



Πανεπιστήμιο Κύπρου  
Τμήμα Φυσικής

## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΟΝΗΡΕΙΣ ΦΕΡΜΙΟΝΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ:  
ΚΒΑΝΤΙΚΕΣ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΣΤΗ 2Η ΔΙΑΤΑΡΑΚΤΙΚΗ  
ΤΑΞΗ

ΜΑΡΙΟΣ ΧΑΤΖΗΑΝΤΩΝΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2014



# Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος του τμήματος Φυσικής του Πανεπιστημίου Κύπρου. Σκοπός της ήταν ο υπολογισμός της διαφοράς που υπάρχει ανάμεσα στις συναρτήσεις επανακανονικοποίησης των μονήρων και μη μονήρων ως προς τη γεύση των quarks διγραμμικών τελεστών. Οι τελεστές αυτοί εμπλέκονται άμεσα στον υπολογισμό ιδιοτήτων των αδρονίων, όπως για παράδειγμα η μάζα του ψευδο-βαθμωτού μποζονίου  $\eta'$ .

Οι διάφοροι υπολογισμοί έγιναν στα πλαίσια του φορμαλισμού της κβαντικής χρωμοδυναμικής στο πλέγμα. Η κβαντική χρωμοδυναμική είναι εκείνη η θεωρία πεδίων η οποία περιγράφει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Το πλέγμα, μέσα από τη διακριτοποίηση του χωροχρόνου και των βαθμών ελευθερίας του συστήματος, παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού των διαφόρων συναρτήσεων συσχετισμού που προκύπτουν.

Στα πρώτα κεφάλαια αυτής της εργασίας, γίνεται μια εκτενής αναφορά στο θεωρητικό υπόβαθρο των συγκεκριμένων υπολογισμών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η διαδικασία που ακολουθήθηκε και τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Δίνονται αποτελέσματα μέχρι και τη δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών ενώ χρησιμοποιούνται βελτιωμένες διακριτοποιήσεις της κβαντικής χρωμοδυναμικής (φερμιονική δράση SLiNC και γκλουονικές δράσεις τύπου Symanzik).

# Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον επιβλέποντα καθηγητή αυτής της εργασίας, Καθ. Χαράλαμπο Παναγόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά του σε κάθε στάδιο των υπολογισμών και της συγγραφής αυτής της εργασίας. Η πείρα και οι γνώσεις του ήταν τα στοιχεία εκείνα που μου έδωσαν την ώθηση στο να προχωρήσω αντιμετωπίζοντας κάθε εμπόδιο που συναντούσα.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη μεταδιδακτορική συνεργάτη του τμήματος Φυσικής, Δρ. Μάρθα Κωνσταντίνου για την πολύτιμη βοήθειά της σε διάφορα στάδια της εργασίας.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ αρμόζει στους γονείς μου, Ματθαίο και Χαρούλλα, για την αμέριστη στήριξή τους καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

# Περιεχόμενα

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>I</b> | <b>Στοιχεία θεωρίας</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1</b> | <b>Εισαγωγικές έννοιες</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1      | Η αναγκαιότητα της έννοιας του πεδίου . . . . .                   | 2         |
| 1.2      | Το πεδίο Dirac . . . . .  | 4         |
| 1.3      | Στοιχεία από την κλασική θεωρία πεδίων . . . . .                  | 6         |
| 1.3.1    | Ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός . . . . .                             | 6         |
| 1.3.2    | Το θεώρημα της Noether . . . . .                                  | 6         |
| 1.3.3    | Η δράση Dirac . . . . .   | 7         |
| 1.3.4    | Η δράση Maxwell . . . . .   | 8         |
| <b>2</b> | <b>Θεωρίες βαθμίδας</b>   | <b>10</b> |
| 2.1      | Η δράση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (QED) . . . . .            | 10        |
| 2.2      | Η δράση της κβαντικής χρωμοδυναμικής (QCD) . . . . .              | 12        |
| <b>3</b> | <b>Ολοκληρώματα διαδρομής</b>                                     | <b>15</b> |
| 3.1      | Ολοκληρώματα διαδρομής στην κβαντική μηχανική . . . . .           | 15        |
| 3.1.1    | Επέκταση σε φανταστικό χρόνο . . . . .                            | 17        |
| 3.2      | Μποζονικές μεταβλητές . . . . .                                   | 18        |
| 3.3      | Φερμιονικές μεταβλητές . . . . .                                  | 21        |
| <b>4</b> | <b>Το πλέγμα σαν ομαλοποιητής της QCD</b>                         | <b>23</b> |
| 4.1      | Εισαγωγή . . . . .  | 23        |
| 4.2      | Ελεύθερα φερμιόνια στο πλέγμα . . . . .                           | 24        |
| 4.2.1    | Ο φερμιονικός διαδότης και το πρόβλημα του διπλασιασμού . . . . . | 25        |
| 4.2.2    | Φερμιόνια Wilson . . . . .  | 26        |
| 4.3      | Θεωρίες βαθμίδας στο πλέγμα . . . . .                             | 28        |

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| 4.3.1      | Κβαντική ηλεκτροδυναμική στο πλέγμα . . . . .              | 28        |
| 4.3.2      | Κβαντική χρωμοδυναμική στο πλέγμα . . . . .                | 34        |
| <b>5</b>   | <b>Βελτιωμένες δράσεις της QCD στο πλέγμα</b>              | <b>38</b> |
| 5.1        | Εισαγωγή . . . . .   | 38        |
| 5.2        | Φερμιόνια Clover . . . . .                                 | 39        |
| 5.3        | Δράσεις τύπου Symanzik . . . . .                           | 39        |
| 5.4        | Δράση SLiNC . . . . .                                      | 41        |
| <b>6</b>   | <b>Επανακανονικοποίηση</b>                                 | <b>42</b> |
| 6.1        | Εισαγωγή . . . . .   | 42        |
| 6.2        | Ορισμός επανακανονικοποιημένων ποσοτήτων . . . . .         | 42        |
| 6.3        | Το σχήμα επανακανονικοποίησης $RI'$ . . . . .              | 43        |
| 6.4        | Επανακανονικοποίηση των φερμιονικών τελεστών . . . . .     | 44        |
| <b>II</b>  | <b>Υπολογισμοί</b>   | <b>46</b> |
| <b>7</b>   | <b>Τελεστές με ή χωρίς αλλαγή γεύσης</b>                   | <b>47</b> |
| 7.1        | Εισαγωγή . . . . .   | 47        |
| 7.2        | Συνεισφορές στον υπολογισμό . . . . .                      | 48        |
| 7.3        | Διαδικασία υπολογισμού . . . . .                           | 49        |
| 7.4        | Υπολογισμός των συναρτήσεων επανακανονικοποίησης . . . . . | 50        |
| <b>8</b>   | <b>Αποτελέσματα υπολογισμών</b>                            | <b>51</b> |
| <b>9</b>   | <b>Συζήτηση αποτελεσμάτων</b>                              | <b>55</b> |
| 9.1        | Χρησιμότητα των αποτελεσμάτων . . . . .                    | 55        |
| 9.2        | Ορθότητα των αποτελεσμάτων . . . . .                       | 57        |
| <b>III</b> | <b>Παραρτήματα</b>   | <b>58</b> |
| <b>A'</b>  | <b>Μεταβλητές Grassmann</b>                                | <b>59</b> |
| A'.1       | Ορισμός . . . . .  | 59        |
| A'.2       | Ομοτιμία Grassmann . . . . .                               | 60        |

|  |    |
|--|----|
| A'.3 Παραγωγή ως προς μεταβλητές Grassmann . . . . .   | 60 |
| A'.4 Ολοκλήρωση ως προς μεταβλητές Grassmann . . . . . | 61 |
| A'.4.1 Γκαουσιανά ολοκληρώματα . . . . .               | 62 |

Μέρος Ι

Στοιχεία θεωρίας



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγικές έννοιες

### 1.1 Η αναγκαιότητα της έννοιας του πεδίου

Η κβαντική θεωρία πεδίων είναι η θεωρία εκείνη που καταφέρνει να συνδυάσει αποτελεσματικά τις αρχές της κβαντικής μηχανικής και της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Με αυτόν τον τρόπο, καθίσταται απαραίτητη στην κατανόηση των αλληλεπιδράσεων των στοιχειωδών σωματιδίων της ύλης, αφού για τη μελέτη τέτοιων φαινομένων απαιτείται μια θεωρία που να είναι εφαρμόσιμη σε πολύ μικρές κλίμακες (κβαντομηχανικές) και σε πολύ ψηλές ενέργειες (σχετικιστικές).

Το ερώτημα που παραμένει όμως, είναι γιατί να είναι απαραίτητη η χρήση της έννοιας των πεδίων και να μην μπορεί κανείς να κβαντώσει τα σχετικιστικά σωματίδια όπως και στην περίπτωση των μη σχετικιστικών. Σε εκείνη την περίπτωση η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου (που στην ουσία είναι ένα πεδίο) ερμηνεύεται ως το πλάτος πιθανότητας ύπαρξης του σωματιδίου σε ένα σημείο του χωροχρόνου. Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει στην περίπτωση των σχετικιστικών σωματιδίων, αφού είναι πειραματικό γεγονός ότι ανά πάσα στιγμή μέρος της ενέργειας του συστήματος μπορεί να μετατραπεί σε ζεύγος σωματιδίου - αντισωματιδίου με μάζα που ικανοποιεί τη σχέση του Einstein:

$$E = m. \tag{1.1}$$

Ακόμα και στην περίπτωση όπου η ενέργεια του συστήματος δεν είναι αρκετή, η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{1}{2} \tag{1.2}$$

επιτρέπει τη δημιουργία κάποιου *εικονικού* ζεύγους αρκεί ο χρόνος ζωής του να είναι αρκούντως μικρός.

Πέρα από τα πιο πάνω, η χρήση της έννοιας του πεδίου και των πολυσωματιδιακών καταστάσεων επιβάλλεται και από επιχειρήματα αιτιότητας. Συγκεκριμένα, το πλάτος πιθανότητας μετάβασης ενός σωματιδίου από ένα σημείο  $\mathbf{x}_0$  του χώρου σε κάποιο άλλο  $\mathbf{x}$  μετά από δεδομένο χρόνο  $t$  είναι

$$U(t) = \langle \mathbf{x} | e^{-iHt} | \mathbf{x}_0 \rangle \quad (1.3)$$

Για το ελεύθερο σχετικιστικό σωματίδιο ισχύει ότι  $H = E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  και έτσι

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle \mathbf{x} | e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} | \mathbf{x}_0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-it\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \\ &= -\frac{i}{4\pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} \int_{-\infty}^{\infty} dp p e^{i(p|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|-t\sqrt{p^2+m^2})} \\ &\simeq \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 - t^2]^{-5/4} t e^{-m\sqrt{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2-t^2}} \\ &\simeq \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-5/2} t e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση της στάσιμης φάσης στο όριο όπου  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \gg t$ . Κανείς μπορεί εύκολα να παρατηρήσει ότι ο πιο πάνω υπολογισμός δίνει μη μηδενικό αποτέλεσμα. Αυτό αποτελεί παράδοξο λαμβάνοντας υπόψη την αρχή της αιτιότητας, αφού υπάρχει μη μηδενική πιθανότητα το σωματίδιο να πάει από τη θέση  $\mathbf{x}_0$  στην  $\mathbf{x}$ , δηλαδή να ταξιδέψει με (μέση) ταχύτητα πολύ μεγαλύτερη από 1.

Η κβαντική θεωρία πεδίων δίνει λύση σε αυτό το πρόβλημα. Εισάγοντας την έννοια των αντισωματιδίων και διαπιστώνοντας ότι η κίνηση ενός σωματιδίου προς μια κατεύθυνση είναι εντελώς ισοδύναμη με την κίνηση του αντισωματιδίου του προς την αντίθετη κατεύθυνση, η θεωρία δίνει λύση στο πρόβλημα της αιτιότητας αφού η συνεισφορά ενός σωματιδίου και ενός αντισωματιδίου σε ένα φαινόμενο ακυρώνονται μεταξύ τους ενώ δεν είναι δυνατόν να εμφανιστεί μόνο μια από αυτές και έτσι η αιτιότητα διατηρείται. Ακόμα, μπορεί να περιγράψει χωρίς κανένα πρόβλημα, συστήματα με περισσότερα από ένα σωματίδια, καθώς και συστήματα με μεταβλητό αριθμό σωματιδίων. Επίσης, θεμελιώνει τη σύνδεση ανάμεσα στο spin και στη στατιστική των σωματιδίων.

Με όλα τα πιο πάνω η κβαντική θεωρία πεδίων παρέχει όλα τα απαραίτητα εργαλεία που χρειάζονται για να υπολογιστούν διάφορες φυσικά μετρήσιμες ποσότητες όπως ο χρόνος ζωής των σωματιδίων και η ενεργός διατομή των διάφορων αντιδράσεων. Αυτοί οι υπολογι-

σμοί μπορούν να επιβεβαιωθούν πειραματικά με μεγάλη ακρίβεια και έτσι η θεωρία αποκτά φυσικό νόημα.

## 1.2 Το πεδίο Dirac

Αφού ο Dirac μελέτησε τη σχετικιστική θεωρία για την ακτινοβολία το 1927, άρχισε να ψάχνει για μια θεωρία που θα περιγράφει τα σχετικιστικά ηλεκτρόνια. Ξεκινώντας από το γεγονός ότι η μη σχετικιστική εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi \quad (1.5)$$

προέκυπτε αν στην κλασική σχέση για την ενέργεια (του ελεύθερου σωματιδίου)

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1.6)$$

γίνουν οι ‘αντικαταστάσεις’

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.7)$$

και

$$\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (1.8)$$

και αν οι τελεστές που προκύπτουν δράσουν σε ένα πεδίο - κυματοσυνάρτηση  $\Psi$ . Ήταν φανερό ότι οι πιο πάνω αντικαταστάσεις ήταν συμβατές με τη σχετικότητα αφού αντιμετωπίζουν το χώρο και το χρόνο με τον ίδιο τρόπο, και έτσι μάλλον θα έπρεπε να ισχύουν και στην περίπτωση που ήθελε να μελετήσει. Οι δύο αντικαταστάσεις μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως

$$p^\mu \rightarrow i\hbar \partial^\mu \quad (1.9)$$

όπου  $p^\mu = (\frac{E}{c}, \mathbf{p})$  είναι η τετραορμή του σωματιδίου και  $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla)$  είναι η συναλλοίωτη παράγωγος.

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία στη σχετικιστική σχέση της ενέργειας

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \quad (1.10)$$

κανείς οδηγείται στην εξίσωση

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi = 0 \quad (1.11)$$

Το πρόβλημα με την πιο πάνω εξίσωση ήταν ότι αν, σύμφωνα με την αντίληψη της τότε εποχής, το πεδίο  $\phi$  ερμηνευτεί ως κυματοσυνάρτηση δεν οδηγούσε απαραίτητα σε θετικό ρεύμα πιθανότητας. Αργότερα βέβαια, επανερμηνεύθηκε και στις μέρες μας αποτελεί την εξίσωση για το πεδίο των βαθμωτών σωματιδίων, ενώ είναι γνωστή σαν εξίσωση Klein - Gordon.

Για να αποφύγει το πρόβλημα των αρνητικών πιθανοτήτων ο Dirac κατάλαβε ότι πρέπει να κατασκευάσει μια εξίσωση που να είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο όπως ακριβώς και η εξίσωση του Schrödinger, ενώ για να είναι σχετικιστικά αναλλοίωτη έπρεπε να είναι και πρώτης τάξης ως προς τις χωρικές συντεταγμένες. Έτσι, αρχίζοντας με την εξίσωση

$$i\hbar \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar \alpha \cdot \nabla + \beta mc) \psi \quad (1.12)$$

και δρώντας για ακόμα μια φορά με τους ίδιους τελεστές και στα δύο μέλη της εξίσωσης διαπίστωσε ότι

$$-\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-i\hbar \alpha \cdot \nabla + \beta mc)^2 \psi \quad (1.13)$$

και απαίτησε να ισχύει ως εξωτερική συνθήκη η Εξίσωση (1.11). Για να ισχύει αυτό πρέπει οι σταθερές  $\alpha_i$  και  $\beta$  να μην είναι απλοί αριθμοί αλλά τετραγωνικοί πίνακες. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι και το πεδίο  $\psi$  δεν είναι βαθμωτό πεδίο αλλά ένα διάνυσμα στήλη με αριθμό συνιστωσών όσο και η διάσταση των πινάκων. Ακόμα, οι πίνακες  $\alpha$  και  $\beta$  πρέπει να ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις μετάθεσης:

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 2\delta_{ij} \mathbb{1} \\ \{\alpha_i, \beta\} &= 0 \\ \alpha_i^2 &= \beta^2 = \mathbb{1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

όπου  $\mathbb{1}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Οι πιο πάνω ιδιότητες επιβάλλουν ότι οι πίνακες  $\alpha_i$  και  $\beta$  πρέπει να έχουν διάσταση τουλάχιστον 4.

Για μια πιο συμμετρική μορφή των εξισώσεων κανείς μπορεί να ορίσει τους πίνακες  $\gamma^0 = \beta$  και  $\gamma^i = \beta \alpha^i$ . Με αυτόν τον τρόπο [1] η εξίσωση του Dirac παίρνει τη μορφή

$$\left( i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0 \quad (1.15)$$

με τους πίνακες  $\gamma$  να ικανοποιούν τη σχέση μετάθεσης

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (1.16)$$

## 1.3 Στοιχεία από την κλασική θεωρία πεδίων

### 1.3.1 Ο Λαγκρανζιανός φορμαλισμός

Η θεμελιώδης ποσότητα στη θεωρία πεδίων, όπως και στην κλασική μηχανική είναι η δράση  $S$  η οποία γράφεται ως το χρονικό ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής  $L$ . Σε μια τοπική θεωρία, η Λαγκρανζιανή μπορεί να γραφεί ως το χωρικό ολοκλήρωμα μιας Λαγκρανζιανής πυκνότητας  $\mathcal{L}$ , η οποία είναι συνάρτηση ενός ή περισσοτέρων πεδίων  $\phi(x)$  και των παραγώγων τους  $\partial_\mu\phi$ . Έτσι, προκύπτει ότι

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi] d^4x. \quad (1.17)$$

Η αρχή της ελάχιστης δράσης επιβάλλει ότι το πεδίο  $\phi$  έχει τέτοια χωροχρονική εξάρτηση ώστε η δράση να παίρνει ακρότατη τιμή. Αυτό σημαίνει ότι μια μικρή μεταβολή του πεδίου  $\delta\phi$  αφήνει αμετάβλητη τη δράση. Έτσι,

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \right) \\ &= \int d^4x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \right) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Ο τελευταίος όρος του πιο πάνω αθροίσματος είναι ίσος με ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω στη συνοριακή επιφάνεια της χωροχρονικής περιοχής που καταλαμβάνει το σύστημα. Δεδομένου ότι οι αρχικές και τελικές συνθήκες του προβλήματος είναι προκαθορισμένες, πάνω σε αυτήν την επιφάνεια ισχύει ότι  $\delta\phi = 0$  και άρα και το ολοκλήρωμα είναι επίσης μηδενικό. Επίσης, θέλουμε η πιο πάνω ισότητα να ισχύει για οποιοδήποτε  $\delta\phi$  και για οποιαδήποτε περιοχή ολοκλήρωσης. Έτσι τελικά, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \quad (1.19)$$

Η πιο πάνω εξίσωση καλείται εξίσωση Euler - Lagrange και αποτελεί την εξίσωση “κίνησης” του πεδίου.

### 1.3.2 Το θεώρημα της Noether

Έστω ότι η Λαγκρανζιανή κάποιου συστήματος  $\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi]$  παραμένει αναλλοίωτη κάτω από ένα μετασχηματισμό του πεδίου  $\phi$ :

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + a\delta\phi(x) \quad (1.20)$$

Τότε οι εξισώσεις Euler - Lagrange παραμένουν επίσης αναλλοίωτες και ο εν λόγω μετασχηματισμός καλείται συμμετρία του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, οι εξισώσεις κίνησης παραμένουν αναλλοίωτες ακόμα και αν κάτω από το μετασχηματισμό (1.20) η Λαγκρανζιανή μεταβληθεί κατά την απόκλιση ενός ρεύματος  $J^\mu$ :

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + a\partial_\mu J^\mu(x) \quad (1.21)$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(x) &= a\partial_\mu J^\mu(x) \\ &= a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi \\ &= a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + a\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) - a\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi \\ &= a\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Τελικά προκύπτει ότι

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{όπου} \quad j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi - J^\mu \quad (1.23)$$

Η πιο πάνω εξίσωση δείχνει τη διατήρηση του ρεύματος  $j^\mu$ . Έτσι, για κάθε συνεχή συμμετρία της  $\mathcal{L}$  υπάρχει και ένας νόμος διατήρησης.

Ο νόμος διατήρησης μπορεί επίσης να εκφραστεί και ως το γεγονός ότι υπάρχει ένα φορτίο  $Q$  το οποίο είναι σταθερό καθώς περνά ο χρόνος. Συγκεκριμένα,

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \text{όπου} \quad Q = \int_{\text{όλος ο χώρος}} j^0 d^3x \quad (1.24)$$

### 1.3.3 Η δράση Dirac

Η εξίσωση του Dirac μπορεί να προκύψει από την εξίσωση Euler - Lagrange αν κανείς θεωρήσει τη δράση:

$$S[\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m) \psi \quad (1.25)$$

Στην πιο πάνω δράση  $\bar{\psi}$  είναι το συζυγές πεδίο του  $\psi$  και είναι ένα διάνυσμα γραμμής με διάσταση όμοια με αυτήν του  $\psi$ , ώστε η δράση να είναι βαθμωτό μέγεθος. Η εξίσωση που ικανοποιεί το πεδίο αυτό είναι

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (1.26)$$

Η δράση του Dirac, όπως ορίστηκε πιο πάνω, παραμένει αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = \psi - ia\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} + ia\bar{\psi}\end{aligned}\quad (1.27)$$

Αυτή η συμμετρία οδηγεί σε ένα διατηρούμενο ρεύμα το οποίο εξαρτάται από τα πεδία  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  όπως φαίνεται παρακάτω:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \delta\bar{\psi} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.28)$$

Αν αυτό το ρεύμα ερμηνευθεί ως ρεύμα πιθανότητας, τότε η μηδενική του συνιστώσα πρέπει να είναι απόλυτα θετική. Η πιο απλή επιλογή που μπορεί να κάνει κάποιος ώστε να ισχύει η πιο πάνω απαίτηση είναι να ορίσει ότι

$$j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi \equiv \psi^\dagger \psi \quad (1.29)$$

Σε αυτήν την περίπτωση η σχέση που συνδέει τα πεδία  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  είναι η ακόλουθη:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.30)$$

Σε αυτό το σημείο βέβαια, αξίζει να σημειωθεί ότι η ερμηνεία του  $j^\mu$  ως ρεύμα πιθανότητας δεν είναι απόλυτα σωστή και αργότερα εγκαταλείφθηκε. Η εξίσωση (1.30), όμως, εξακολουθεί να ισχύει ως ορισμός για το  $\bar{\psi}$ .

