

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ



Διπλωματική εργασία:  
Κυματοσυνάρτηση Hartle-Hawking  
στην  $R^2$  θεωρία

Ευτύχιος Καϊμακκάμης

Επιβλέπων καθηγητής: Νικόλαος Τούμπας

Τμήμα Φυσικής  
Σχολή Θετικών και Εφαρμοσμένων Επιστημών

ΜΑΪΟΣ 2018



# Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου οι οποίοι μου συμπαροστάθηκαν κατά τα 4 έτη φοίτησής μου, καθώς και για την αμέριστη αγάπη και βοήθεια που προσέφεραν όποτε στάθηκα στην ανάγκη τους. Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον καλό μου φίλο Κύπρο Ιωάννου που αποτέλεσε εξαιρετικός ακροατής και έδειξε ενδιαφέρον παρά το χαμηλότερο του γνωστικό υπόβαθρο Φυσικής όταν χρειαζόμουν την ανταπόκρισή του.

Ακόμη θέλω να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου από όλα τα έτη με τους οποίους συναναστράφηκα και αντάλλαξα ιδέες και απορίες. Χωρίς το ενδιαφέρον τους και τις αλληλεπιδράσεις μου με αυτούς δεν θα μπορούσα να κατανοήσω και να εμπεδώσω όσα έχω καταφέρει στην διάρκεια των σπουδών μου. Ιδιαίτερες ευχαριστίες αποδίδω στους Χρίστο Λεωνίδου και Πάνο Χαραλάμπους που παρευρέθηκαν σε παρουσιάσεις μου στην προετοιμασία της διπλωματικής, αλλά και την παροχή βοήθειας και ανταλλαγής σχολίων κατά την προετοιμασία των παρουσιάσεων.

Μακράν τις μεγαλύτερες ευχαριστίες όμως κατευθύνω στον επιβλέποντα καθηγητή μου για αυτή την διπλωματική εργασία, αναπληρωτή καθηγητή δρ. Νικόλαο Τούμπα ο οποίος με υπομονή με γαλούχησε στην διαδικασία της έρευνας, κατανόησης υλικού, υπολογισμού, συγγραφής και παρουσίασης αυτού του έργου. Τα σχόλια, βοηθήματα και διορθώσεις που προσέφερε αποτέλεσαν εξαιρετικής σημασίας στην διεκπεραίωση της παρούσας εργασίας αλλά και στον γενικότερο προσανατολισμό μου για το μέλλον και γι' αυτό του είμαι ευγνώμων.



# Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	iii
Κατάλογος σχημάτων	vii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
<b>2 Χωρόχρονος de Sitter</b>	<b>3</b>
2.1 Η μετρική Friedmann-Robertson-Walker	3
2.2 Ο χωρόχρονος de Sitter	8
2.3 Διάγραμμα Penrose χωρόχρονου de Sitter	10
<b>3 Θεωρία <math>R^2</math></b>	<b>13</b>
3.1 Εξισώσεις Einstein στον κενό χώρο	13
3.2 Εξισώσεις Einstein στην παρουσία βαθμωτού πεδίου	15
3.3 Εξισώσεις Einstein της $R^2$ θεωρίας στον κενό χώρο	17
3.4 Μοντέλο Starobinsky	20
<b>4 Αντιστοιχία δράσης <math>R^2</math> με κλασσική δράση Einstein-Hilbert</b>	<b>23</b>
4.1 Αντιστοίχιση στο μοντέλο Starobinsky	26
4.2 Διακυμάνσεις γύρω από λύσεις θεωρίας $R^2$	27
4.2.1 Λύση Minkowski	27
4.2.2 Λύση καμπυλωμένου χωρόχρονου	32
4.3 Θεωρία Weyl	34
4.4 Νευτώνειο δυναμικό στο μοντέλο Starobinsky και στην $R^2$ θεωρία	35
4.4.1 Δυναμικό στο μοντέλο Starobinsky	36
4.4.2 Δυναμικό στην θεωρία $R^2$	37
<b>5 Συνοριακοί όροι</b>	<b>39</b>
5.1 Συνοριακοί όροι στη θεωρία Einstein	39
5.2 Συνοριακοί όροι για την $f(R)$ θεωρία	43
5.3 Παράδειγμα συνοριακής επιφάνειας	48
<b>6 Κυματοσυνάρτηση Hartle-Hawking</b>	<b>51</b>
6.1 Ευκλείδια συναρτησιακά ολοκληρώματα	52
6.1.1 Παράδειγμα αρμονικού ταλαντωτή	53
6.2 Ευκλείδια συναρτησιακά ολοκληρώματα για βαθμωτά πεδία	54

6.3	Υπολογισμός της κυματοσυνάρτησης Hartle-Hawking στην κλασική θεωρία βαρύτητας . . . . .	56
6.4	Υπολογισμός της κυματοσυνάρτησης στην $R^2$ θεωρία . . . . .	60
<b>A' Στοιχεία λύσης μελανών οπών Schwarzschild</b>		<b>65</b>
A.1	Συντεταγμένες Schwarzschild . . . . .	65
A.2	Μετασχηματισμός της μετρικής Schwarzschild σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων . . . . .	68
A.2.1	Συντεταγμένες Rindler . . . . .	68
A.2.2	Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres . . . . .	71
A.3	Μετρική Vaidya . . . . .	73
<b>B' Συναρτησιακά ολοκληρώματα Feynman</b>		<b>77</b>
B.1	Φορμαλισμός διαδότη . . . . .	79
B.2	Υπολογισμός διαδότη αρμονικού ταλαντωτή . . . . .	82
<b>Γ' Διαγράμματα Penrose</b>		<b>85</b>
C.1	Χωρόχρονος Minkowski . . . . .	85
C.2	Μελανή οπή Schwarzschild . . . . .	87
C.3	Μετρική Vaidya . . . . .	89
<b>Βιβλιογραφία</b>		<b>91</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Γραφική παράσταση ακτίνας του σύμπαντος συναρτήσει του χρόνου, για τις περιπτώσεις ενός κλειστού, ανοιχτού και ανοιχτού και επίπεδου υλοκρατικού Σύμπαντος.	7
2.2	Σχηματική αναπαράσταση χωρόχρονου de Sitter	8
2.3	Σχηματική αναπαράσταση χωρόχρονου de Sitter έπειτα από στροφή στον ευκλείδιο χώρο	9
2.4	Ο Ευκλείδιος χώρος de Sitter	10
2.5	Διάγραμμα Penrose για τον χωρόχρονο de Sitter	12
4.1	Ενεργό δυναμικό στο μοντέλο Starobinsky για $\lambda = \frac{1}{8}$	27
4.2	Διάγραμμα Feynman βαρυτικής αλληλεπίδρασης $\phi + \phi \rightarrow \phi + \phi$	35
4.3	Νευτώνειο δυναμικό στο μοντέλο Starobinsky για $m = \beta = G = M_P = 1$	37
4.4	Νευτώνειο δυναμικό στην θεωρία $R^2$ για $m = \beta = G = M_P = 1$	38
5.1	Η φέτα $t = t_0$ και το κάθετο διάνυσμα στην κλειστή γεωμετρία Friedmann-Robertson-Walker	49
6.1	Συναρτησιακό ολοκλήρωμα στον μισό Ευκλείδιο χώρο.	53
6.2	Διακριτοποίηση χώρου και αρχική και τελική διάταξη ενός βαθμωτού πεδίου	55
6.3	Συνοριακές συνθήκες στον μισό Ευκλείδιο χώρο	55
6.4	Λύση για $H\alpha_0 < 1$ . Το σύνορο που φράσσει τμήμα μικρότερο από ημισφαίριο.	58
6.5	Λύση για $H\alpha_0 < 1$ . Το σύνορο φράσσει τμήμα μεγαλύτερο από ημισφαίριο.	59
A.1	Διάγραμμα χωρόχρονου Minkowski και η σφήνα Rindler	70
A.2	Χωροχρονικό διάγραμμα μελανής οπής στις συντεταγμένες Kruskal-Szekeres	73
B.1	Ενδεικτικά μονοπάτια για την μετάβαση του σωματιδίου από τη θέση $q_i$ στη θέση $q_f$ σε χρονικό διάστημα $T$	81
C.1	Διάγραμμα χωρόχρονου Minkowski	86
C.2	Διάγραμμα Penrose για τον χωρόχρονο Minkowski	87
C.3	Διάγραμμα Penrose της μεγίστης γεωμετρίας Schwarzschild	88
C.4	Φωτοειδές κέλυφος ύλης που καταρρέει στον χωρόχρονο Minkowski	89
C.5	Φωτοειδές κέλυφος ύλης στη μελανή οπή Schwarzschild	89
C.6	Διάγραμμα Penrose μετρικής Vaidya	90





# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Ο πληθωρισμός αποτελεί ίσως το επικρατέστερο μοντέλο στη μοντέρνα κοσμολογία. Σύμφωνα με αυτό, το πρώιμο Σύμπαν πέρασε από μια πολύ σύντομη φάση κατά την οποία κυριαρχούσε θετική ενέργεια κενού και αρνητική πίεση, με αποτέλεσμα το Σύμπαν να διαστέλλεται εκθετικά με τον χρόνο. Μια μικροσκοπική περιοχή, με διαστάσεις της τάξης μερικών μηκών Planck, απέκτησε τεράστιο μέγεθος, αρκετά μεγάλο ώστε να εξελιχθεί στη συνέχεια και να επικαλύψει το σημερινό παρατηρήσιμο Σύμπαν [1][2]. Το μοντέλο του πληθωρισμού λύνει πολλά προβλήματα του καθιερωμένου κοσμολογικού μοντέλου της θερμής Μεγάλης Έκρηξης (Big Bang), όπως το πρόβλημα της αιτιατικότητας και του ορίζοντα, και προβλέπει το φάσμα των διακυμάνσεων στη θερμοκρασία της μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου που κατακλύζει το Σύμπαν [2].

Ένα κομψό πληθωριστικό μοντέλο, συμβατό με τα πιο πρόσφατα παρατηρησιακά δεδομένα, είναι το μοντέλο Starobinsky. Βασίζεται σε μια δράση τετραγωνικής βαρύτητας, της μορφής  $(R + R^2)$ , η οποία περιλαμβάνει έναν επιπρόσθετο όρο τετραγωνικής τάξης ως προς τη βαθμωτή καμπυλότητα [2][3]. Οι βαρυτικές εξισώσεις Einstein, που απορρέουν από τη δράση αυτή, έχουν κοσμολογικές λύσεις, κατάλληλες για την πραγματοποίηση του φαινομένου του πληθωρισμού: Το Σύμπαν αρχίζει την εξέλιξη του σε μια φάση de Sitter καταλήγοντας σταδιακά στον χωρόχρονο Minkowski.

Πράγματι, όπως θα δούμε αναλυτικότερα, η θεωρία Starobinsky είναι ισοδύναμη με μια συνήθη θεωρία βαρύτητας, στην παρουσία ενός επιπρόσθετου βαθμωτού πεδίου  $\phi$  με μη αρνητικό δυναμικό [4]:

$$V = \mu^2(1 - e^{-\alpha\phi})^2 \quad (1.1)$$

Εάν  $\phi \gg 0$ , οι εξισώσεις κίνησης επιβάλλουν  $R \sim e^{\alpha\phi}$ , όπου  $\alpha$  θετική σταθερά. Το πιο πάνω δυναμικό παίρνει την ελάχιστη του τιμή,  $V_{\min} = 0$  για  $\phi = 0$ . Για μεγάλα αρνητικά  $\phi$ , το δυναμικό αυξάνεται εκθετικά ( $V \approx \mu^2 e^{-2\alpha\phi}$ ). Για μεγάλα θετικά  $\phi$  όμως, το δυναμικό

παραμένει περίπου σταθερό,  $V \approx \mu^2$ , έχοντας πολύ μικρή θετική κλίση. Ως αποτέλεσμα, για  $\phi \gg 0$ , η πυκνότητα ενέργειας είναι περίπου σταθερή,  $\rho \sim \mu^2$ , και η πίεση είναι αρνητική:  $P = -\rho = -\mu^2$ . Οι εξισώσεις κίνησης έχουν λύσεις με το πεδίο  $\phi$  να παίρνει αρχικά μια μεγάλη θετική τιμή, να ελαττώνεται πολύ αργόρυθμα με τον χρόνο, πλησιάζοντας το ελάχιστο του δυναμικού του, και τη μετρική να προσεγγίζει αρχικά τη μετρική de Sitter. Οι λύσεις αυτές περιγράφουν την πληθωριστική του φάση του Σύμπαντος. Μετά από αρκετό χρονικό διάστημα, η τιμή του πεδίου  $\phi$  ελαττώνεται σημαντικά, αρχίζει να εκτελεί ταλαντώσεις γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού του και να διασπάται σε ελαφρύτερα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου. Το Σύμπαν θερμαίνεται και η κοσμολογία καταλήγει σε μια κοσμολογία Friedmann.

Ακριβώς επειδή για μεγάλα  $\phi \gg 0$ , η αρχική βαθμωτή καμπυλότητα είναι μεγάλη, ο όρος  $R^2$  στην βαρυτική δράση Starobinsky κυριαρχεί, επιτρέποντάς μας να περιγράψουμε την πληθωριστική φάση με μία θεωρία τετραγωνικής βαρύτητας, την  $R^2$ . Η θεωρία αυτή είναι πολύ ενδιαφέρουσα: Είναι ανεξάρτητη από μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας, είναι ελεύθερη από πεδία φαντάσματα (ghost fields) και είναι επανακανονικοποιήσιμη στο διαταραχτικό κβαντικό επίπεδο [1]. Επιπρόσθετα μπορεί να επεκταθεί σε μια υπερσυμμετρική θεωρία βαρύτητας και να εμβαπτισθεί στη θεωρία των χορδών [4].

Στην διπλωματική αυτή εργασία θα μελετήσουμε τη θεωρία  $R^2$  λεπτομερώς στο κλασικό επίπεδο, και θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε την κυματοσυνάρτηση Hartle-Hawking στα πλαίσια των πληθωριστικών της λύσεων, συγκρίνοντας με αντίστοιχους υπολογισμούς στη συνήθη θεωρία βαρύτητας του Einstein. Επίσης, θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε τις φυσικές συνέπειες των αποτελεσμάτων μας και πιθανές κοσμολογικές και φαινομενολογικές εφαρμογές.

## Κεφάλαιο 2

# Χωρόχρονος de Sitter

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε λεπτομερώς τη γεωμετρία του χωρόχρονου de Sitter, [5][6] ο οποίος είναι ένας ομογενής και ισοτροπικός χωρόχρονος, με σταθερή θετική καμπυλότητα.

### 2.1 Η μετρική Friedmann-Robertson-Walker

Σύμφωνα με την Κοσμολογική Αρχή, το Σύμπαν είναι ομογενές και ισοτροπικό. Η γενικότερη μετρική, η οποία είναι συμβατή με την Κοσμολογική Αρχή είναι η μετρική Friedmann-Robertson-Walker [3][7]:

$$ds^2 = \left\{ -dt^2 + \alpha^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega_2^2 \right] \right\} \quad (2.1)$$

όπου  $\alpha(t)$  ο παράγοντας κλίμακας,  $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  η μετρική δισδιάστατης σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας και  $k$  μία σταθερά που εκφράζει την καμπυλότητα του χώρου.

