίζονται ως "Τοπολογικές Φάσεις". [Εδώ το "Φάσεις" όχι με την έννοια της μιγαδικής ανάλυσης, αλλά με την έννοια της Θερμοδυναμικής.]

## 5 Πειραματική επαλήθευση του μαγνητικού *Aharonov-Bohm* φαινομένου

Σε αυτό το μέρος θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα διάφορα πειράματα τα οποία πραγματοποιήθηκαν και επαλήθευσαν το φαινόμενο *Aharonov - Bohm*.

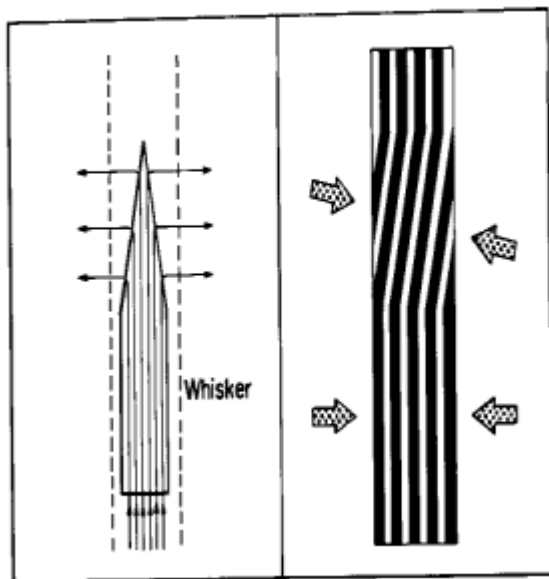
### 5.1 Πείραμα *Chambers*

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για το πρώτο πείραμα που έγινε με σκοπό την επαλήθευση ή την αποκήρυξη του φαινομένου. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε από τον *Chambers* το 1960. Πιο κάτω φαίνεται η διάταξη του πειράματος



Στο πιο πάνω πείραμα έχουμε μια δέσμη ηλεκτρονίων που εκπέμπεται από μια πηγή. Η δέσμη ηλεκτρονίων προσπίπτει σε ηλεκτρικό δίπρισμα τύπου *Mollenstedt* το οποίο αποτελείται από ένα λεπτό σύρμα, ένα γειωμένο ηλεκτρόδιο στην άλλη πλευρά και δυο κάθετες, μεταλλικές και γειωμένες λεπτές πλάκες. Στο μεσαίο σύρμα εφαρμόζουμε διαφορά δυναμικού  $10\text{ V}$ , κρατώντας το κάτω μέρος γειωμένο και το πάνω μέρος φορτισμένο στα  $10\text{ V}$ . Η διαφορά δυναμικού δημιουργεί ρεύμα το οποίο αλληλεπιδρά με τα δύο σύρματα δεξιά και αριστερά έλκοντας τα προς αυτό. Πάνω στην φωτογραφική πλάκα υπάρχουν ασπρόμαυρες γραμμές κάθετες προς τα σύρματα. Τοποθετούμε ένα μεταλλικό βελονοειδές και παρατηρούμε την σκιά που θα δημιουργήσει στην φωτογραφική πλάκα. Με την διαφορά δυναμικού οι

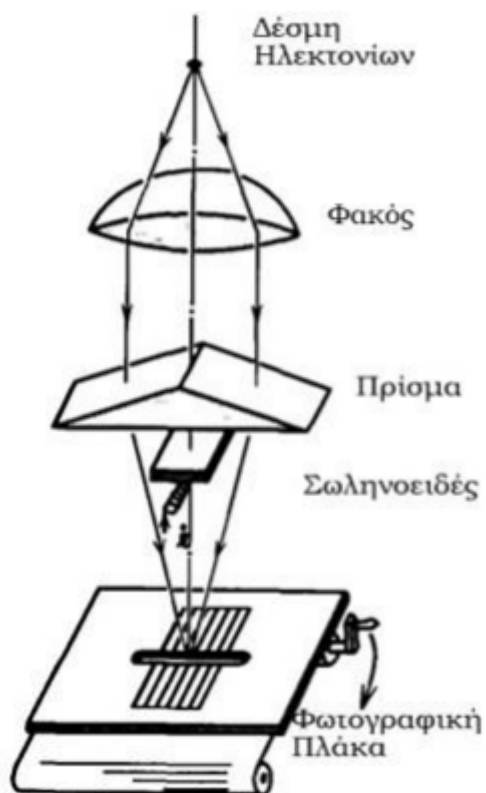
γραμμές που δημιουργούνται έχουν μια μικρή κλίση στην περιοχή όπου το βελονοειδές είναι κωνικό.