### 1.3.4 Η δράση Maxwell

Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν τη θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού είναι οι εξισώσεις του Maxwell. Χρησιμοποιώντας σχετικιστικό συμβολισμό, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφούν ως:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (1.31)$$

όπου  $F^{\mu\nu}$  ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, ο οποίος μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του δυναμικού  $A^\mu$  ως

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.32)$$

και  $j^\mu$  το ρεύμα - πηγή του πεδίου για το οποίο ισχύει η εξίσωση συνέχειας:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (1.33)$$

Σε μια θεωρία πεδίων, το δυναμικό  $A^\mu$  μπορεί να ερμηνευθεί ως το πεδίο του φωτονίου. Έτσι, σε μια τέτοια θεωρία το δυναμικό αυτό αποκτά φυσική σημασία και παύει να είναι ένα μαθηματικό κατασκεύασμα της κλασικής ηλεκτροδυναμικής. Ακόμα, η δράση από την οποία προκύπτει η πιο πάνω εξίσωση κίνησης για το πεδίο  $A^\mu$  αποδεικνύεται ότι είναι η ακόλουθη:

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \right) \quad (1.34)$$

Σε αυτό το σημείο είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι η πιο πάνω δράση και συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης των πεδίων παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από το μετασχηματισμό βαθμίδας:

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \Lambda \quad (1.35)$$

όπου  $\Lambda$  είναι οποιαδήποτε συνάρτηση του χωροχρόνου.



## Κεφάλαιο 2

# Θεωρίες βαθμίδας

### 2.1 Η δράση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής (QED)

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίστηκε η δράση που περιγράφει τα σχετικιστικά ηλεκτρόνια. Η δράση αυτή όμως, αναφέρεται αποκλειστικά σε ελεύθερα ηλεκτρόνια ενώ δεν υπάρχει πουθενά κάποιος όρος που να περιγράφει οποιαδήποτε αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Ορίστηκε επίσης η δράση που περιγράφει τα φωτόνια τα οποία συνδέονται με κάποιο αυθαίρετο ρεύμα - πηγή. Το ζητούμενο αυτού του κεφαλαίου είναι να βρεθεί η δράση που να περιγράφει πλήρως τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σχετικιστικών ηλεκτρονίων.

Κατ' αρχήν πρέπει να παρατηρήσει κανείς ότι η δράση των φωτονίων είναι αναλλοίωτη κάτω από τον τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda(x) \quad (2.1)$$

Αντίθετα, κάτω από το μετασχηματισμό

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-ig\Lambda} \psi \quad (2.2)$$

η δράση των ελεύθερων ηλεκτρονίων είναι αναλλοίωτη μόνο αν το  $\Lambda$  είναι σταθερά (καθολικός μετασχηματισμός βαθμίδας). Κάτω από ένα τοπικό μετασχηματισμό η δράση αυτή μετασχηματίζεται σαν:

$$\begin{aligned} S \rightarrow S' &= \int d^4x \bar{\psi} e^{ig\Lambda} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (e^{-ig\Lambda} \psi) \\ &= S + \int d^4x g \partial_\mu \Lambda \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (2.3)$$

Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η παράγωγος του πεδίου  $\psi$  δεν μετασχηματίζεται όπως το ίδιο το πεδίο, κάτι που συνέβαινε στην περίπτωση του καθολικού μετασχηματισμού. Δηλαδή,

$$\partial_\mu \psi' = e^{-ig\Lambda} \partial_\mu \psi - i g \partial_\mu \Lambda \psi \neq e^{-ig\Lambda} \partial_\mu \psi \quad (2.4)$$

Αντίθετα, η ποσότητα

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - igA_\mu) \psi \quad (2.5)$$

όπου  $A_\mu$  είναι το φωτονικό πεδίο, έχει την ιδιότητα να 'απορροφά' τον επιπλέον όρο που εμφανίζεται στο πιο πάνω άθροισμα έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = e^{-ig\Lambda} D_\mu \psi \quad (2.6)$$

Η πιο πάνω σχέση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η δράση

$$S = \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = \int d^4x [\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi] \quad (2.7)$$

είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς 2.1 και 2.2.

Με άλλα λόγια, αν κανείς απαιτήσει η δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας τότε είναι αναγκασμένος να εισαγάγει ένα επιπλέον όρο στη δράση ο οποίος περιλαμβάνει ένα διανυσματικό πεδίο που αλληλεπιδρά με τα ηλεκτρόνια. Συγκρίνοντας αυτόν τον επιπλέον όρο με τη δράση των φωτονίων εξάγεται το συμπέρασμα ότι το ρεύμα - πηγή για τα φωτόνια είναι ίσο με

$$j^\mu = g\bar{\psi}\gamma^\mu \psi \quad (2.8)$$

Τέλος, για να είναι πλήρης η πιο πάνω δράση πρέπει να προσθέσουμε επίσης τον κινητικό όρο για τα φωτόνια. Έτσι, η πλήρης δράση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} S_{\text{QED}} &= \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \\ &= \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + g\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

ενώ οι εξισώσεις κίνησης των πεδίων που προκύπτουν από αυτήν είναι

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi = 0 \quad (2.10)$$

και

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = g\bar{\psi}\gamma^\nu \psi \quad (2.11)$$

## 2.2 Η δράση της κβαντικής χρωμοδυναμικής (QCD)

Οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις των ηλεκτρονίων δεν είναι οι μόνες που υπάρχουν στη φύση. Ένα άλλο είδος στοιχειωδών σωματιδίων είναι τα quarks. Τα σωματίδια αυτά αποτελούν τα στοιχειώδη δομικά στοιχεία των πυρήνων των ατόμων και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους σύμφωνα με την ισχυρή πυρηνική αντίδραση. Υπάρχουν έξι διαφορετικές γεύσεις από quarks: up, down, charm, strange, top και bottom. Κάθε μια από αυτές τις γεύσεις χαρακτηρίζεται από διαφορετική μάζα.

Τα quarks αλληλεπιδρούν μεταξύ τους λόγω του ότι έχουν χρωματικό φορτίο (κβαντικός αριθμός αντίστοιχος του ηλεκτρικού φορτίου της ηλεκτροδυναμικής). Υπάρχουν τρία είδη χρωματικού φορτίου, τα οποία συμβατικά ονομάζονται: κόκκινο, πράσινο και μπλε. Έτσι, η δράση που περιγράφει τα ελεύθερα quarks μιας συγκεκριμένης γεύσης θα περιλαμβάνει όρους και για τα τρία χρώματα:

$$S = \int d^4x [\bar{\psi}_r (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_r + \bar{\psi}_g (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_g + \bar{\psi}_b (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_b] \quad (2.12)$$

Η πιο πάνω εξίσωση είναι δυνατόν να απλοποιηθεί αν οριστούν τα διανύσματα στήλης:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_r \quad \bar{\psi}_g \quad \bar{\psi}_b) \quad (2.13)$$

Τότε, η δράση γράφεται

$$S = \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi \quad (2.14)$$

Η δράση αυτή είναι όμοια με τη δράση του Dirac για τα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Αυτή η ποσότητα όμως, παραμένει αναλλοίωτη κάτω από ένα πολύ πιο γενικό σύνολο μετασχηματισμών σε σχέση με τη δράση του Dirac. Συγκεκριμένα, η δράση των ελεύθερων quarks παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον καθολικό μετασχηματισμό

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}U^\dagger \quad (2.15)$$

όπου  $U$  είναι ένας σταθερός μοναδιακός πίνακας διάστασης 3, ο οποίος χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορεί να γραφεί ως  $U = e^{-iH}$ , όπου  $H$  είναι ένας ερμιτιανός πίνακας.

Ακολουθώντας το πρόγραμμα της προηγούμενης ενότητας για την ηλεκτροδυναμική, το επόμενο βήμα στην κατασκευή της θεωρίας της χρωμοδυναμικής είναι να εφαρμοστεί η απαίτηση η δράση να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, δηλαδή

$$\psi \rightarrow e^{-iH(x)}\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{iH(x)} \quad (2.16)$$

Τώρα, κάθε ερμιτιανός πίνακας  $H$  μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$H(x) = \Lambda(x) \mathbb{1} + \theta_\alpha(x) T^\alpha \quad (2.17)$$

όπου  $\mathbb{1}$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας διάστασης 3 και  $T^\alpha$  οι οκτώ γραμμικώς ανεξάρτητοι ερμιτιανοί πίνακες μηδενικού ίχνους. Οι μετασχηματισμοί της μορφής  $e^{i\Lambda(x)}$  μελετήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Εξάλλου, ένας τέτοιος όρος στη δράση θα σήμαινε ότι είναι δυνατόν να υπάρξουν σωματίδια με μη μηδενικό χρωματικό φορτίο. Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται στη φύση και αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο εν λόγω μετασχηματισμός δεν είναι μέρος της συμμετρίας της φύσης. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη, σε αυτήν την ενότητα το ενδιαφέρον θα επικεντρωθεί σε μετασχηματισμούς της μορφής

$$U = e^{-ig\theta_\alpha(x)T^\alpha} \quad (2.18)$$

Οι πίνακες που περιγράφονται από την πιο πάνω σχέση έχουν ορίζουσα ίση με τη μονάδα και ανήκουν στην ομάδα  $SU(3)$ . Επιπρόσθετα, οι πίνακες  $T^\alpha$ , οι οποίοι καλούνται γεννήτορες της ομάδας, ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[T^\alpha, T^\beta] = if_{\alpha\beta\gamma} T^\gamma \quad (2.19)$$

όπου  $f_{\alpha\beta\gamma}$  είναι οι σταθερές δομής της ομάδας.

Για να είναι, λοιπόν, η δράση αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό  $\psi \rightarrow U(x)\psi$  πρέπει να αντικατασταθεί η κανονική παράγωγος  $\partial_\mu$  με τη συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^\alpha T^\alpha \quad (2.20)$$

Το πεδίο βαθμίδας που εισήχθη σε αυτήν την περίπτωση, σε αντίθεση με την περίπτωση της ηλεκτροδυναμικής είναι ένας πίνακας. (Στην πραγματικότητα εισήχθησαν οκτώ πεδία βαθμίδας  $A_\mu^\alpha$  κάθε ένα από τα οποία πολλαπλασιάζει ένα από τους γεννήτορες.) Απαιτώντας η συναλλοίωτη παράγωγος να μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = U(x) D_\mu \psi \quad (2.21)$$

γίνεται αντιληπτό ότι το πεδίο  $A_\mu$  πρέπει να μετασχηματίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U(x) A_\mu U^\dagger(x) - \frac{i}{g} (\partial_\mu U(x)) U^\dagger(x) \quad (2.22)$$

Απομένει ο κινητικός όρος για τα πεδία  $A_\mu$ . Ακολουθώντας και πάλι το πρόγραμμα της ηλεκτροδυναμικής ο όρος αυτός θα πρέπει να είναι

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu}^\alpha \right) = \int d^4x \operatorname{Tr} \left( -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \quad (2.23)$$

Το πρόβλημα που υπάρχει σε αυτό το σημείο είναι το γεγονός ότι αν ο τανυστής  $F^{\mu\nu}$  οριστεί να είναι  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  τότε η πιο πάνω δράση δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από το μετασχηματισμό (2.22). Αντίθετα, αν οριστεί να είναι

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - ig[A^\mu, A^\nu] \quad (2.24)$$

τότε ο τανυστής  $F$  μετασχηματίζεται σαν

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = U F^{\mu\nu} U^\dagger \quad (2.25)$$

και η πιο πάνω δράση είναι αναλλοίωτη.

Συνοψίζοντας, η πλήρης δράση της κβαντικής χρωμοδυναμικής δίνεται [2] από τη σχέση

$$\begin{aligned} S_{\text{QCD}} &= \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \right] \\ &= \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \int d^4x g \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \\ &+ \int d^4x \text{Tr}(\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu) \\ &+ \int d^4x 2ig \text{Tr}(\partial^\mu A^\nu A_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu A_\nu A_\mu) \\ &+ \int d^4x g^2 \text{Tr} \left[ A^\mu A^\nu A_\mu A_\nu - (A^\mu A_\mu)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.26)$$

Η δράση αυτή παραμένει αναλλοίωτη αν γίνουν ταυτόχρονα οι μετασχηματισμοί

$$\psi \rightarrow U\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}U^\dagger \quad A^\mu \rightarrow UA^\mu U^\dagger - \frac{i}{g} \partial^\mu U U^\dagger \quad (2.27)$$

όπου  $U$  είναι ένας τοπικός μετασχηματισμός της ομάδας  $SU(3)$ . Για να είναι η δράση αναλλοίωτη χρειάστηκε να συμπεριληφθούν στη δράση και τα οκτώ διανυσματικά πεδία  $A_\mu^a$ . Τα πεδία αυτά δεν είναι τίποτε άλλο από τα πεδία των γκλουονίων, των σωματιδίων - φορέων των ισχυρών πυρηνικών αντιδράσεων. Τα σωματίδια αυτά φέρουν χρωματικό φορτίο και όπως φαίνεται και από την εξίσωση (2.26) αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, αφού στη δράση υπάρχουν όροι τρίτης και τέταρτης τάξης ως προς τα αντίστοιχα πεδία.

## Κεφάλαιο 3

# Ολοκληρώματα διαδρομής

### 3.1 Ολοκληρώματα διαδρομής στην κβαντική μηχανική

Στην κβαντική μηχανική, οι διάφορες καταστάσεις ενός συστήματος αναπαρίστανται ως διανύσματα στο χώρο Hilbert του συστήματος και τα διάφορα μετρούμενα μεγέθη σαν τελεστές που δρουν σε αυτόν το χώρο. Η χρονική εξέλιξη του συστήματος (ή πιο συγκεκριμένα της κυματοσυνάρτησης που το περιγράφει) δίνεται από τη σχέση

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(t-t')H} |\psi(t')\rangle \quad (3.1)$$

όπου  $H$  είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος (στο φυσικό σύστημα μονάδων όπου  $\hbar = c = 1$ ). Αν  $q = \{q_a\}$  είναι το σύνολο των  $n$  συντεταγμένων - βαθμών ελευθερίας του συστήματος και  $|q\rangle$  οι ιδιοκαταστάσεις των αντίστοιχων τελεστών, οι οποίες αποτελούν ορθοκανονικό πλήρες σύνολο τότε η πιο πάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle = \int dq' G(q, t; q', t') \psi(q', t') \quad (3.2)$$

όπου

$$G(q, t; q', t') = \langle q | e^{-i(t-t')H} | q' \rangle \quad (3.3)$$

η συνάρτηση Green που περιγράφει την εξέλιξη της  $\psi$  και

$$dq' = \prod_{a=1}^n dq'_a \quad (3.4)$$

Οι συναρτήσεις Green έχουν την παρακάτω σημαντική ιδιότητα:

$$\psi(q, t) = \int dq' dq'' G(q, t; q', t') G(q', t'; q'', t'') \psi(q'', t'') \quad (3.5)$$

Από αυτήν την ιδιότητα εξάγεται το συμπέρασμα ότι αν το χρονικό διάστημα  $t - t'$  χωριστεί σε  $N$  απείρως μικρά διαστήματα μήκους  $\epsilon$  ώστε να ισχύει ότι  $N\epsilon = t - t'$  τότε η εξίσωση για τη χρονική εξέλιξη της  $\psi$  παίρνει τη μορφή

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi(t) \rangle = \int \prod_{l=1}^N dq^{(l)} \langle q^{(l-1)} | e^{-i\epsilon H} | q^{(l)} \rangle \langle q^{(N)} | \psi(t) \rangle \quad (3.6)$$

όπου  $q^{(0)} = q$  και  $q^{(N)} = q'$ . Υποθέτοντας ότι η Χαμιλτονιανή του συστήματος έχει τη μορφή  $H(Q, P) = T(P) + V(Q)$  η πιο πάνω σχέση παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \psi(q, t) &\simeq \langle q | \psi(t) \rangle = \int \prod_{l=1}^N dq^{(l)} e^{-i\epsilon V(q^{(l)})} \langle q^{(l-1)} | e^{-i\epsilon T(P)} | q^{(l)} \rangle \langle q^{(N)} | \psi(t') \rangle \\ &= \int \prod_{l=1}^N dq^{(l)} dp^{(l)} e^{-i\epsilon V(q^{(l)})} \langle q^{(l-1)} | p^{(l)} \rangle \langle p^{(l)} | e^{-i\epsilon T(P)} | q^{(l)} \rangle \langle q^{(N)} | \psi(t') \rangle \\ &= \int \prod_{b=1}^n \prod_{l=1}^N \frac{dq_b^{(l)} dp_b^{(l)}}{2\pi} e^{-i\epsilon V(q^{(l)})} e^{-i\epsilon T(p^{(l)})} \prod_{a=1}^n e^{ip_a^{(l)}(q_a^{(l-1)} - q_a^{(l)})} \psi(q', t') \end{aligned} \quad (3.7)$$

Στην πιο πάνω σχέση η ποσότητα  $q_a^{(l-1)} - q_a^{(l)}$  στο όριο όπου  $\epsilon \rightarrow 0$  είναι ίση με  $\epsilon \dot{q}_a^{(l)}$ . Ακόμα, στην απλή περίπτωση όπου η κινητική ενέργεια έχει τη μορφή

$$T(P) = \sum_{a=1}^n \frac{P_a^2}{2m} \quad (3.8)$$

η ολοκλήρωση ως προς  $p$  στο προηγούμενο ολοκλήρωμα μπορεί να γίνει ακριβώς και έτσι η τελική μορφή που παίρνει η ζητούμενη συνάρτηση Green είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned} \langle q | e^{-i(t-t')H} | q' \rangle &= \int Dq e^{i\epsilon \sum_{l=0}^{N-1} L(q^{(l)}, \dot{q}^{(l)})} \\ &= \int Dq e^{iS[q]} \end{aligned} \quad (3.9)$$

όπου  $L$  η Λαγκρανζιανή του συστήματος

$$L = m \sum_{a=1}^n \frac{\dot{q}_a^2}{2} - V(q_a) \quad (3.10)$$

και

$$S[q] = \epsilon \sum_{l=0}^{N-1} L(q^{(l)}, \dot{q}^{(l)}) \simeq \int_{t'}^t dt'' L(q, \dot{q}) \quad (3.11)$$

η αντίστοιχη δράση.

Ανακεφαλαιώνοντας, είναι σημαντικό να καταγραφεί η διαδικασία που υπονοείται από την πιο πάνω σχέση, μέσα από τη θεωρία των ολοκληρωμάτων διαδρομής του Feynmann [3]. Για να υπολογιστεί η χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης ενός συστήματος αρκεί να υπολογιστεί η συνάρτηση Green που σχετίζεται με αυτήν. Για τον υπολογισμό αυτής της συνάρτησης πρέπει κανείς να χωρίσει το υπό μελέτη χρονικό διάστημα σε μικρά διαστήματα μήκους  $\epsilon$  το κάθε ένα. Στη συνέχεια, πρέπει να ληφθούν υπόψη όλες οι πιθανές διαδρομές από την αρχική κατάσταση του συστήματος στην τελική του και να υπολογιστεί η δράση για κάθε μια από αυτές. Για να γίνει αυτό, αρκεί να γίνει ολοκλήρωση ως προς όλες τις τιμές των βαθμών ελευθερίας του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή. Το βάρος της κάθε διαδρομής στο ολοκλήρωμα δίνεται από τη φάση  $e^{iS}$ .

### 3.1.1 Επέκταση σε φανταστικό χρόνο

Είναι σύνηθες στην κβαντική θεωρία πεδίων να χρησιμοποιείται η έννοια του φανταστικού χρόνου. Με αυτόν τον τρόπο, ο τετραδιάστατος χωροχρόνος γίνεται ευκλείδειος αφού ο πίνακας της μετρικής σε αυτήν την περίπτωση συμπίπτει με το μοναδιαίο πίνακα διάστασης τέσσερα. Όσον αφορά το φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής, οι διαφορές που προκύπτουν μπορούν να βρεθούν αν στην αρχική σχέση για τη συνάρτηση Green γίνουν οι αντικαταστάσεις

$$t \rightarrow -i\tau \quad t' \rightarrow -i\tau' \quad (3.12)$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και προηγουμένως, κανείς οδηγείται τελικά στην παρακάτω σχέση για τη συνάρτηση Green

$$\begin{aligned} \langle q | e^{-(\tau-\tau')H} | q' \rangle &= \int Dq e^{-\epsilon \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{L}(q^{(l)}, \dot{q}^{(l)})} \\ &= \int Dq e^{-S[q]} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ο υπολογισμός αυτός είναι πιο βολικός από τον αντίστοιχο στο χώρο Minkowski, όχι μόνο λόγω του ότι ο πίνακας της μετρικής είναι τετριμμένος, αλλά και λόγω του ότι το βάρος της κάθε διαδρομής τώρα είναι ένα εκθετικό που φθίνει για μεγάλες τιμές της δράσης. Το γεγονός αυτό καθιστά τον αριθμητικό υπολογισμό μιας τέτοιας συνάρτησης Green πολύ πιο εύκολο σε σύγκριση με τον αντίστοιχο στην περίπτωση του πραγματικού χρόνου, όπου το βάρος της ολοκλήρωσης είναι μια περιοδική συνάρτηση της δράσης. Έχοντας υπολογίσει την εν λόγω ποσότητα για φανταστικό χρόνο, είναι δυνατόν να βρεθεί και η αναλυτική της συνέχεια σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο και συγκεκριμένα κατά μήκος του πραγματικού άξονα.