Η βαθμωτή καμπυλότητα του χωρόχρονου δίδεται από την έκφραση:

$$R = 6 \left( \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} + \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + \frac{k}{\alpha^2} \right) \quad (2.2)$$

Η σταθερά  $k$  παίρνει τρεις δυνατές τιμές: -1, 0 και 1. Ας εξετάσουμε την κάθε περίπτωση:

1)  $k = 1$

Στην περίπτωση αυτή το Σύμπαν είναι κλειστό και συμπαγές. Οι φέτες  $t = \text{σταθ.}$  είναι τρισδιάστατες σφαίρες, με τον παράγοντα κλίμακας να ταυτίζεται με την ακτίνα της σφαίρας,

και έχουν θετική καμπυλότητα. Το Σύμπαν αρχικά διαστέλλεται με επιβραδυνόμενο ρυθμό, αποκτά μια μέγιστη ακτίνα και έπειτα αρχίζει να συστέλλεται, μέχρι να καταρρεύσει. Το Σύμπαν αρχίζει με τη Μεγάλη Έκρηξη, "Big Bang", όπου μηδενίζεται ο παράγοντας κλίμακας και απειρίζεται η βαθμωτή καμπυλότητα  $R$ , καταλήγοντας στην τελική κατάρρευση, που ονομάζεται "Big Crunch".

2)  $k = -1$

Το Σύμπαν είναι ανοιχτό. Οι φέτες  $t = \text{σταθ.}$  είναι τρισδιάστατα υπερβολοειδή (τα οποία μπορεί να εμβαπτιστούν στον τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο), με τον παράγοντα κλίμακας να εκφράζει την ακτίνα των υπερβολοειδών. Η καμπυλότητα των υπερβολοειδών είναι αρνητική. Το σύμπαν θα διαστέλλεται συνεχώς με επιβραδυνόμενο ρυθμό. Η εξέλιξη του Σύμπαντος αρχίζει με τη στιγμή της Μεγάλης Έκρηξης.

3)  $k = 0$

Το Σύμπαν είναι ανοιχτό και επίπεδο. Οι φέτες  $t = \text{σταθ.}$  είναι επίπεδες. Μετά τη Μεγάλη Έκρηξη, το Σύμπαν θα συνεχίσει να διαστέλλεται, με επιβραδυνόμενο ρυθμό. Ο ρυθμός διαστολής του Σύμπαντος γίνεται ασυμπτωτικά μηδέν.

Η εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας καθορίζεται από τις εξισώσεις Friedmann [2][7]:

$$\begin{aligned} H^2 + \frac{k}{\alpha^2} &= \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

όπου  $H = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$  ο παράγοντας Hubble,  $\Lambda$  η κοσμολογική σταθερά,  $\rho$  η πυκνότητα ενέργειας της ύλης και της ακτινοβολίας του Σύμπαντος και  $P$  η πίεση. Με βάση την Κοσμολογική Αρχή, θεωρούμε ότι όλες οι μορφές ύλης και ενέργειας στο Σύμπαν συναποτελούν ένα τέλειο ρευστό. Η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση παραμετροποιούν συνιστώσες του τανυστή ενέργειας και ορμής  $T_{\mu\nu}$  της ύλης και της ακτινοβολίας. Οι πιο πάνω εξισώσεις απορρέουν από τις Einstein στην παρουσία μη μηδενικής κοσμολογικής σταθεράς:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

Συνδυάζοντας τις δύο αυτές εξισώσεις, καταλήγουμε στον ακόλουθο Νόμο Διατήρησης:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (2.5)$$

Ας θεωρήσουμε μια περιοχή στο Σύμπαν με μοναδιαίο παραμετρικό όγκο. Τότε ο φυσικός όγκος της περιοχής αυτής ισούται με  $\alpha^3(t)$ , και η ποσότητα  $\rho\alpha^3$  ισούται με την ολική ενέργεια που περικλείεται στην περιοχή αυτή. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση 2.5 στη μορφή:

$$\begin{aligned} d(\alpha^3\rho) + P d(\alpha^3) &= 0 \\ \Rightarrow dE + P dV &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Αυτός προφανώς είναι ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος για μία αδιαβατική διαστολή, κατά την οποία η εντροπία είναι σταθερή.

Σημειώνουμε ότι η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση συνδέονται με βάση την εξίσωση κατάστασης:

$$P = w\rho \tag{2.7}$$

όπου  $w$  σταθερά που εκφράζει την ταχύτητα του ήχου του ρευστού. Μας ενδιαφέρουν τρεις περιπτώσεις:

$$(\alpha) w = \frac{1}{3}$$

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε θερμή σχετικιστική ύλη ή θερμική ακτινοβολία. Η πυκνότητα ενέργειας ελαττώνεται, αντιστρόφως ανάλογα της τέταρτης δύναμης του παράγοντα κλίμακας  $\rho \sim \alpha^{-4}$ . Συνεπώς, η θερμοκρασία φθίνει αντιστρόφως ανάλογα του παράγοντα κλίμακας  $T \propto \alpha^{-1}$ , επειδή όπως γνωρίζουμε από τον νόμο Steffan-Boltzmann, η ενέργεια θερμικής ακτινοβολίας είναι ανάλογη με  $T^4$ .

$$(\beta) w = 0$$

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί σε κρύα, μη σχετικιστική ύλη. Η πίεση μηδενίζεται και η πυκνότητα ύλης είναι ανάλογη του  $\alpha^{-3}$ .

$$(\gamma) w = -1$$

Η πυκνότητα ενέργειας δεν μεταβάλλεται, και άρα εκφράζει την πυκνότητα ενέργειας του κενού.

Ας εξετάσουμε τις εξισώσεις Friedmann στην περίπτωση ενός υλοκρατικού Σύμπαντος  $w = 0$ . Η πρώτη εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\dot{\alpha}^2 = \frac{c}{\alpha} + \frac{\Lambda\alpha^2}{3} - k \quad (2.8)$$

όπου  $c = 8\pi G\alpha^3\rho/3$  σταθερά. Αυτό διότι η ποσότητα  $\alpha^3\rho$  διατηρείται σταθερή στην περίπτωση ενός υλοκρατικού Σύμπαντος.

Θέτουμε πρώτα  $\Lambda = 0$  και λύνουμε τις διαφορικές εξισώσεις για καθεμία από τις τρεις περιπτώσεις [7]:

1)  $k = 0$

$$\alpha(t) = \left(\frac{3}{2}\sqrt{ct}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.9)$$

Υπολογίζοντας τον παράγοντα Hubble βρίσκουμε:

$$H = \frac{2}{3t} \quad (2.10)$$

πράγμα που επιβεβαιώνει ότι με την πάροδο του χρόνου η διαστολή επιβραδύνεται, τείνοντας ασυμπτωτικά στο μηδέν.

2)  $k = 1$

$$t = c \left[ \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{c}} \right) + \sqrt{\frac{\alpha}{c} \left( 1 - \frac{\alpha}{c} \right)} \right] \quad (2.11)$$

Για  $t \sim 0$ , η πιο πάνω σχέση δίνει:

$$\alpha \sim \left(\frac{3}{2}\sqrt{ct}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.12)$$

προσεγγίζοντας την περίπτωση του επίπεδου σύμπαντος, ενώ για μεγαλύτερα  $t$  παίρνουμε:

$$\alpha \sim c \sin^2 \left( \frac{t}{c} \right) \quad (2.13)$$

Αυτή η συνάρτηση περιγράφει την εξέλιξη ενός κλειστού Σύμπαντος το οποίο διαστέλλεται μέχρι μια μέγιστη τιμή και στη συνέχεια αρχίζει να συστέλλεται μέχρι να καταρρεύσει, όταν  $t \sim \pi c$ .

3)  $k = -1$

$$t = c \left[ -\sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{c}} \right) + \sqrt{\frac{\alpha}{c} \left( 1 + \frac{\alpha}{c} \right)} \right] \quad (2.14)$$

Στην περίπτωση αυτή, ο ρυθμός μεταβολής του παράγοντα κλίμακας δεν μπορεί να μηδενιστεί, και έτσι το σύμπαν θα συνεχίσει να διαστέλλεται επ' άπειρον.

Μπορούμε να δούμε σχηματικά τα πιο πάνω στην εξής γραφική παράσταση [7]:

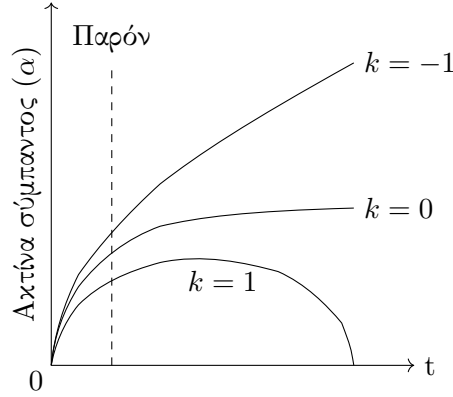


FIGURE 2.1: Γραφική παράσταση ακτίνας του σύμπαντος συναρτήσει του χρόνου, για τις περιπτώσεις ενός κλειστού, ανοιχτού και ανοιχτού και επίπεδου υλοκρατικού Σύμπαντος.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την περίπτωση  $\Lambda > 0$ , για κλειστό Σύμπαν, στην απουσία ακτινοβολίας ή ύλης. Η εξίσωση Friedmann 2.3 παίρνει τη μορφή:

$$H^2 + \frac{1}{\alpha^2} = H_0^2 \quad (2.15)$$

όπου  $H_0^2 = \Lambda/3$ . Λύνοντας την πιο πάνω εξίσωση, βρίσκουμε:

$$\alpha(t) = H_0^{-1} \cosh(H_0 t) \quad (2.16)$$

Η μετρική Robertson-Walker παίρνει την μορφή:

$$ds^2 = -dt^2 + H_0^{-2} \cosh^2(H_0 t) d\Omega_3^2 \quad (2.17)$$

και αντιστοιχεί στο χωρόχρονο de Sitter. Επειδή όλες οι μορφές ενέργειας φθίνουν αρκετά γρήγορα καθώς το Σύμπαν διαστέλλεται, η πιο πάνω εξίσωση περιγράφει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της εξίσωσης Friedmann καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

Στο απώτερο μέλλον, το Σύμπαν διαστέλλεται εκθετικά με τον χρόνο, εκδηλώνοντας το φαινόμενο του πληθωρισμού. Σε αυτή τη φάση, ο παράγοντας Hubble είναι είναι σταθερός,

και εξαρτάται από την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς. Ανάλογα με την μετρήσιμη τιμή της κοσμολογικής σταθεράς, το δικό μας Σύμπαν τείνει ασυμπτωτικά στο χωρόχρονο de Sitter.

Σύμφωνα με τα ισχύοντα κοσμολογικά δεδομένα, το Σύμπαν διαστέλλεται με επιταχυνόμενο ρυθμό. Αυτό αποδίδεται κατά κύριο λόγο στην επίδραση της σκοτεινής ενέργειας, η ακριβής φύση της οποίας είναι άγνωστη, αλλά η συνεισφορά της στις εξισώσεις Einstein μπορεί να περιγραφεί με μία κατάλληλη κοσμολογική σταθερά. Η πυκνότητα της σκοτεινής ενέργειας αποτελεί γύρω στα 74% της πυκνότητας ενέργειας στο Σύμπαν· 22% αποδίδεται στην σκοτεινή ύλη και μόλις το 4% αντιστοιχεί στη βαρυονική ύλη.

## 2.2 Ο χωρόχρονος de Sitter

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το χωρόχρονο de Sitter στις  $n$  διαστάσεις. Μπορούμε να τον εμβαπτίσουμε ως ένα (χρονοειδές) υπερβολοειδές στον  $n + 1$ -διάστατο χωρόχρονο Minkowski:

$$-(x^0)^2 + \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = l^2 \quad (2.18)$$

όπου  $n$  ο αριθμός των χωρικών διαστάσεων του χωρόχρονου και  $l$  σταθερό μήκος.

Το υπερβολοειδές αυτό είναι το εξής:

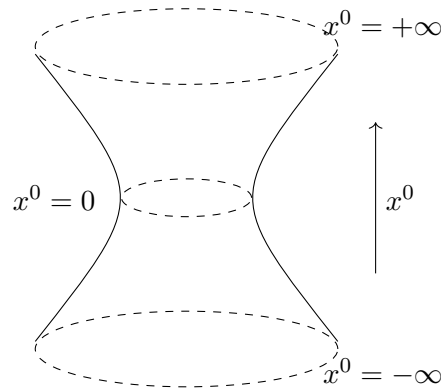


FIGURE 2.2: Σχηματική αναπαράσταση χωρόχρονου de Sitter

Στις τέσσερις διαστάσεις, μπορούμε να εμβαπτίσουμε τον χωρόχρονο αυτό στον 5-διάστατο χωρόχρονο Minkowski:



$$\begin{aligned}
x^0 &= l \sinh t \\
x^1 &= l \cosh t \sinh \chi \\
x^2 &= l \cosh t \cosh \chi \sinh \theta \\
x^3 &= l \cosh t \cosh \chi \cosh \theta \sinh \phi \\
x^4 &= l \cosh t \cosh \chi \cosh \theta \cosh \phi
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Η μετρική de Sitter παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = l^2 \left( -dt^2 + \cosh^2(t) d\Omega_3^2 \right) \tag{2.20}$$

όπου  $d\Omega_3^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_2^2$  η μετρική τρισδιάστατης σφαίρας μοναδιαίας ακτίνας. Η βαθμωτή καμπυλότητα βρίσκεται να είναι:

$$R = \frac{12}{l^2} \tag{2.21}$$

Ο χωρόχρονος παρουσιάζει συμμετρία Lorentz group  $SO(1, 4)$  (1 χρονική, 4 χωρικές συντεταγμένες). Στα όρια άπειρου χρόνου, στο απώτερο παρελθόν και μέλλον, ο παράγοντας κλίμακας αυξάνεται με εκθετικό ρυθμό  $\sim e^{\pm t}$  (φαινόμενο πληθωρισμού [1][2]). Ο παράγοντας κλίμακας παίρνει την ελάχιστη του τιμή όταν  $t = 0$ .

Είναι δυνατόν να παραστήσουμε τον χωρόχρονο de Sitter σε μία διαφορετική μορφή σχηματικά. Με μία στροφή στον ευκλείδειο χώρο μέσω του μετασχηματισμού  $t = i\tau = i(\pi/2 - \omega)$ , η μετρική (2.23) μετατρέπεται στη μετρική τετραδιάστατης σφαίρας με ακτίνας  $l$ :

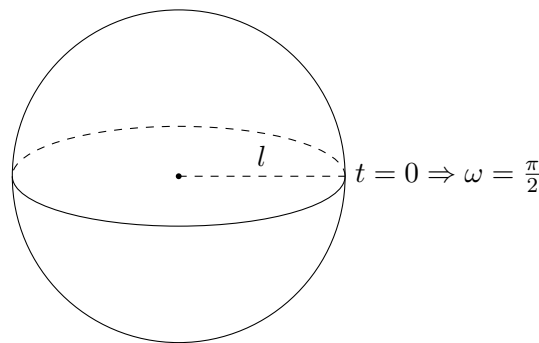


FIGURE 2.3: Σχηματική αναπαράσταση χωρόχρονου de Sitter έπειτα από στροφή στον ευκλείδειο χώρο

Παρατηρούμε ότι τα άπειρα του χρόνου συμπαγοποιήθηκαν στους δύο πόλους της σφαίρας. Οι φέτες  $t = \text{σταθ.}$  αντιστοιχούν σε τρισδιάστατες σφαίρες. Επιπλέον, η βαθμωτή καμπυλότητα παραμένει αναλλοίωτη και η συμμετρία του χωρόχρονου μετασχηματίζεται σε συμμετρία τετραδιάστατης σφαίρας  $SO(5)$ .