Σε αυτή την εικόνα βλέπουμε βελονοειδές μεταλλικό υλικό και τους κροσσοί συμβολής. Οι κροσσοί συμβολής δημιουργούνται λόγω της διαφοράς φάσης η οποία είναι ανάλογη με την μαγνητική ροή μέσα στο βελονοειδές υλικό. Το μαγνητικό πεδίο διαφεύγει κάθετα στην επιφάνεια του κωνοειδούς υλικού, τα ηλεκτρόνια εκτρέπονται ελαφρώς κατά την αξονική κατεύθυνση. Οπότε οι δυο δέσμες ηλεκτρονίων δεν συναντώνται κάθετα στο διπρισματικό νήμα που βρίσκεται στο επίπεδο παρατήρησης. Ως αποτέλεσμα οι κροσσοί συμβολής παρουσιάζουν μικρή κλίση. Οι κροσσοί είναι συνεχείς ζώνες οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μετατόπιση φάσης υπάρχει ακόμα και στην ομοιόμορφη περιοχή. Αυτή η μετατόπιση φάσης δεν εξηγείται από την Κλασική Μηχανική.

## 5.2 Πείραμα των *Bayh-Mollenstedt*

Όπως είχαμε πει στην εισαγωγή αυτής της εργασίας, υπήρχε πάντα ο προβληματισμός κατά πόσο τα πειράματα που επαλήθευαν το φαινόμενο *Aharonov – Bohm* έδιναν σίγουρη επαλήθευση αφού δεν ήταν σίγουρο ότι στο σύστημα που εξετάζουμε δεν υπάρχουν καθόλου πεδία. Αυτό το πείραμα έγινε με βασικό σκοπό στο σημείο που εξετάζουμε να μην υπάρχουν πεδία αλλά η κίνηση των σωματιδίων να εξαρτάται από τα δυναμικά. Πιο κάτω φαίνεται η πειραματική διάταξη του πειράματος



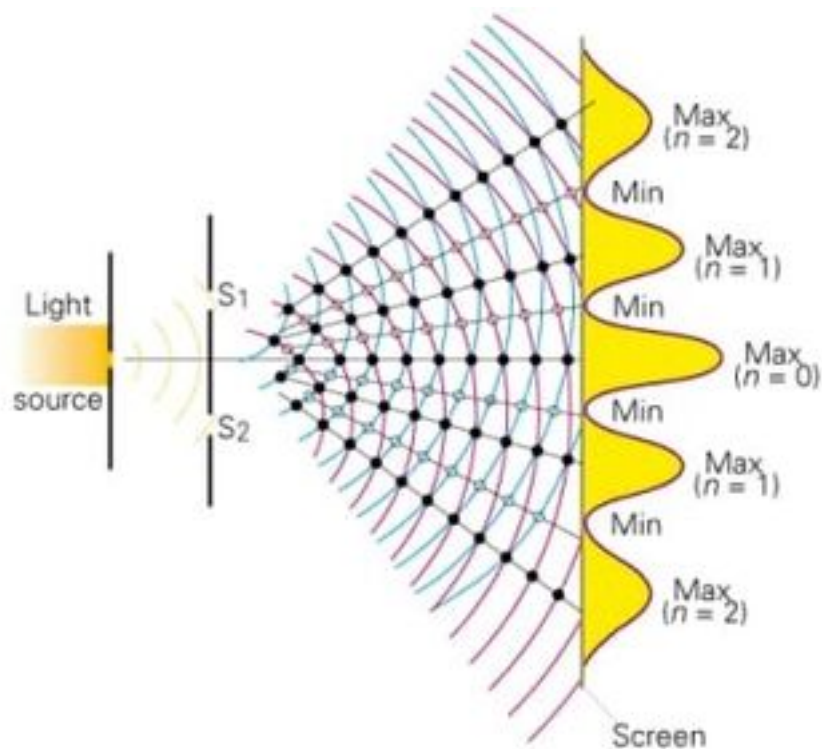
Μια παράλληλη δέσμη ηλεκτρονίων διαχωρίζεται σε δύο υποδέσμες με τη χρήση ενός διπρίσματος. Μετά οι υποδέσμες αλληλοεπικαλύπτονται και σχηματίζονται χροσσοί συμβολής. Ένα εξαιρετικά λεπτό σωληνοειδές τοποθετείται στο κέντρο μεταξύ των δύο υποδεσμών. Στο συγκεκριμένο πείραμα χρησιμοποιήθηκαν τρία διπρισματικά στάδια έτσι ώστε οι δύο υποδέσμες των ηλεκτρονίων να παραμένουν μακριά η μια από την άλλη αποφεύγοντας το φωτισμό του σωληνοειδούς. Επίσης έχει τοποθετηθεί και ένας σιδηρομαγνητικός ζυγός έτσι ώστε να αποτραπεί η παρουσία επιπλέον ασπρόμαυρων γραμμών που δεν συνδέονται με το φαινόμενο *Aharonov – Bohm*. Το σωληνοειδές διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Παρατηρούμε ότι μεταβάλλοντας το ηλεκτρικό ρεύμα στο σωληνοειδές τότε οι γραμμές στην φωτογραφική πλάκα μετακινούνται όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα



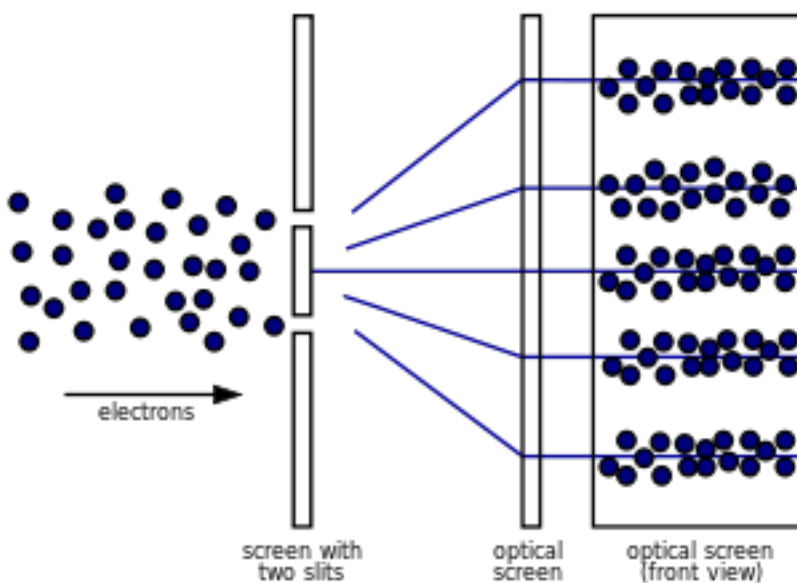
Το ηλεκτρικό πεδίο χρησιμοποιείται στην αύξηση του Μαγνητικού πεδίου όπου με την σειρά του δημιουργούσε μετατόπιση των ασπρόμαυρων γραμμών που βλέπουμε και στο πάνω σχήμα. Ακόμα και όταν σταμάτησαν να αυξάνουν το μαγνητικό πεδίο αυτή η μετατόπιση των ασπρόμαυρων γραμμών συνεχίστηκε να υπάρχει επαληθεύοντας εντονότερα το μαγνητικό φαινόμενο *Aharonov - Bohm*

### 5.3 Πείραμα διπλής σχισμής

Το πείραμα της διπλής σχισμής το παρατηρήσαμε στην κυματική, όπου ένα κύμα φτάνει σε μια επιφάνεια με δύο σχισμές. Τότε από την άλλη πλευρά βλέπουμε ότι δημιουργούνται δύο δευτερεύουσες πηγές του ίδιου κύματος. Τα δύο κύματα συμβάλλουν μεταξύ τους με αποτέλεσμα αν τοποθετήσουμε μια οθόνη στο τέλος του συστήματος να εμφανιστούν στην οθόνη χροσσοί συμβολής.

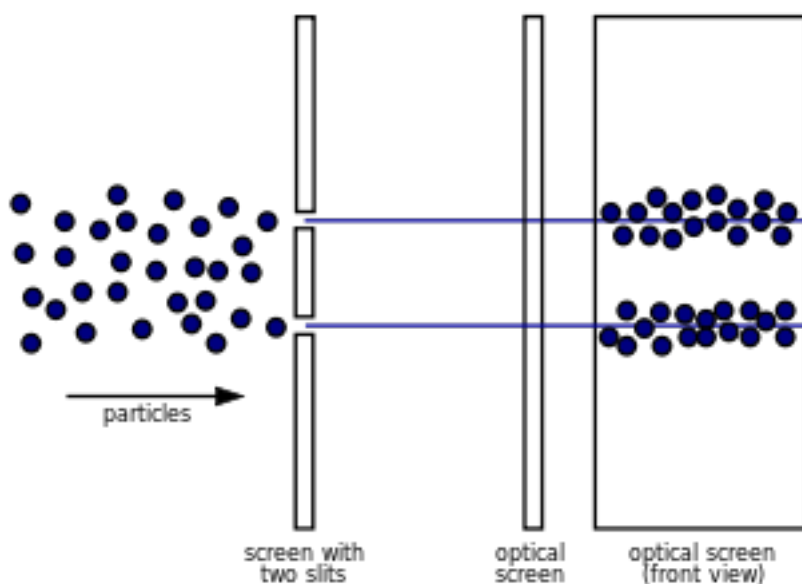


Αντικαθιστούμε την πηγή κύματος με μια πηγή ηλεκτρονίων. Αν και τα ηλεκτρόνια είναι σωματίδια, όταν περάσουν (ένα-ένα, αλλά πολλά απο αυτά - δεκάδες χιλιάδες) από τις δύο σχισμές στην οθόνη αρχίζουν και παρατηρούνται (απο τη συσσώρευση των σημείων πρόσπτωσης) χροσσοί συμβολής. Βλέπουμε λοιπόν τη στατιστική συμπεριφορά των ηλεκτρονίων να είναι σαν κύμα, που συμβάλλει "με τον εαυτό του" όταν περάσει απο τις δύο σχισμές.