### 3.2 Αναπαράσταση με ολοκληρώματα διαδρομής για μποζονικές μεταβλητές

Στην κβαντική θεωρία πεδίων, τα φυσικά συστήματα περιγράφονται μέσω ενός άπειρου πλήθους χρονο-εξαρτημένων τελεστών - πεδίων. Έτσι, οι διάφορες φυσικές καταστάσεις αναπαριστώνται από τη δράση γινομένων αυτών των τελεστών στο κενό - κατάσταση ισορροπίας του συστήματος. Το πιο απλό παράδειγμα τέτοιων τελεστών είναι το βαθμωτό πεδίο του οποίου η χρονική εξέλιξη δίνεται από τη σχέση

$$\phi(\vec{x}, t) = e^{itH} \phi(\vec{x}, 0) e^{-itH} \quad (3.14)$$

όπου  $H$  είναι η Χαμιλτονιανή του συστήματος. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως θα φανεί από τους υπολογισμούς που ακολουθούν, το πιο γενικό πινακοστοιχείο που θα ήταν δυνατόν να προκύψει σε έναν υπολογισμό θα είχε τη μορφή

$$G(x_1, x_2, \dots, x_l) = \langle \Omega | T(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_l)) | \Omega \rangle \quad (3.15)$$

Στο πιο πάνω γινόμενο  $|\Omega\rangle$  είναι η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος (κενό) ενώ ο τελεστής  $T$  διατάσσει τα πεδία  $\phi$  κατά φθίνοντα χρόνο. Επίσης, στο γινόμενο των τελεστών  $\phi$  ενδεχομένως να υπάρχουν και κάποιες παραγώγοι, οι οποίες για απλότητα παραλείπονται. Ακόμα, είναι σημαντικό να σημειώσει κανείς ότι η συγκεκριμένη ποσότητα είναι συμμετρική κάτω από την εναλλαγή δύο ορισμάτων της αφού οι τελεστές  $\phi$  αντιστοιχούν σε σωματίδια που υπόκεινται στη στατιστική Bose - Einstein.

Στη συνάρτηση Green όπως φαίνεται πιο πάνω τα πεδία  $\phi(\vec{x}, t)$  αποτελούν ένα σύνολο από άπειρους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος και συνεπώς οι συντεταγμένες  $\vec{x}$  έχουν ρόλο αντίστοιχο με το δείκτη  $a$  του κβαντομηχανικού παραδείγματος του προηγούμενου μέρους. Για αυτόν το λόγο, είναι πιο βολικό να χρησιμοποιηθεί ο αντίστοιχος συμβολισμός της κβαντομηχανικής

$$G_{a_1 a_2 \dots a_l}(t_1, t_2, \dots, t_l) = \langle E_0 | Q_{a_1}(t_1) Q_{a_2}(t_2) \dots Q_{a_l}(t_l) | E_0 \rangle \quad (3.16)$$

όπου  $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_l$ . Στο σημείο αυτό, πρέπει να γίνει και η μετάβαση στο φανταστικό χρόνο ( $t \rightarrow -it$ ) όπως αυτή ορίστηκε προηγούμενα, αφού αυτός χρησιμοποιείται και στη συνέχεια. Σε αυτό το πλαίσιο, πρέπει να υπολογιστεί η ποσότητα

$$G_{a_1 a_2 \dots a_l}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l) = \langle E_0 | Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) | E_0 \rangle \quad (3.17)$$

όπου

$$Q_{a_i}(\tau_i) = e^{\tau_i H} Q_{a_i} e^{-\tau_i H} \quad (3.18)$$

Η πιο πάνω συνάρτηση Green σχετίζεται άμεσα με τον υπολογισμό του πιο κάτω γενικού πινακοστοιχείου.

$$\langle q, \tau | Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) | q', \tau' \rangle = \langle q | e^{-\tau H} Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) e^{\tau' H} | q' \rangle \quad (3.19)$$

Το πιο πάνω είναι ίσο με

$$\sum_{\kappa, \kappa'} e^{-\tau E_\kappa} e^{\tau' E_{\kappa'}} \psi_{\kappa'}^*(q') \psi_\kappa(q) \langle E_\kappa | Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) | E_{\kappa'} \rangle \quad (3.20)$$

όπου  $|E_\kappa\rangle$  είναι οι ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής,  $\psi_\kappa$  η αναπαράστασή τους στο χώρο των  $q$  και  $E_\kappa$  οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Στο όριο όπου  $\tau \rightarrow +\infty$  και  $\tau' \rightarrow -\infty$  το πιο πάνω άθροισμα κυριαρχείται από τον όρο για τον οποίο ισχύει ότι  $\kappa = \kappa' = 0$ . Έτσι, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \langle q, \tau | Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) | q', \tau' \rangle \\ & \simeq e^{-\tau E_0} e^{\tau' E_0} \psi_0^*(q') \psi_0(q) \langle E_0 | Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) | E_0 \rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

Θέτοντας όλους τους τελεστές  $Q$  στην πιο πάνω έκφραση ίσους με τον ταυτοτικό τελεστή προκύπτει ότι

$$\langle q, \tau | q', \tau' \rangle \simeq e^{-(\tau - \tau') E_0} \psi_0^*(q') \psi_0(q) \quad (3.22)$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες εκφράσεις προκύπτει ότι

$$\langle E_0 | Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) | E_0 \rangle = \frac{\langle q, \tau | Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) | q', \tau' \rangle}{\langle q, \tau | q', \tau' \rangle} \quad (3.23)$$

Ο παρονομαστής της πιο πάνω έκφρασης έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο μέρος σαν ένα ολοκλήρωμα διαδρομής. Απομένει να γίνει το ίδιο και για τον αριθμητή. Αναπτύσσοντας την εξίσωση (3.19) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \langle q, \tau | Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) | q', \tau' \rangle \\ & = \langle q | e^{-(\tau - \tau_1) H} Q_{a_1} e^{-(\tau_1 - \tau_2) H} Q_{a_2} \dots Q_{a_l} e^{-(\tau_l - \tau') H} | q' \rangle \\ & = \int \prod_{i=1}^l dq^{(i)} \langle q, \tau | q^{(1)}, \tau_1 \rangle q_{a_1}^{(1)} \langle q^{(1)}, \tau_1 | q^{(2)}, \tau_2 \rangle q_{a_2}^{(2)} \dots q_{a_l}^{(l)} \langle q^{(l)}, \tau_l | q', \tau' \rangle \end{aligned} \quad (3.24)$$

ενώ αντικαθιστώντας την έκφραση για τα πινακοστοιχεία του προηγούμενου μέρους κανείς βρίσκει ότι

$$\langle q, \tau | Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l) | q', \tau' \rangle = \int Dq q_{a_1} q_{a_2} \dots q_{a_l} e^{-\int_{\tau'}^{\tau} d\tau'' L[q, \dot{q}]} \quad (3.25)$$

όπου

$$Dq = \prod_{i=1}^l dq^{(i)} \quad (3.26)$$

Συνδυάζοντας όλα τα πιο πάνω, προκύπτει η τελική έκφραση για τη ζητούμενη αναμενόμενη τιμή:

$$\langle E_0 | T(Q_{a_1}(\tau_1) Q_{a_2}(\tau_2) \dots Q_{a_l}(\tau_l)) | E_0 \rangle = \frac{\int Dq q_{a_1} q_{a_2} \dots q_{a_l} e^{-S[q]}}{\int Dq e^{-S[q]}} \quad (3.27)$$

με

$$S[q] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau L[q, \dot{q}] \quad (3.28)$$

τη δράση του συστήματος. Η έκφραση αυτή όπως προαναφέρθηκε είναι συμμετρική κάτω από την εναλλαγή οποιωνδήποτε από τους δείκτες  $a$  ή τις αντίστοιχες ιδιοτιμές  $q$ , γεγονός το οποίο τονίζει το μποζονικό χαρακτήρα της έκφρασης.

Η έκφραση για την αναμενόμενη τιμή των τελεστών που προέκυψε πιο πάνω μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς μόνο για δράσεις τετραγωνικές ως προς τις συντεταγμένες  $q$ . Σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να υπολογιστούν ολοκληρώματα της μορφής

$$I_{a_1 a_2 \dots a_l} = \int \prod_{i=1}^N dq_i q_{a_1} q_{a_2} \dots q_{a_l} e^{-\frac{1}{2} \sum_{m,n} q_m M_{mn} q_n} \quad (3.29)$$

Τέτοια ολοκληρώματα υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$I_{a_1 a_2 \dots a_l} = \left( \frac{\partial^l Z_0}{\partial J_{a_1} \partial J_{a_2} \dots \partial J_{a_l}} \right)_{J=0} \quad (3.30)$$

όπου  $Z_0$  είναι η γεννήτρια συνάρτηση

$$Z_0[q, J] = \int \prod_{i=1}^N dq_i e^{-\frac{1}{2} \sum_{m,n} q_m M_{mn} q_n + \sum_n J_n q_n} \quad (3.31)$$

Το πιο πάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται διαγωνιοποιώντας τον πίνακα  $M$ . Τελικά, το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι

$$Z_0[q, J] = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det M}} e^{\frac{1}{2} \sum_{m,n} J_m M_{mn}^{-1} J_n} \quad (3.32)$$

ενώ για την υπό μελέτη αναμενόμενη τιμή κανείς υπολογίζει ότι

$$\langle E_0 | T(Q_{a_1}(t_1) Q_{a_2}(t_2) \dots Q_{a_l}(t_l)) | E_0 \rangle = \sum_{\substack{\text{όλα τα} \\ \text{ζευγάρωματα} \\ \text{των } a}} M_{a_{p_1} a_{p_2}}^{-1} M_{a_{p_3} a_{p_4}}^{-1} \dots M_{a_{p_{l-1}} a_{p_l}}^{-1} \quad (3.33)$$

Για δράσεις μη τετραγωνικές ως προς τα πεδία - βαθμούς ελευθερίας, οι αναμενόμενες τιμές είναι δυνατόν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τη θεωρία διαταραχών. Σε μια τέτοια περίπτωση, η δράση έχει τη μορφή

$$S[q] = \frac{1}{2} \sum_{m,n} q_m M_{mn} q_n + S_I[q] \quad (3.34)$$

όπου η  $S_I[q]$  περιέχει όλους τους όρους με περισσότερες από δύο δυνάμεις των  $q$ . Τότε, η εξίσωση (3.30) εξακολουθεί να ισχύει αν η γεννήτρια συνάρτηση  $Z_0$  αντικατασταθεί με την

$$\begin{aligned} Z[q, J] &= \int \prod_{i=1}^N dq_i e^{-S[q] + \sum_n J_n q_n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left( S_I \left[ \frac{\partial}{\partial J} \right] \right)^k Z_0[q, J] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Κάθε ένας όρος του πιο πάνω αθροίσματος αποτελεί ένα ολοκλήρωμα της μορφής που εξετάστηκε προηγούμενα, έτσι ο υπολογισμός πρώτα του  $Z$  και στη συνέχεια των διαφόρων πινακοστοιχείων είναι πραγματοποιήσιμος στις διάφορες τάξεις της θεωρίας διαταραχών.

### 3.3 Αναπαράσταση με ολοκληρώματα διαδρομής για φερμιονικές μεταβλητές

Στη φύση, τα περισσότερα θεμελιώδη σωματίδια που απαρτίζουν την ύλη φέρουν spin 1/2. Τέτοια σωματίδια και οι αντίστοιχοι τους τελεστές - πεδία, στο όριο όπου  $\hbar \rightarrow 0$ , αντιμετατίθενται μεταξύ τους. Έτσι, στο όριο αυτό τα πεδία γίνονται στοιχεία μιας άλγεβρας Grassmann. Η παραγωγή και η ολοκλήρωση ως προς μεταβλητές αυτού του είδους έχει κάποιες ιδιαιτερότητες, οι οποίες εξετάζονται αναλυτικά στο σχετικό παράρτημα.

Ακολουθώντας αντίστοιχη μεθοδολογία με αυτήν των μποζονικών μεταβλητών κανείς βρίσκει ότι ένα γενικό πινακοστοιχείο της πιο κάτω μορφής δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} &\langle \Omega | T (\psi_{a_1}(x_1) \dots \psi_{a_l}(x_l) \bar{\psi}_{b_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{b_l}(y_l)) | \Omega \rangle \\ &= \frac{\int D\bar{\psi} D\psi \psi_{a_1}(x_1) \dots \psi_{a_l}(x_l) \bar{\psi}_{b_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{b_l}(y_l) e^{-S[\psi, \bar{\psi}]}}{\int D\bar{\psi} D\psi e^{-S[\psi, \bar{\psi}]}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

όπου  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  είναι συζυγή φερμιονικά πεδία και  $S[\psi, \bar{\psi}]$  η αντίστοιχη δράση στον ευκλείδειο χώρο.

Στην ειδική περίπτωση όπου η δράση είναι τετραγωνική ως προς τα πεδία:

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \sum_{i,j} \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j \quad (3.37)$$

ολοκληρώματα της πιο πάνω μορφής υπολογίζονται ακριβώς από τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\begin{aligned} Z_0[\rho, \bar{\rho}] &= \int D\psi D\bar{\psi} e^{-\sum_{i,j} \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j + \sum_i (\bar{\psi}_i \rho_i + \bar{\rho}_i \psi_i)} \\ &= \det A e^{\sum_{i,j} \bar{\rho}_i A_{ij}^{-1} \rho_j} \end{aligned} \quad (3.38)$$

σύμφωνα με τη σχέση

$$\begin{aligned} &\langle \Omega | T (\psi_{a_1}(x_1) \dots \psi_{a_l}(x_l) \bar{\psi}_{b_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{b_l}(y_l)) | \Omega \rangle \\ &= \frac{\left[ \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{a_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{a_l}} Z_0[\rho, \bar{\rho}] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_{b_1}} \dots \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_{b_l}} \right]_{\rho=\bar{\rho}=0}}{[Z[\rho, \bar{\rho}]]_{\rho=\bar{\rho}=0}} \\ &= \sum_{\substack{\text{όλες οι μεταθέσεις} \\ P \text{ των } a}} \varepsilon(P) (A^{-1})_{a_{P_1} b_1} (A^{-1})_{a_{P_2} b_2} \dots (A^{-1})_{a_{P_l} b_l} \end{aligned} \quad (3.39)$$

όπου  $\varepsilon(P)$  είναι το πρόσημο που χαρακτηρίζει τη μετάθεση. Αντίθετα, στην περίπτωση όπου η δράση είναι ανώτερης τάξης ως προς τα πεδία - βαθμούς ελευθερίας τότε τα ολοκληρώματα της πιο πάνω μορφής είναι δυνατόν να υπολογιστούν στις διάφορες τάξεις της θεωρίας διαταραχών με τρόπο αντίστοιχο με αυτόν που ορίστηκε για τις μποζονικές μεταβλητές.

## Κεφάλαιο 4

# Το πλέγμα σαν ομαλοποιητής της QCD

### 4.1 Εισαγωγή - Η διακριτοποίηση του χωροχρόνου

Όπως φάνηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα ολοκληρώματα διαδρομής που αφορούν τα διάφορα πινακοστοιχεία, απαιτούν να γίνει ολοκλήρωση ως προς ένα άπειρο αριθμό βαθμών ελευθερίας - τιμών των πεδίων που περιλαμβάνονται στη δράση σε κάθε σημείο του χώρου. Έτσι, σε αυτό το πλαίσιο, τα ολοκληρώματα διαδρομής υπάρχουν μόνο σαν ορισμός αφού δεν είναι ξεκάθαρο πώς μπορεί κανείς να υπολογίσει ένα τέτοιο ολοκλήρωμα. Για να αποκτήσει πραγματικό νόημα ο ορισμός, ο χώρος πρέπει να διακριτοποιηθεί και να γίνει (μαζί με τον ήδη διακριτό χρόνο) ένα πλέγμα από ισαπέχοντα χωροχρονικά σημεία.

Η πιο πάνω διαδικασία αποτελεί μια ομαλοποίηση της θεωρίας χβαντικών πεδίων. Μετά από μια τέτοια διαδικασία οι συναρτήσεις Green θα εξαρτώνται από τον ομαλοποιητή της θεωρίας (τη σταθερά  $a$  του πλέγματος στη συγκεκριμένη περίπτωση, δηλαδή την απόσταση δύο πλησιέστερων γειτόνων). Το επόμενο βήμα αυτής της διαδικασίας είναι ο υπολογισμός αυτών των συναρτήσεων στο όριο όπου η σταθερά του πλέγματος μηδενίζεται. Κάτι τέτοιο όμως, πολλές φορές οδηγεί σε ανεπιθύμητους απειρισμούς. Για να αποφευχθεί αυτό είναι απαραίτητη η επανακανονικοποίηση της θεωρίας μέσω του επαναπροσδιορισμού των βαθμών ελευθερίας και των παραμέτρων της δράσης ώστε να οδηγούν σε πεπερασμένο όριο. Η απαίτηση αυτή έχει σαν συνέπεια οι διάφορες παράμετροι της θεωρίας (πχ. η σταθερά σύζευξης  $g$ ) να γίνονται εξαρτημένες από τον ομαλοποιητή.

## 4.2 Ελεύθερα φερμιόνια στο πλέγμα

Όπως αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μια συνάρτηση Green της μορφής

$$\langle \Omega | T (\psi_{\alpha_1}(x_1) \dots \psi_{\alpha_l}(x_l) \bar{\psi}_{\beta_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_l}(y_l)) | \Omega \rangle$$

υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\langle \Omega | T (\psi_{\alpha}(x_1) \dots \bar{\psi}_{\beta}(y_1) \dots) | \Omega \rangle = \frac{\int D\bar{\psi} D\psi \psi_{\alpha}(x_1) \dots \bar{\psi}_{\beta}(y_1) \dots e^{-S[\psi, \bar{\psi}]}}{\int D\bar{\psi} D\psi e^{-S[\psi, \bar{\psi}]}} \quad (4.1)$$

Η δράση  $S$  που εμφανίζεται στην πιο πάνω σχέση δεν είναι άλλη από τη δράση Dirac για τα ελεύθερα ηλεκτρόνια στον ευκλείδειο χωροχρόνο. Εύκολα αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(x) (\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + M) \psi(x) \quad (4.2)$$

όπου  $\gamma_{\mu}$  είναι οι πίνακες του Dirac για τον ευκλείδειο χώρο που ικανοποιούν τη σχέση μετάθεσης

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1} \quad (4.3)$$

Για να υπολογιστούν τα πιο πάνω ολοκληρώματα διαδρομής πρέπει να εισαχθεί η έννοια του πλέγματος. Έτσι, τα πεδία  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  πλέον «ζουν» σε ένα χωροχρονικό πλέγμα με σταθερά  $a$ . Έτσι, το μέτρο ολοκλήρωσης γίνεται

$$D\bar{\psi} D\psi = \prod_{\alpha, m} d\psi_{\alpha}(ma) \prod_{\beta, n} d\bar{\psi}_{\beta}(na) \quad (4.4)$$

ενώ, εισάγοντας αδιάστατες μεταβλητές σύμφωνα με τις αντικαταστάσεις

$$M \rightarrow \frac{1}{a} M \quad (4.5)$$

$$\psi_{\alpha}(x) \rightarrow \frac{1}{a^{3/2}} \psi_{\alpha}(m) \quad (4.6)$$

$$\bar{\psi}_{\beta}(x) \rightarrow \frac{1}{a^{3/2}} \bar{\psi}_{\beta}(n) \quad (4.7)$$

$$\partial_{\mu} \psi_{\alpha}(x) \rightarrow \frac{1}{a^{5/2}} \partial_{\mu} \psi_{\alpha}(m) = \frac{1}{a^{5/2}} \frac{1}{2} (\psi_{\alpha}(m + \hat{\mu}) - \psi_{\alpha}(m - \hat{\mu})) \quad (4.8)$$

η δράση γίνεται [4]

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \sum_{\alpha, \beta, m, n} \bar{\psi}_{\alpha}(m) K_{\alpha\beta}(m, n) \psi_{\beta}(n) \quad (4.9)$$

όπου

$$K_{\alpha\beta}(m, n) = \sum_{\mu} \frac{1}{2} (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} (\delta_{n, m+\hat{\mu}} - \delta_{n, m-\hat{\mu}}) + M \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \quad (4.10)$$

### 4.2.1 Ο φερμιονικός διαδότης και το πρόβλημα του διπλασιασμού

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ο φερμιονικός διαδότης (συνάρτηση Green δύο σημείων) στο πλέγμα θα δίνεται από τη σχέση

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(n) \psi_\beta(m) \rangle = K_{\alpha\beta}^{-1}(m, n) \quad (4.11)$$

όπου  $K_{\alpha\beta}^{-1}(m, n)$  είναι ο αντίστροφος του πίνακα  $K$ , όπως ορίστηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, και προκύπτει από τη σχέση

$$\sum_{\lambda, l} K_{\alpha\lambda}^{-1}(m, l) K_{\lambda\beta}(l, n) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \quad (4.12)$$

Ο υπολογισμός του πίνακα αυτού είναι πιο βολικό να γίνει στο χώρο των ορμών. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\delta_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik \cdot (m-n)} \quad (4.13)$$

προκύπτει ότι ο πίνακας  $K$  θα δίνεται από τη σχέση

$$K_{\alpha\beta}(m, n; M) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left( i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \sin k_{\mu} + M \delta_{\alpha\beta} \right) e^{ik \cdot (m-n)} \quad (4.14)$$

Ακόμα, για τον αντίστροφό του  $K^{-1}$  προκύπτει ότι

$$K_{\alpha\beta}^{-1}(m, n; M) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \sin k_{\mu} + M \delta_{\alpha\beta}}{\sum_{\mu} \sin^2 k_{\mu} + M^2} e^{ik \cdot (m-n)} \quad (4.15)$$

Επιθυμώντας κανείς να βρει το όριο του πιο πάνω διαδότη στο συνεχές (καθώς  $a \rightarrow 0$ ) πρέπει πρώτα να αποκαταστήσει τις σταθερές  $a$  στην έκφραση ώστε οι διάφορες ποσότητες να έχουν τη σωστή διαστατικότητα και στη συνέχεια να υπολογίσει το αντίστοιχο όριο. Με αυτόν τον τρόπο, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(y) \rangle &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} K_{\alpha\beta}^{-1}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; aM\right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\left[-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \tilde{k}_{\mu} + M \mathbb{1}\right]_{\alpha\beta}}{\sum_{\mu} \tilde{k}_{\mu}^2 + M^2} e^{ik \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

όπου  $\tilde{k}_{\mu} = \frac{1}{a} \sin(ak_{\mu})$ . Αν σε αυτήν τη σχέση γίνει η αντικατάσταση  $\tilde{k}_{\mu} \rightarrow k_{\mu}$  τότε το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι ο γνωστός φερμιονικός διαδότης του συνεχούς. Για να είναι η αντικατάσταση αυτή εφικτή όμως πρέπει στο όριο όπου  $a \rightarrow 0$  να ισχύει ότι  $\sin(ak_{\mu}) \simeq$



$ak_\mu$ , πράγμα που συμβαίνει μόνο για τιμές της ορμής  $k$  κοντά στο μηδέν. Αντίθετα, κοντά στα άκρα της ζώνης Brillouin όπου και πάλι η ποσότητα  $\tilde{k}_\mu$  έχει πεπερασμένο όριο στο συνεχές, μια τέτοια αντικατάσταση δεν είναι εφικτό να γίνει. Έτσι, η συνάρτηση Green παίρνει συνεισφορές από συνολικά  $2^d$  (όπου  $d$  ο αριθμός των διαστάσεων του χωροχρόνου) διεγέρσεις στο χώρο των ορμών. Από αυτές, μόνο μία αντιστοιχεί στο όριο του συνεχούς ενώ οι υπόλοιπες υπάρχουν μόνο στο πλέγμα.