Η φέτα  $t = 0$  μετασχηματίζεται στον ισημερινό, με μέγιστη ακτίνα ίση με  $l$ . Στο ακόλουθο σχήμα, απεικονίζεται ο χωρόχρονος de Sitter και ο αντίστοιχος Ευκλείδιος χώρος:

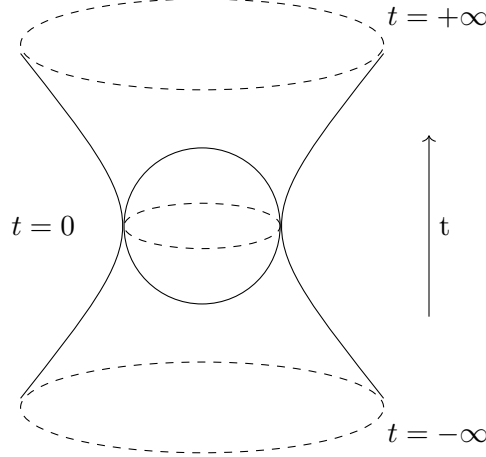


FIGURE 2.4: Ο Ευκλείδιος χώρος de Sitter

### 2.3 Διάγραμμα Penrose χωρόχρονου de Sitter

Τεχνικές λεπτομέρειες αναφορικά με τα διαγράμματα Penrose παρατίθενται στο παράρτημα Γ'. Στο κεφάλαιο αυτό, θα αναλύσουμε την περίπτωση του χωρόχρονου de Sitter.

Θέτουμε  $l = 1$  για απλοποίηση των πράξεων. Ορίζουμε τον σύμμορφο χρόνο  $\eta$  ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \cosh t &= \cos \eta \\ \Rightarrow dt &= \frac{1}{\sinh t} \frac{\sin \eta}{\cos^2 \eta} d\eta \\ \Rightarrow dt^2 &= d\eta^2 \frac{1}{\cos^2 \eta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Η μετρική παίρνει την εξής μορφή:

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \eta} (-d\eta^2 + d\Omega_3^2) \quad (2.23)$$

Για την δημιουργία του διαγράμματος ώστε τα άπειρα να γίνουν πεπερασμένα, εκτελούμε τον ακόλουθο σύμμορφο μετασχηματισμό:

$$d\bar{s}^2 = \cos^2 \eta ds^2 = -d\eta^2 + d\Omega_3^2 \quad (2.24)$$

Από τις χωρικές συντεταγμένες θα μεταβάλλεται η πολική γωνία  $\chi$ , ενώ οι άλλες δύο παραμένουν σταθερές.

Με βάση τη λαγκραντζιανή:

$$L^2 = \frac{1}{\cos^2 \eta} (\dot{\eta}^2 - \dot{\chi}^2) \quad (2.25)$$

όπου  $\dot{\eta} = \frac{d\eta}{d\tau}$  και  $\dot{\chi} = \frac{d\chi}{d\tau}$ , εξάγουμε και τις γεωδαιτικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} + \tan \eta (\dot{\eta}^2 + \dot{\chi}^2) &= 0 \\ \ddot{\chi} + 2\dot{\chi}\dot{\eta} \tan \eta &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Στις νέες συντεταγμένες, τα διάφορα άπειρα μετασχηματίζονται στα παρακάτω σημεία:

$$\begin{aligned} i^+ &\rightarrow \eta = \frac{\pi}{2} \\ i^- &\rightarrow \eta = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Έπειτα ορίζουμε τις ακόλουθες φωτοειδείς συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} U &= \eta - \chi \\ V &= \eta + \chi \end{aligned} \quad (2.28)$$

και κατασκευάζουμε το διάγραμμα Penrose:

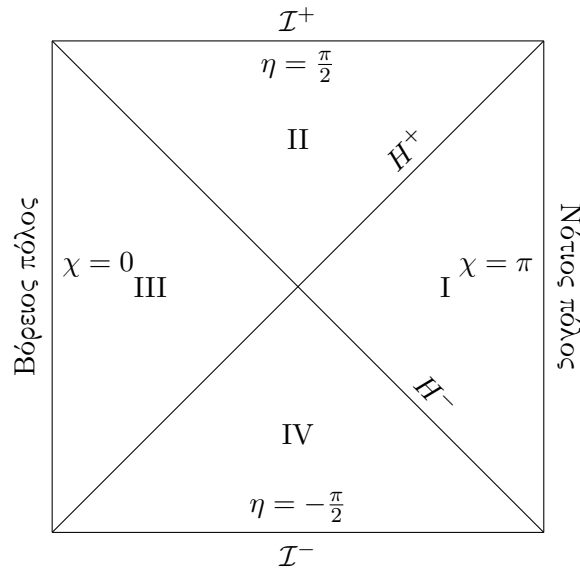


FIGURE 2.5: Διάγραμμα Penrose για τον χωρόχρονο de Sitter

Όπως φαίνεται στο διάγραμμα, οι άνω και κάτω οριζόντιες γραμμές αντιστοιχούν στα φωτοειδή άπειρα (θετικό και αρνητικό αντίστοιχα), ενώ οι δεξιές και αριστερές κάθετες γραμμές στο νότιο και βόρειο πόλο αντίστοιχα της τρισδιάστατης σφαίρας. Κάθε οριζόντια γραμμή συμβολίζει μία τρισδιάστατη σφαίρα.

Παρόλο που δεν υπάρχει κάποια ανωμαλία, παρουσιάζονται ορίζοντες γεγονότων. Από αυτό απορρέει το σημαντικότερο για αυτή την γεωμετρία, δηλαδή ότι ένας παρατηρητής δεν μπορεί να έχει πρόσβαση σε πληροφορία από κάθε σημείο του χωρόχρονου. Εν αντιθέσει με τον χωρόχρονο Minkowski όπου κάποια στιγμή ένας παρατηρητής θα καταφέρει να τον «δει» στην ολότητά του, στην περίπτωση de Sitter δεν μπορεί φως από οποιοδήποτε σημείο να φτάσει στον παρατηρητή. Π.χ. αν ο παρατηρητής βρίσκεται στο χωρίο I, μπορεί να λάβει πληροφορία μόνο από το χωρίο IV και να στείλει πληροφορία στο χωρίο II, ενώ δεν έχει καμία απολύτως επικοινωνία με το III.

Τέλος, παρουσιάζεται ένα άνω όριο στον ορίζοντα του παρατηρήσιμου σύμπαντος ενώ το σύμπαν εξακολουθεί να επεκτείνεται. Αυτό οδηγεί σε έναν παρατηρητή να βλέπει όλο και λιγότερο από το σύμπαν με την πάροδο του χρόνου έως ότου φτάσει σε ένα σημείο στο απώτερο (άπειρο) μέλλον όπου δεν θα έχει καμία επαφή με κανένα άλλο σημείο του σύμπαντος.

## Κεφάλαιο 3

# Θεωρία $R^2$

Έχοντας κάνει ήδη μία εκτενή εισαγωγή και επεξήγηση της σημασίας των θεωριών βαρύτητας  $R^2$  και του μοντέλου Starobinsky, σε αυτό το κεφάλαιο θα προχωρήσουμε σε κάποιους πιο λεπτομερείς υπολογισμούς και εξισώσεις για την τετραγωνική θεωρία βαρύτητας, συγκρίνοντάς την με κλασσική θεωρία Einstein. Ακόμη, θα παραθέσουμε κοσμολογικές λύσεις της θεωρίας.

### 3.1 Εξισώσεις Einstein στον κενό χώρο

Αρχίζουμε με μία εισαγωγή στην κλασσική δράση βαρύτητας και την εξαγωγή των εξισώσεων του βαρυτικού πεδίου. Οι εξισώσεις Einstein είναι:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

όπου  $R$  η βαθμωτή καμπυλότητα,  $R_{\mu\nu}$  ο τανυστής Ricci,  $g_{\mu\nu}$  η μετρική,  $T_{\mu\nu}$  ο τανυστής ενέργειας και ορμής της ύλης και της ακτινοβολίας και  $\Lambda$  η κοσμολογική σταθερά. Οι εξισώσεις αυτές απορρέουν από μία δράση [8] της μορφής:

$$S = S_G + S_M \quad (3.2)$$

όπου  $S_G$  το βαρυτικό μέρος και  $S_M$  το μέρος που περιλαμβάνει τα πεδία της ύλης και περιγράφει τη σύζευξη τους με τη βαρύτητα.

Οι εξισώσεις Einstein προκύπτουν από την βαρυτική δράση Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) \quad (3.3)$$

όπου  $g = -\det(g_{\mu\nu})$  η ορίζουσα της μετρικής. Η πιο πάνω δράση είναι αναλλοίωτη ως προς γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων και οδηγεί σε διαφορικές εξισώσεις που εμπλέκουν παραγώγους δεύτερης τάξης ως προς τη μετρική. Πράγματι, τόσο ο στοιχειώδης όγκος ( $d^4x\sqrt{g}$ ) όσο και η βαθμωτή καμπυλότητα  $R$  είναι βαθμωτά μεγέθη, αναλλοίωτα ως προς γενικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Σημειώνουμε ότι η βαθμωτή καμπυλότητα  $R$  έχει μονάδες  $[\text{μήκους}]^{-2}$ , και έτσι η σταθερά  $G$  έχει μονάδες  $[\text{μήκους}]^2$ :  $G = l_p^2$ . Επίσης, η ορίζουσα της μετρικής είναι αρνητική, αφού με βάση τον κανόνα του Sylvester, θα πρέπει να έχει μία αρνητική και τρεις θετικές ιδιοτιμές.

Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση  $\Lambda = 0$  και  $T_{\mu\nu} = 0$  επιχειρώντας να παράξουμε τις εξισώσεις στον κενό χώρο. Εφαρμόζουμε την αρχή του Hamilton και παίρνουμε για τη μεταβολή της δράσης:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x [\delta(\sqrt{g})R + \sqrt{g}\delta R] = 0 \quad (3.4)$$

Για τον υπολογισμό της μεταβολής της ορίζουσας της μετρικής, θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα Jacobi:

$$\delta \det M = \text{tr}(M^{-1}\delta M) \det M \quad (3.5)$$

Παίρνουμε:

$$\delta(\sqrt{g}) = \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}}\delta g = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad (3.6)$$

Ο δεύτερος όρος σπάζει στα δύο, γράφοντας τη βαθμωτή καμπυλότητα ως το ίχνος του ταυυστή Ricci ( $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ):

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \quad (3.7)$$

Ανακαλούμε τη σχέση:

$$R_{\mu\nu} = \nabla_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

όπου  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(\partial_\nu g_{\mu\kappa} + \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})$  η σύνδεση και  $\nabla_\mu$  ο τελεστής της συναλλοίωτης παραγώγισης. Η συναλλοίωτη παράγωγος δρα όπως η απλή μερική παράγωγος  $\partial_\mu$  στα βαθμωτά μεγέθη.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις [9]:

$$\Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\sqrt{g}) \quad (3.9)$$

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} A^\mu) = \partial_\mu A^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} A^\lambda \quad (3.10)$$

$$\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0 \quad (3.11)$$

βρίσκουμε:

$$\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\lambda}) - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}) \quad (3.12)$$

Επειδή οι πιο πάνω όροι είναι ολικές παράγωγοι, δεν συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα. Καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για τη μεταβολή της δράσης:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} \delta g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (3.13)$$

Άρα λοιπόν, στην απουσία ύλης ( $T^{\mu\nu} = 0$ ), παίρνουμε τις εξισώσεις Einstein στον κενό χώρο:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0 \quad (3.14)$$

## 3.2 Εξισώσεις Einstein στην παρουσία βαθμωτού πεδίου

Σε αυτή την περίπτωση, ο ταυσιής ενέργειας και ορμής είναι μη μηδενικός:

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \quad (3.15)$$

όπου  $\mathcal{L}_M$  η λαγκρανζιανή πυκνότητα του βαθμωτού πεδίου  $\phi$ :

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} \partial^i \phi \partial_i \phi - V(\phi) = -\frac{1}{2} g^{ij} \partial_j \phi \partial_i \phi - V(\phi) \quad (3.16)$$

όπου  $V(\phi)$  το δυναμικό του πεδίου. Ο πρώτος όρος είναι ο κινητικός όρος.

Ο ταυστής ενέργειας και ορμής του πεδίου ισούται με:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}V(\phi) \quad (3.17)$$

Η χρονική συνιστώσα  $T_{00}$  ισούται με την πυκνότητα ενέργειας του συστήματος:

$$T_{00} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + V(\phi) \quad (3.18)$$

Η δράση του πεδίου δίδεται από την έκφραση:

$$S_M = \int d^4x\sqrt{g}\mathcal{L}_M = - \int d^4x\sqrt{g} \left[ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi) \right] \quad (3.19)$$

Εφαρμόζουμε στη συνέχεια την αρχή του Hamilton:  $\delta S_M + \delta S_{EH} = 0$ , όπου μεταβάλλονται τόσο η μετρική όσο και το βαθμωτό πεδίο. Στο προηγούμενο κεφάλαιο προσδιορίσαμε τη μεταβολή της ρίζας της ορίζουσας της μετρικής  $\delta\sqrt{g}$ , επομένως απομένει να βρούμε τη μεταβολή του όρου εντός της αγκύλης:

$$\delta V(\phi) = \frac{\partial V}{\partial\phi}\delta\phi \quad (3.20)$$

$$\delta \left( \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \right) = \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + g^{\mu\nu}\partial_\mu(\delta\phi)\partial_\nu\phi \quad (3.21)$$

Στην πιο πάνω εξίσωση, ο πρώτος όρος έχει πάρει μια χρήσιμη μορφή. Χειριζόμαστε τον δεύτερο όρο με ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\mu(\delta\phi)\partial_\nu\phi = \partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\delta\phi) - \delta\phi\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) \quad (3.22)$$

Ο πρώτος όρος είναι μια ολική παράγωγος και δεν συνεισφέρει. Ο δε δεύτερος όρος συνδυάζεται με την 3.20 καταλήγοντας στην εξής έκφραση:

$$\int d^4x\sqrt{g} \left[ -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) + \frac{\partial V}{\partial\phi} \right] \delta\phi \quad (3.23)$$

Η έκφραση εντός της αγκύλης πρέπει να μηδενίζεται, δίδοντας την εξίσωση Euler-Lagrange του βαθμωτού πεδίου  $\phi$ .

Όλοι οι υπόλοιποι όροι συνδυάζονται στην ακόλουθη έκφραση:



$$\delta S_M = \int d^4x \sqrt{g} \delta g^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right) - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right] \quad (3.24)$$

όπου οι νέοι δείκτες  $\rho$  και  $\sigma$  εισήχθησαν για να μην υπάρχει σύγχυση με τον τελευταίο όρο.

Τέλος, συνδυάζουμε το πιο πάνω με τη γνωστή μεταβολή της βαρυτικής δράσης 3.13 και καταλήγουμε στην ζητούμενη εξίσωση Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G \left[ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi - g_{\mu\nu} V(\phi) \right] \quad (3.25)$$

### 3.3 Εξισώσεις Einstein της $R^2$ θεωρίας στον κενό χώρο

Η βαρυτική δράση έχει την εξής μορφή [10]:

$$S_G = \lambda \int d^4x \sqrt{g} R^2 \quad (3.26)$$

όπου  $\lambda$  μία σταθερά και  $R$  η βαθμωτή καμπυλότητα όπως και πριν.