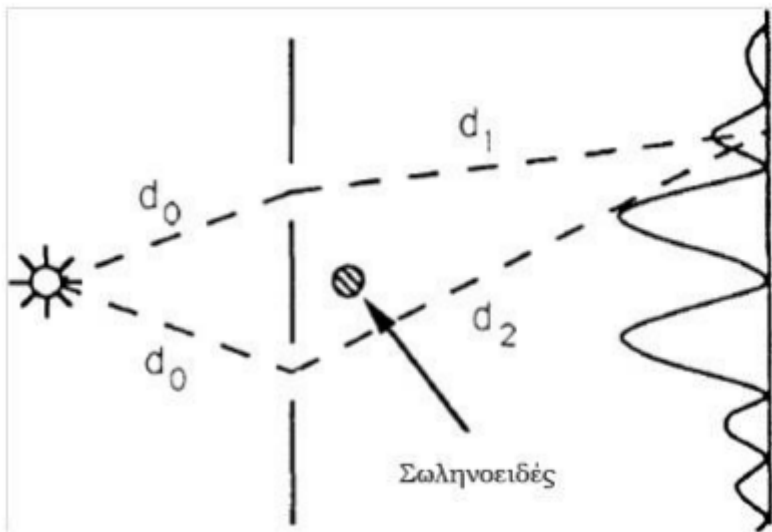




Ένα ακόμα πιο παράξενο πράγμα είναι ότι αν τοποθετήσουμε μια συσκευή που ανιχνεύει από που πέρασαν τα ηλεκτρόνια (τα λεγόμενα σήμερα *Which Way experiments*) τότε τα ηλεκτρόνια θα χτυπήσουν στην οθόνη με ένα τρόπο που θυμίζει κλασικούς κόκκους άμμου (δηλ. χωρίς συμβολή, αλλά πέφτοντας παντού στο δεξιό πέτασμα, με μιά Γκαουσιανή κατανομή, με τα περισσότερα (το μέγιστο της Γκαουσιανής) να είναι στα κλασικά-αναμενόμενα σημεία ακριβώς απέναντι απο τις σχισμές (τελικά δηλ. έχουμε ενα άθροισμα 2 Γκαουσιανών). Βλέπουμε λοιπόν να συμπεριφέρονται κανονικά σαν κλασικές μπάλες αν τις ρίχναμε σε δύο τρύπες. (Αυτό είναι ένα άλλο θέμα, που δέν διαπραγματευόμαστε σ' αυτή την εργασία, και έχει να κάνει με τη λεγόμενη "Αρχή της Συμπληρωματικότητας" του *Bohr* - που ενώ παλιά νόμιζαν οτι αυτό συμβαίνει (δηλαδή το χάσιμο του κβαντικού χαρακτήρα των σωματιδίων χάνεται σε *Which Way* πειράματα) λόγω της Αρχής της Αβεβαιότητας (επειδή πειράζουμε το σύστημα), έχει τελευταία αποδειχθεί οτι αυτό είναι απόρροια της λεγόμενης *Entanglement* του κάθε ηλεκτρονίου με το πέτασμα που έχει τις σχισμές.)



Σε αυτό το σύστημα των ηλεκτρονίων θα προσθέσουμε τώρα μιά μαγνητική ροή μετά την επιφάνεια με τις σχισμές (και κάπου στο μέσο, μεταξύ τους). Γύρω από τη μαγνητική ροή υπάρχουν τοιχώματα με άπειρο δυναμικό έτσι ώστε να μην υπάρχει πιθανότητα να περάσουν τα ηλεκτρόνια από την μαγνητική ροή. Τότε παρατηρούμε ότι οι χροσσοί στην οθόνη έχουν μετατοπισθεί.



Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το διανυσματικό δυναμικό που δημιουργεί στο γύρω χώρο (λόγω του  $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi_{\text{κλεισμένη}}$ ) η μαγνητική ροή αλλάζει την διαφορά φάσης που αποκτούν τα δύο κύματα όταν φτάνουν στην οθόνη. Το πάνω είναι το πείραμα που είχαν προτείνει στο αρχικό τους άρθρο οι *Aharonov* και *Bohm* το 1959, και η πάνω μετατόπιση των κροσσών οφείλεται στην έξτρα φάση  $q\frac{\Phi}{\hbar}$  που είδαμε και νωρίτερα στο κείμενο, και με χρήση του κβάντου ροής  $\Phi_0$  ( $\Phi_0 = \frac{h}{e}$ ) μπορεί να γραφτεί σαν  $\Delta\Phi_{AB} = 2\pi\frac{q}{e}\frac{\Phi}{\Phi_0}$ . Το παραπάνω πείραμα (και η επαλήθευση αυτής της έξτρα διαφοράς φάσης) έχει πραγματοποιηθεί αρκετές φορές, κυρίως από τον *Tonomura* [11].

## 6 Επίλογος - Τοπολογικές Φάσεις

Έχοντας μελετήσει με όσο το δυνατό πιο μαθηματικά-στοιχειώδη τρόπο (π.χ. χωρίς χρήση ολοκληρωμάτων-διαδρομών) με κανονικό Χαμιλτονιανό φορμαλισμό, τα γενικά φαινόμενα που προκύπτουν από ενδεχόμενη παρουσία μαγνητικών ή και ηλεκτρικών ροών (σε "απαγορευμένες" - μη προσβάσιμες στο σωματίδιο - περιοχές χώρου και χρόνου), είναι ίσως πρόπον να αναφέρουμε ότι αυτά τα φαινόμενα έχουν γενικευθεί τα τελευταία 15 χρόνια. Έχουν μάλιστα οδηγήσει στη γέννηση εντελώς καινούργιων περιοχών, κυρίως στη Φυσική Συμπυκνωμένης Ύλης, που είναι περιοχές που αφορούν διάφορα είδη Τοπολογικών Φάσεων (εδώ με την έννοια όχι της Μιγαδικής Ανάλυσης αλλά της Θερμοδυναμικής). Αυτές οι περιοχές αναπτύχθηκαν τάχιστα (δίνοντας εντελώς καινούργιες νομοτέλειες/συμπεριφορές σε όλη τη Φυσική) αμέσως μετά την πειραματική απομόνωση της Γραφίνης (που σήμερα ξέρουμε ότι είναι ένα δισδιάστατο "Ημιμέταλλο *Dirac*"). Ακολούθησε η ανακάλυψη (θεωρητική και μετά πειραματική) των "Τοπολογικών Μονωτών" και πιο πρόσφατα των "Ημιμετάλλων *Weyl*" - και η όμορφη αυτή περιπέτεια δεν φαίνεται να κοπάζει.

Ένα χαρακτηριστικό σε όλα τα καινούργια συστήματα είναι ότι παίζει κεντρικό ρόλο και το σπίν των ηλεκτρονίων - το οποίο στα φαινόμενα που διαπραγματευθήκαμε λείπει (τα φαινόμενα αυτής της εργασίας είναι καθαρά φαινόμενα που αφορούν τροχιακή Φυσική). Επειδή όμως στα καινούργια συστήματα υπάρχει ισχυρό *spin-orbit coupling*, και για παράδειγμα στους Τοπολογικούς Μονωτές συμβαίνει το λεγόμενο *spin-momentum locking*, οι πάνω τροχιακού-τύπου συμπεριφορές μεταφέρονται άμεσα σε συμπεριφορές των σπίν! Έτσι μπορεί κανείς να μιλά για "*spin-Aharonov-Bohm effect*" [8]. Έτσι υπάρχουν τρόποι να ελέγχει κανείς το σπιν μη-τοπικά (από μακριά!) εκμεταλλευόμενος αυτά τα φαινόμενα, το οποίο αναμένεται να φέρει επανάσταση (και σε εφαρμογές) στην περιοχή που έχει εδώ και χρόνια ονομασθεί *Spintronics* (και η οποία έως τώρα λειτουργούσε κυρίως με τοπική διαχείριση των σπίν, δηλαδή με άμεσες δυνάμεις πάνω τους). Τώρα υπάρχει πλέον η δυνατότητα διαχείρισης ιδιοτήτων με πιο λεπτούς τρόπους (χωρίς δυνάμεις) και μη-τοπικά (ίσως και στο χωρόχρονο!). Αυτά όμως είναι ενδιαφέροντα θέματα, που θα άξιζε να αναπτυχθούν με εκλαιευμένο τρόπο σε μία άλλη εργασία.