### 4.2.2 Φερμιόνια Wilson

Η φερμιονική δράση όπως ορίστηκε στην αρχή του κεφαλαίου είναι τέτοια ώστε στο όριο όπου  $a \rightarrow 0$  να συμπίπτει με τη δράση του Dirac για τα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Η επιλογή αυτή όμως δεν είναι μοναδική αφού υπάρχουν πολλές διαφορετικές εκφράσεις που θα μπορούσαν να δώσουν το ίδιο όριο. Έτσι, αν κανείς χρησιμοποιήσει μια δράση διαφορετική από αυτήν που χρησιμοποιήθηκε πιο πάνω, είναι πιθανόν το πρόβλημα του διπλασιασμού που προέκυψε πιο πάνω να πάψει να υφίσταται.

Μια τέτοια επιλογή δράσης μπορεί να είναι η ακόλουθη.

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \sum_{\alpha, \beta, m, n} \bar{\psi}_\alpha(m) \left[ \sum_{\mu} \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\delta_{m+\hat{\mu}, n} - \delta_{m-\hat{\mu}, n}) + M\delta_{mn}\delta_{\alpha\beta} \right] \psi_\beta(n) - \frac{r}{2} \sum_m \bar{\psi}_\alpha(m) \sum_{\mu} \partial_\mu^2 \psi_\alpha(m) \quad (4.17)$$

όπου

$$\sum_{\mu} \partial_\mu^2 \psi_\alpha(m) = \sum_{\mu} [\psi_\alpha(m + \hat{\mu}) - 2\psi_\alpha(m) + \psi_\alpha(m - \hat{\mu})] \quad (4.18)$$

και  $r$  είναι μια αυθαίρετη παράμετρος. Ο τελευταίος αυτός όρος που προστέθηκε στη δράση, όταν αποκατασταθεί η διαστατικότητα εξαρτάται γραμμικά από τη σταθερά του πλέγματος  $a$ . Έτσι, στο όριο όπου  $a \rightarrow 0$  η δράση αυτή τείνει και πάλι στη δράση του Dirac.

Πιο συνοπτικά, η δράση αυτή, η οποία καλείται δράση Wilson, γράφεται σαν

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \sum_{\alpha, \beta, m, n} \bar{\psi}_\alpha(m) K_{\alpha\beta}(m, n) \psi_\beta(n) \quad (4.19)$$

όπου

$$K_{\alpha\beta}(m, n) = -\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left[ (r\mathbb{1} - \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \delta_{m+\hat{\mu}, n} + (r\mathbb{1} + \gamma_\mu)_{\alpha\beta} \delta_{m-\hat{\mu}, n} \right] + (M + 4r) \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \quad (4.20)$$

Ο πιο πάνω πίνακας στο χώρο των ορμών γράφεται σαν

$$K_{\alpha\beta}(m, n; M) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left( i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \sin k_{\mu} + M(k) \delta_{\alpha\beta} \right) e^{ik \cdot (m-n)} \quad (4.21)$$

ενώ ο αντίστροφός του γράφεται σαν

$$K_{\alpha\beta}^{-1}(m, n; M) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i \sum_{\mu} (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \sin k_{\mu} + M(k) \delta_{\alpha\beta}}{\sum_{\mu} \sin^2 k_{\mu} + M(k)^2} e^{ik \cdot (m-n)} \quad (4.22)$$

με

$$M(k) = M + 2r \sum_{\mu} \sin^2 \frac{k_{\mu}}{2} \quad (4.23)$$

Τέλος, αποκαθιστώντας τις σταθερές  $a$  στην πιο πάνω σχέση και παίρνοντας το όριο όπου  $a \rightarrow 0$  προκύπτει ότι ο φερμιονικός διαδότης για αυτήν τη δράση θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_{\alpha}(x) \psi_{\beta}(y) \rangle &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} K_{\alpha\beta}^{-1} \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a}; aM \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\left[ -i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \tilde{k}_{\mu} + M(k) \mathbb{1} \right]_{\alpha\beta}}{\sum_{\mu} \tilde{k}_{\mu}^2 + M(k)^2} e^{ik \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (4.24)$$

με

$$M(k) = M + \frac{2r}{a} \sum_{\mu} \sin^2 \frac{ak_{\mu}}{2} \quad (4.25)$$

Όπως φαίνεται από το αποτέλεσμα αυτό, για δεδομένη τιμή της ορμής  $k$ , η ποσότητα  $M(k)$  τείνει στην  $M$  καθώς  $a \rightarrow 0$ . Στα άκρα της ζώνης Brillouin όμως, η ποσότητα αυτή αποκλίνει. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι πόλοι της ολοκληρωτέας συνάρτησης της εξίσωσης (4.16) (για  $M \rightarrow 0$ ) εκτός από αυτόν για  $k = 0$  να παύουν να υπάρχουν. Με αυτόν τον τρόπο απαλείφονται οι επιπλέον συνεισφορές στο διαδότη του πλέγματος ώστε αυτός να συμπίπτει με την αντίστοιχη ποσότητα του συνεχούς. Βέβαια, το αναπόφευκτο τμήμα που πληρώνει κανείς για την επίλυση του προβλήματος του διπλασιασμού, είναι το γεγονός ότι ο επιπλέον όρος που προστέθηκε παραβιάζει τη συμμετρία χειρός που έχει η δράση για άμαζα φερμιόνια.

### 4.3 Θεωρίες βαθμίδας στο πλέγμα

#### 4.3.1 Κβαντική ηλεκτροδυναμική στο πλέγμα

Οι διάφορες συναρτήσεις Green στη θεωρία της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής υπολογίζονται παραγωγίζοντας τη γεννήτρια συνάρτηση

$$Z[\eta, \bar{\eta}, J] = \int DA D\psi D\bar{\psi} e^{iS_{QED} + i \int d^4x (J^\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} \quad (4.26)$$

όπου  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\eta$  και  $\bar{\eta}$  είναι μεταβλητές Grassmann. Το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται πρακτικά μόνο στα πλαίσια ενός ευκλείδειου χωροχρονικού πλέγματος. Για αυτόν το λόγο είναι απαραίτητο να υπολογιστεί η δράση της QED στο πλέγμα ακολουθώντας τα ίδια λογικά βήματα με την αντίστοιχη περίπτωση του υπολογισμού της δράσης στο συνεχές.

Πριν από οποιαδήποτε άλλη ενέργεια, πρέπει πρώτα να γίνει η μετάβαση στον ευκλείδειο χρόνο κάνοντας τις αντικαταστάσεις  $x^0 \rightarrow -ix_4$  και  $A_0 \rightarrow iA_4$ . Η αντικατάσταση για το φωτονικό πεδίο  $A$  είναι λογική αν κανείς εξετάσει την περίπτωση όπου το πεδίο αυτό είναι αποκλειστικά εξαρτώμενο από τη βαθμίδα:  $A_\mu = \partial_\mu \Lambda$ . Κάνοντας αυτές τις αντικαταστάσεις κανείς βρίσκει ότι

$$S \rightarrow i(S_G + S_F) \quad (4.27)$$

όπου

$$S_G = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (4.28)$$

είναι το φωτονικό μέρος της ευκλείδειας δράσης και

$$S_F = \int d^4x \bar{\psi} (\gamma_\mu D_\mu + M) \psi \quad (4.29)$$

είναι το αντίστοιχο φερμιονικό μέρος.

Αφετηρία για τον υπολογισμό της φερμιονικής δράσης στο πλέγμα θα αποτελέσει η δράση Wilson για τα ελεύθερα ηλεκτρόνια:

$$\begin{aligned} S_F^{(W)} &= (M + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n) (r - \gamma_\mu) \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) (r + \gamma_\mu) \psi(n)] \end{aligned} \quad (4.30)$$

Η δράση αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας της μορφής  $\psi(n) \rightarrow G\psi(n)$  και  $\bar{\psi}(n) \rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}$  όπου  $G = e^{ig\Lambda}$  είναι ένα στοιχείο της ομάδας  $U(1)$ . Το ζητούμενο τώρα είναι να κατασκευαστεί μια δράση που να είναι αναλλοίωτη κάτω

από τοπικούς μετασχηματισμούς της ίδιας μορφής. Επίσης, επειδή ο μετασχηματισμός  $G$  δεν επηρεάζει τους δείκτες Dirac για να βρεθεί η δράση αρκεί να εξεταστεί πώς πρέπει να μεταβληθεί μια έκφραση της μορφής  $\bar{\psi}(n) \psi(n + \hat{\mu})$ . Η έκφραση αυτή μετασχηματίζεται ως

$$\bar{\psi}(n) \psi(n + \hat{\mu}) \rightarrow \bar{\psi}(n) G^{-1}(n) G(n + \hat{\mu}) \psi(n + \hat{\mu}) \quad (4.31)$$

Από αυτό, κανείς καταλαβαίνει ότι η αρχική έκφραση πρέπει να τροποποιηθεί εισάγοντας επιπλέον βαθμούς ελευθερίας για να παραμένει αναλλοίωτη. Συγκεκριμένα, η έκφραση  $\bar{\psi}(m) U_{n,n+\hat{\mu}} \psi(n)$  θα παραμείνει αναλλοίωτη αν το καινούριο πεδίο  $U$  μετασχηματίζεται ως

$$U_{n,n+\hat{\mu}} \rightarrow G(n) U_{n,n+\hat{\mu}} G^{-1}(n + \hat{\mu}) \quad (4.32)$$

Επιβάλλοντας αυτήν την απαίτηση προκύπτει ότι οι *μεταβλητές συνδέσμων*  $U$ , όπως ονομάζονται αφού ζουν στο ενδιάμεσο δύο πλεγματικών σημείων και συνδέουν τα φερμιονικά πεδία δύο γειτονικών θέσεων, είναι επίσης στοιχεία της ομάδας  $U(1)$ . Έτσι, μπορούν να γραφούν με τη μορφή

$$U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{i\phi_{\mu}(n+\hat{\mu}/2)} \quad (4.33)$$

όπου το  $\phi_{\mu}(n + \hat{\mu}/2)$  κινείται στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ . Το γεγονός ότι το πεδίο  $\phi_{\mu}$  έχει πραγματικές τιμές και φέρει ένα δείκτη Lorentz οδηγεί στην υπόθεση ότι μάλλον συνδέεται με κάποιο τρόπο με το φωτονικό πεδίο  $A_{\mu}$ . Ο περιορισμός στις τιμές του  $\phi_{\mu}$  δεν είναι σημαντικός αφού για να συμπίπτουν οι διαστάσεις των δύο μεγεθών πρέπει το πεδίο  $\phi_{\mu}$  να πολλαπλασιαστεί με έναν παράγοντα  $1/a$ . Έτσι, στο όριο όπου  $a \rightarrow 0$  οι τιμές του πεδίου  $A_{\mu}$  εκτείνονται μέχρι το άπειρο.

Με αυτούς τους συλλογισμούς κανείς καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η φερμιονική δράση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής στο πλέγμα θα δίνεται από τη σχέση

$$S_F = (M + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n) (r - \gamma_{\mu}) U_{n,n+\hat{\mu}} \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) (r + \gamma_{\mu}) U_{n+\hat{\mu},n} \psi(n)] \quad (4.34)$$

όπου

$$U_{n+\hat{\mu},n} = U_{n,n+\hat{\mu}}^{\dagger} \quad (4.35)$$

και

$$U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{icaA_{\mu}(n+\hat{\mu}/2)} \quad (4.36)$$

Η δράση αυτή συμπίπτει με την (4.29) στο όριο του συνεχούς αν η σταθερά  $c$  είναι ίση με τη σταθερά σύζευξης  $g$  της θεωρίας. Ακόμα, αποδεικνύεται εύκολα ότι κάτω από ένα

μετασχηματισμό βαθμίδας  $G(n) = e^{ig\Lambda(n)}$  οι μεταβλητές συνδέσμων μετασχηματίζονται με το σωστό τρόπο, δηλαδή

$$e^{igaA_\mu(n+\hat{\mu}/2)} \rightarrow e^{iga[A_\mu(n+\hat{\mu}/2) - \frac{1}{a}(\Lambda(n+\hat{\mu}) - \Lambda(n))]} \simeq e^{iga(A_\mu(n+\hat{\mu}/2) - \partial_\mu \Lambda(n+\hat{\mu}/2))} \quad (4.37)$$

Απομένει τώρα να κατασκευαστεί το φωτονικό μέρος της δράσης. Η ποσότητα αυτή πρέπει να είναι επίσης αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας και να εξαρτάται αποκλειστικά από τις μεταβλητές συνδέσμων. Η πιο απλή ποσότητα που ικανοποιεί αυτές τις ιδιότητες είναι το γινόμενο τεσσάρων συνδέσμων γύρω από μια μοναδιαία κυψελίδα - πλακέτα του πλέγματος. Αν αυτή η πλακέτα είναι λόγου χάρη στο  $\mu\nu$  επίπεδο τότε η έκφραση για την οποία γίνεται λόγος είναι η

$$U_{\mu\nu}(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) = U_{n,n+\hat{\mu}} U_{n+\hat{\mu},n+\hat{\mu}+\hat{\nu}} U_{n+\hat{\mu}+\hat{\nu},n+\hat{\nu}} U_{n+\hat{\nu},n} \quad (4.38)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τους συνδέσμους στην πιο πάνω έκφραση προκύπτει ότι

$$U_{\mu\nu}(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) = e^{iga^2 F_{\mu\nu}(n+\hat{\mu}/2+\hat{\nu}/2)} \quad (4.39)$$

όπου

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) &= \frac{1}{a} (A_\nu(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}/2) - A_\nu(n + \hat{\nu}/2)) \\ &\quad - \frac{1}{a} (A_\mu(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}) + A_\mu(n + \hat{\mu}/2)) \\ &\simeq \partial_\mu A_\nu(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) - \partial_\nu A_\mu(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Έτσι, για μικρές τιμές της σταθεράς του πλέγματος προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( U_{\mu\nu}(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) + U_{\mu\nu}^\dagger(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) \right) \right] \\ \simeq \frac{a^4}{4} \sum_{n,\mu,\nu} F_{\mu\nu}(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) F_{\mu\nu}(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) \end{aligned} \quad (4.41)$$

και τελικά προκύπτει ότι η φωτονική δράση θα δίνεται από τη σχέση

$$S_G = \frac{1}{g^2} \sum_P \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( U_P + U_P^\dagger \right) \right] \quad (4.42)$$

όπου  $U_P$  (η μεταβλητή πλακέτας) είναι το γινόμενο των συνδέσμων γύρω από τη μοναδιαία πλακέτα  $P$  στην αριστερόστροφη (λόγου χάρη) κατεύθυνση, ενώ το άθροισμα υπονοείται ως προς όλες τις διαφορετικές πλακέτες του πλέγματος.

Συνοψίζοντας, η δράση για την κβαντική ηλεκτροδυναμική σε πλέγμα ευκλείδειου χρόνου θα δίνεται από τη σχέση

$$S_{QED} = (M + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) + \frac{1}{g^2} \sum_P \left[ 1 - \frac{1}{2} (U_P + U_P^\dagger) \right] - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \left[ \bar{\psi}(n) (r - \gamma_\mu) U_{n,n+\hat{\mu}} \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) (r + \gamma_\mu) U_{n,n+\hat{\mu}}^\dagger \psi(n) \right] \quad (4.43)$$

ενώ παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας της μορφής

$$\psi(n) \rightarrow G(n) \psi(n) \quad \bar{\psi}(n) \rightarrow \bar{\psi}(n) G^{-1}(n) \quad U_{n,n+\hat{\mu}} \rightarrow G(n) U_{n,n+\hat{\mu}} G^{-1}(n + \hat{\mu}) \quad (4.44)$$

όπου  $G(n) = e^{ig\Lambda(n)}$ . Η δράση αυτή χρησιμοποιείται στα πλαίσια του φορμαλισμού των ολοκληρωμάτων διαδρομής για τον υπολογισμό των συναρτήσεων Green που εμπλέκουν ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια και φωτόνια. Συγκεκριμένα θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & \langle \psi_a(n) \dots \psi_b(m) \dots U_{N,N+\hat{\mu}} \dots \rangle \\ &= \frac{\int D\psi D\bar{\psi} DU (\psi_a(n) \dots \psi_b(m) \dots U_{N,N+\hat{\mu}} \dots) e^{-S_{QED}}}{\int D\psi D\bar{\psi} DU e^{-S_{QED}}} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Το τελευταίο σημείο που αξίζει να σχολιαστεί εδώ αφορά το μέτρο ολοκλήρωσης  $DU$ , το οποίο πρέπει να οδηγεί σε ολοκλήρωση ως προς όλες τις τιμές των συνδέσμων  $U$ , χωρίς όμως να καταστρέφει το αναλλοίωτο των διαφόρων εκφράσεων. Λόγω του ότι η κβαντική ηλεκτροδυναμική είναι μια αβελιανή θεωρία προκύπτει ότι το μέτρο ολοκλήρωσης στην αναπαράσταση όπου  $U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{i\phi_\mu(n+\hat{\mu}/2)}$  έχει την τετριμμένη μορφή

$$DU = \prod_{n,\mu} d\phi_\mu(n + \hat{\mu}/2) \quad (4.46)$$

### Καθορισμός βαθμίδας στη δράση της QED

Αν στη δράση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής οι μεταβλητές των συνδέσμων  $U$  αντικατασταθούν ως προς τις μεταβλητές  $\phi$  προκύπτει ότι

$$S_{QED}[\phi, \psi, \bar{\psi}] = S_F[\phi, \psi, \bar{\psi}] + S_G[\phi] \quad (4.47)$$

όπου

$$\begin{aligned} S_F[\phi, \psi, \bar{\psi}] &= (M + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \left[ \bar{\psi}(n) (r - \gamma_\mu) e^{i\phi_\mu(n+\hat{\mu}/2)} \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) (r + \gamma_\mu) e^{-i\phi_\mu(n+\hat{\mu}/2)} \psi(n) \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

και

$$S_G[\phi] = \frac{1}{2g^2} \sum_{n,\mu,\nu} [1 - \cos \phi_{\mu\nu}(n)] \quad (4.49)$$

με

$$\phi_{\mu\nu}(n) = \partial_\mu^R \phi_\nu(n) - \partial_\nu^R \phi_\mu(n) = [\phi_\nu(n + \hat{\mu}) - \phi_\nu(n)] - [\phi_\mu(n + \hat{\nu}) - \phi_\mu(n)] \quad (4.50)$$

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω δράση στα πλαίσια του φορμαλισμού των ολοκληρωμάτων διαδρομής είναι αδύνατον να οριστεί ο διαδότης για το φωτονικό πεδίο  $\phi$ . Αυτό συμβαίνει επειδή το φωτονικό μέρος της δράσης για όλες εκείνες τις περιπτώσεις όπου το πεδίο  $\phi$  έχει τη μορφή  $\phi_\mu = \partial_\mu \Lambda$  (είναι ισοδύναμο μετά από ένα μετασχηματισμό βαθμίδας με το  $\phi = 0$ ) μηδενίζεται. Έτσι, στο ολοκλήρωμα υπάρχουν συνεισφορές από ένα άπειρο σύνολο περιπτώσεων του πεδίου  $\phi$  οι οποίες συνυπολογίζονται με βάρος μονάδα. Αυτό είναι λογικό να οδηγήσει σε απειρισμούς. Αξίζει βέβαια να σημειωθεί ότι οι απειρισμοί αυτοί εμφανίζονται και στο συνεχές για τον ίδιο ακριβώς λόγο. Δεν οφείλονται στο φορμαλισμό του πλέγματος.