Η δράση αυτή παραμένει αναλλοίωτη ως προς μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας. Οι μετασχηματισμοί γράφονται:

$$g'_{\mu\nu} = e^{2\Omega} g_{\mu\nu} \quad (3.27)$$

όπου  $\Omega$  μία αυθαίρετη σταθερά. Ισοδύναμα μπορούμε να κρατήσουμε τη μετρική αναλλοίωτη και να μεταβάλουμε τις συντεταγμένες ως εξής:

$$x'^{\mu} = \epsilon x^{\mu} \quad (3.28)$$

όπου  $\epsilon$  μία σταθερά κλίμακας. Ας εξετάσουμε πως μετασχηματίζονται οι διάφορες βαρυτικές ποσότητες που εμφανίζονται στην δράση ως προς μετασχηματισμούς αλλαγής κλίμακας. Υπενθυμίζουμε ότι ο τανυστής Ricci προκύπτει ως ίχνος του τανυστή καμπυλότητας Riemann:

$$R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu} = R_{\mu\nu} \quad (3.29)$$

ενώ εξ ορισμού [9]:

$$\begin{aligned}
 R_{\kappa\mu\lambda\nu} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} \right) + g_{\rho\sigma} (\Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\sigma_{\kappa\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\kappa\lambda}) \\
 &\Rightarrow R^\kappa_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\kappa_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} \Gamma^\kappa_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\kappa_{\rho\nu}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Τα στοιχεία της σύνδεσης δεν μεταβάλλονται κάτω από τον μετασχηματισμό, αλλά οι παράγοντες της μετρικής στο δεύτερο όρο της πρώτης γραμμής και οι δεύτερες παράγωγοι της μεταβάλλονται με αποτέλεσμα:

$$R'_{\kappa\mu\lambda\nu} = e^{2\Omega} R_{\kappa\mu\lambda\nu} \tag{3.31}$$

Έτσι η βαθμωτή καμπυλότητα μετασχηματίζεται στην:

$$R' = e^{-2\Omega} R \tag{3.32}$$

Εφαρμόζοντας τα πιο πάνω στην δράση, παίρνουμε:

$$S'_G = \lambda \int d^4x \sqrt{g'} R'^2 = \lambda \int d^4x e^{4\Omega} \sqrt{g} e^{-4\Omega} R^2 = \int d^4x \sqrt{g} R^2 = S_G \tag{3.33}$$

Έτσι αποδεικνύεται η αναλλοiotητα της δράσης ως προς τη συμμετρία κλίμακας.

Σημειώνουμε ότι εάν η σταθερά σύζευξης είναι θετική,  $\lambda > 0$ , η δράση είναι μη αρνητική εν αντιθέσει με την δράση Einstein-Hilbert η οποία παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές.

Εφαρμόζοντας την αρχή του Hamilton, παίρνουμε την εξής έκφραση:

$$\delta S_G = \lambda \int d^4x [\delta(\sqrt{g}) R^2 + \sqrt{g} 2R \delta R] = 0 \tag{3.34}$$

Ο δεύτερος όρος είναι αρκετά πιο δύσκολος να τον χειριστούμε. Ας τον εξετάσουμε:

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \tag{3.35}$$

Ανακαλούμε τις εξής σχέσεις:

$$R_{\mu\nu} = \nabla_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{3.36}$$

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\nabla_\mu\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu\delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}) \quad (3.37)$$

$$\nabla_\lambda(\sqrt{g}) = 0 \quad (3.38)$$

Με βάση αυτές τελικά καταλήγουμε στην σχέση:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g_{\lambda\sigma} - \nabla_\nu\nabla_\sigma\delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\lambda\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}) \quad (3.39)$$

Παίρνοντας το ίχνος της μεταβολής αυτής, παρατηρούμε ότι οι ομόσημοι όροι δίνουν ισοδύναμες εκφράσεις και επομένως:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}(\nabla_\lambda\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu} - \nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g_{\nu\sigma}) \quad (3.40)$$

Για να έχουμε παρόμοιους όρους με όρους που εμφανίζονται σε προηγούμενες εκφράσεις, κάνουμε τις παρακάτω τροποποιήσεις:

$$g^{\lambda\sigma}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g^{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (3.41)$$

$$g_{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\nabla_\lambda\nabla_\sigma\delta g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\nabla^\sigma\nabla_\sigma\delta g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} \quad (3.42)$$

$$g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}\delta g_{\nu\sigma} = -g^{\lambda\sigma}g_{\nu\sigma}\delta g^{\mu\nu} \quad (3.43)$$

$$g_{\nu\sigma}g^{\lambda\sigma}\nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g^{\mu\nu} = \nabla_\nu\nabla_\mu\delta g^{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \quad (3.44)$$

Έτσι καταλήγουμε στη σχέση:

$$\delta R_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \quad (3.45)$$

Προσοχή: Οι πιο πάνω μαθηματικές πράξεις επιτρέπονται αφού η μετρική και η συναλλοίωτη παράγωγος «μετατίθενται» στα πλαίσια της γενικής θεωρίας της σχετικότητας (απουσία

όρων "torsion"). Δηλαδή, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα ( $\nabla_\lambda g^{\mu\nu} = 0$ ) [9].

Έπειτα ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες, και βρίσκουμε:

$$2\sqrt{g}\delta g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu}\nabla^2 R - \nabla_\mu\nabla_\nu R)$$

Η τελική έκφραση για τη μεταβολή της δράσης είναι:

$$2\lambda \int d^4x \sqrt{g}\delta g^{\mu\nu} \left( RR_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R^2 + g_{\mu\nu}\nabla^2 R - \nabla_\mu\nabla_\nu R \right) = 0 \quad (3.46)$$

από την οποία καταλήγουμε στις εξισώσεις Einstein:

$$RR_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R^2 + g_{\mu\nu}\nabla^2 R - \nabla_\mu\nabla_\nu R = 0 \quad (3.47)$$

Η πιο πάνω εξίσωση, έχει δύο ξεχωριστές κατηγορίες λύσεων:

(α)  $R_{\mu\nu} = 0$ , επίπεδες λύσεις κατά Ricci (Ricci flat solutions). Σε αυτήν την κατηγορία λύσεων συμπεριλαμβάνονται όλες οι λύσεις των εξισώσεων Einstein στον κενό χώρο. Η πλέον προφανής λύση είναι ο επίπεδος χωρόχρονος Minkowski, αλλά και οι λύσεις μελανών οπών τύπου Schwarzschild (τις οποίες αναλύουμε περαιτέρω στο παράρτημα Α'), καθώς και διάφορες μορφές επίπεδων βαρυτικών κυμάτων (plane waves).

(β)  $R_{\mu\nu} = \beta g_{\mu\nu}$ , όπου  $\beta$  μη μηδενική σταθερά. Οι χωρόχρονοι αυτοί ονομάζονται χωρόχρονοι Einstein. Η βαθμωτή καμπυλότητα είναι σταθερή, ανάλογη της σταθεράς  $\beta$  ( $R = 4\beta$ ). Επομένως συμπεριλαμβάνονται ως λύσεις όλοι οι χωρόχρονοι de Sitter και anti-de Sitter, ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς  $\beta$  (θετικό και αρνητικό αντίστοιχα). Το γεγονός ότι η καμπυλότητα των λύσεων αυτών,  $4\beta$ , είναι αυθαίρετη, αποτελεί απόρροια της συμμετρίας κλίμακας της θεωρίας.

Ενώ η κλασσική δράση της θεωρίας  $R^2$  εκδηλώνει συμμετρία κλίμακας, κβαντικές διακυμάνσεις προκαλούν αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας κλίμακας, με αποτέλεσμα την παραγωγή του κλασσικού όρου  $R$ . Ο όρος αυτός κυριαρχεί στις μεγάλες κλιμακές μήκους.

### 3.4 Μοντέλο Starobinsky

Στο μοντέλο Starobinsky [10][3] ο όρος  $R^2$  εισάγεται ως (κβαντική) διόρθωση στην γενική θεωρία της σχετικότητας. Συγκεκριμένα, η ενεργός δράση είναι:

$$S_G = \int d^4x \sqrt{g} (\lambda R^2 + \kappa^2 R) \quad (3.48)$$

Στο μοντέλο σπάζει η συμμετρία κλίμακας της  $R^2$  θεωρίας, και παράγεται φάση πληθωρισμού χωρίς αφύσικες λύσεις. Μάλιστα το μοντέλο αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με τα πιο πρόσφατα πειραματικά δεδομένα. Επιπλέον, (σαν πληθωριστικό μοντέλο) επιλύει το πρόβλημα του ορίζοντα [2]. Αυτό το πρόβλημα αφορά το παράδοξο της ισοτροπίας της θερμοκρασίας της μικροκυματικής ακτινοβολίας υποβάθρου ( $\sim 2.7K$ ), με πολύ μικρές διακυμάνσεις ( $\sim \mathcal{O}(10^{-4})$ ). Εφόσον τα φωτόνια εκπέμφθηκαν από διαφορετικά σημεία λίγο μετά την Μεγάλη Έκρηξη (Big Bang), θα περίμενε κανείς να μην έχουν κάποια συσχέτιση, με αποτέλεσμα ένα φάσμα τυχαίων θερμοκρασιών για διαφορετικά σημεία του χώρου. Στα πληθωριστικά μοντέλα, τα φωτόνια αυτά στην πραγματικότητα προέρχονται από μια πάρα πολύ μικρή περιοχή του χώρου στο πρώιμο σύμπαν η οποία επεκτάθηκε εκθετικά στον χρόνο. Αφού η περιοχή αυτή είναι πολύ μικρή, υπήρχε επαρκής χρόνος τα φωτόνια να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους, να επέλθει θερμική ισορροπία, και άρα να αποκτήσουν την ίδια θερμοκρασία.

Τα πληθωριστικά μοντέλα επιλύουν και άλλα προβλήματα του καθιερωμένου μοντέλου της «θερμής Μεγάλης Έκρηξης» [2], όπως το πρόβλημα της επιπεδότητας του σύμπαντος (γιατί η πυκνότητα ενέργειας στο σύμπαν είναι συγκρίσιμη με την κρίσιμη πυκνότητα μάζας), το πρόβλημα της ομοιογένειας και της ισοτροπίας του σύμπαντος, το πρόβλημα της δημιουργίας γαλαξιών και μεγάλων δομών στο σύμπαν, το πρόβλημα των μαγνητικών μονοπόλων, και άλλα.



## Κεφάλαιο 4

# Αντιστοιχία δράσης $R^2$ με κλασσική δράση Einstein-Hilbert

Κάθε θεωρία βαρύτητας της μορφής  $f(R)$  μπορεί να εκφρασθεί ως μία θεωρία Einstein στην παρουσία ενός επιπρόσθετου βαθμωτού πεδίου  $\phi$ . Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή ενός πολλαπλασιαστή Lagrange  $\Phi$ . Για την θεωρία  $R^2$ , η σχετική δράση είναι [10][11]

$$S_G = \int d^4x \sqrt{g} \left( R\Phi - \frac{1}{4\lambda} \Phi^2 \right) \quad (4.1)$$

Με βάση την πιο πάνω δράση, προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση κίνησης για τον πολλαπλασιαστή Lagrange  $\Phi$  :

$$\Phi = 2R\lambda \quad (4.2)$$

Παρατηρούμε ότι δεν εμφανίζονται οι χρονικές παράγωγοι του πολλαπλασιαστή Lagrange και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε την πιο πάνω εξίσωση ως περιοριστική συνθήκη. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση αυτή, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι η δράση 4.1 ανάγεται στην 3.26. Εάν  $R$  και  $\lambda$  θετικά, μπορούμε να εκφράσουμε το πεδίο  $\Phi$  ως:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} e^{\alpha\phi} \\ \Rightarrow \phi &= \frac{1}{\alpha} \ln(4R\lambda) \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου  $\phi$  βαθμωτό πεδίο και  $\alpha$  μία σταθερά.

Στη συνέχεια εκτελούμε τον σύμμορφο μετασχηματισμό  $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{\alpha\phi} g_{\mu\nu}$ . Υπενθυμίζουμε την εξής σχέση που συνδέει τις βαθμωτές καμπυλότητες σύμμορφων μετρικών [4]:

$$\int d^d x \sqrt{g} Y R = \int d^d x \sqrt{\tilde{g}} \left[ \tilde{R} - \frac{(d-1)}{(d-2)} \frac{\partial_\mu Y \partial^\mu Y}{Y^{\frac{d}{d-2}}} \right] \quad (4.4)$$

όπου  $\tilde{R}$  η βαθμωτή καμπυλότητα που αντιστοιχεί στη μετρική  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ,  $Y$  η συνάρτηση κλίμακας και  $d$  ο αριθμός των διαστάσεων του χωρόχρονου.

Στο νέο σύστημα αναφοράς, οι διάφορες ποσότητες που εμφανίζονται στη δράση γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= e^{\alpha\phi} g_{\mu\nu} \Rightarrow \sqrt{\tilde{g}} = e^{2\alpha\phi} \sqrt{g} \\ \tilde{R} &= e^{-\alpha\phi} (R - 3\alpha\Box\phi - g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Με βάση τις πιο πάνω σχέσεις, παίρνουμε τη δράση:

$$S_G = \int d^4 x \sqrt{\tilde{g}} \left( \frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{16\lambda} - \frac{3}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi e^{-2\alpha\phi} \right) = \int d^4 x \sqrt{\tilde{g}} \frac{1}{2} \left( \tilde{R} - \frac{1}{8\lambda} - 3 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \alpha^2 \right) \quad (4.6)$$

Επιλέγοντας  $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση:

$$S_G = \int d^4 x \sqrt{\tilde{g}} \frac{1}{2} \left( \tilde{R} - \frac{1}{8\lambda} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \quad (4.7)$$

Η δράση αυτή δεν είναι τίποτε άλλο από την βαρυτική δράση Einstein στην παρουσία θετικής κοσμολογικής σταθεράς  $\Lambda = \frac{1}{16\lambda}$  και ενός επιπρόσθετου άμαζου βαθμωτού πεδίου  $\phi$ . Οι εξισώσεις Einstein είναι:

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{R} + \frac{1}{16\lambda} \tilde{g}_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi \quad (4.8)$$

Επιπρόσθετα, υπάρχει και η εξίσωση κίνησης του άμαζου βαθμωτού πεδίου. Επειδή οι εξισώσεις αυτές είναι δευτέρας τάξης ως προς τις παραγώγους των πεδίων, μπορούμε να τις χειριστούμε πιο εύκολα. Η ανάλυση της θεωρίας σε αυτό το σύστημα αναφοράς είναι πολύ βοηθητική στο να κατανοήσουμε τη φυσική σημασία της  $R^2$  θεωρίας. Παρατηρούμε ότι στο σύστημα αναφοράς Einstein η θεωρία ανάγεται σε ένα απόλυτα συμβατό φυσικό σύστημα



κλασσικής βαρύτητας στην παρουσία ύλης.

Ας εξετάσουμε διάφορες περιπτώσεις, ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς  $\lambda$  [10]:

$$(\alpha) R > 0, \quad \lambda > 0$$

Στην περίπτωση αυτή, ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι θετικός και ο σύμμορφος μετασχηματισμός είναι καλά ορισμένος, χωρίς να αλλοιώνει την ταυτότητα της μετρικής. Στο σύστημα αναφοράς Einstein η βαρύτητα και το άμαζο πεδίο έχουν θετικούς κινητικούς όρους. Η κοσμολογική σταθερά είναι θετική με αποτέλεσμα να έχουμε λύσεις de Sitter. Η θεωρία είναι συνεπής, χωρίς φαντάσματα και η βαρύτητα εκδηλώνεται σαν ελκτική δύναμη.

$$(\beta) R < 0, \quad \lambda < 0$$

Και στην περίπτωση αυτή ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι θετικός. Οι λύσεις υποβάθρου αντιστοιχούν σε χωρόχρονους anti-de Sitter με αρνητική κοσμολογική σταθερά. Η θεωρία περιγράφει ένα συνεπές σύστημα χωρίς φαντάσματα, με την βαρύτητα να εκδηλώνεται ως ελκτική δύναμη.

$$(\gamma) R < 0, \quad \lambda > 0$$

Στην περίπτωση αυτή, εάν απαιτήσουμε ο σύμμορφος μετασχηματισμός να αφήνει αναλλοίωτη την ταυτότητα της μετρικής, καταλήγουμε σε ένα αφύσικο σύστημα με απωστική βαρύτητα και φαντάσματα. Στο αρχικό σύστημα αναφοράς, έχουμε λύσεις anti-de Sitter, αλλά οι διακυμάνσεις γύρω από τις λύσεις αυτές οδηγούν σε φαντάσματα.

$$(\delta) R > 0, \quad \lambda < 0$$

Παρόμοια συμπεράσματα με το  $(\gamma)$ , καταλήγοντας σε χωρόχρονους de Sitter με φαντάσματα.