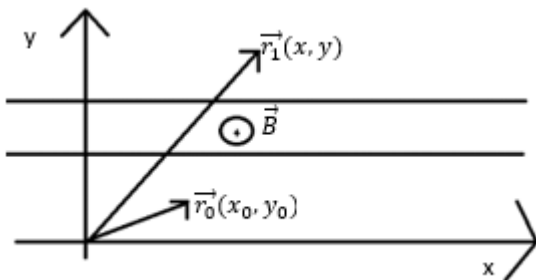
## 7 Παραρτήματα

### 7.1 Τρόποι εύρεσης της συνάρτησης βαθμίδας $\Lambda$ σε διάφορες περιπτώσεις

Στα πιο κάτω παραδείγματα θα υπολογίζουμε τη συνάρτηση βαθμίδας  $\Lambda$  που αντιστοιχίζει 2 σετ δυναμικών δύο προβλημάτων (ξεκινώντας για απλότητα από ένα με μηδενικά δυναμικά) σε σημεία του χωρόχρονου (του 2ου συστήματος, αυτού με τα μη-μηδενικά δυναμικά) έξω από μαγνητικά και ηλεκτρικά πεδία. (Ο λόγος είναι ότι, στο σημείο παρατήρησης και τα 2 συστήματα πρέπει να έχουν ίδια πεδία (για να ισχύουν οι μετασχηματισμοί βαθμίδας που χρησιμοποιούμε) - και επειδή το 1ο το έχουμε πάρει να έχει μηδενικά δυναμικά, άρα και μηδενικά πεδία στο σημείο παρατήρησης, έτσι πρέπει να είναι και τα πεδία στο ίδιο σημείο στο 2ο σύστημα! Αυτό όμως δεν απαγορεύει στα πεδία (πάντα για το 2ο σύστημα) να είναι διαφορετικά (μη-μηδενικά) σε άλλα σημεία του χωρόχρονου, "μακριά" από το σημείο παρατήρησης (και αυτό θα έχει συνέπειες αν κάποια ολοκληρώματα δυναμικών περνούν μέσα από αυτές τις περιοχές με τα πεδία!). Τα αποτελέσματα (βασισμένα στην [12]) δείχνει ότι η κατάλληλη συνάρτηση  $\Lambda$  που μας πάει από το ένα πρόβλημα (χωρίς καθόλου δυναμικά και πεδία οπουδήποτε) στο άλλο (με δυναμικά  $A$  και  $V$  στο σημείο παρατήρησης και ενδεχομένως με πεδία  $B$  και  $E$  σε "μακρινά" σημεία) δεν είναι, όπως θα δούμε, πάντα ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του διανυσματικού δυναμικού και ένα χρονικό ολοκλήρωμα του βαθμωτού δυναμικού του 2ου συστήματος, ιδιαίτερα αν υπάρχουν μακρινά πεδία στο 2ο μας σύστημα.

#### Παράδειγμα 1

Σε ένα σημείο του χώρου υπάρχει μια απείρου μήκους λωρίδα στην οποία προσπίπτει κάθετα μαγνητικό πεδίο σταθερού μέτρου  $B$



Σκοπός μας να υπολογίσουμε την συνάρτηση  $\Lambda$  στο σημείο  $r_1(x, y)$ . Να υπενθυμίσουμε ότι η συνάρτηση  $\Lambda$  χρησιμοποιείται στον μετασχηματισμό των δυναμικών που απαιτεί να ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda(x, y) \Rightarrow \Delta\vec{A} = \vec{\nabla}\Lambda(x, y) \quad (7.1.1)$$

$$V' = v - \frac{\partial\Lambda(x, y)}{\partial t} \Rightarrow \Delta V = -\frac{\partial\Lambda(x, y)}{\partial t} \quad (7.1.2)$$

όπου  $\Delta\vec{A}$  και  $\Delta V$  είναι η μεταβολή των δυναμικών εξαιτίας των μετασχηματισμών

Το πιο πάνω σύστημα είναι δισδιάστατο οπότε η σχέση για το διανυσματικό δυναμικό δίνει τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\Delta A_x = \frac{\partial\Lambda(x, y)}{\partial x} \quad (7.1.3)$$

$$\Delta A_y = \frac{\partial\Lambda(x, y)}{\partial y} \quad (7.1.4)$$

Επίσης στο πιο πάνω σύστημα δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο και για χάρη ευκολίας θα βάλουμε και το δυναμικό να είναι ίσο με μηδέν, έτσι καταλήγουμε στο γεγονός ότι η συνάρτηση  $\Lambda$  δεν μπορεί να έχει άμεση εξάρτηση από τον χρόνο.