Για να αποφευχθούν αυτοί οι απειρισμοί, πρέπει κανείς να επιλέξει από όλες εκείνες τις ισοδύναμες συνεισφορές έναν αντιπρόσωπο. Αυτό γίνεται ορίζοντας μια γενικευμένη βαθμίδα Lorentz της μορφής

$$G[\phi, \chi] = \sum_\mu \partial_\mu^L \phi_\mu(n) - \chi(n) = \sum_\mu [\phi_\mu(n) - \phi_\mu(n - \hat{\mu})] - \chi(n) = 0 \quad (4.51)$$

ενώ μέσα από μια διαδικασία η οποία είναι γνωστή στη βιβλιογραφία σαν τέχνασμα Faddeev - Popov αποδεικνύεται ότι η βαθμίδα αυτή εισάγεται στον υπολογισμό των συναρτήσεων Green μέσω της σχέσης

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\int D\phi D\bar{\psi} D\psi \delta(G(\phi, \chi)) \Gamma[\phi, \psi, \bar{\psi}] e^{-S_{QED}}}{\int D\phi D\bar{\psi} D\psi \delta(G(\phi, \chi)) e^{-S_{QED}}} \quad (4.52)$$

Επίσης, αφού η συνάρτηση Green που υπολογίζεται είναι μια αναλλοίωτη ποσότητα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας δεν πρέπει να εξαρτάται από τη συνάρτηση  $\chi$ . Για να απαλειφθεί από τη σχέση πρέπει να γίνει ολοκλήρωση ως προς όλες τις τιμές της με μια γκαουσιανή συνάρτηση βάρους της μορφής  $e^{-\frac{1}{2\alpha} \sum_n (\chi(n))^2}$ . Τελικά, προκύπτει ότι η πιο πάνω αναμενόμενη τιμή θα δίνεται από τη σχέση

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\int D\phi D\bar{\psi} D\psi \Gamma[\phi, \psi, \bar{\psi}] e^{-S_{QED} - S_{GF}}}{\int D\phi D\bar{\psi} D\psi e^{-S_{QED} - S_{GF}}} \quad (4.53)$$

όπου

$$S_{GF}[\phi] = \frac{1}{2\alpha} \sum_n \left[ \sum_\mu \partial_\mu^L \phi_\mu(n) \right]^2 \quad (4.54)$$

Τέλος, αποκαθιστώντας στην ολική δράση τη διαστατικότητα των μεγεθών και κάνοντας την αντικατάσταση  $\alpha \rightarrow \alpha_0/g^2$  προκύπτει ότι

$$S_{QED}^{(tot.)}[A, \psi, \bar{\psi}] = S_G[A] + S_F[A, \psi, \bar{\psi}] + S_{GF}[A] \quad (4.55)$$

με

$$S_G[A] = \frac{1}{2g^2 a^4} \sum_{x, \mu, \nu} [1 - \cos(ga^2 F_{\mu\nu}(x))] \quad (4.56)$$

όπου

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu^R A_\nu(x) - \partial_\nu^R A_\mu(x) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} S_F[A, \psi, \bar{\psi}] &= \left(M + \frac{4r}{a}\right) \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) \\ &- \frac{1}{2a} \sum_{x, \mu} \left[ \bar{\psi}(x) (r - \gamma_\mu) e^{igaA_\mu(x+\mu/2)} \psi(x + \mu) \right. \\ &\left. + \bar{\psi}(x + \mu) (r + \gamma_\mu) e^{-igaA_\mu(x+\mu/2)} \psi(x) \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

και

$$S_{GF}[A] = \frac{1}{2\alpha_0} \sum_x \left[ \sum_\mu \partial_\mu^L A_\mu(x) \right]^2 \quad (4.59)$$

Επίσης, το άθροισμα ως προς  $x$  πρέπει να θεωρείται ότι είναι ίσο με  $\sum_x = a^4 \sum_n$

Αναπτύσσοντας τη δράση αυτή σε δυνάμεις της σταθεράς σύζευξης  $g$  προκύπτει ότι ο όρος που περιέχει μόνο το φωτονικό πεδίο και είναι μηδενικής τάξης ως προς  $g$  δίνεται από τη σχέση

$$S_G^{(0)}[A] = \frac{1}{2} \sum_{x, y, \mu, \nu} A_\mu(x) \Omega_{\mu\nu}(x, y) A_\nu(y) \quad (4.60)$$

όπου, ακολουθώντας μια διαδικασία παρόμοια με αυτή για το φερμιονικό διαδότη, το  $\Omega_{\mu\nu}$  υπολογίζεται (στο χώρο των ορμών) ότι είναι

$$\Omega_{\mu\nu}(k) = \delta_{\mu\nu} \hat{k}^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha_0}\right) \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu \quad (4.61)$$

όπου

$$\hat{k}_\mu = \frac{2}{a} \sin \frac{ak_\mu}{2} \quad \text{και} \quad \hat{k}^2 = \sum_\mu \hat{k}_\mu^2 \quad (4.62)$$

Ο αντίστροφος του πιο πάνω πίνακα δίνει το φωτονικό διαδότη ο οποίος τελικά προκύπτει ότι είναι

$$\Omega_{\mu\nu}^{-1}(k) = \frac{1}{\hat{k}^2} \left( \delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha_0) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2} \right) \quad (4.63)$$



### 4.3.2 Κβαντική χρωμοδυναμική στο πλέγμα

Η διαδικασία που περιγράφηκε πιο πάνω για την κβαντική ηλεκτροδυναμική μπορεί πολύ εύκολα να γενικευθεί και σε μη αβελιανές θεωρίες, όπως για παράδειγμα η κβαντική χρωμοδυναμική, της οποίας η δράση παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας της ομάδας  $SU(3)$ . Στην υποενότητα αυτή θα εξεταστεί η περίπτωση μιας γενικής θεωρίας βαθμίδας στην οποία υπάρχουν  $N_c$  στον αριθμό χρώματα φερμιονίων. Αφετηρία για τους υπολογισμούς θα είναι και πάλι η δράση Wilson για τα ελεύθερα φερμιονία, αθροισμένη αυτή τη φορά ως προς το χρωματικό δείκτη:

$$S_F^{(W)} = (M + 4r) \sum_n \sum_{a=1}^{N_c} \bar{\psi}^a(n) \psi^a(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \sum_{a=1}^{N_c} [\bar{\psi}^a(n) (r - \gamma_\mu) \psi^a(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}^a(n + \hat{\mu}) (r + \gamma_\mu) \psi^a(n)] \quad (4.64)$$

Αυτή η δράση παραμένει αναλλοίωτη κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας της μορφής  $\psi(n) \rightarrow G\psi(n)$  και  $\bar{\psi}(n) \rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}$  όπου  $G$  είναι ένα στοιχείο της ομάδας  $SU(N_c)$ ,  $\psi(n)$  είναι ο πίνακας στήλη με στοιχεία τα  $\psi_a(n)$  και  $\bar{\psi}(n)$  είναι ο πίνακας γραμμή με τα αντίστοιχα στοιχεία. Απαιτώντας η πιο πάνω δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας πρέπει κανείς να εισάγει σαν επιπλέον βαθμούς ελευθερίας τις μεταβλητές σύνδεσης  $U_{n,n+\hat{\mu}}$ , οι οποίες πρέπει να μετασχηματίζονται όπως και προηγούμενα, δηλαδή  $U_{n,n+\hat{\mu}} \rightarrow G(n)U_{n,n+\hat{\mu}}G^{-1}(n+\hat{\mu})$ . Σε αυτό το πλαίσιο, οι μεταβλητές σύνδεσης δεν είναι ένα πεδίο, όπως ήταν στην αβελιανή περίπτωση, αλλά πίνακες οι οποίοι ανήκουν επίσης στην ομάδα  $SU(N_c)$ , με αποτέλεσμα να μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{ig\phi_\mu(n+\hat{\mu}/2)} = e^{ig\sum_a \phi_\mu^a(n+\hat{\mu}/2)T^a} \quad (4.65)$$

όπου  $\phi_\mu$  είναι ένας ερμιτιανός πίνακας διάστασης  $N_c$  με μηδενικό ίχνος και  $T^a$  οι γεννήτορες της ομάδας  $SU(N_c)$ . Λαμβάνοντας τα πιο πάνω υπόψη, προκύπτει ότι το φερμιονικό κομμάτι της δράσης της κβαντικής χρωμοδυναμικής θα δίνεται από τη σχέση

$$S_F = (M + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n) (r - \gamma_\mu) U_{n,n+\hat{\mu}} \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) (r + \gamma_\mu) U_{n+\hat{\mu},n} \psi(n)] \quad (4.66)$$

Η δράση αυτή στο συνεχές όντως έχει το σωστό όριο. Ακόμα, αντικαθιστώντας το πεδίο  $\phi_\mu$  με  $gaA_\mu$  ο μετασχηματισμός του συνδέσμου συνεπάγεται ότι το γκλουονικό πεδίο

μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu(n) \rightarrow G(n) A_\mu(n) G^{-1}(n) - \frac{i}{g} G(n) \partial_\mu G^{-1}(n) \quad (4.67)$$

γεγονός που συμφωνεί με τον αντίστοιχο μετασχηματισμό του συνεχούς.

Το γλουονικό μέρος της δράσης υπολογίζεται όπως και πριν σε σχέση με τις μεταβλητές πλακέτας, δηλαδή τα γινόμενα τεσσάρων συνδέσμων γύρω από μια μοναδιαία κυψελίδα του πλέγματος προς μια καθορισμένη κατεύθυνση. Η έκφραση που προκύπτει και σε αυτήν την περίπτωση είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Συγκεκριμένα,

$$S_G = \frac{2N_c}{g^2} \sum_P \left[ 1 - \frac{1}{2N_c} \text{Tr} \left( U_P + U_P^\dagger \right) \right] \quad (4.68)$$

Επιβάλλοντας μια πλακέτα στο επίπεδο  $\mu\nu$ :

$$U_{\mu\nu}(n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2) = U_{n,n+\hat{\mu}} U_{n+\hat{\mu},n+\hat{\mu}+\hat{\nu}} U_{n+\hat{\mu}+\hat{\nu},n+\hat{\nu}} U_{n+\hat{\nu},n} \quad (4.69)$$

να είναι ίση με  $e^{iga^2 F_{\mu\nu}}$  ώστε η πιο πάνω δράση να συμπίπτει με την αντίστοιχη του συνεχούς στο όριο όπου  $a \rightarrow 0$ , κανείς βρίσκει ότι ο τανυστής  $F_{\mu\nu}$  συνδέεται με το γλουονικό πεδίο  $A_\mu$  σύμφωνα με τη σχέση

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu] \quad (4.70)$$

Η σχέση αυτή είναι ακριβώς ο ορισμός του  $F_{\mu\nu}$  όπως προέκυψε στο συνεχές.

Τελικά, η ολική δράση της θεωρίας βαθμίδας με  $N_c$  χρώματα φερμιονίων θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} S_{QCD} = & \frac{2N_c}{g^2} \sum_P \left[ 1 - \frac{1}{2N_c} \text{Tr} \left( U_P + U_P^\dagger \right) \right] + (M + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \left[ \bar{\psi}(n) (r - \gamma_\mu) U_{n,n+\hat{\mu}} \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu}) (r + \gamma_\mu) U_{n,n+\hat{\mu}}^\dagger \psi(n) \right] \end{aligned} \quad (4.71)$$

Η δράση αυτή αναμένεται να χρησιμοποιείται στα πλαίσια του φορμαλισμού των ολοκληρωμάτων διαδρομής για τον υπολογισμό συναρτήσεων Green που εμπλέκουν φερμιονικά πεδία (quarks) και μεταβλητές συνδέσμων ή εναλλακτικά γλουονικά πεδία. Μια τέτοια συνάρτηση θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} & \langle \psi_a(n) \dots \psi_b(m) \dots U_{N,N+\hat{\mu}} \dots \rangle \\ & = \frac{\int D\psi D\bar{\psi} DU (\psi_a(n) \dots \psi_b(m) \dots U_{N,N+\hat{\mu}} \dots) e^{-S_{QCD}}}{\int D\psi D\bar{\psi} DU e^{-S_{QCD}}} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Η σχέση αυτή αν και είναι οπτικά όμοια με την αντίστοιχη της ηλεκτροδυναμικής διαφέρει σημαντικά ως προς το μέτρο ολοκλήρωσης  $DU$ . Μια αφελής επιλογή του μέτρου αυτού θα μπορούσε να καταστρέψει τη συμμετρία ως προς μετασχηματισμούς βαθμίδας της θεωρίας. Όπως προκύπτει, η σωστή έκφραση για το μέτρο ολοκλήρωσης είναι η ακόλουθη

$$DU = \prod_{n,m} \sqrt{\det \left[ \frac{1}{2} M^\dagger(\phi_\mu(n)) M(\phi_\mu(n)) \right]} D\phi \quad (4.73)$$

όπου

$$M(\phi_\mu(n)) = \frac{1 - e^{-i\Phi_\mu(n)}}{i\Phi_\mu(n)} \quad \text{και} \quad \Phi_\mu(n) = \sum_a t^a \phi_\mu^a(n) \quad (4.74)$$

$t^a$  οι γεννήτορες της ομάδας  $SU(N_c)$  στη προσαρτημένη αναπαράσταση και

$$D\phi = \prod_{n,a,\mu} d\phi_\mu^a(n) \quad (4.75)$$

Μια πιο βοηθητική γραφή του πιο πάνω μέτρου είναι η ακόλουθη.

$$DU = e^{-S_{\text{meas}}} D\phi \quad (4.76)$$

όπου

$$S_{\text{meas}} = -\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \text{Tr} \ln \frac{2(1 - \cos \Phi_\mu(n))}{\Phi_\mu^2(n)} \quad (4.77)$$

Σε αυτό το πλαίσιο μια συνάρτηση Green παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} & \langle \psi_a(n) \dots \psi_b(m) \dots \phi_\mu(N) \dots \rangle \\ &= \frac{\int D\psi D\bar{\psi} D\phi (\psi_a(n) \dots \psi_b(m) \dots \phi_\mu(N) \dots) e^{-S_{QCD} - S_{\text{meas}}}}{\int D\psi D\bar{\psi} D\phi e^{-S_{QCD} - S_{\text{meas}}}} \end{aligned} \quad (4.78)$$

### Καθορισμός βαθμίδας στη δράση της QCD

Όπως και στην περίπτωση της ηλεκτροδυναμικής, έτσι και τώρα είναι απαραίτητο να γίνει μια επιλογή βαθμίδας για τα πεδία  $\phi$  ώστε να αποφευχθούν πολλαπλές συνεισφορές στα ολοκληρώματα διαδρομής που οδηγούν σε ανεπιθύμητους απειρισμούς. Εξαιτίας όμως του ότι σε αυτήν την περίπτωση οι μεταβλητές των συνδέσμων είναι στοιχεία μιας μη αβελιανής ομάδας η επιπλέον συνεισφορά στη δράση είναι πιο πολύπλοκη. Έτσι, εκτός από τη δράση επιλογής βαθμίδας, η οποία δίνεται από τη σχέση

$$S_{GF}[\phi] = \frac{1}{2\alpha} \sum_{n,a} \left[ \sum_\mu \partial_\mu^L \phi_\mu^a(n) \right]^2 \quad (4.79)$$

υπάρχει μια επιπλέον συνεισφορά η οποία προκύπτει κατά την εφαρμογή του τεχνάσματος των Fadeev και Popov. Η δράση αυτή είναι ίση με

$$S_{FP}[\phi, c, \bar{c}] = - \sum_{n,a,b} \bar{c}^a(n) \sum_{\mu} \partial_{\mu}^L D_{\mu}[\phi]_{ab} c^b(n) \quad (4.80)$$

όπου

$$D_{\mu}[\phi] = M^{-1}(\phi(n)) \partial_{\mu}^R + i\Phi_{\mu}(n) \quad (4.81)$$

Όπως φαίνεται και πιο πάνω, για τη θεμελίωση της δράσης αυτής ήταν απαραίτητο να εισαχθούν δύο καινούρια πεδία ( $c$  και  $\bar{c}$ ). Τα πεδία αυτά, τα οποία ανήκουν σε μια άλγεβρα Grassmann και φέρουν χρωματικό δείκτη αλλά όχι δείκτη Dirac, είναι γνωστά στη βιβλιογραφία σαν φαντάσματα και η ύπαρξή τους οφείλεται στο ότι η θεωρία είναι μη αβελιανή.

Έτσι τελικά, μια συνάρτηση Green στα πλαίσια της κβαντικής χρωμοδυναμικής θα δίνεται από τη σχέση

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\int D\phi Dc D\bar{c} D\bar{\psi} D\psi \Gamma[\phi, \psi, \bar{\psi}] e^{-S_{QCD}^{tot}[\phi, c, \bar{c}, \psi, \bar{\psi}]}}{\int D\phi Dc D\bar{c} D\bar{\psi} D\psi e^{-S_{QCD}^{tot}[\phi, c, \bar{c}, \psi, \bar{\psi}]}} \quad (4.82)$$

όπου

$$S_{QCD}^{tot}[\phi, c, \bar{c}, \psi, \bar{\psi}] = S_F[\phi, \psi, \bar{\psi}] + S_G[\phi] + S_{meas}[\phi] + S_{GF}[\phi] + S_{FP}[\phi, c, \bar{c}] \quad (4.83)$$

είναι η συνολική δράση. Από το διαταρακτικό της ανάπτυγμα ως προς τις δυνάμεις της σταθεράς σύζευξης  $g$  προκύπτουν οι διαδότες για τα διάφορα πεδία καθώς και οι κορυφές που περιγράφουν τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Με τα στοιχεία αυτά είναι δυνατόν να κατασκευαστεί και να υπολογιστεί οποιαδήποτε συνάρτηση Green.

## Κεφάλαιο 5

# Βελτιωμένες δράσεις της QCD στο πλέγμα

### 5.1 Εισαγωγή

Η δράση για την κβαντική χρωμοδυναμική στο πλέγμα που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο δεν είναι μοναδική. Κανείς μπορεί να κατασκευάσει πολλές διαφορετικές τέτοιες δράσεις οι οποίες, στο όριο όπου η σταθερά του πλέγματος τείνει στο μηδέν, συμπίπτουν με τη δράση του συνεχούς. Με αυτόν το συλλογισμό, είναι δυνατό να κατασκευαστούν δράσεις, με μεγαλύτερο βαθμό πολυπλοκότητας από αυτήν που παρουσιάστηκε πιο πριν, οι οποίες, όμως, είναι καλύτερες από διάφορες απόψεις.

Για παράδειγμα, ένα σοβαρό μειονέκτημα της «απλής» δράσης είναι το γεγονός ότι, αντίθετα με την περίπτωση του συνεχούς, δεν διατηρεί τη συμμετρία χειρός των φερμιονίων στο όριο όπου η μάζα τους τείνει στο μηδέν. Κάτι τέτοιο καθιστά αυτήν τη δράση ακατάλληλη να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη λ.χ. της αυθόρμητης παραβίασης της συμμετρίας χειρός των φερμιονίων στην κβαντική χρωμοδυναμική. Ακόμα, εκτός από τέτοιας μορφής κωλύματα που παρουσιάζονται, εμπειρικά παρατηρήθηκε ότι η χρήση κάποιων δράσεων οδηγεί σε αποτελέσματα που συγκλίνουν πιο εύκολα στις αριθμητικές προσομοιώσεις.

Έχοντας αυτά κατά νου, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται βελτιωμένες δράσεις της κβαντικής χρωμοδυναμικής στο πλέγμα οι οποίες χρησιμοποιούνται από διεθνείς ερευνητικές ομάδες σε αριθμητικές προσομοιώσεις και αποτέλεσαν τη βάση για τους υπολογισμούς που ακολουθούν.

## 5.2 Φερμιόνια Clover

Μια βελτιωμένη μορφή της δράσης της χβαντικής χρωμοδυναμικής είναι αυτή που προκύπτει αν στη φερμιονική δράση προστεθεί ακόμα ένας όρος, ο οποίος τείνει στο μηδέν στο όριο του συνεχούς. Συγκεκριμένα, σε αυτό το πλαίσιο η φερμιονική δράση είναι η ακόλουθη.

$$\begin{aligned}
S_F = & (M + 4r) \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) \\
& - \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\bar{\psi}(x) (r - \gamma_\mu) U_{x,x+\mu} \psi(x + \mu) + \bar{\psi}(x + \mu) (r + \gamma_\mu) U_{x+\mu,x} \psi(x)] \\
& + \frac{i}{4} c_{SW} \sum_{x,\mu,\nu} \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \psi(x)
\end{aligned} \quad (5.1)$$

όπου

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{8a^2} (Q_{\mu\nu} - Q_{\mu\nu}^\dagger) \quad (5.2)$$

με

$$\begin{aligned}
Q_{\mu\nu} = & U_{x,x+\mu} U_{x+\mu,x+\mu+\nu} U_{x+\mu+\nu,x+\nu} U_{x+\nu,x} + U_{x,x+\nu} U_{x+\nu,x-\mu+\nu} U_{x-\mu+\nu,x-\mu} U_{x-\mu,x} \\
& + U_{x,x-\mu} U_{x-\mu,x-\mu-\nu} U_{x-\mu-\nu,x-\nu} U_{x-\nu,x} + U_{x,x-\nu} U_{x-\nu,x+\nu-\mu} U_{x+\mu-\nu,x+\mu} U_{x+\mu,x}
\end{aligned} \quad (5.3)$$

και

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (5.4)$$

ενώ η σταθερά  $c_{SW}$  είναι αυθαίρετη. Για την «ιδανική» τιμή  $c_{SW} = 1$  η δράση έχει σφάλμα διακριτοποίησης  $\mathcal{O}(a^2)$  αντί  $\mathcal{O}(a)$  που έχει η δράση Wilson. Όμως, η ιδανική αυτή τιμή αλλάζει αν ληφθούν υπόψη και χβαντικές διορθώσεις.