Από τα πιο πάνω συμπεραίνουμε ότι με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων προκύπτει ένα φυσικώς συμβατό σύστημα, χωρίς την παρουσία φαντασμάτων, τουλάχιστον για αρκετά μικρές διακυμάνσεις γύρω από τις λύσεις υποβάθρου.

Τώρα, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η  $R^2$  θεωρία έχει συμμετρία κλίμακας. Πώς εκδηλώνεται η συμμετρία αυτή στο σύστημα αναφοράς Einstein;

Εάν οι μετρικές στα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται με ένα σύμμορφο μετασχηματισμό:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{\alpha\phi} g_{\mu\nu} \quad (4.9)$$

τότε κάτω από τον μετασχηματισμό κλίμακας, η πρώτη μένει αναλλοίωτη ενώ η δεύτερη αλλάζει. Για να συμβαίνει αυτό, πρέπει να μετασχηματίζεται κατάλληλα το βαθμωτό πεδίο

$\phi$ :

$$\alpha\tilde{\phi} = \alpha\phi + \sigma \quad (4.10)$$

όπου  $\sigma = -2\Omega$ . Επειδή το πεδίο  $\phi$  είναι άμαζο, η πιο πάνω μετατόπιση του πεδίου αφήνει τη δράση στο σύστημα αναφοράς Einstein αναλλοίωτη. Έτσι η συμμετρία κλίμακας της θεωρίας της τετραγωνικής βαρύτητας εκδηλώνεται ως μετατόπιση του επιπρόσθετου βαθμωτού πεδίου  $\phi$ .

## 4.1 Αντιστοίχιση στο μοντέλο Starobinsky

Στην περίπτωση του μοντέλου Starobinsky 3.48, μπορούμε να εισαγάγουμε έναν πολλαπλασιαστή Lagrange και να απαλείψουμε τους τετραγωνικούς όρους:

$$\begin{aligned} S_G &= \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \left( \kappa^2 \tilde{R} + \tilde{R}\Phi - \frac{1}{4\lambda} \Phi^2 \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \left[ \tilde{R}(\kappa^2 + \Phi) - \frac{1}{4\lambda} \Phi^2 \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Στις μονάδες Planck, θέτουμε  $\kappa^2 = \frac{1}{2}$ . Γράφουμε τον πολλαπλασιαστή Lagrange ως:

$$e^{\alpha\phi} = (1 + 2\Phi) \quad (4.12)$$

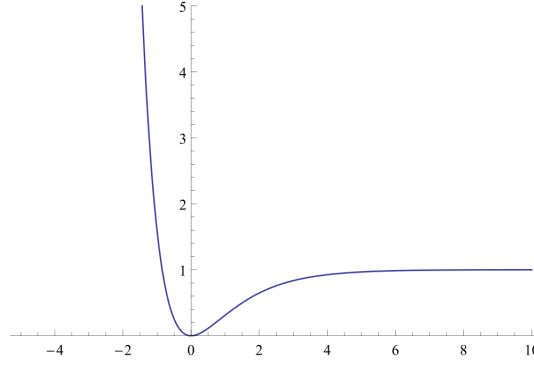
και αφού μετασχηματίσουμε στο σύστημα αναφοράς Einstein, η δράση παίρνει την ακόλουθη μορφή [4]:

$$S_G = \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \frac{1}{2} \left[ \tilde{R} - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{8\lambda} (1 - e^{-\alpha\phi})^2 \right] \quad (4.13)$$

όπου  $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Το πεδίο  $\phi$  έχει τώρα μη μηδενικό δυναμικό, το οποίο αντιστοιχεί στον όρο της κοσμολογικής σταθεράς στην  $R^2$  θεωρία:

$$V = \frac{1}{8\lambda} (1 - e^{-\alpha\phi})^2 \quad (4.14)$$

Πιο κάτω παραθέτουμε τη γραφική παράσταση του δυναμικού συναρτήσει του πεδίου  $\phi$ :

FIGURE 4.1: Ενεργό δυναμικό στο μοντέλο Starobinsky για  $\lambda = \frac{1}{8}$ 

Όπως φαίνεται στη γραφική παράσταση, για μεγάλα  $\phi$ , το δυναμικό παραμένει σχεδόν σταθερό, και μπορεί να προσεγγισθεί από μία θετική κοσμολογική σταθερά, ακριβώς όπως στην περίπτωση της  $R^2$  θεωρίας. Ως αποτέλεσμα, το πεδίο  $\phi$  κινείται αργόρυθμα, η πυκνότητα ενέργειας στο σύμπαν  $\rho$  παραμένει σχεδόν σταθερή και η πίεση είναι αρνητική. Από την εξίσωση Friedmann 2.3, βλέπουμε ότι ο παράγοντας Hubble  $H_0$  είναι σταθερός, και έχουμε πληθωρισμό.

Το δυναμικό έχει ελάχιστο για  $\phi = 0$ , όπου μηδενίζεται. Για αρνητικά  $\phi$  αυξάνεται με εκθετικό ρυθμό.

## 4.2 Διακυμάνσεις γύρω από λύσεις θεωρίας $R^2$

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξαγάγουμε το φάσμα των διακυμάνσεων γύρω από συγκεκριμένες λύσεις στην  $R^2$  θεωρία και στο μοντέλο Starobinsky.

### 4.2.1 Λύση Minkowski

Μελετούμε την ακόλουθη δράση βαρύτητας:

$$S = \int d^4x \sqrt{g} (\kappa^2 R + bR^2) \quad (4.15)$$

Στη συνέχεια γράφουμε την μετρική ως το άθροισμα της μετρικής Minkowski και της διαταραχής, η οποία θεωρούμε ότι είναι αρκετά μικρή:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (4.16)$$

Θα αναπτύξουμε τη δράση 4.15 κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης ως προς τη διαταραχή  $h_{\mu\nu}$ . Οι αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης θα είναι πρώτης τάξης, επομένως γραμμικές ως προς τη διαταραχή. Πρώτα εκφράζουμε τον τανυστή καμπυλότητας Ricci ως εξής:

$$R_{\mu\nu} = -\partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} - \Gamma^\rho_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\rho} \quad (4.17)$$

Από την σχέση 3.37 παρατηρούμε ότι τα σύμβολα Christoffel δεν θα έχουν όρους μηδενικής τάξης ως προς τη διαταραχή επομένως θα έχουν μία γενική μορφή[8]:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\eta^{\rho\sigma} + \delta g^{\rho\sigma}) (\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}) \quad (4.18)$$

Ας δούμε τώρα πως συνδέεται η μεταβολή του αντίστροφου της μετρικής με τον τανυστή  $h^{\mu\nu}$ , όπου ανεβάζουμε τους δείκτες της διαταραχής χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο της μετρικής Minkowski. Αρχίζουμε με την εξής σχέση:

$$g_{\alpha\nu} g^{\mu\alpha} = (\eta_{\alpha\nu} + h_{\alpha\nu})(\eta^{\mu\alpha} + \delta g^{\mu\alpha}) = \delta^\mu_\nu \quad (4.19)$$

Κρατώντας όρους μέχρι πρώτης τάξης ως προς τη διαταραχή, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} &\approx -h^\mu_\nu \\ \Rightarrow \delta g^{\mu\nu} &= -h^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Επειδή, ο τανυστής καμπυλότητας μηδενίζεται για τον χωρόχρονο Minkowski αρκεί να αναπτύξουμε την ορίζουσα της μετρικής κρατώντας όρους μέχρι πρώτης τάξης ως προς τη διαταραχή. Με βάση την σχέση 3.6, παίρνουμε:

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \phi \quad (4.21)$$

όπου  $\phi = h^\mu_\mu$ . Άρα λοιπόν

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{1}{2} \phi \quad (4.22)$$

Η μονάδα αντιστοιχεί στην ορίζουσα της μετρικής Minkowski. Η διόρθωση όντας πρώτης τάξης θα συνδυαστεί μόνο με άλλους όρους πρώτης τάξης από τους όρους που προέρχονται

από το ανάπτυγμα της βαθμωτής καμπυλότητας.

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε τον ταυστή Ricci:

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu} = & -\frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\mu h^\rho{}_\nu + \partial_\rho\partial_\nu h^\rho{}_\mu - \square h_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\phi - \frac{1}{4}(\partial_\mu h^\sigma{}_\nu\partial_\sigma\phi + \partial_\nu h^\sigma{}_\mu\partial_\sigma\phi - \partial^\sigma h_{\mu\nu}\partial_\sigma\phi) \\
& + \frac{1}{4}(\partial_\mu h^\sigma{}_\rho\partial_\sigma h^\rho{}_\nu + \partial_\mu h^\sigma{}_\rho\partial_\nu h^\rho{}_\sigma - \partial_\mu h^\sigma{}_\rho\partial^\rho h_{\sigma\nu} + \partial_\rho h^\sigma{}_\mu\partial_\sigma h^\rho{}_\nu + \partial_\rho h^\sigma{}_\mu\partial_\nu h^\rho{}_\sigma \\
& - \partial_\rho h^\sigma{}_\mu\partial^\rho h_{\sigma\nu} - \partial^\sigma h_{\mu\rho}\partial_\sigma h^\rho{}_\nu - \partial^\sigma h_{\mu\rho}\partial_\nu h^\rho{}_\sigma + \partial^\sigma h_{\mu\rho}\partial^\rho h_{\sigma\nu})
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Με βάση τα πιο πάνω μπορούμε να προσδιορίσουμε το ανάπτυγμα της βαθμωτής καμπυλότητας, αφού έχουμε προσδιορίσει και το ανάπτυγμα του αντιστρόφου της μετρικής. Για το ανάπτυγμα του όρου  $R^2$ , η ανάλυση είναι πιο εύκολη καθώς αν θέλουμε να κρατήσουμε όρους έως και την δεύτερη τάξη, δεν χρειάζεται να κρατήσουμε όρους του αναπτύγματος της βαθμωτής καμπυλότητας  $R$  μεγαλύτερης τάξης από την πρώτη. Επομένως βρίσκουμε:

$$R^2 = (\partial^\rho\partial^\mu h_{\rho\mu} - \square\phi)^2 \tag{4.24}$$

Για τον όρο  $R$ , αφού αμελήσουμε όρους που αντιστοιχούν σε ολικές παραγώγους, καταλήγουμε στο πιο κάτω αποτέλεσμα:

$$\sqrt{g}R = \frac{1}{4}h^{\mu\nu}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\phi\square\phi - \frac{1}{2}\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu h^{\mu\nu}\partial^\sigma h_{\sigma\nu} \tag{4.25}$$

Με βάση τα πιο πάνω το ανάπτυγμα της δράσης 4.15 παίρνει την μορφή [10]:

$$S_0 = \int d^4x \left[ \frac{\kappa^2}{2} \left( \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\phi\square\phi - D_\mu h^{\mu\nu}D_\nu\phi + D_\mu h^{\mu\nu}D^\sigma h_{\sigma\nu} \right) + b(\partial^\rho\partial^\mu h_{\rho\mu} - \square\phi)^2 \right] \tag{4.26}$$

όπου  $D_\mu$  η συναλλοίωτη παράγωγος για την αδιατάραχτη μετρική. Στην περίπτωση της μετρικής Minkowski αυτή ταυτίζεται με τη συνήθη μερική παράγωγο.

Έπειτα, αναλύουμε τη διαταραχή ως εξής [10][12]:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^\perp + \partial_\mu\alpha_\nu^\perp + \partial_\nu\alpha_\mu^\perp + \left( \partial_\mu\partial_\nu - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square \right) \alpha + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\phi \tag{4.27}$$

όπου οι συνιστώσες ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu}^\perp = 0, \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^\perp = 0, \quad \partial^\mu \alpha_\mu^\perp = 0 \quad (4.28)$$

Η συνιστώσα  $h_{\mu\nu}^\perp$  είναι εγκάρσια και άιχνη, ενώ το διάνυσμα  $\alpha_\mu^\perp$  είναι εγκάρσιο. Αν τώρα κάνουμε έναν τοπικό μετασχηματισμό μεταφοράς:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu(x) \quad (4.29)$$

η διαταραχή μετασχηματίζεται ως:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (4.30)$$

Μπορούμε να αναλύσουμε την μετατόπιση  $\xi_\mu$  ως εξής:

$$\xi_\mu = \xi_\mu^\perp + \partial_\mu \xi \quad (4.31)$$

με τις συνιστώσες να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \xi_\mu^\perp &= 0 \\ \partial^\mu \xi_\mu &= \square \xi \end{aligned} \quad (4.32)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση 4.27, παρατηρούμε ότι οι διάφορες συνιστώσες της διαταραχής μετασχηματίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$h_{\mu\nu}^\perp \rightarrow h_{\mu\nu}^\perp, \quad \alpha_\mu^\perp \rightarrow \alpha_\mu^\perp + \xi_\mu^\perp, \quad \alpha \rightarrow \alpha + 2\xi, \quad \phi \rightarrow \phi + 2\square\xi \quad (4.33)$$

Παρατηρούμε ότι η εγκάρσια διαταραχή  $h_{\mu\nu}^\perp$  παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τον πιο πάνω μετασχηματισμό βαθμίδας. Με βάση τις δύο τελευταίες σχέσεις, μπορούμε να ορίσουμε ένα το πεδίο  $\Phi$ , ώστε να παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\Phi = \phi - \square \alpha \quad (4.34)$$

Η δράση 4.26, γράφεται ως συνάρτηση των αναλλοίωτων συνιστωσών:

$$S_0 = \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{\kappa^2}{4} (h_{\mu\nu}^\perp \square h^{\perp\mu\nu} + \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi) + \frac{9b}{16} (\square \Phi)^2 \right] \quad (4.35)$$

Στον χώρο των ορμών, οι διαδότες των πιο πάνω αναλλοίωτων πεδίων είναι [10]:

$$\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)} = -\frac{2}{\kappa^2} \frac{1}{q^2} P_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)} \quad (4.36)$$

$$\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{(0)} = -\frac{1}{6b} \frac{1}{q^2} \frac{1}{(q^2 + \frac{\kappa^2}{6b})} P_{\mu\nu\rho\sigma}^{(0)} \quad (4.37)$$

όπου

$$P_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)} = \frac{1}{2} (\theta_{\mu\rho} \theta_{\nu\sigma} + \theta_{\nu\rho} \theta_{\mu\sigma}) - \frac{1}{3} \theta_{\mu\nu} \theta_{\rho\sigma} \quad (4.38)$$

$$P_{\mu\nu\rho\sigma}^{(0)} = \frac{1}{3} \theta_{\mu\nu} \theta_{\rho\sigma} \quad (4.39)$$

προβολικοί τελεστές και  $\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu} q_\nu}{q^2}$ . Οι τελεστές 4.34 και 4.35 προβάλλουν τις σπιν-2 και σπιν-0 συνιστώσες της διαταραχής αντίστοιχα.