Ας προχωρήσουμε στην επίλυση των εξισώσεων (7.1.14) και (7.1.15)

$$\int_{x_0}^x dx' \Delta A_x(x', y) = \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial\Lambda(x', y)}{\partial x} - f(y) \quad (7.1.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx' \Delta A_x(x', y) &= \Lambda(x, y) - \Lambda(x_0, y) - f(y) \\ \Rightarrow \Lambda(x, y) &= \Lambda(x_0, y) + \int_{x_0}^x dx' \Delta A_x(x', y) + f(y) \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Παραγωγίζουμε την πιο πάνω σχέση ως προς  $y$  ώστε να χρησιμοποιήσουμε την δεύτερη εξίσωση

$$\frac{\partial\Lambda(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial\Lambda(x_0, y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x dx' \Delta A_x(x', y) + \frac{\partial f(y)}{\partial y}$$

Τώρα θα αντικαταστήσουμε την (7.1.15) στην πιο πάνω σχέση

$$\Rightarrow \Delta A_y(x, y) = \frac{\partial\Lambda(x_0, y)}{\partial y} + \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial\Delta A_x(x', y)}{\partial y} + \frac{\partial f(y)}{\partial y}$$

ολοκληρώνουμε ως προς  $y$  την πιο πάνω σχέση

$$\int_{y_0}^y dy' \Delta A_y(x, y) = \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial\Lambda(x_0, y')}{\partial y'} + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial\Delta A_x(x', y')}{\partial y'} + \int_{y_0}^y dy' \frac{\partial f(y')}{\partial y'} + g(x)$$

$$\int_{y_0}^y dy' \Delta A_y(x, y) = \Lambda(x_0, y) - \Lambda(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial \Delta A_x(x', y')}{\partial y'} + f(y) - f(y_0) + g(x) \quad (7.1.7)$$

Η πιο πάνω σχέση έχει μέσα τα διανυσματικά δυναμικά. Όμως, θα ήταν πιο χρήσιμο να είχαμε μια σχέση για τα πεδία. Γι' αυτό θα πάρουμε την σχέση του μαγνητικού πεδίου με το διανυσματικό δυναμικό

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\Delta A}(x, y) &= \vec{B}(x, y) \\ \left| \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Delta A_x(x, y) & \Delta A_y(x, y) & 0 \end{pmatrix} \right| &= B(x, y) \hat{k} \\ \frac{\partial \Delta A_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \Delta A_x(x, y)}{\partial y} &= B(x, y) \\ \frac{\partial \Delta A_x(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \Delta A_y(x, y)}{\partial x} = B(x, y) \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

Τώρα θα αντικαταστήσουμε την (7.1.8) στην (7.1.7)

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y dy' \Delta A_y(x, y) &= \Lambda(x_0, y) - \Lambda(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial \Delta A_y(x', y')}{\partial x} \\ &\quad - \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B(x', y') + f(y) - f(y_0) + g(x) \\ \int_{y_0}^y dy' \Delta A_y(x, y) &= \Lambda(x_0, y) - \Lambda(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y dy' \Delta A_y(x, y') - \int_{y_0}^y dy' \Delta A_y(x_0, y') \\ &\quad - \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B(x', y') + f(y) - f(y_0) + g(x) \\ \Rightarrow \Lambda(x_0, y_0) &= \Lambda(x_0, y) - \int_{y_0}^y dy' \Delta A_y(x_0, y') - \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B(x', y') + f(y) - f(y_0) + g(x) \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Βλέπουμε ότι η πάνω σχέση είναι ανεξάρτητη του  $x$  οπότε καταλήγουμε ότι

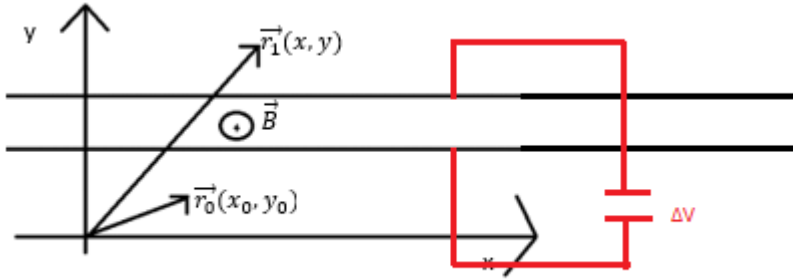
$$g(x) - \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B(x', y') \quad (7.1.10)$$

είναι ανεξάρτητο του  $x$  τώρα αντικαθιστούμε την (7.1.9) στην (7.1.6)

$$\begin{aligned} \Lambda(x, y) &= \Lambda(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y dy' \Delta A_y(x_0, y') + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B(x', y') - f(y) + f(y_0) - g(x) \\ &\quad + \int_{x_0}^x dx' \Delta A_x(x', y) + f(y) \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda(x, y) &= \Lambda(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y dy' \Delta A_y(x_0, y') + \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B(x', y') + f(y_0) - g(x) \\ &+ \int_{x_0}^x dx' \Delta A_x(x', y) \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