## 5.3 Δράσεις τύπου Symanzik

Μια άλλη βελτίωση που μπορεί να γίνει στη δράση της QCD αφορά το γκλουονικό της μέρος. Η βελτίωση αυτή στηρίζεται στην παρατήρηση ότι οι πλακέτες που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως είναι η πιο απλή από όλες τις περιπτώσεις γινομένων των συνδέσμων που παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Οι δράσεις τύπου Symanzik που εξετάζονται σε αυτήν την ενότητα συνυπολογίζουν στη δράση και συνεισφορές από γινόμενα μέχρι και έξι συνδέσμων. Έτσι, η γκλουονική δράση έχει τη

μορφή

$$S_G = \frac{2}{g^2} \left[ c_0 \sum_{\text{Plaquette}} \text{Re Tr} (1 - U_{\text{Plaquette}}) + c_1 \sum_{\text{Rectangle}} \text{Re Tr} (1 - U_{\text{Rectangle}}) \right. \\ \left. + c_2 \sum_{\text{Chair}} \text{Re Tr} (1 - U_{\text{Chair}}) + c_3 \sum_{\text{Parallelogram}} \text{Re Tr} (1 - U_{\text{Parallelogram}}) \right] \quad (5.5)$$

Στην πιο πάνω ποσότητα το πρώτο άθροισμα τρέχει ως προς όλες τις  $a \times a$  πλακέτες του πλέγματος της μορφής

$$U_{\text{Plaquette}} = U_{x,x+\mu} U_{x+\mu,x+\mu+\nu} U_{x+\mu+\nu,x+\nu} U_{x+\nu,x} \quad (5.6)$$

το δεύτερο άθροισμα τρέχει ως προς όλα τα  $a \times 2a$  ορθογώνια του πλέγματος της μορφής

$$U_{\text{Rectangle}} = U_{x,x+\mu} U_{x+\mu,x+2\mu} U_{x+2\mu,x+2\mu+\nu} U_{x+2\mu+\nu,x+\mu+\nu} U_{x+\mu+\nu,x+\nu} U_{x+\nu,x} \quad (5.7)$$

το τρίτο άθροισμα τρέχει ως προς όλες τις «καρέκλες» του πλέγματος της μορφής

$$U_{\text{Chair}} = U_{x,x+\lambda} U_{x+\lambda,x+\lambda+\mu} U_{x+\lambda+\mu,x+\lambda+\mu+\nu} U_{x+\lambda+\mu+\nu,x+\lambda+\nu} U_{x+\lambda+\nu,x+\nu} U_{x+\nu,x} \quad (5.8)$$

και τέλος το τέταρτο άθροισμα τρέχει ως προς όλα τα «παραλληλόγραμμα» του πλέγματος της μορφής

$$U_{\text{Parallelogram}} = U_{x,x+\lambda} U_{x+\lambda,x+\lambda+\mu} U_{x+\lambda+\mu,x+\lambda+\mu+\nu} U_{x+\lambda+\mu+\nu,x+\mu+\nu} U_{x+\mu+\nu,x+\nu} U_{x+\nu,x} \quad (5.9)$$

Επίσης, τα  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  και  $c_3$  είναι αυθαίρετες σταθερές οι οποίες πρέπει να τηρούν τη σχέση κανονικοποίησης

$$c_0 + 8c_1 + 16c_2 + 8c_3 = 1 \quad (5.10)$$

ώστε η πιο πάνω δράση στο όριο όπου η σταθερά του πλέγματος τείνει στο μηδέν να συμπίπτει με τη δράση του συνεχούς.

Παρακάτω, παρατίθεται μια σειρά από συνήθεις επιλογές [5] για τις σταθερές  $c$ :

- Δράση *Wilson*:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0 \quad (5.11)$$

- Δράση *Tree-level Symanzik*:

$$c_1 = -1/12 \quad c_2 = c_3 = 0 \quad (5.12)$$

- Δράση *Iwasaki*:

$$c_1 = -0.331 \quad c_2 = c_3 = 0 \quad (5.13)$$

- Δράση *DBW2*:

$$c_1 = -1.4086 \quad c_2 = c_3 = 0 \quad (5.14)$$

Σε όλες τις πιο πάνω περιπτώσεις, έχοντας καθορίσει τις σταθερές  $c_1$ ,  $c_2$  και  $c_3$ , η σταθερά  $c_0$  υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση κανονικοποίησης.

## 5.4 Δράση SLiNC

Μια ακόμα βελτίωση που μπορεί να γίνει στη δράση της χβαντικής χρωμοδυναμικής αφορά τον επανα-ορισμό [6] των συνδέσμων  $U_{x,x+\mu}$ , οι οποίοι αντικαθίστανται από τους συνδέσμους stout:

$$\tilde{U}_{x,x+\mu} = e^{iQ_\mu(x)} U_{x,x+\mu} \quad (5.15)$$

όπου

$$Q_\mu(x) = \frac{\omega}{2i} \left[ V_\mu(x) U_{x,x+\mu}^\dagger - U_{x,x+\mu} V_\mu^\dagger(x) - \frac{1}{3} \text{Tr} \left( V_\mu(x) U_{x,x+\mu}^\dagger - U_{x,x+\mu} V_\mu^\dagger(x) \right) \right] \quad (5.16)$$

με

$$V_\mu(x) = \sum_{\nu \neq \mu} (U_{x,x+\nu} U_{x+\nu,x+\mu+\nu} U_{x+\mu+\nu,x+\mu} + U_{x,x-\nu} U_{x-\nu,x+\mu-\nu} U_{x+\mu-\nu,x+\mu}) \quad (5.17)$$

και  $U_{x,x+\mu}$  να είναι οι σύνδεσμοι που ορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο ενώ η σταθερά  $\omega$  είναι αυθαίρετη.

Σε μια δράση με φερμιόνια clover, η πιο πάνω αντικατάσταση για τους συνδέσμους  $U$  συνηθίζεται να γίνεται μόνο στους όρους που συνδέουν φερμιόνια δύο γειτονικών θέσεων καθώς και στους καθαρά γκλουονικούς όρους αλλά όχι στους όρους τύπου clover [7]. Αυτό γίνεται ώστε η δράση που προκύπτει να μπορεί να χρησιμοποιηθεί με μεγαλύτερη ευκολία και σε μη διαταρακτικούς υπολογισμούς. Με αυτήν τη λογική, η δράση που προκύπτει αν εφαρμοστούν τα πιο πάνω ονομάζεται SLiNC από τα αρχικά των λέξεων **Stout Link Non-perturbative Clover**.



## Κεφάλαιο 6

# Επανακανονικοποίηση των τελεστών της QCD

### 6.1 Εισαγωγή

Οι συναρτήσεις Green που υπολογίζονται μέσα από τη διαδικασία που περιγράφηκε στα προηγούμενα έχουν άπειρες συνεισφορές στις διάφορες τάξεις της θεωρίας διαταραχών. Αν οι συναρτήσεις αυτές υπολογιστούν στο όριο όπου  $a \rightarrow 0$  λαμβάνοντας υπόψη και συνεισφορές μεγαλύτερης τάξης από τη μηδενική πολλές φορές δίνουν απειρισμούς. Οι απειρισμοί αυτοί, βέβαια, δεν οφείλονται στο φορμαλισμό του πλέγματος αλλά υπάρχουν και στο συνεχές. Αντίθετα μάλιστα, το πλέγμα δίνει τη δυνατότητα να απαλειφθούν οι ποσότητες που οδηγούν σε απειρισμούς πριν υπολογιστούν (παίρνοντας το όριο όπου  $a \rightarrow 0$ ) οι συναρτήσεις Green του συνεχούς. Σε αυτό το πλαίσιο το πλέγμα αποτελεί μια ομαλοποίηση της θεωρίας ενώ η διαδικασία με την οποία προκύπτουν τα πεπερασμένα αποτελέσματα ονομάζεται επανακανονικοποίηση της θεωρίας.

### 6.2 Ορισμός επανακανονικοποιημένων ποσοτήτων

Όπως προκύπτει, για να υπολογιστούν οι επανακανονικοποιημένες συναρτήσεις Green πρέπει πρώτα να οριστούν εκ νέου τα διάφορα πεδία καθώς και οι παράμετροι της θεωρίας (π.χ. η παράμετρος βαθμίδας και η σταθερά σύζευξης). Έτσι, οι επανακανονικοποιημένες ποσότητες

για την κβαντική χρωμοδυναμική ορίζονται μέσω των σχέσεων

$$A_{\mu 0}^a = \sqrt{Z_A} A_{\mu}^a \quad c_0^a = \sqrt{Z_c} c^a \quad \psi_0 = \sqrt{Z_{\psi}} \psi \quad g_0 = Z_g g \quad \alpha_0 = Z_{\alpha}^{-1} Z_A \alpha \quad (6.1)$$

όπου στις πιο πάνω σχέσεις οι ποσότητες  $Z$  πρέπει να οριστούν ώστε να περιλαμβάνουν τους απειρισμούς που προκύπτουν όταν χρησιμοποιούνται οι «γυμνές» - μη επανακανονικοποιημένες ποσότητες, οι οποίες σημειώνονται με το δείκτη 0.

### 6.3 Το σχήμα επανακανονικοποίησης $RI'$

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους είναι δυνατό να επιτευχθεί η επανακανονικοποίηση μιας θεωρίας. Κάθε ένας από αυτούς ορίζει μια σειρά από συνθήκες από τις οποίες υπολογίζονται οι διάφορες επανακανονικοποιημένες ποσότητες της θεωρίας σε σχέση με τις γυμνές. Έτσι, το σχήμα επανακανονικοποίησης  $RI'$  επιβάλλει μια σειρά από συνθήκες για τα πεδία της θεωρίας στο χώρο των ορμών, έτσι που για μια καθορισμένη τιμή της ορμής ( $q^2 = \bar{\mu}^2$ ) οι επανακανονικοποιημένες συναρτήσεις Green να συμπίπτουν με την τιμή των αντίστοιχων γυμνών λαμβάνοντας υπόψη μόνο όρους μηδενικής τάξης.

Για παράδειγμα, η «ίδια ενέργεια» για ένα φερμιόνιο (η συνάρτηση συσχέτισης που προκύπτει για την αλληλεπίδραση του με το πεδίο που το ίδιο παράγει), η οποία για τον Ευκλείδειο χώρο δίνεται από τη σχέση

$$\Sigma_{\psi}^L(q, a) = i \not{q} + m_0 + \mathcal{O}(a^2, g_0^2) \quad (6.2)$$

(όπου  $\not{q} = \sum_{\mu} \gamma_{\mu} q_{\mu}$  και ο δείκτης  $L$  αναφέρεται στο ότι η ποσότητα αυτή υπολογίζεται στο πλέγμα) επανακανονικοποιείται επιβάλλοντας τη συνθήκη

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_{\psi}^{L, RI'}(a\bar{\mu}) \frac{\text{Tr} \left( \Sigma_{\psi}^L(q, a) \not{q} \right)}{4iq^2} \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \quad (6.3)$$

Ακόμα, η ίδια ενέργεια για ένα φάντασμα, η οποία έχει τη μορφή

$$\Sigma_c^L(q, a) = q^2 + \mathcal{O}(a^2, g_0^2) \quad (6.4)$$

επανακανονικοποιείται μέσω της συνθήκης

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_c^{L, RI'}(a\bar{\mu}) \frac{\Sigma_c^L(q, a)}{q^2} \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \quad (6.5)$$

Οι σταθερές  $Z_A$  και  $Z_\alpha$  υπολογίζονται μέσω της επανακανονικοποίησης του γκλουονικού διαδότη με διαταρακτικές διορθώσεις, ο οποίος δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$G_{\mu\nu}^L(q, a) = \frac{1}{q^2} \left[ \frac{\delta_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / q^2}{\Pi_T(aq)} + \alpha_0 \frac{q_\mu q_\nu / q^2}{\Pi_L(aq)} \right] \quad (6.6)$$

επιβάλλοντας τις συνθήκες

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_A^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \Pi_T(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \quad (6.7)$$

και

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\alpha^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \Pi_L(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \quad (6.8)$$

Τέλος, η ποσότητα  $Z_g$  προκύπτει επιβάλλοντας τη συνθήκη

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi^{L,RI'} \left( Z_A^{L,RI'} \right)^{1/2} Z_g^{L,RI'} G_{A\bar{\psi}\psi}^L(q, a) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = G_{A\bar{\psi}\psi}^{\text{finite}} \quad (6.9)$$

όπου  $G_{A\bar{\psi}\psi}^L$  είναι η κορυφή γκλουονίου, quark, antiquark του πλέγματος και  $G_{A\bar{\psi}\psi}^{\text{finite}}$  η αντίστοιχη πεπερασμένη ποσότητα σχήματος επανακανονικοποίησης  $\overline{MS}$  του συνεχούς.

## 6.4 Επανακανονικοποίηση των φερμιονικών τελεστών

Οι φερμιονικοί διγραμμικοί τελεστές, της μορφής  $\mathcal{O}_\Gamma = \bar{\psi}\Gamma\psi$  όπου  $\Gamma$  είναι ένα γινόμενο από πίνακες  $\gamma$  του Dirac, πρέπει επίσης να επανακανονικοποιηθούν. Στο ίδιο σχήμα με πριν, οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα επανακανονικοποιημένα πινακοστοιχεία τους ακολουθούν την ίδια λογική όπως και των προηγούμενων τελεστών και οδηγούν στον υπολογισμό μιας σειράς ποσοτήτων  $Z$  έτσι ώστε οι τελεστές

$$\mathcal{O}_\Gamma = Z_\Gamma^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \mathcal{O}_{\Gamma_0} \quad (6.10)$$

να έχουν πινακοστοιχεία χωρίς τους ανεπιθύμητους απειρισμούς.

Γενικά, διακρίνονται πέντε διαφορετικές περιπτώσεις για τη μορφή του πίνακα  $\Gamma$ . Η πρώτη από αυτές, ο βαθμωτός τελεστής αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου  $\Gamma = \mathbb{1}$ . Η αναμενόμενη τιμή του τελεστή αυτού, στο πλέγμα, δίνεται από μια σχέση της μορφής

$$\langle \psi (\bar{\psi}\mathbb{1}\psi) \bar{\psi} \rangle_{(\text{amp.})} = \mathbb{1} \Sigma_S(aq) = \mathbb{1} (1 + \mathcal{O}(g_0^2)) \quad (6.11)$$

όπου ο δείκτης (amp.) αναφέρεται σε «αχρωτηριασμένες» συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις που έχουν διαιρεθεί με τους διαδότες των εξωτερικών τους σωματιδίων. Έτσι, η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε να επανακανονικοποιηθεί ο τελεστής αυτός είναι η

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi^{L,RI'}(a\bar{\mu}) Z_S^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \Sigma_S(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \quad (6.12)$$

Η δεύτερη περίπτωση διγραμμικού τελεστή είναι ο ψευδο-βαθμωτός τελεστής όπου  $\Gamma = \gamma^5$ . Τα πινακοστοιχεία του τελεστή αυτού δίνονται από τη σχέση

$$\langle \psi (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) \bar{\psi} \rangle_{(\text{amp.})} = \gamma_5 \Sigma_P(aq) = \gamma_5 (1 + \mathcal{O}(g_0^2)) \quad (6.13)$$

ενώ η αντίστοιχη συνθήκη επανακανονικοποίησης θα είναι

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi^{L,RI'}(a\bar{\mu}) Z_P^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \Sigma_P(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \quad (6.14)$$

Ο τρίτος διγραμμικός τελεστής που θα εξεταστεί είναι ο διανυσματικός τελεστής, για τον οποίο ισχύει ότι  $\Gamma = \gamma^\mu$ . Ένα πινακοστοιχείο αυτού του τελεστή έχει τη μορφή

$$\langle \psi (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \bar{\psi} \rangle_{(\text{amp.})} = \gamma_\mu \Sigma_V^{(1)}(aq) + \frac{q_\mu \not{q}}{q^2} \Sigma_V^{(2)}(aq) = \gamma_\mu (1 + \mathcal{O}(g_0^2)) + \frac{q_\mu \not{q}}{q^2} (\mathcal{O}(g_0^2)) \quad (6.15)$$

και, έτσι, μια συνθήκη επανακανονικοποίησης είναι η

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi^{L,RI'}(a\bar{\mu}) Z_V^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \Sigma_V^{(1)}(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \quad (6.16)$$

Άλλη μια περίπτωση διγραμμικού τελεστή που θα εξεταστεί είναι αυτός του αξονικού διανύσματος (ή ψευδο-διανύσματος). Για αυτόν τον τελεστή ισχύει ότι  $\Gamma = \gamma^5 \gamma^\mu$  ενώ τα πινακοστοιχεία του έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \langle \psi (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi) \bar{\psi} \rangle_{(\text{amp.})} &= \gamma_5 \gamma_\mu \Sigma_A^{(1)}(aq) + \gamma_5 \frac{q_\mu \not{q}}{q^2} \Sigma_A^{(2)}(aq) \\ &= \gamma_5 \gamma_\mu (1 + \mathcal{O}(g_0^2)) + \gamma_5 \frac{q_\mu \not{q}}{q^2} (\mathcal{O}(g_0^2)) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ο τελεστής αυτός επανακανονικοποιείται μέσω της συνθήκης

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi^{L,RI'}(a\bar{\mu}) Z_A^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \Sigma_A^{(1)}(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \quad (6.18)$$

Η τελευταία περίπτωση διγραμμικού τελεστή που θα εξεταστεί είναι αυτή του αντισυμμετρικού τανυστή, όπου  $\Gamma = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ , περίπτωση για την οποία τα πινακοστοιχεία θα δίνονται από μια σχέση της μορφής

$$\begin{aligned} \langle \psi (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi) \bar{\psi} \rangle_{(\text{amp.})} &= \sigma_{\mu\nu} \Sigma_T^{(1)}(aq) + \frac{(\gamma_\mu q_\nu - \gamma_\nu q_\mu) \not{q}}{q^2} \Sigma_T^{(2)}(aq) \\ &= \sigma_{\mu\nu} (1 + \mathcal{O}(g_0^2)) + \frac{(\gamma_\mu q_\nu - \gamma_\nu q_\mu) \not{q}}{q^2} (0) \end{aligned} \quad (6.19)$$

ενώ η συνθήκη επανακανονικοποίησης θα είναι

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi^{L,RI'}(a\bar{\mu}) Z_T^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \Sigma_T^{(1)}(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \quad (6.20)$$

Μέρος ΙΙ

Υπολογισμοί

## Κεφάλαιο 7

# Φερμιονικοί τελεστές με ή χωρίς αλλαγή γεύσης

### 7.1 Εισαγωγή

Η μελέτη της διαφοράς μεταξύ χβαντικών τελεστών που επιτρέπουν ή όχι αλλαγή της γεύσης των quarks παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον από θεωρητικής άποψης, αφού μπορεί να δώσει εξήγηση σε ένα σύνολο πειραματικών παρατηρήσεων. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου φαινομένου είναι η σημαντικά μεγαλύτερη μάζα του ψευδο-βαθμωτού μεσονίου  $\eta'$  σε σχέση με τα άλλα οκτώ ψευδο-βαθμωτά μεσόνια ( $\pi^\pm$ ,  $\pi^0$ ,  $K^\pm$ ,  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$  και  $\eta$ ) που μπορούν να κατασκευαστούν από τις τρεις ελαφρύτερες γεύσεις quark.

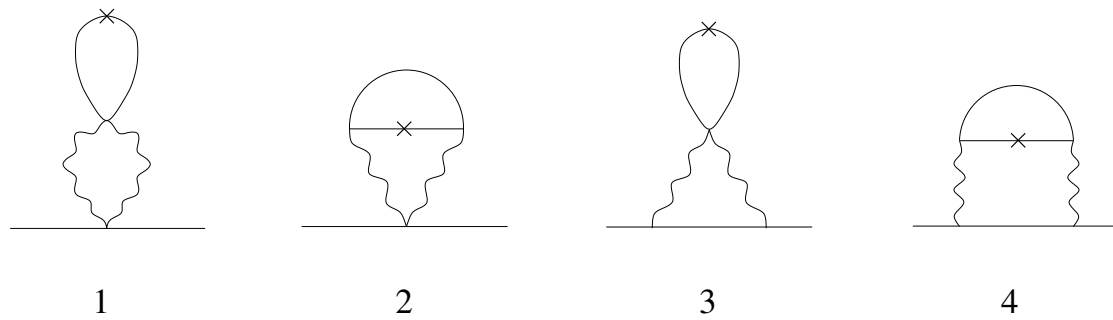
Αν και τα καόνια και το  $\eta$  μεσόνιο έχουν συγκριτικά μεγαλύτερες μάζες από τα πιόνια, η διαφορά αυτή μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι περιλαμβάνουν συνεισφορές από το strange quark το οποίο είναι όντως βαρύτερο από τα up και down. Το γεγονός αυτό όμως, δεν μπορεί να εξηγήσει την ακόμα μεγαλύτερη μάζα του  $\eta'$  μεσονίου, το οποίο έχει σχεδόν δύο φορές μεγαλύτερη μάζα από το αμέσως ελαφρύτερο  $\eta$ . Η διαφορά αυτή αποδίδεται στο γεγονός ότι το σωματίδιο αυτό είναι μονήρες (singlet) ως προς τη γεύση [8], σε αντίθεση με τα άλλα οκτώ που αποτελούν μια οκταπλέτα ψευδο-μποζονίων Goldstone που προκύπτουν κατά το αυθόρμητο σπάσιμο της (μη ακριβούς) συμμετρίας της χβαντικής χρωμοδυναμικής κάτω από ένα  $SU(3)$  μετασχηματισμό ως προς τη γεύση.

Έχοντας τα πιο πάνω σαν κίνητρο, σκοπός αυτής της εργασίας ήταν να υπολογιστεί η διαφορά ανάμεσα στις συναρτήσεις συσχέτισης των διγραμμικών τελεστών που επιτρέπουν ή όχι αλλαγή της γεύσης καθώς και η διαφορά στην επανακανονικοποίησή τους. Ο υπολο-

γισμός αυτός εκτελέστηκε μέχρι και τη δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών και σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά τα βήματα που ακολουθήθηκαν.

## 7.2 Συνεισφορές στον υπολογισμό

Λαμβάνοντας υπόψη συνεισφορές μέχρι τη δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών (όροι μέχρι τάξης  $\mathcal{O}(g_0^4)$  ή διαγράμματα Feynman με το πολύ δύο βρόχους), γίνεται κατανοητό ότι υπάρχουν ακριβώς τέσσερα διαγράμματα τα οποία δίνουν επιπλέον συνεισφορές στις συναρτήσεις Green της μορφής  $\langle \psi \Gamma \bar{\psi} \rangle$  αν ο αντίστοιχος τελεστής δεν αλλάζει τη γεύση των quarks. Τα τέσσερα αυτά διαγράμματα φαίνονται στο Σχήμα 7.1. Οποιοδήποτε άλλο διάγραμμα που περιλαμβάνει μέχρι και δύο βρόχους δίνει ακριβώς την ίδια συνεισφορά για τους μονήρεις και τους μη μονήρεις ως προς τη γεύση τελεστές. Αντίθετα, π φερμιονικός βρόχος που υπάρχει σε αυτά τα τέσσερα διαγράμματα δίνει μη μηδενικό αποτέλεσμα μόνο αν ο τελεστής δεν αλλάζει τη γεύση του φερμιονίου.



Σχήμα 7.1: Τα τέσσερα διαγράμματα που δίνουν επιπλέον συνεισφορά στις συναρτήσεις Green που δεν επιτρέπουν την αλλαγή γεύσης. Η ευθείες γραμμές αναπαριστούν quarks, οι κυματιστές γραμμές αναπαριστούν γκλουόνια ενώ ο σταυρός αναπαριστά τον τελεστή  $\Gamma$ .