Οι πόλοι των διαδοτών προσδιορίζουν τις μάζες των διαδιδόμενων σωματιδίων. Ο πρώτος διαδότης, του εγκάρσιου πεδίου  $h_{\mu\nu}^\perp$  με σπιν-2, έχει έναν πόλο που αντιστοιχεί σε ένα άμαζο βαρυτόνιο (graviton). Ο δεύτερος διαδότης, του πεδίου  $\Phi$  με σπιν-0, έχει δύο πόλους. Ο ένας πόλος αντιστοιχεί σε ένα φυσικώς αποδεκτό σωματίδιο με μάζα  $m^2 = \frac{\kappa^2}{6b}$ , ενώ ο άλλος σε ένα άμαζο σωματίδιο φάντασμα, το οποίο όμως, όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, είναι άκαχο και μπορεί να απομακρυνθεί. Στην περίπτωση της καθαρής  $R^2$  θεωρίας, η δράση είναι ανεξάρτητη της διαταραχής  $h_{\mu\nu}^\perp$ , και επομένως δεν υπάρχουν βαρυτόνια με σπιν-2 στο φάσμα των διακυμάνσεων γύρω από τη λύση Minkowski.

Ας εξετάσουμε τώρα το μέρος της δράσης που αφορά το πεδίο  $\Phi$ , για να διερευνήσουμε κατά πόσο τα σωματίδια που αντιστοιχούν στους πόλους του διαδότη είναι διαδιδόμενα ή μη. Εισάγουμε ένα νέο πεδίο  $\Psi$  στο κομμάτι της δράσης και εξετάζουμε τη σύζευξη του με την ύλη. Ειδικότερα [10]:

$$\begin{aligned} S_0^{(0)} &= \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{3\kappa^2}{32} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \frac{9b}{16} (\square \Phi)^2 + \Phi T \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{g} \left( \frac{3\kappa^2}{32} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + \Psi \square \Phi - \frac{4b}{9} \Psi^2 + \Phi T \right) \end{aligned} \quad (4.40)$$

όπου  $T$  το ίχνος του ταυυστή ενέργειας και ορμής της ύλης: ( $T^\mu{}_\mu = 8T$ ).

Μεταβάλλοντας την πιο πάνω δράση, καταλήγουμε στις δύο εξισώσεις κίνησης:

$$\left(\square - \frac{\kappa^2}{6b}\right)\Psi = -T \quad (4.41)$$

$$\square\Phi = \frac{8}{9b}\Psi \quad (4.42)$$

Με βάση την εξίσωση 4.41 συμπεραίνουμε ότι το πεδίο  $\Psi$  είναι διαδιδόμενο, με μάζα  $m^2 = \frac{\kappa^2}{6b}$ , και αντιστοιχεί στο φυσικό πόλο που εντοπίσαμε προηγουμένως. Εν αντιθέσει, το πεδίο  $\Phi$  δεν είναι διαδιδόμενο, και δεν έχει άμεση σύζευξη με τον ταυυστή ενέργειας και ορμής της ύλης. Το πεδίο αυτό αντιστοιχεί στον προβληματικό πόλο του διαδότη, μόνο που βλέπουμε ότι δεν είναι δυναμικό, διδιδόμενο πεδίο.

Στην καθαρή θεωρία  $R^2$ , όπου  $\kappa = 0$ , η εξίσωση 4.42 παραμένει η ίδια και η 4.41 γίνεται:

$$\square\Psi = -T \quad (4.43)$$

Αυτό επιβεβαιώνει το γεγονός ότι το πεδίο  $\Psi$ , και άρα το αντίστοιχο σωματίδιο παραμένει, καθώς και το γεγονός ότι είναι άμαζο. Συμπερασματικά, το φάσμα διακυμάνσεων της  $R^2$  θεωρίας γύρω από τον επίπεδο χωρόχρονο δεν εκδηλώνει φαντάσματα. Δεν περιλαμβάνει επίσης άμαζα βαρυτόνια με σπιν-2. Υπάρχει ένα άμαζο διδιδόμενο σωματίδιο με σπιν-0.

#### 4.2.2 Λύση καμπυλωμένου χωρόχρονου

Στη συνέχεια, ας εξετάσουμε τις καμπυλωμένες λύσεις για την περίπτωση της καθαρής  $R^2$  θεωρίας. Όπως αναφέραμε στα προηγούμενα υποκεφάλαια, οι συνεπείς λύσεις αντιστοιχούν σε χωρόχρονους de Sitter ( $b > 0$ ), με την βαθμωτή καμπυλότητα να είναι σταθερή. Γράφουμε λοιπόν την μετρική ως εξής:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (4.44)$$

όπου  $\bar{g}_{\mu\nu}$  η μετρική υποβάθρου (που αντιστοιχεί στην καμπυλομένη λύση). Αυτή ικανοποιεί τη σχέση  $\bar{R}_{\mu\nu} = \beta\bar{g}_{\mu\nu}$ , όπου  $\beta = \frac{\bar{R}}{4}$ .

Ακολουθώντας ανάλογα βήματα όπως στην περίπτωση του επίπεδου χωρόχρονου, η δράση παίρνει την μορφή [10]:



$$S_2 = b \int d^4x \left[ \left( D_\mu D_\nu h^{\mu\nu} - \square h - \frac{1}{4} \bar{R} \phi \right)^2 - \bar{R} \left( -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \phi \square \phi + D_\mu \phi D_\nu h^{\mu\nu} - D^\mu h_{\mu\rho} D_\nu h^{\nu\rho} \right) + \frac{\bar{R}^2}{6} \left( h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \phi^2 \right) \right] \quad (4.45)$$

Ομοίως αναλύουμε τη διαταραχή της μετρικής σε συνιστώσες:

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^\perp + D_\mu \alpha_\nu^\perp + D_\nu \alpha_\mu^\perp + \left( D_\mu D_\nu - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \square \right) \alpha + \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \phi \quad (4.46)$$

οι οποίες ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$D^\mu h_{\mu\nu}^\perp = 0, \quad \bar{g}^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^\perp = 0, \quad D^\mu \alpha_\mu^\perp = 0 \quad (4.47)$$

Οι απλές παράγωγοι έχουν αναχθεί σε συναλλοίωτες. Μετά από πράξεις και και την εισαγωγή αναλλοίωτου βαθμωτού πεδίου  $\Phi$ , η δράση γράφεται:

$$S_2 = b \int d^4x \left[ \frac{\bar{R}}{2} h_{\mu\nu}^\perp \left( \square - \frac{\bar{R}}{6} \right) h^{\perp\mu\nu} + \frac{9}{16} \Phi \left( \square^2 + \frac{\bar{R}}{3} \square \right) \Phi \right] \quad (4.48)$$

Η μορφή αυτής της δράσης προκύπτει ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} S_2 &= b \int d^4x [(\delta_1 R)^2 \sqrt{g} + 2\bar{R}(\delta_1 R)(\delta_1 \sqrt{g}) + \bar{R}^2(\delta_2 \sqrt{g}) + 2\bar{R}\sqrt{g}(\delta_2 R)] \\ &= b \int d^4x [(\delta_1 R)^2 \sqrt{g} + 2\bar{R}\delta_2(R\sqrt{g}) - \bar{R}^2(\delta_2 \sqrt{g})] \end{aligned} \quad (4.49)$$

όπου  $\delta_1, \delta_2$  οι διαταραχές πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα.

Παρατηρώντας την μορφή αυτή της δράσης, εύκολα κατανοούμε την αντιστοιχισή της με την δράση 4.7: Οι δύο τελευταίοι όροι αντιστοιχούν στη μεταβολή της δράσης Einstein-Hilbert στην παρουσία κοσμολογικής σταθεράς, ενώ ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην μεταβολή του κινητικού όρου του άμαζου πεδίου  $\phi$ , όπως ορίστηκε στην 4.3.

Επομένως, επιβεβαιώνεται ότι η καθαρή  $R^2$  θεωρία σε μη επίπεδους χωρόχρονους αντιστοιχεί σε κλασσική θεωρία βαρύτητας στην παρουσία κοσμολογικής σταθεράς και ενός άμαζου πεδίου. Οι διακυμάνσεις της θεωρίας περιλαμβάνουν ένα άμαζο βαρυτόνιο με σπιν-2 (graviton) καθώς και ένα άμαζο σπιν-0 σωματίδιο. Δεν εμφανίζεται κανένα φάντασμα, και η θεωρία είναι απόλυτα συνεπής.

### 4.3 Θεωρία Weyl

Θα αναλύσουμε στη συνέχεια τη γενικότερη δράση τετραγωνικής βαρύτητας, την οποία ονομάζουμε θεωρία Weyl. Στην δράση περιλαμβάνουμε έναν επιπρόσθετο όρο, ο οποίος είναι τετραγωνικός ως προς τον τανυστή Weyl [10]:

$$S_G = \int d^4x \sqrt{g} (c_1 C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} + c_2 R^2 + c_3 \hat{R}_{\mu\nu}^2) \quad (4.50)$$

όπου  $\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R$  και  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  ο τανυστής Weyl. Ο τανυστής αυτός κατασκευάζεται από τον τανυστή καμπυλότητας Riemann ώστε να έχει μηδενικό ίχνος. Συγκεκριμένα, δίδεται την έκφραση:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma}R_{\rho\nu} + g_{\nu\rho}R_{\sigma\mu} - g_{\mu\rho}R_{\sigma\nu} - g_{\nu\sigma}R_{\rho\mu}) + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu})R \quad (4.51)$$

Ο όρος Weyl παραμένει αναλλοίωτος ως προς τοπικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς, ενώ οι άλλοι δύο όροι είναι αναλλοίωτη ως προς καθολικούς μετασχηματισμούς κλίμακας μόνο (όπως είδαμε στο τρίτο κεφάλαιο). Στους τοπικούς σύμμορφους μετασχηματισμούς, η ποσότητα  $\Omega$  στην σχέση 3.27 ανάγεται σε μία αυθαίρετη συνάρτηση  $\Omega(x)$  στο χωρόχρονο.

Ο τετραγωνικός όρος Weyl μπορεί να εκφρασθεί και διαφορετικά ως:

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 2\hat{R}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{6}R^2 \\ &= GB + 2\hat{R}_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{6}R^2 \end{aligned} \quad (4.52)$$

όπου  $GB = R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$  ο τοπολογικός όρος Gauss-Bonnet [10].

Έτσι, η δράση 4.50 μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$S_G = \int d^4x \sqrt{g} \left[ a \left( R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2 \right) + bR^2 + cGB \right] \quad (4.53)$$

όπου  $a = 2c_1 + c_3$ ,  $b = c_2 + \frac{c_3}{12}$  και  $c = c_1$  σταθερές.

Αυτή η δράση εμφανίζει φαντάσματα, που δυστυχώς καθιστούν την γενικότερη θεωρία Weyl φυσικώς μη αποδεκτή. Αναλύοντας τις διακυμάνσεις γύρω από λύσεις της θεωρίας, ο διαδότης του σπιν-2 πεδίου 4.36 δίδεται από την εξής έκφραση [10]:

$$\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)} = -\frac{2}{q^2(aq^2 + \kappa^2)} P_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2)} \quad (4.54)$$

Ως αποτέλεσμα παρουσιάζεται ενός επιπλέον πόλος, άρα ένα επιπλέον σωματίδιο με αρνητική μάζα, το οποίο υπάρχει αποκλειστικά στην θεωρία Weyl. Το σωματίδιο αυτό οδηγεί σε αστάθειες και παθολογική συμπεριφορά. Γι' αυτό, δεν συμπεριλαμβάνουμε τον όρο Weyl στη θεωρία που εξετάζουμε.

#### 4.4 Νευτώνειο δυναμικό στο μοντέλο Starobinsky και στην $R^2$ θεωρία

Είναι χρήσιμο να εξετάσουμε πώς μια θεωρία τετραγωνικής βαρύτητας διαφέρει στο μη σχετικιστικό όριο από την κλασσική θεωρία βαρύτητας του Einstein και τον νόμο παγκόσμιας έλξης. Για τον σκοπό αυτό, θα προσδιορίσουμε πρώτα το πλάτος αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο μποζονίων ίσης μάζας  $m$  και σπιν-0.

Το δυναμικό μπορεί να προσδιοριστεί από το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$V(r) = -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{2\pi} \int d^3\vec{k} \mathcal{M}_{nr} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (4.55)$$

όπου  $\mathcal{M}_{nr}$  το χβαντομηχανικό πλάτος αλληλεπίδρασης στο μη σχετικιστικό όριο. Το διάγραμμα Feynman που περιγράφει τη βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων είναι το ακόλουθο:

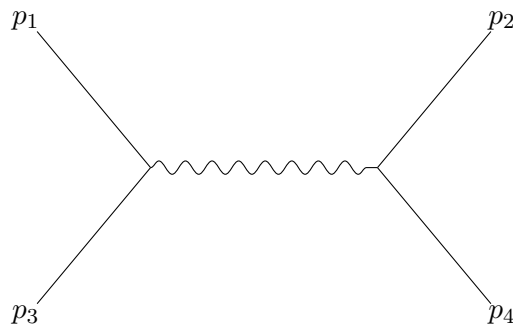


FIGURE 4.2: Διάγραμμα Feynman βαρυτικής αλληλεπίδρασης  $\phi + \phi \rightarrow \phi + \phi$

Στο διάγραμμα απεικονίζονται οι αρχικές και τελικές τετραορμές των σωματιδίων, οι οποίες συνδέονται με βάση την αρχή της διατήρησης της ενέργειας και της ορμής.

Η λαγκρανζιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση είναι [10]:

$$L = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu} \quad (4.56)$$

όπου  $\tau_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2)$ , ο ταχυστής ενέργειας και ορμής του αντίστοιχου μποζονικού πεδίου και  $h_{\mu\nu}$  η διαταραχή στη μετρική.

Από τη λαγκραντζιανή αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε τις κορυφές Feynman για υπολογισμό του πλάτους σκέδασης. Το πλάτος παίρνει τη μορφή:

$$\mathcal{M} = \bar{\tau}^{\mu\nu}(p_1, p_2) \Delta_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\tau}^{\rho\sigma}(p_3, p_4) \quad (4.57)$$

όπου  $\bar{\tau}_{\mu\nu}(p_i, p_j) = \frac{1}{2} [p_{\mu,i} p_{\nu,j} + p_{\mu,j} p_{\nu,i} - \eta_{\mu\nu} (p_i \cdot p_j + m^2)]$  και  $\Delta_{\mu\nu\rho\sigma}$  ο διαδότης του φορέα αλληλεπίδρασης που στην προκειμένη περίπτωση είναι τα βαρυτόνια με σπιν-2 και σπιν-0 που περιγράψαμε προηγουμένως.

Ας υπολογίσουμε τώρα το δυναμικό για τις δύο περιπτώσεις που μελετούμε.