παράδειγμα 2:



Σε αυτό το παράδειγμα θα προσθέσουμε και ένα πυκνωτή στο χώρο που υπάρχει μαγνητική ροή. Τότε σε αντίθεση με προηγουμένως θα έχουμε εξάρτηση της συνάρτησης  $\Lambda$  από το βαθμωτό δυναμικό. Έτσι θα πρέπει να λύσουμε τις πιο κάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$\Delta V(t) = -\frac{\partial \Lambda(x, y, t)}{\partial t} \quad (7.1.13)$$

$$\Delta A_x = \frac{\partial \Lambda(x, y)}{\partial x} \quad (7.1.14)$$

$$\Delta A_y = \frac{\partial \Lambda(x, y)}{\partial y} \quad (7.1.15)$$

Η λύση των πιο πάνω εξισώσεων έχει γίνει προσεκτικά στο κεφάλαιο 2.7.2 και είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \Lambda(x, y, t) &= \Lambda(x_0, y_0, t_0) - \int_{t_0}^t dt' V(x_0, y_0, t') + \int_{x_0}^x dx' A_x(x', y, t) + \int_{y_0}^y dy' A_y(x_0, y', t) \\ &+ \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') + f(y_0, t_0) + g(x, t_0) \\ &+ h(x, y) \end{aligned} \quad (7.1.16)$$

όπου οι ποσότητες  $f(y_0, t_0)$ ,  $g(x, t_0)$  και  $h(x, y)$  πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε:

$\int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' B_z(x', y', t) + g(x, t)$  και  $\int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') + h(x, y)$  να είναι ανεξάρτητα του  $x$

$\int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' E_y(x_0, y', t') + \int_{t_0}^t dt' \int_{x_0}^x dx' E_x(x', y, t') - \int_{t_0}^t dt' \int_{y_0}^y dy' \int_{x_0}^x dx' \frac{\partial B_z(x', y', t')}{\partial t} + h(x, y)$  να είναι ανεξάρτητο του  $y$ . Το αποτέλεσμα αυτό δίνει τη δυνατότητα για πιο προσεκτική

διερεύνηση π.χ. του ηλεκτρικού φαινομένου που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2.7.2, κάτι που το αφήνουμε για μελλοντική μελέτη.



## Βιβλιογραφία

- [1] *K. Mouloupoulos and N. W. Ashcroft. 'General Theory of the Metal-Insulator Transition'. στο: Phys. Rev. B 45.11518 (1992).*
- [2] *Michael Berry. 'Quantal phase factors accompanying adiabatic changes'. στο: Royal Society 395 (1802 1984), σσ. 45–57.*
- [3] *Y. Aharonov and D. Bohm. 'Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory'. στο: Phys. Rev. 115 115.485 (1959).*
- [4] *Walter Franz. 'Zur Theorie des elektrischen Durchschlags kristallischer Isolatoren'. στο: Z. Physik 113.607 (1939).*
- [5] *David J. Griffiths. Εισαγωγή στην ηλεκτροδυναμική. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015. κεφ. 10.1.*
- [6] *D. J. Thouless and M. Kohmoto and M. P. Nightingale and M. den Nijs. 'Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential'. στο: Phys. Rev. Lett. 49,6 (405 1982).*
- [7] *L. Landau and R. Peierls. 'Quantum electrodynamics in configuration space'. στο: Zeit. f. Phys. 62.188 (1930).*
- [8] *Joseph Maciejko and Eun–Ah Kim and Xiao-Liang Qi. 'Spin Aharonov-Bohm effect and topological spin transistor'. στο: Phys. Rev. B 82.195409 (2010).*
- [9] *W. Ehrenberg and R. E. Siday. 'The Refractive Index in Electron Optics and the Principles of Dynamics'. στο: Proceedings of the Physical Society 62.8 (1949).*
- [10] *Barry Simon. 'Holonomy, the Quantum Adiabatic Theorem, and Berry's Phase'. στο: Phys. Rev. Lett. 51.2167 (1983).*
- [11] *John Steeds Pier and Giorgio Merli and Giulio Pozzi and GianFranco Missiroli and Akira Tonomura. 'The double-slit experiment with single electrons'. στο: Physics World 16.5 (2003).*
- [12] *Κ. Μουλόπουλος. 'Nonlocal phases of local quantum mechanical wave functions in static and time-dependent Aharonov–Bohm experiments'. στο: Journ. Phys. A 43 (35).354019 (2010).*

- [13] Κ. Μουλόπουλος. ‘*Topological Proximity Effect : A Gauge Influence from Distant Fields on Planar Quantum-Coherent Systems*’. στο: *Intern. Journ. Theor. Phys* 54.1908 (2015).