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι, από τα τέσσερα πιο πάνω διαγράμματα, μόνο το διάγραμμα 4 υπάρχει στο συνεχές ενώ τα διαγράμματα 1, 2 και 3 υπάρχουν μόνο στο πλέγμα αφού περιέχουν μία ή περισσότερες κορυφές φερμιονίου, αντι-φερμιονίου και δύο γκλουονίων. Παρ' όλα αυτά, κανένα από τα πιο πάνω δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί μεμονωμένα αφού τότε θα προέκυπταν ανεπιθύμητοι, μη επανακανονικοποιήσιμοι υπέρυθροι απειρισμοί. Για να αποφευχθεί αυτό κανείς πρέπει να υπολογίσει τη συνολική συνεισφορά από τα ζεύγη διαγραμμάτων 1-2 και 3-4.

### 7.3 Διαδικασία υπολογισμού

Το πρώτο βήμα για την υλοποίηση του συγκεκριμένου υπολογισμού είναι το να βρεθούν οι διάφορες κορυφές που εμπλέκονται. Ο υπολογισμός τους γίνεται αναπτύσσοντας τη δράση της QCD, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 4 λαμβάνοντας υπόψη και τις διορθώσεις του Κεφαλαίου 5, ως προς τις δυνάμεις των πεδίων της. Κάθε όρος ο οποίος προκύπτει από το πιο πάνω ανάπτυγμα (στο χώρο των ορμών) και εμπλέκει περισσότερα από δύο πεδία αποτελεί την αντίστοιχη κορυφή. Στα πλαίσια των υπολογισμών αυτής της εργασίας χρειάστηκαν οι κορυφές που εμπλέκουν φερμιόνιο, αντι-φερμιόνιο και ένα ή δύο γκλουόνια. Οι εκφράσεις για αυτές τις κορυφές λαμβάνοντας υπόψη τη βελτιωμένη δράση SLiNC είναι πολύ μεγάλες σε έκταση και για αυτόν το λόγο δεν καταγράφονται.

Το επόμενο βήμα που πρέπει να γίνει αφορά τον υπολογισμό μια ενεργού κορυφής, η οποία αποτελεί το άθροισμα (λαμβάνοντας υπόψη τους κατάλληλους συνδυαστικούς συντελεστές) των κλειστών φερμιονικών βρόχων που αποτελούν το άνω μέρος των διαγραμμάτων 1 και 2 (ή όμοια 3 και 4). Αυτό γίνεται ώστε να συνυπολογιστεί η συνεισφορά κάθε ζεύγους διαγραμμάτων και, όπως προαναφέρθηκε, να αποφευχθούν ανεπιθύμητοι απειρισμοί. Για τον υπολογισμό του βρόχου που αντιστοιχεί στο άνω μέρος των διαγραμμάτων 1 και 3 έγινε συστολή των φερμιονίων της κορυφής φερμιονίου, αντι-φερμιονίου και δύο γκλουονίων με αυτά της τετριμμένης κορυφής  $\bar{\psi}\Gamma\psi$ . Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του βρόχου που αντιστοιχεί στο άνω μέρος των διαγραμμάτων 2 και 4, έγινε συστολή της κορυφής  $\bar{\psi}\Gamma\psi$  με δύο κορυφές φερμιονίου, αντι-φερμιονίου και ενός γκλουονίου.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθεί ένα προκαταρκτικό αποτέλεσμα: Μετά την πρόσθεση των δύο πιο πάνω συνεισφορών, προέκυψε ότι η ενεργός κορυφή έχει μηδενική τιμή αν ο πίνακας  $\Gamma$  είναι ο ψευδοβαθμωτός  $\gamma_5$ , ο διανυσματικός  $\gamma_\mu$  ή ο τανυστικός  $\sigma_{\mu\nu}$ . Αυτό σημαίνει ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις Green που δεν επιτρέπουν αλλαγή της γεύσης των quarks συμπίπτουν με εκείνες που την επιτρέπουν λαμβάνοντας υπόψη όρους μέχρι τάξης  $\mathcal{O}(g_0^4)$ .

Για το επόμενο βήμα του υπολογισμού πρέπει να γίνει συστολή της ενεργού κορυφής που υπολογίστηκε πιο πριν με άλλη μια κορυφή quark, antiquark και δύο γκλουονίων ώστε να υπολογιστεί τελικά η συνεισφορά των διαγραμμάτων 1 και 2. Εδώ πρέπει να ειπωθεί ότι τα συγκεκριμένα διαγράμματα έδωσαν μηδενική συνεισφορά στην περίπτωση του ψευδοδιανυσματικού πίνακα  $\gamma_5\gamma_\mu$ . Επίσης, για τη συνεισφορά των διαγραμμάτων 3 και 4 πρέπει να γίνει συστολή της ενεργού κορυφής με δύο κορυφές quark, anti-quark και ενός γκλουονίου. Και στις δύο πιο πάνω περιπτώσεις, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη συστολή



περιέχουν ολοκληρώματα ως προς τις εσωτερικές ορμές των διαγραμμάτων. Τέτοια ολοκληρώματα υπολογίζονται χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους, πέραν κάποιων περιπτώσεων αποκλινόντων ολοκληρωμάτων (στη συνεισφορά από τα διαγράμματα 3 και 4) που απαιτούσαν ιδιαίτερη μεταχείριση (αποτελέσματα τέτοιων ολοκληρωμάτων δίνονται στο [9]). Μετά την ολοκλήρωση, οι συναρτήσεις Green εξαρτώνται τελικά από την εξωτερική ορμή των quarks και τις παραμέτρους τις δράσεις.

## 7.4 Υπολογισμός των συναρτήσεων επανακανονικοποίησης

Έχοντας υπολογίσει τις γυμνές συναρτήσεις Green στο προηγούμενο βήμα, ο υπολογισμός των συναρτήσεων επανακανονικοποίησης  $Z_\Gamma$  είναι απλός. Συγκεκριμένα, αυτό που έπρεπε να υπολογιστεί ήταν η ποσότητα  $Z_\Gamma^{(\text{singlet})} - Z_\Gamma^{(\text{non-singlet})}$ , όπου  $Z_\Gamma^{(\text{singlet})}$  και  $Z_\Gamma^{(\text{non-singlet})}$  είναι η συνάρτηση επανακανονικοποίησης των μονήρων και μη μονήρων ως προς τη γεύση τελεστών, αντίστοιχα. Αφετηρία για τον υπολογισμό αυτό αποτελούν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi(a\bar{\mu}) Z_\Gamma^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) \Sigma_\Gamma^{(\text{singlet})}(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} &= 1 \\ \lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi(a\bar{\mu}) Z_\Gamma^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu}) \Sigma_\Gamma^{(\text{non-singlet})}(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} &= 1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi(a\bar{\mu}) \left( Z_\Gamma^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) \Sigma_\Gamma^{(\text{singlet})}(aq) \right. \right. \\ \left. \left. - Z_\Gamma^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu}) \Sigma_\Gamma^{(\text{non-singlet})}(aq) \right) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Αναπτύσσοντας τα  $Z_\psi$ ,  $Z_\Gamma$  και  $\Sigma_\Gamma$  στις πιο πάνω σχέσεις σαν δυναμοσειρές του  $g_0$  και διαπιστώνοντας ότι οι μονήρεις και οι μη μονήρεις ποσότητες συμπίπτουν μέχρι και για όρους τάξης  $\mathcal{O}(g_0^2)$  κανείς βρίσκει τελικά ότι

$$Z_\Gamma^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) - Z_\Gamma^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu}) = - \left[ \Sigma_\Gamma^{(\text{singlet})}(aq) - \Sigma_\Gamma^{(\text{non-singlet})}(aq) \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} + \mathcal{O}(g_0^6) \quad (7.3)$$

όπου ο όρος μέσα στις αγκύλες στο δεξί μέρος της πιο πάνω εξίσωσης είναι ακριβώς η συνεισφορά των διαγραμμάτων 1, 2, 3, και 4 που υπολογίσαμε πιο πάνω.

## Κεφάλαιο 8

# Αποτελέσματα υπολογισμών

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα των υπολογισμών που πραγματοποιήθηκαν.

Όπως προαναφέρθηκε, οι μονήρεις ως προς τη γέυση συναρτήσεις Green για τον ψευδοβαθμωτό, το διανυσματικό και τον τανυστικό τελεστή συμπίπτουν με τις αντίστοιχες των μη μονήρων λαμβάνοντας υπόψη μέχρι και όρους τάξης  $\mathcal{O}(g_0^4)$ . Έτσι,

$$\Sigma_P^{(\text{singlet})}(aq) - \Sigma_P^{(\text{non-singlet})}(aq) = \mathcal{O}(g_0^6) \quad (8.1)$$

$$\Sigma_V^{(\text{singlet})}(aq) - \Sigma_V^{(\text{non-singlet})}(aq) = \mathcal{O}(g_0^6) \quad (8.2)$$

$$\Sigma_T^{(\text{singlet})}(aq) - \Sigma_T^{(\text{non-singlet})}(aq) = \mathcal{O}(g_0^6) \quad (8.3)$$

Για το βαθμωτό τελεστή προέκυψε ότι

$$\begin{aligned} \Sigma_S^{(\text{singlet})}(aq) - \Sigma_S^{(\text{non-singlet})}(aq) &= \frac{g_0^4}{(16\pi^2)^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} N_f \delta_{\alpha_1\alpha_2} \mathbb{1} (v_1^S + v_2^S c_{SW} + v_3^S c_{SW}^2 \\ &+ v_4^S c_{SW}^3 + v_5^S c_{SW}^4 + v_6^S \omega + v_7^S c_{SW} \omega + v_8^S c_{SW}^2 \omega + v_9^S c_{SW}^3 \omega + v_{10}^S \omega^2 \\ &+ v_{11}^S c_{SW} \omega^2 + v_{12}^S c_{SW}^2 \omega^2 + v_{13}^S \omega^3 + v_{14}^S c_{SW} \omega^3 + v_{15}^S \omega^4) + \mathcal{O}(g_0^6) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Επίσης, για τον ψευδο-διανυσματικό τελεστή προέκυψε ότι

$$\begin{aligned}
 \Sigma_A^{(\text{singlet})}(aq) - \Sigma_A^{(\text{non-singlet})}(aq) &= \frac{g_0^4}{(16\pi^2)^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} N_f \delta_{\alpha_1\alpha_2} \gamma_5 \gamma_\mu (v_1^A + v_2^A c_{SW} + v_3^A c_{SW}^2 \\
 &+ v_4^A c_{SW}^3 + v_5^A c_{SW}^4 + v_6^A \omega + v_7^A c_{SW} \omega + v_8^A c_{SW}^2 \omega + v_9^A c_{SW}^3 \omega + v_{10}^A \omega^2 \\
 &+ v_{11}^A c_{SW} \omega^2 + v_{12}^A c_{SW}^2 \omega^2 + v_{13}^A \omega^3 + v_{14}^A c_{SW} \omega^3 + v_{15}^A \omega^4 + 6 \ln(a^2 q^2)) \\
 &- \frac{4g_0^4}{(16\pi^2)^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \delta_{\alpha_1\alpha_2} \gamma_5 \frac{\not{q}\mu}{q^2} + \mathcal{O}(g_0^6)
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Στις πιο πάνω σχέσεις  $N_c$  είναι ο αριθμός των χρωμάτων των quarks,  $N_f$  ο αριθμός των γεύσεων των quarks,  $c_{SW}$  η παράμετρος της δράσης Clover και  $\omega$  η παράμετρος της δράσης SLiNC. Η παράμετρος Wilson  $r$  δεν εμφανίζεται στα αποτελέσματα λόγω του ότι αντικαταστάθηκε με τη μονάδα. Τέλος, οι τιμές των αριθμητικών συντελεστών  $v_i^{S,A}$  υπολογίστηκαν ξεχωριστά για κάθε μια από τις δράσεις τύπου Symanzik που ορίστηκαν στην Κεφάλαιο 5. Οι υπολογισμένες τιμές παρατίθενται στους παρακάτω πίνακες.

|            | Δράση Wilson | Δράση TL Symanzik | Δράση Iwasaki | Δράση DBW2  |
|------------|--------------|-------------------|---------------|-------------|
| $v_1^S$    | 107.76(2)    | 76.29(1)          | 42.973(7)     | 17.031(5)   |
| $v_2^S$    | -82.27(1)    | -69.01(1)         | -49.356(8)    | -25.620(7)  |
| $v_3^S$    | 29.730(2)    | 26.178(1)         | 20.312(3)     | 11.825(3)   |
| $v_4^S$    | -3.4399(7)   | -2.9533(5)        | -2.2166(3)    | -1.2488(5)  |
| $v_5^S$    | -2.2750(4)   | -1.6403(3)        | -0.8547(2)    | -0.22630(6) |
| $v_6^S$    | -1854.4(2)   | -1107.0(1)        | -444.69(4)    | -85.808(5)  |
| $v_7^S$    | 506.26(5)    | 364.01(3)         | 192.35(1)     | 54.210(4)   |
| $v_8^S$    | -95.42(2)    | -70.94(1)         | -40.162(6)    | -13.003(2)  |
| $v_9^S$    | 7.494(1)     | 5.356(1)          | 2.8030(4)     | 0.8093(1)   |
| $v_{10}^S$ | 18317(2)     | 10081(1)          | 3511.3(4)     | 511.35(5)   |
| $v_{11}^S$ | -2061.8(2)   | -1350.7(1)        | -595.79(7)    | -117.08(1)  |
| $v_{12}^S$ | 202.75(7)    | 133.19(4)         | 59.25(2)      | 12.149(2)   |
| $v_{13}^S$ | -96390(10)   | -50300(5)         | -16185(2)     | -2097.2(2)  |
| $v_{14}^S$ | 3784.8(4)    | 2336.0(3)         | 925.6(1)      | 150.26(2)   |
| $v_{15}^S$ | 213470(20)   | 106940(10)        | 32572(3)      | 3960.4(4)   |

Πίνακας 8.1: Οι αριθμητικές παράμετροι της εξίσωσης (8.4)

|            | Δράση Wilson | Δράση TL Symanzik | Δράση Iwasaki | Δράση DBW2  |
|------------|--------------|-------------------|---------------|-------------|
| $v_1^A$    | 2.051(2)     | 3.098(3)          | 5.226(4)      | 9.75(1)     |
| $v_2^A$    | -15.033(3)   | -12.851(3)        | -9.426(3)     | -5.000(3)   |
| $v_3^A$    | -5.013(2)    | -3.361(1)         | -1.3526(7)    | 0.1040(2)   |
| $v_4^A$    | 2.1103(3)    | 1.7260(1)         | 1.1251(2)     | 0.42834(6)  |
| $v_5^A$    | 0.0434(2)    | 0.01636(1)        | -0.01074(5)   | -0.0171(2)  |
| $v_6^A$    | 43.75(1)     | 36.66(1)          | 25.827(9)     | 12.576(8)   |
| $v_7^A$    | 76.993(3)    | 57.190(3)         | 31.768(2)     | 9.550(2)    |
| $v_8^A$    | 44.260(4)    | 29.363(2)         | 12.962(1)     | 2.3370(6)   |
| $v_9^A$    | -4.4660(6)   | -3.3740(5)        | -1.8710(2)    | -0.50863(4) |
| $v_{10}^A$ | -126.45(1)   | -92.853(7)        | -50.378(1)    | -14.391(1)  |
| $v_{11}^A$ | -259.59(3)   | -175.65(2)        | -81.45(1)     | -17.159(5)  |
| $v_{12}^A$ | -107.48(1)   | -67.737(8)        | -27.500(3)    | -4.5270(5)  |
| $v_{13}^A$ | 295.76(3)    | 198.78(2)         | 90.96(1)      | 18.6645(6)  |
| $v_{14}^A$ | 400.05(5)    | 253.87(3)         | 104.74(1)     | 17.954(2)   |
| $v_{15}^A$ | -348.41(4)   | -220.12(3)        | -90.11(1)     | -15.236(2)  |

Πίνακας 8.2: Οι αριθμητικές παράμετροι της εξίσωσης (8.5)

Από τις πιο πάνω συναρτήσεις Green υπολογίστηκε, στη συνέχεια, η διαφορά στη συνάρτηση επανακανονικοποίησης ανάμεσα στο μονήρη και στο μη μονήρη τελεστή (για κάθε μια από τις 5 περιπτώσεις), όπως αυτή ορίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι, ήταν φανερό ότι η συνάρτηση επανακανονικοποίησης του μονήρους ψευδο-βαθμωτού, διανυσματικού και ταυστικού τελεστή ( $Z_P$ ,  $Z_V$  και  $Z_T$  αντίστοιχα) συμπίπτει μέχρι και για όρους τάξης  $\mathcal{O}(g_0^4)$  με αυτήν του μη μονήρους. Επίσης, η διαφορά στη συνάρτηση επανακανονικοποίησης του μονήρους και του μη μονήρους βαθμωτού τελεστή δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
Z_S^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) - Z_S^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu}) = & -\frac{g_0^4}{(16\pi^2)^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} N_f (v_1^S + v_2^S c_{SW} + v_3^S c_{SW}^2 \\
& + v_4^S c_{SW}^3 + v_5^S c_{SW}^4 + v_6^S \omega + v_7^S c_{SW} \omega + v_8^S c_{SW}^2 \omega + v_9^S c_{SW}^3 \omega + v_{10}^S \omega^2 \\
& + v_{11}^S c_{SW} \omega^2 + v_{12}^S c_{SW}^2 \omega^2 + v_{13}^S \omega^3 + v_{14}^S c_{SW} \omega^3 + v_{15}^S \omega^4) + \mathcal{O}(g_0^6)
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Τέλος, για τον ψευδο-διανυσματικό τελεστή προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 Z_A^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) - Z_A^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu}) &= -\frac{g_0^4}{(16\pi^2)^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} N_f (v_1^A + v_2^A c_{SW} + v_3^A c_{SW}^2 \\
 &+ v_4^A c_{SW}^3 + v_5^A c_{SW}^4 + v_6^A \omega + v_7^A c_{SW} \omega + v_8^A c_{SW}^2 \omega + v_9^A c_{SW}^3 \omega + v_{10}^A \omega^2 \\
 &+ v_{11}^A c_{SW} \omega^2 + v_{12}^A c_{SW}^2 \omega^2 + v_{13}^A \omega^3 + v_{14}^A c_{SW} \omega^3 + v_{15}^A \omega^4 + 6 \ln(a^2 \bar{\mu}^2)) \\
 &+ \mathcal{O}(g_0^6)
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Σε αυτό το σημείο, θα ήταν καλό να αναφερθεί και μια δεύτερη συνθήκη επανακανονικοποίησης του συγκεκριμένου τελεστή, η οποία λαμβάνει υπόψη ολόκληρη τη συνάρτηση Green, δηλαδή, και το μέρος εκείνο που πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα  $\gamma_5 \frac{\not{q}_\mu}{q^2}$ . Αυτή η συνθήκη έχει τη μορφή

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left[ Z_\psi^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \tilde{Z}_A^{L,RI'}(a\bar{\mu}) \text{Tr} \sum_\mu \frac{\gamma_\mu \gamma_5 \Sigma_A(aq)}{16} \right]_{q^2=\bar{\mu}^2} = 1 \tag{8.8}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 \Sigma_A &= \langle \bar{\psi} (\psi \gamma_5 \gamma_\mu \bar{\psi}) \psi \rangle_{(\text{amp.})} = \gamma_5 \gamma_\mu \Sigma_A^{(1)}(aq) + \gamma_5 \frac{\not{q}_\mu}{q^2} \Sigma_A^{(2)}(aq) \\
 &= \gamma_5 \gamma_\mu (1 + \mathcal{O}(g_0^2)) + \gamma_5 \frac{\not{q}_\mu}{q^2} (\mathcal{O}(g_0^2))
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Σε αυτό το πλαίσιο η συνάρτηση επανακανονικοποίησης  $\tilde{Z}$  που υπολογίζεται διαφέρει κατά μια σταθερή ποσότητα από την προηγούμενη περίπτωση  $Z$ . Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned}
 &\left[ \tilde{Z}_A^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) - \tilde{Z}_A^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu}) \right] - \left[ Z_A^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) - Z_A^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu}) \right] \\
 &= \frac{g_0^4}{(16\pi^2)^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} N_f
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

Η εναλλακτική αυτή συνθήκη επανακανονικοποίησης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για σκοπούς σύγκρισης της ποσότητας  $Z_A$  που υπολογίζεται εδώ με μη διαταρακτικούς υπολογισμούς της στα πλαίσια αριθμητικών προσομοιώσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο διαχωρισμός των αριθμητικών δεδομένων των συναρτήσεων Green  $\Sigma_A$  στις δύο δομές  $\Sigma_A^{(1)}$  και  $\Sigma_A^{(2)}$  δεν είναι εφικτός.

## Κεφάλαιο 9

# Συζήτηση αποτελεσμάτων

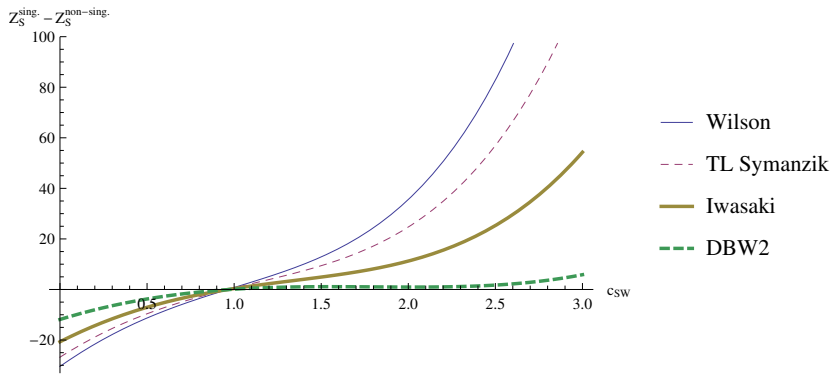
### 9.1 Χρησιμότητα των αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα, για τις συναρτήσεις επανακανονικοποίησης, που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο αναμένεται να χρησιμοποιηθούν από διάφορες διεθνείς ερευνητικές ομάδες στα πλαίσια αριθμητικών προσομοιώσεων που θα μελετούν τη φαινομενολογία της χβαντικής χρωμοδυναμικής. Συγκεκριμένα, οι ποσότητες αυτές είναι δυνατόν να φανούν χρήσιμες στα πλαίσια μελετών που εμπλέκουν μονήρεις φερμιονικούς τελεστές, όπως, για παράδειγμα, η μελέτη της μάζας του  $\eta'$  ψευδο-διανυσματικού μποζονίου. Δύο ομάδες με τις οποίες συνεργαζόμαστε για αυτόν το σκοπό είναι η QCDSF (επικεφαλής: G. Schierholz) και η ETMC (επικεφαλής: K. Jansen).