#### 4.4.1 Δυναμικό στο μοντέλο Starobinsky

Χρησιμοποιώντας τους διαδότες 4.34 και 4.35, παίρνουμε την εξής έκφραση [10]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{1}{k^2 \kappa^2} [(p_1 - p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 - p_3)(p_2 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4 - m^2) \\ & + 2(p_1 \cdot p_2 - m^2)(p_3 \cdot p_4 - m^2) - \frac{2}{3}(p_1 \cdot p_2 - 2m^2)(p_3 \cdot p_4 - 2m^2)] \\ & + \frac{1}{12} \frac{1}{k^2(6bk^2 + \kappa^2)} (p_1 \cdot p_2 - 2m^2)(p_3 \cdot p_4 - 2m^2) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Η έκφραση αυτή απλοποιείται στο μη σχετικιστικό όριο, όπου όροι δευτέρας τάξης ως προς τις χωρικές ορμές των σωματιδίων μπορούν να αμεληθούν. Το μη σχετικιστικό πλάτος είναι:

$$\mathcal{M}_{nr} = -\frac{4}{3} \frac{m^4}{k^2 \kappa^2} + \frac{1}{3} \frac{m^4}{k^2(6bk^2 + \kappa^2)} = -\frac{m^4}{\kappa^2} \left( \frac{1}{k^2} + \frac{2b}{6bk^2 + \kappa^2} \right) \quad (4.59)$$

Εκτελώντας το ολοκλήρωμα 4.55 βρίσκουμε το Νευτώνειο δυναμικό:

$$U(r) = -\frac{Gm}{r} - \frac{Gm}{3} \frac{e^{-\beta M_P r}}{r} \quad (4.60)$$

όπου  $\beta = \frac{1}{2\sqrt{3}b}$  και  $\kappa^2 = \frac{1}{16\pi G} = \frac{M_P^2}{2}$ . Το δυναμικό περιέχει έναν όρο που είναι πανομοιότυπος με το δυναμικό της παγκόσμιας έλξης, αλλά περιέχει και έναν επιπλέον όρο μορφής Yukawa ο οποίος προκύπτει μέσω της ανταλλαγής βαθμωτών σωματιδίων με σπιν μηδέν και μη μηδενική μάζα.

Αν  $r \rightarrow \infty$ , τότε το δυναμικό τείνει να ταυτιστεί με το Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό. Αν από την άλλη έχουμε  $r \rightarrow 0$ , τότε το δυναμικό τείνει ταχύτερα προς το άπειρο.

Η μορφή του δυναμικού είναι η εξής:

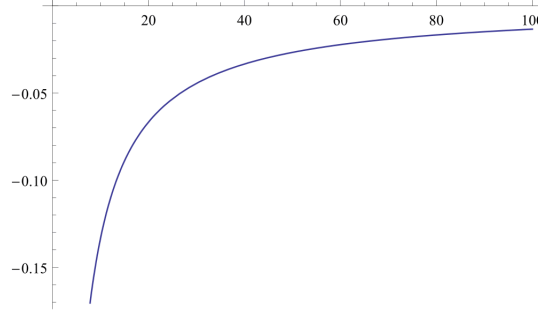


FIGURE 4.3: Νευτώνειο δυναμικό στο μοντέλο Starobinsky για  $m = \beta = G = M_P = 1$

#### 4.4.2 Δυναμικό στην θεωρία $R^2$

Στην περίπτωση αυτή, το πλάτος παίρνει την εξής μορφή στο μη σχετικιστικό όριο:

$$\mathcal{M}_{nr} = \frac{m^4}{18bk^4} \quad (4.61)$$

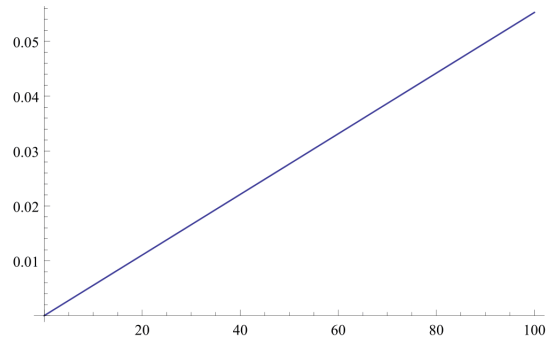
Μετασχηματίζοντας στο χώρο των θέσεων:

$$V(r) = mU(r) = \frac{m^2 r}{576\pi b} \quad (4.62)$$

Το δυναμικό μεταβάλλεται γραμμικά με την ακτινική συντεταγμένη, με αποτέλεσμα το αντίστοιχο βαρυτικό πεδίο να είναι σταθερό στον χώρο. Η μορφή αυτή είναι απόρροια της συμμετρίας κλίμακας. Δηλαδή:

$$F(r) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{m^2}{576\pi b} \quad (4.63)$$

όπου  $b$  σταθερά.

FIGURE 4.4: Νευτώνειο δυναμικό στην θεωρία  $R^2$  για  $m = \beta = G = M_P = 1$

## Κεφάλαιο 5

# Συνοριακοί όροι

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη θεωρία  $R^2$  σε πολλαπλότητες με σύνορα. Θα πρέπει να εισαγάγουμε επιπρόσθετους συνοριακούς όρους στη δράση, ώστε η ελαχιστοποίηση της να οδηγεί στις σωστές εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν σε κλειστούς χωρόχρονους χωρίς σύνορα.

### 5.1 Συνοριακοί όροι στη θεωρία Einstein

Η δράση παίρνει τη μορφή:

$$S_G = \frac{1}{16\pi G}(S_{EH} + S_{GYH}) \quad (5.1)$$

όπου  $S_{EH}$  η βαρυτική δράση Einstein-Hilbert 3.3 και  $S_{GYH}$  ο συνοριακός όρος Gibbons-York-Hawking [13]:

$$S_{GYH} = 2 \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3y \epsilon \sqrt{|h|} K \quad (5.2)$$

όπου  $\partial\mathcal{V}$  το σύνορο του χωρόχρονου  $\mathcal{V}$ ,  $y^i$  οι συντεταγμένες στο σύνορο,  $\epsilon$  ένας παράγοντας ο οποίος παίρνει την τιμή  $+1$  αν το σύνορο είναι χρονοειδές και  $-1$  αν το σύνορο είναι χωροειδές,  $h$  η ορίζουσα της επαγόμενης μετρικής  $h_{ij}$  στο σύνορο και  $K$  η βαθμωτή εξωτερική (extrinsic) καμπυλότητα του συνόρου:

$$K = h^{ij} K_{ij} \quad (5.3)$$

όπου  $K_{ij}$  ο τανυστής της εξωτερικής καμπυλότητας.

Η δράση  $S_{EH}$  ορίζεται στον  $\mathcal{V}$ :

$$S_{EH} = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} R \quad (5.4)$$

Στην παρακάτω ανάλυση θα υπολογίσουμε αυτόν τον ταυιστή εξωτερικής καμπυλότητας καθώς και το ίχνος του. Μεταβάλλουμε τη δράση επιβάλλοντας την εξής συνοριακή συνθήκη Dirichlet:

$$\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{V}} = 0 \quad (5.5)$$

Στο τρίτο κεφάλαιο, είχαμε μελετήσει τη μεταβολή της δράσης  $S_{EH}$ , όπου βρήκαμε τον όρο:

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} \delta g_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - R^{\mu\nu} \right)$$

καθώς και τον όρο:

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} (\nabla_{\nu} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - \nabla_{\lambda} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})$$

που μπορεί να εκφρασθεί σαν ολοκλήρωμα ολικής παραγώγου. Σε ένα χωρόχρονο με σύνορο, ο όρος αυτός δεν μηδενίζεται. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για τις συναλλοίωτες παραγώγους, ο όρος αυτός γράφεται στη μορφή:

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} \nabla_{\sigma} (g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})$$

Για δική μας ευκολία, ορίζουμε:

$$V^{\sigma} = g^{\mu\sigma} \delta \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - g^{\mu\nu} \delta \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \quad (5.6)$$

Γνωρίζοντας πως δρα η συναλλοίωτη παράγωγος σε ένα διάνυσμα, παίρνουμε:

$$\sqrt{g} \nabla_{\sigma} V^{\sigma} = \partial_{\sigma} (\sqrt{g} V^{\sigma}) \quad (5.7)$$

Ολοκληρώνουμε και εφαρμόζουμε το θεώρημα Gauss-Stokes με βάση το οποίο προκύπτει [13]:



$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \partial_\sigma (\sqrt{g} V^\sigma) = \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3y \epsilon \sqrt{|h|} n_\sigma V^\sigma \quad (5.8)$$

όπου  $n_\sigma$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα (normal vector).

Χρησιμοποιώντας την σχέση για τα σύμβολα Christoffel [9]:

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \quad (5.9)$$

κάνουμε τις εξής μετατροπές [13]:

$$n_\sigma V^\sigma = n^\lambda V_\lambda \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} V_\lambda &= g_{\sigma\lambda} V^\sigma = g_{\sigma\lambda} \left[ g^{\mu\sigma} \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \partial_\mu \delta g_{\rho\lambda} - g^{\mu\nu} \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (\partial_\mu \delta g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \delta g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu}) \right] \\ &= g^{\mu\nu} (\partial_\lambda \delta g_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta g_{\lambda\mu}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \epsilon n^\mu n^\nu \quad (5.12)$$

Στην τελευταία σχέση εμφανίζεται η επαγόμενη μετρική [9]:

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu \quad (5.13)$$

με τους δείκτες  $i, j$  να παίρνουν τιμές που αντιστοιχούν στις  $d-1$  διευθύνσεις του συνόρου (όπου  $d$  ο αριθμός των διαστάσεων του χωρόχρονου), οι μερικές παραγώγοι  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$  ορίζονται με βάση τις συντεταγμένες  $y^i$  του συνόρου και οι συναρτήσεις  $x^\mu = x^\mu(y^i)$  εμβαπτίζουν το σύνορο στο χωρόχρονο. Ειδικότερα, ο πίνακας  $h^{\mu\nu}$  συνδέεται με την επαγόμενη μετρική με την εξής έκφραση:

$$h^{\mu\nu} = e^\mu{}_i e^\nu{}_j h^{ij} \quad (5.14)$$

όπου  $e^\mu{}_i = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}$  τα εφαπτομενικά διανύσματα στο σύνορο.

Από τις σχέσεις 5.10, 5.11 και 5.12, βρίσκουμε:

$$n^\lambda V_\lambda = n^\lambda (h^{\mu\nu} + \epsilon n^\mu n^\nu) (\partial_\lambda \delta g_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta g_{\lambda\mu}) \quad (5.15)$$

Επειδή η μεταβολή της μετρικής και οι εφαπτομενικές της παράγωγοι μηδενίζονται στο σύνορο,  $\delta g_{\mu\nu} = 0$ , ισχύει:

$$h^{\mu\nu} \partial_\nu \delta g_{\lambda\mu} = 0 \quad (5.16)$$

Χρησιμοποιούμε επίσης την συμμετρικότητα της έκφρασης  $en^\lambda n^\mu n^\nu$  ως προς τους δείκτες και τη σχέση:

$$\epsilon = n^\mu n_\mu \quad (5.17)$$

για να καταλήξουμε τελικά στη σχέση:

$$n^\lambda V_\lambda = n^\lambda h^{\mu\nu} \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu} \quad (5.18)$$

Τώρα, ας προσδιορίσουμε τη μεταβολή του συνοριακού όρου ( $S_{GYH}$ ):

$$\delta S_{GYH} = 2 \oint_{\partial V} d^3 y \epsilon \left( \delta \sqrt{|h|} K + \sqrt{|h|} \delta K \right) \quad (5.19)$$

Η μεταβολή της ορίζουσας της επαγόμενης μετρικής μηδενίζεται επειδή είναι ανάλογη της μεταβολής  $\delta h_{\mu\nu}$  που μηδενίζεται στο σύνορο.

Για να μηδενίζονται λοιπόν όλοι οι συνοριακοί όροι, πρέπει:

$$- \oint_{\partial V} d^3 y \epsilon \sqrt{|h|} n^\lambda h^{\mu\nu} \partial_\lambda \delta g_{\mu\nu} = 2 \oint_{\partial V} d^3 y \epsilon \sqrt{|h|} \delta K \quad (5.20)$$

Ο τανυστής εξωτερικής καμπυλότητας ορίζεται βάσει της συναλλοίωτης παραγώγου του κάθετου διανύσματος:

$$K_{\alpha\beta} = \partial_\alpha n_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n_\gamma = \nabla_\alpha n_\beta \quad (5.21)$$

Παίρνοντας το ίχνος, προκύπτει η αντίστοιχη βαθμωτή καμπυλότητα

$$K = \nabla_\alpha n^\alpha \quad (5.22)$$

Υπολογίζοντας την πιο πάνω συναλλοίωτη παράγωγο, και κάνοντας χρήση των εξισώσεων 5.12 και 3.10, καταλήγουμε στην σχέση [13]:

$$K = h^{\alpha\beta}(\partial_\alpha n_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n_\gamma) \Rightarrow \delta K = \delta h^{\alpha\beta}(\partial_\alpha n_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n_\gamma) + h^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n_\gamma \quad (5.23)$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται, ενώ ο δεύτερος γράφεται ως:

$$\delta K = h^{\alpha\beta} \delta \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} n_\gamma = h^{\alpha\beta} n_\gamma \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha \delta g_{\beta\delta} + \partial_\beta \delta g_{\alpha\delta} - \partial_\delta \delta g_{\alpha\beta}) \quad (5.24)$$

Οι πρώτοι όροι στην παρένθεση δεν συνεισφέρουν, και έτσι φτάνουμε στην απλή σχέση:

$$\delta K = -\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} n^\delta \partial_\delta \delta g_{\alpha\beta} \quad (5.25)$$

Ονομάζοντας κατάλληλα τους βωβούς δείκτες στην πιο πάνω έκφραση, εύκολα επαληθεύουμε τη σχέση 5.20. Επιβεβαιώνεται η ορθότητα της επιλογής του συνοριακού όρου της δράσης 5.1.

## 5.2 Συνοριακοί όροι για την $f(R)$ θεωρία

Προχωρούμε στη μελέτη των συνοριακών όρων στην  $f(R)$  θεωρία. Η δράση και ο συνοριακός όρος είναι είναι [13]:

$$S_{EH} = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} f(R) \quad (5.26)$$

$$S_{GYH} = 2 \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3y \epsilon \sqrt{|h|} f'(R) K \quad (5.27)$$

όπου  $f'(R) = \frac{df(R)}{dR}$ .

Σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα Dirichlet επιβάλλει να κρατήσουμε περισσότερους βαθμούς ελευθερίας σταθερούς στο σύνορο. Στην περίπτωση της  $R^2$  θεωρίας θα πρέπει επιπρόσθετα να κρατήσουμε και την βαθμωτή καμπυλότητα  $R$  σταθερή στο σύνορο.