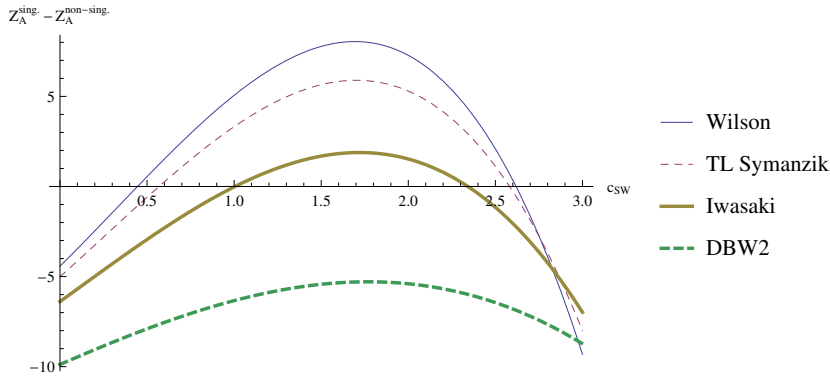
Τα αποτελέσματα, όπως παρουσιάζονται πιο πριν, είναι συναρτήσεις των παραμέτρων της δράσης  $c_{SW}$  και  $\omega$ , της κλίμακας της επανακανονικοποίησης  $\bar{\mu}$ , της σταθεράς του πλέγματος  $a$  και της γυμνής σταθεράς σύζευξης  $g_0$ . Όλες αυτές οι ποσότητες πρέπει να προσδιοριστούν πριν τη χρήση των αποτελεσμάτων σε αριθμητικές προσομοιώσεις. Για τη σταθερά  $\omega$  η ομάδα QCDSF χρησιμοποιεί την τιμή  $\omega = 0.1$  [10]. Για τη σταθερά  $c_{SW}$  η «θεωρητικά» ιδανική τιμή είναι η μονάδα. Αν ληφθούν υπόψη, όμως, και χβαντικές διορθώσεις η τιμή αυτή αλλάζει και έτσι, δεν είναι ξεκάθαρο ποια τιμή είναι καλό να χρησιμοποιηθεί. Η τιμή που χρησιμοποιεί η ομάδα QCDSF σε αυτήν την περίπτωση είναι η  $c_{SW} = 2.65$  χωρίς αυτό να είναι δεσμευτικό. Επίσης, η σταθερά του πλέγματος  $a$  επιλέγεται να είναι όσο πιο μικρή γίνεται έτσι ώστε να μην υπάρχουν σημαντικές διορθώσεις από το γεγονός ότι το μέγεθος του πλέγματος είναι πεπερασμένο. Η επιλογή του  $a$  εξαρτάται από την επιλογή της σταθεράς σύζευξης  $g_0$ , η οποία επιλέγεται τέτοια ώστε να ικανοποιείται η πιο πάνω συνθήκη. Τέλος,

όσον αφορά την κλίμακα της επανακανονικοποίησης  $\bar{\mu}$  μια βολική επιλογή είναι η  $\bar{\mu} = \frac{1}{a}$  ώστε ο λογάριθμος που εμφανίζεται στο  $Z$  να μηδενίζεται. Διαφορετικά, μπορεί να είναι  $\bar{\mu} = 2\text{GeV}$ . Η τιμή αυτή χρησιμοποιείται ευρέως σε πειραματικές και φαινομενολογικές εκτιμήσεις.

Έχοντας όλα αυτά κατά νου στα σχήματα 9.1 και 9.2 παρουσιάζονται γραφήματα των  $Z_S^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) - Z_S^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu})$  και  $Z_A^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) - Z_A^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu})$ , αντίστοιχα, σε μονάδες  $\frac{g_0^4}{(16\pi^2)^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} N_f$  για  $\omega = 0.1$ ,  $a = 1/\bar{\mu}$  και αυθαίρετο  $c_{SW}$ . Στα σχήματα αυτά παρουσιάζονται 4 διαφορετικά γραφήματα για κάθε περίπτωση, ένα για κάθε σύνολο τιμών των παραμέτρων Symanzik.



Σχήμα 9.1: Γράφηματα του  $Z_S^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) - Z_S^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu})$  σε μονάδες  $\frac{g_0^4}{(16\pi^2)^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}$  για  $\omega = 0.1$ ,  $a = 1/\bar{\mu}$  και αυθαίρετο  $c_{SW}$



Σχήμα 9.2: Γράφηματα του  $Z_A^{(\text{singlet})}(a\bar{\mu}) - Z_A^{(\text{non-singlet})}(a\bar{\mu})$  σε μονάδες  $\frac{g_0^4}{(16\pi^2)^2} \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}$  για  $\omega = 0.1$ ,  $a = 1/\bar{\mu}$  και αυθαίρετο  $c_{SW}$

## 9.2 Ορθότητα των αποτελεσμάτων

Υπάρχουν δύο βασικά στοιχεία, τα οποία οδηγούν με μεγάλη ασφάλεια στο συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα που εξάχθηκαν δεν επηρεάστηκαν σημαντικά από κάποιο σφάλμα στον υπολογισμό.

Το πρώτο από αυτά είναι το γεγονός ότι οι συναρτήσεις επανακανονικοποίησης των φερμιονικών τελεστών είναι ανεξάρτητες από την επιλογή βαθμίδας. Αυτό, αν και ήταν αναμενόμενο, δεν ήταν εύκολο ναδειχτεί ότι ισχύει πριν εκτελεστεί η αριθμητική ολοκλήρωση αφού οι εκφράσεις για τις συναρτήσεις Green περιείχαν και όρους ο οποίοι είχαν εξάρτηση από την παράμετρο βαθμίδας. Οι όροι αυτοί δεν ήταν δυνατόν να απαλειφθούν αλγεβρικά λόγω της πολυπλοκότητας των εκφράσεων. Αντίθετα, μετά την αριθμητική ολοκλήρωση, βρέθηκε ότι οι συγκεκριμένοι όροι έδιναν μηδενική συνεισφορά στην τελική έκφραση (στα πλαίσια πάντα της στατιστικής αβεβαιότητας των αποτελεσμάτων).

Το δεύτερο στοιχείο που συνηγορεί υπέρ της ορθότητας του υπολογισμού είναι το γεγονός ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν συμφωνούν με αποτελέσματα προηγούμενων αντίστοιχων υπολογισμών ([11] και [12]) που αφορούσαν απλούστερες δράσεις. Συγκεκριμένα, σε αυτούς τους υπολογισμούς η δράση που χρησιμοποιήθηκε ήταν η δράση Wilson με την προσθήκη του όρου clover. Έτσι, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας που αφορούν τη δράση Wilson έπρεπε να ταυτίζονται με τα προηγούμενα στο όριο όπου  $\omega \rightarrow 0$  (δεν εφαρμόζεται η βελτίωση της δράσης SLiNC). Όντως, υπήρξε ταύτιση των αντίστοιχων αριθμητικών παραμέτρων στα πλαίσια της στατιστικής αβεβαιότητας των υπολογισμών.



## Μέρος III

# Παραρτήματα

## Παράρτημα Α΄

# Μεταβλητές Grassmann

### Α΄.1 Ορισμός

Στην κβαντική θεωρία πεδίων οι φερμιονικοί βαθμοί ελευθερίας αναπαριστώνται από πεδία τα οποία αντιμετωπίζονται μεταξύ τους στο όριο όπου  $\hbar \rightarrow 0$ . Έτσι, σε αυτό το όριο, οι τελεστές αυτοί γίνονται στοιχεία μιας άλγεβρας Grassmann. Τα στοιχεία ενός συνόλου  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$  αποτελούν τους γεννήτορες μιας άλγεβρας Grassmann αν αντιμετωπίζονται μεταξύ τους [13], δηλαδή αν ικανοποιούν τη σχέση

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A}'1)$$

Από την πιο πάνω εξίσωση συνεπάγεται επίσης ότι

$$\eta_i^2 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A}'2)$$

Ένα γενικό στοιχείο της άλγεβρας αυτής γράφεται πάντα σαν άθροισμα γινομένων των γεννητόρων. Λόγω όμως της τελευταίας σχέσης ο κάθε όρος αυτού του αθροίσματος δεν είναι δυνατόν να περιέχει περισσότερο από μία φορά κάθε ένα από τους γεννήτορες και συνεπώς το άθροισμα περιέχει μόνο ένα πεπερασμένο αριθμό όρων. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση  $f(\eta)$  των γεννητόρων γράφεται σαν

$$f(\eta) = f_0 + \sum_i f_i \eta_i + \sum_{i,j>i} f_{ij} \eta_i \eta_j + \dots + f_{12\dots N} \eta_1 \eta_2 \dots \eta_N \quad (\text{A}'3)$$

## Α΄.2 Ομοτιμία Grassmann

Σε μια άλγεβρα Grassmann  $A$  είναι δυνατόν να οριστεί ένας τελεστής ομοτιμίας  $P$  τέτοιος ώστε

$$P(\eta_i) = -\eta_i \quad \forall i \quad (\text{Α΄.4})$$

Τότε, όταν ο μετασχηματισμός αυτός δράσει σε ένα μονώνυμο βαθμού  $p$  θα ισχύει ότι

$$P(\eta_{i_1}\eta_{i_2}\dots\eta_{i_p}) = (-1)^p \eta_{i_1}\eta_{i_2}\dots\eta_{i_p} \quad (\text{Α΄.5})$$

Έτσι, ο τελεστής  $P$  χωρίζει την άλγεβρα σε δύο ιδιοχώρους  $A^+$  και  $A^-$  για τους οποίους ισχύει ότι

$$P(A^\pm) = \pm A^\pm \quad (\text{Α΄.6})$$

## Α΄.3 Παραγωγήσιση ως προς μεταβλητές Grassmann

Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω είναι δυνατόν να οριστεί ένας τελεστής παραγωγίσισης  $D$  που δρα στην άλγεβρα  $A$ . Ο τελεστής αυτός πρέπει να είναι μια γραμμική απεικόνιση της άλγεβρας στον εαυτό της:

$$D(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 D(A_1) + \lambda_2 D(A_2) \quad (\text{Α΄.7})$$

όπου  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  είναι οποιοιδήποτε μιγαδικοί αριθμοί και να ικανοποιεί τη σχέση

$$D(A_1 A_2) = P(A_1) D(A_2) + D(A_1) A_2 \quad (\text{Α΄.8})$$

Η τελευταία σχέση διαφέρει από το συνήθη ορισμό της παραγωγίσισης για μεταβλητές που μετατίθενται έτσι ώστε ο τελεστής  $D$  να αντιμετωπίζεται με τον τελεστή κατοπτρισμού  $P$ . Έτσι, η εικόνα του χώρου  $A^\pm$  μέσω του  $D$  θα ανήκει στον  $A^\mp$ .

Από τη στιγμή που ένας διαφορικός τελεστής ικανοποιεί τις πιο πάνω συνθήκες ορίζεται πλήρως από τη δράση του πάνω στους γεννήτορες. Επίσης, από τη στιγμή που ένας τελεστής ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες τότε και αν πολλαπλασιαστεί από αριστερά με κάποιο στοιχείο του  $A^+$ , τότε και το γινόμενο που προκύπτει τις ικανοποιεί. Έτσι, κάθε διαφορικός τελεστής μπορεί να γραφεί στη βάση των τελεστών  $\partial/\partial\eta_i$  οι οποίοι ορίζονται από τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial\eta_i}\eta_j = \delta_{ij} \quad (\text{Α΄.9})$$

πολλαπλασιασμένων από αριστερά με άρτιο αριθμό γεννητόρων.

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφερθεί μια πολύ σημαντική ιδιότητα των τελεστών παραγωγίσης, η οποία πηγάζει από τα πιο πάνω: Όταν ο ίδιος τελεστής δράσει περισσότερο από μια φορά σε μια έκφραση δίνει πάντα μηδενικό αποτέλεσμα. Υπό αυτήν την έννοια, οι τελεστές αυτοί καλούνται *μηδενοδύναμοι*.

Σαν καταληκτικό σχόλιο, αξίζει να αναφερθεί το γεγονός ότι μέσα από την πιο πάνω διαδικασία ορίστηκε μια δεξιά παράγωγος, με την έννοια ότι η δράση της είναι ισοδύναμη με το να έρθει ο γεννήτορας ως προς τον οποίο γίνεται η παραγωγή στο αριστερό μέρος της έκφρασης χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μετάθεσης και στη συνέχεια να απαλειφθεί. Με την ίδια λογική, θα μπορούσε να οριστεί η αριστερή παράγωγος αν αντί των εξισώσεων (Α΄.7) και (Α΄.8) χρησιμοποιούνταν οι παρακάτω:

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \overleftarrow{D} = \lambda_1 (A_1 \overleftarrow{D}) + \lambda_2 (A_2 \overleftarrow{D}) \quad (\text{Α΄.10})$$

και

$$(A_1 A_2) \overleftarrow{D} = A_1 (A_2 \overleftarrow{D}) + (A_1 \overleftarrow{D}) P(A_2) \quad (\text{Α΄.11})$$

#### Α΄.4 Ολοκλήρωση ως προς μεταβλητές Grassmann

Στο υποκεφάλαιο αυτό θα οριστεί ένας τελεστής ολοκλήρωσης  $I$  σε σχέση με ένα δεδομένο τελεστή παραγωγίσης  $D$  ο οποίος γενικεύει τη δράση του ορισμένου ολοκληρώματος στις μεταβλητές Grassmann. Ο τελεστής αυτός πρέπει να είναι γραμμικός ως προς την άλγεβρα  $A$ :

$$I(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 I(A_1) + \lambda_2 I(A_2) \quad (\text{Α΄.12})$$

και να ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$ID = 0 \quad (\text{Α΄.13})$$

$$DI = 0 \quad (\text{Α΄.14})$$

και

$$D(A) = 0 \Rightarrow I(BA) = I(B) A \quad (\text{Α΄.15})$$

Η πρώτη από τις πιο πάνω ιδιότητες αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα μιας ολικής παραγωγού είναι μηδέν (αν δεν υπάρχουν συνοριακοί όροι). Η δεύτερη ιδιότητα προέρχεται από το γεγονός ότι αν μια έκφραση ολοκληρωθεί ως προς μια μεταβλητή τότε δεν εξαρτάται από αυτήν. Η τελευταία ιδιότητα λέει ότι αν ένας παράγοντας δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης τότε μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα.

Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι ο τελεστής παραγωγισής είναι μηδενοδύναμος, είναι φανερό ότι οι πιο πάνω ιδιότητες ικανοποιούνται αν ο τελεστής ολοκλήρωσης  $I$  ταυτίζεται με τον  $D$ . Η πιο πάνω παρατήρηση, οδηγεί στους παρακάτω κανόνες ολοκλήρωσης:

$$\int d\eta_i = 0 \quad (\text{A}'16)$$

και

$$\int d\eta_i \eta_i = 1 \quad (\text{A}'17)$$

Οι κανόνες αυτοί είναι αρκετοί για τον υπολογισμό οποιουδήποτε ολοκληρώματος εμπλέκει μεταβλητές Grassmann αφού όλες οι εκφράσεις που εμπλέκουν αυτές τις μεταβλητές δεν περιέχουν ποτέ περισσότερες από μια δυνάμεις κάθε γεννήτορα.

#### A'.4.1 Γκαουσιανά ολοκληρώματα

Η γενική μορφή ολοκληρωμάτων αυτής της μορφής δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} I(M) &= \int d\eta_1 d\bar{\eta}_1 d\eta_2 d\bar{\eta}_2 \dots d\eta_N d\bar{\eta}_N e^{\sum_{i,j} \bar{\eta}_i M_{ij} \eta_j} \\ &= \int d\eta_1 d\bar{\eta}_1 d\eta_2 d\bar{\eta}_2 \dots d\eta_N d\bar{\eta}_N \prod_{i,j} e^{\bar{\eta}_i M_{ij} \eta_j} \end{aligned} \quad (\text{A}'18)$$

όπου  $\eta_i$  και  $\bar{\eta}_i$  είναι δύο σύνολα μεταβλητών Grassmann που αντιμετατίθενται μεταξύ τους. Λόγω του ότι  $\eta_i^2 = 0$  μόνο οι πρώτοι δύο όροι του αναπτύγματος του πιο πάνω εκθετικού θα συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα, έτσι που

$$I(M) = \int d\eta_1 d\bar{\eta}_1 d\eta_2 d\bar{\eta}_2 \dots d\eta_N d\bar{\eta}_N \prod_{i,j} (1 + \bar{\eta}_i M_{ij} \eta_j) \quad (\text{A}'19)$$

Επίσης, λόγω των πιο πάνω κανόνων ολοκλήρωσης το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος θα είναι ο συντελεστής του μονωνύμου που περιλαμβάνει όλους τους γεννήτορες. Έτσι, αναπτύσσοντας το πιο πάνω γινόμενο, κανείς βρίσκει ότι

$$I(M) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_N} \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_N} M_{1j_1} M_{2j_2} \dots M_{Nj_N} = \det M \quad (\text{A}'20)$$

Μια άλλη χρήσιμη μορφή ολοκληρωμάτων είναι η ακόλουθη

$$I_{i_1 i'_1 i_2 i'_2 \dots i_N i'_N}(M) = \int d\eta_1 d\bar{\eta}_1 d\eta_2 d\bar{\eta}_2 \dots d\eta_N d\bar{\eta}_N \eta_{i_1} \bar{\eta}_{i'_1} \eta_{i_2} \bar{\eta}_{i'_2} \dots \eta_{i_N} \bar{\eta}_{i'_N} e^{\sum_{i,j} \bar{\eta}_i M_{ij} \eta_j} \quad (\text{A}'21)$$

Ολοκληρώματα αυτής της μορφής μπορούν να υπολογιστούν σε σχέση με τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\begin{aligned} Z(\rho, \bar{\rho}) &= \int d\eta_1 d\bar{\eta}_1 d\eta_2 d\bar{\eta}_2 \dots d\eta_N d\bar{\eta}_N e^{\sum_{i,j} \bar{\eta}_i M_{ij} \eta_j + \sum_i (\bar{\eta}_i \rho_i + \bar{\rho}_i \eta_i)} \\ &= \det M e^{-\sum_{i,j} \bar{\rho}_i (M^{-1})_{ij} \rho_j} \end{aligned} \quad (\text{A'.22})$$

οπότεν και προκύπτει ότι

$$I_{i_1 i'_1 i_2 i'_2 \dots i_l i'_l}(M) = \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{i'_1}} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{i'_2}} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{i'_l}} Z(\rho, \rho_i) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_{i_1}} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_{i_2}} \dots \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_{i_l}} \right]_{\rho = \bar{\rho} = 0} \quad (\text{A'.23})$$

Εκτελώντας την παραγωγή, τελικά, προκύπτει ότι

$$I_{i_1 i'_1 i_2 i'_2 \dots i_l i'_l}(M) = \det M \sum_{\substack{\text{όλες οι μεταθέσεις} \\ P \text{ των } i}} \varepsilon(P) (M^{-1})_{i_{P_1} i'_1} (M^{-1})_{i_{P_2} i'_2} \dots (M^{-1})_{i_{P_l} i'_l} \quad (\text{A'.24})$$

όπου  $\varepsilon(P)$  είναι το πρόσημο που χαρακτηρίζει τη μετάθεση.

# Βιβλιογραφία

- [1] M. E. Peskin and D. V. Schröder, *Introduction to quantum field theory*. Perseus Books, 1995.
- [2] M. Kaku, *Quantum field theory: a modern introduction*. Oxford University Press, 1993.
- [3] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw Hill, 1965.
- [4] H. J. Rothe, *Lattice gauge theories: an introduction*, vol. 74 of *World scientific lecture notes in physics*. World Scientific Publishing, 2005.
- [5] R. Horsley, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz, and A. Schiller, “One-loop renormalisation of quark bilinears for overlap fermions with improved gauge actions,” *Nucl. Phys.*, vol. B693, pp. 3–35, 2004.
- [6] C. Morningstar and M. J. Peardon, “Analytic smearing of SU(3) link variables in lattice QCD,” *Phys.Rev.*, vol. D69, p. 054501, 2004.
- [7] N. Cundy, M. Gockeler, R. Horsley, T. Kaltenbrunner, A. Kennedy, *et al.*, “Non-perturbative improvement of stout-smearred three flavour clover fermions,” *Phys.Rev.*, vol. D79, p. 094507, 2009.
- [8] K. Ottnad *et al.*, “ $\eta$  and  $\eta'$  mesons from  $N_f = 2 + 1 + 1$  twisted mass lattice QCD,” *JHEP*, vol. 1211, p. 048, 2012.
- [9] M. Luscher and P. Weisz, “Computation of the relation between the bare lattice coupling and the  $\overline{\text{MS}}$  coupling in SU(N) gauge theories to two loops,” *Nucl. Phys.*, vol. B452, pp. 234–260, 1995.

- [10] R. Horsley, H. Perlt, P. Rakow, G. Schierholz, and A. Schiller, “Perturbative determination of  $c(\text{SW})$  for plaquette and Symanzik gauge action and stout link clover fermions,” *Phys. Rev.*, vol. D78, p. 054504, 2008.
- [11] A. Skouroupathis and H. Panagopoulos, “Two-loop renormalization of scalar and pseudoscalar fermion bilinears on the lattice,” *Phys. Rev.*, vol. D76, p. 094514, 2007.
- [12] A. Skouroupathis and H. Panagopoulos, “Two-loop renormalization of vector, axial-vector and tensor fermion bilinears on the lattice,” *Phys. Rev.*, vol. D79, p. 094508, 2009.
- [13] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*. Oxford University Press, 1989.