Παίρνοντας τη μεταβολή της δράσης προκύπτει:

$$\delta S_{EH} = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} \left( -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} f(R) + f'(R) \delta R \right) \quad (5.28)$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι η μεταβολή  $\delta R$  ισούται με:

$$\delta R = \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \nabla_{\sigma}(g^{\alpha\beta} \delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\sigma} \delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}) \quad (5.29)$$

Τα στοιχεία της σύνδεσης μεταβάλλονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}(\partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\gamma\beta} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}(\partial_{\beta}\delta g_{\gamma\alpha} + \partial_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \partial_{\gamma}\delta g_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}\delta g^{\sigma\gamma}(\partial_{\beta}g_{\gamma\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\gamma\beta} - \partial_{\gamma}g_{\alpha\beta}) + g^{\sigma\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\delta g_{\sigma\lambda} \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}(\nabla_{\beta}\delta g_{\gamma\alpha} + \nabla_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Το πιο πάνω αποτέλεσμα σε συνδυασμό με την σχέση:

$$\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (5.31)$$

δίνουν:

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}(\nabla_{\beta}\delta g_{\gamma\alpha} + \nabla_{\alpha}\delta g_{\gamma\beta} - \nabla_{\gamma}\delta g_{\alpha\beta}) \quad (5.32)$$

Παρομοίως:

$$\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}\nabla_{\alpha}\delta g_{\sigma\gamma} \quad (5.33)$$

Για ευκολία των πράξεων, είναι πιο εύχρηστο να τροποποιήσουμε τις σχέσεις 5.32 και 5.33 ως ακολούθως [13]:

$$\delta\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(g_{\alpha\mu}\nabla_{\beta}\delta g^{\sigma\mu} + g_{\beta\mu}\nabla_{\alpha}\delta g^{\sigma\mu} - g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}\nabla^{\sigma}\delta g^{\mu\nu}) \quad (5.34)$$

$$\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\delta g^{\mu\nu} \quad (5.35)$$

Έχοντας τα αποτελέσματα αυτά, τελικά βρίσκουμε:

$$\delta R = \delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\nabla^2\delta g^{\alpha\beta} - \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\delta g^{\alpha\beta} \quad (5.36)$$

Επομένως η μεταβολή της δράσης είναι:

$$\delta S_{EH} = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} \left[ f'(R) (\delta g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla^2 \delta g^{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta g^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} f'(R) g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right] \quad (5.37)$$

Για να χειριστούμε τα ολοκληρώματα:

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} f'(R) g_{\alpha\beta} \nabla^2 \delta g^{\alpha\beta}$$

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} f'(R) \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta g^{\alpha\beta}$$

ορίζουμε τις ακόλουθες δύο διανυσματικές ποσότητες [13]:

$$M_\rho = f'(R) g_{\alpha\beta} \nabla_\rho \delta g^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \nabla_\rho [f'(R)] \quad (5.38)$$

$$N^\omega = f'(R) \nabla_\gamma \delta g^{\omega\gamma} - \delta g^{\omega\gamma} \nabla_\gamma [f'(R)] \quad (5.39)$$

Επίσης, όπως αναφέραμε προηγουμένως, η μεταβολή της βαθμωτής καμπυλότητας μηδενίζεται στο σύνορο:

$$\delta R|_{\partial\mathcal{V}} = 0 \quad (5.40)$$

Με βάση τον ορισμό του κάθετου διανύσματος, προκύπτουν οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$n^\rho M_\rho|_{\partial\mathcal{V}} = n^\rho f'(R) g_{\alpha\beta} \partial_\rho \delta g^{\alpha\beta} \quad (5.41)$$

$$n_\omega N^\omega|_{\partial\mathcal{V}} = n_\omega f'(R) \partial_\gamma \delta g^{\omega\gamma} \quad (5.42)$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις 5.41 και 5.42 κατά μέρη, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} n^\rho M_\rho + n_\omega N^\omega &= n^\rho f'(R) (g_{\alpha\beta} \partial_\rho \delta g^{\alpha\beta} + g_{\omega\rho} \partial_\gamma \delta g^{\omega\gamma}) \\ &= -n^\rho f'(R) (g^{\alpha\beta} \partial_\rho g_{\alpha\beta} + g^{\gamma\nu} \partial_\gamma \delta g_{\rho\nu}) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Υπενθυμίζουμε την σχέση 5.12 και τις σχέσεις [13]:

$$n_\sigma h^{\sigma\mu} = 0 \quad (5.44)$$

$$h^{\gamma\nu} \partial_\gamma \delta g_{\mu\nu} |_{\partial\mathcal{V}} = 0 \quad (5.45)$$

Η τελευταία ισχύει επειδή μηδενίζονται οι εφαπτομενικές παράγωγοι της μεταβολής της μετρικής στο σύνορο.

Επομένως η σχέση 5.43 ανάγεται σε μία πιο απλή έκφραση:

$$n^\rho M_\rho + n_\omega N^\omega = -n^\rho f'(R) h^{\alpha\beta} \partial_\rho \delta g_{\alpha\beta} \quad (5.46)$$

Ας δούμε πώς προκύπτει ο πιο πάνω όρος στα ολοκληρώματά μας. Καταρχάς, υπολογίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο:

$$\begin{aligned} \nabla^\rho M_\rho &= \nabla^\rho \{f'(R) g_{\alpha\beta} \nabla_\rho \delta g^{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \nabla_\rho [f'(R)]\} \\ &= f'(R) g_{\alpha\beta} \nabla^2 \delta g^{\alpha\beta} - \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \nabla^2 [f'(R)] \end{aligned} \quad (5.47)$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε:

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} \nabla^\rho M_\rho = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} f'(R) g_{\alpha\beta} \nabla^2 \delta g^{\alpha\beta} - \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \nabla^2 [f'(R)] \quad (5.48)$$

Στο αριστερό ολοκλήρωμα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Gauss-Stokes. Καταλήγουμε έτσι στην ακόλουθη ολοκληρωτική σχέση:

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} f'(R) g_{\alpha\beta} \nabla^2 \delta g^{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} \delta g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \nabla^2 [f'(R)] + \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon n^\rho M_\rho \quad (5.49)$$

Επαναλαμβάνουμε τα πιο πάνω βήματα και για την δεύτερη διανυσματική ποσότητα:

$$\begin{aligned} \nabla_\omega N^\omega &= \nabla_\omega \{f'(R) \nabla_\gamma \delta g^{\omega\gamma} - \delta g^{\omega\gamma} \nabla_\gamma [f'(R)]\} \\ &= f'(R) \nabla_\omega \nabla_\gamma \delta g^{\omega\gamma} - \delta g^{\omega\gamma} \nabla_\omega \nabla_\gamma [f'(R)] \end{aligned} \quad (5.50)$$

Καταλήγουμε στην ακόλουθη ολοκληρωτική σχέση:

$$\int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} f'(R) \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta g^{\alpha\beta} = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} \delta g^{\omega\gamma} \nabla_\omega \nabla_\gamma [f'(R)] + \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon n_\omega N^\omega \quad (5.51)$$

Συνδυάζοντας τα πιο πάνω αποτελέσματα με τη σχέση 5.46, εκφράζουμε την μεταβολή της δράσης, εξίσωση 5.37, στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} = \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} \delta g^{\alpha\beta} \left[ f'(R) R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla^2 f'(R) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f'(R) - \frac{1}{2} f(R) g_{\alpha\beta} \right] \\ + \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon f'(R) n^\rho h^{\alpha\beta} \partial_\rho \delta g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στις βαρυτικές εξισώσεις. Ο δεύτερος όρος θα ακυρωθεί από τη μεταβολή του συνοριακού όρου που προσθέσαμε στη δράση.

Ας το επιβεβαιώσουμε, εφαρμόζοντας την αρχή του Hamilton για τον συνοριακό όρο αυτό:

$$\delta S_{GYH} = 2 \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon [f''(R) K \delta R + f'(R) \delta K] \quad (5.53)$$

Υπολογίσαμε τη μεταβολή  $\delta K$  στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο όρος που περιέχει τη μεταβολή  $\delta R$  μηδενίζεται. Άρα:

$$\delta S_{GYH} = \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon f'(R) n^\sigma h^{\alpha\beta} \partial_\sigma \delta g_{\alpha\beta} \quad (5.54)$$

Με μία κατάλληλη ονομασία των βωβών δεικτών, παρατηρούμε ότι όλοι οι συνοριακοί όροι στη μεταβολή της συνολικής δράσης μηδενίζονται. Για χάρη πληρότητας, γράφουμε τις εξισώσεις που εξήγαμε:

$$f'(R) R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla^2 f'(R) - \nabla_\alpha \nabla_\beta f'(R) - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} f(R) = 0 \quad (5.55)$$

Με βάση το αποτέλεσμα αυτό, μπορούμε να βρούμε και πάλι τις εξισώσεις κίνησης της  $R^2$  θεωρίας, αντικαθιστώντας ( $f(R) = R^2$ ):

$$R R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla^2 R - \nabla_\alpha \nabla_\beta R - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} R^2 = 0 \quad (5.56)$$

Την ίδια εξίσωση βρήκαμε στο τρίτο κεφάλαιο.

Οι εξισώσεις 5.55 και 5.56 περιέχουν χρονικές παραγώγους ανώτερης τάξης. Αυτό προφανώς δυσκολεύει την εύρεση λύσεων στην γενικότερη περίπτωση και απαιτεί επιπλέον αρχικές ή συνοριακές συνθήκες (όπως έχουμε ήδη αναφέρει) και βαθμούς ελευθερίας σε σχέση με την συνήθη θεωρία βαρύτητας.

Τέλος, υπολογίζουμε τον συνοριακό όρο για την  $R^2$  θεωρία:

$$S_{GYH} = 4 \oint_{\partial V} d^3y \sqrt{|h|} \epsilon^{RK} \quad (5.57)$$

### 5.3 Παράδειγμα συνοριακής επιφάνειας

Έχουμε ήδη μελετήσει την μετρική μιας κλειστής κοσμολογίας Friedmann-Robertson-Walker. Επαναορίζοντας τη χρονική συντεταγμένη, η παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = \sigma^2[-N^2(t)dt^2 + \alpha^2(t)d\Omega_3^2] \quad (5.58)$$

Η χρονική συνιστώσα της μετρικής είναι ανάλογη με τη συνάρτηση  $N(t)$ , η οποία ονομάζεται συνάρτηση μεσολάβησης (lapse function).

Η χρονική φέτα  $t = t_0$  διαμερίζει τον χωρόχρονο σε δύο τμήματα και αποτελεί συνοριακή (χωροειδή) επιφάνεια για κάθε τμήμα.

Εφαρμόζοντας τα όσα αναφέραμε, μπορούμε να δείξουμε ότι η επαγόμενη μετρική στη συνοριακή επιφάνεια, ταυτίζεται με τη χωρική συνιστώσα της μετρικής. Επομένως:

$$h_{rr} = \frac{\sigma^2 \alpha^2}{1 - kr^2}, \quad h_{\theta\theta} = \sigma^2 \alpha^2 r^2, \quad h_{\phi\phi} = \sigma^2 \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (5.59)$$

Η χρονική φέτα αποτελεί μια ισοσταθμική επιφάνεια της συνάρτησης  $f = t - t_0$ :

$$f = t - t_0 = 0 \Rightarrow \partial_\mu f = \delta^t_\mu \quad (5.60)$$

Για να βρούμε το κάθετο διάνυσμα, υπολογίζουμε την κλίση της συνάρτησης  $f$  στην συνοριακή επιφάνεια:

$$n_\mu = N \sigma \delta_\mu^t \Rightarrow n^\mu = \frac{1}{N \sigma} \delta^\mu_t \quad (5.61)$$

Το ακόλουθο σχήμα απεικονίζει την χρονική φέτα  $t = t_0$  και το κάθετο διάνυσμα:



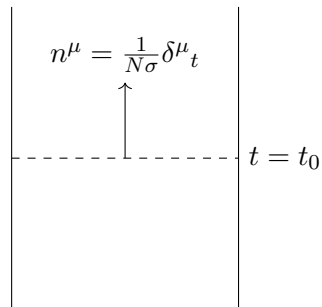


FIGURE 5.1: Η φέτα  $t = t_0$  και το κάθετο διάνυσμα στην κλειστή γεωμετρία Friedmann-Robertson-Walker

Έχοντας προσδιορίσει το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, βρίσκουμε τον τανυστή εξωτερικής καμπυλότητας και το ίχνος του. Συγκεκριμένα:

$$K_{ij} = -\frac{1}{2N\sigma} \partial_t h_{ij} \quad (5.62)$$

$$K = -\frac{1}{2N\sigma} h^{ij} \partial_t h_{ij} = -\frac{3}{N\sigma} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \quad (5.63)$$



## Κεφάλαιο 6

# Κυματοσυνάρτηση Hartle-Hawking

Στο κβαντικό επίπεδο, οι καταστάσεις του Σύμπαντος περιγράφονται από κυματοσυναρτήσεις που ορίζονται στον χώρο των τρισδιάστατων μετρικών  $h_{ij}$  (με Ευκλείδεια ταυτότητα). Ο χώρος αυτός ονομάζεται "superspace". Μία τέτοια κυματοσυνάρτηση, που περιγράφει την βασική κατάσταση μίας κλειστής κοσμολογίας, η οποία περνά από φάση πληθωρισμού, είναι και η κυματοσυνάρτηση Hartle-Hawking.

Ειδικότερα, οι επιτρεπόμενες κυματοσυναρτήσεις  $\Psi(h_{ij})$  ικανοποιούν την εξίσωση Wheeler-DeWitt [14][2]:

$$\left[ -G_{ijkl} \frac{\delta^2}{\delta h_{ij} \delta h_{kl}} - {}^3R(h)\sqrt{h} + 2\Lambda\sqrt{h} \right] \Psi(h_{ij}) = 0 \quad (6.1)$$

όπου  ${}^3R(h)$  η βαθμωτή καμπυλότητα που συνδέεται με τη μετρική  $h_{ij}$ ,  $\Lambda$  η κοσμολογική σταθερά (η οποία πρέπει να είναι θετική) και  $G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl})$  η μετρική στον χώρο των τρισδιάστατων μετρικών [14].

Στα πλαίσια της κβαντικής κοσμολογίας, προκύπτουν ορισμένα βασικά ερωτήματα: Πώς είναι δυνατόν να μελετηθεί πειραματικά η κυματοσυνάρτηση του Σύμπαντος; Πώς θα μπορούσε κανείς να μιλήσει για κβαντική κοσμολογία γενικότερα, αν αναλογιστούμε ότι το Σύμπαν είναι κυριολεκτικά ό,τι πιο μακροσκοπικό υπάρχει;

Η κυματοσυνάρτηση  $\Psi(h_{ij})$  όμως θα περιγράφει την κατάσταση του Σύμπαντος αμέσως μετά τη Μεγάλη Έκρηξη (Big Bang), όταν το Σύμπαν ήταν μικροσκοπικό και οι διακυμάνσεις στη γεωμετρία του έντονες. Στα χαστικά πληθωριστικά μοντέλα, αρχικά το Σύμπαν έχει μέγεθος 2-3 φορές μεγαλύτερο του μήκους Planck. Επομένως πρέπει να προσεγγίσουμε το Σύμπαν στο κβαντικό επίπεδο.

Μια κυματοσυνάρτηση επιδέχεται στατιστικής ερμηνείας, και συνεπώς η πειραματική επιβεβαίωσή της απαιτεί πολλές επαναλήψεις πανομοιότυπων πειραμάτων, ώστε η πιθανότητα που συνδέεται με την κυματοσυνάρτηση να μπορεί να εξακριβωθεί. Στο επίπεδο της κοσμολογίας μία τέτοια στατιστική ανάλυση καθίσταται αδύνατη. Επίσης, ο παρατηρητής αποτελεί αναπόφευκτα μέρος του συστήματος. Τα ερωτήματα αυτά παραμένουν πρακτικά αναπάντητα έως και σήμερα.

Για να προσδιορίσουμε την κυματοσυνάρτηση, χρησιμοποιούμε την μέθοδο Ευκλείδιων συναρτησιακών ολοκληρωμάτων Feynman [14]. Θεωρούμε το τμήμα του Ευκλείδιου χώρου  $\tau \leq \tau_0$ , και αθροίζουμε ως προς τετραδιάστατες, Ευκλείδιες συμπαγείς μετρικές, με επαγόμενη μετρική  $h_{ij}$  στο σύνορο  $\tau = \tau_0$ :

$$\Psi_0(h_{ij}) = N \int [dg] e^{-I_C(g)} \quad (6.2)$$

όπου  $I_C$  η κλασσική Ευκλείδια δράση και  $N$  σταθερά κανονικοποίησης. Καμία άλλη συνθήκη δεν απαιτείται. Στη θεωρία Einstein, στην παρουσία θετικής κοσμολογικής σταθεράς, η Ευκλείδια δράση δίδεται από την έκφραση:

$$I_C = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) - 2 \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3x \sqrt{h} K \quad (6.3)$$

Στα επόμενα υποκεφάλαια θα εξηγήσουμε πώς ένας τέτοιος υπολογισμός είναι εφικτός και θα εξαγάγουμε κάποια αποτελέσματα στα πλαίσια της θεωρίας Einstein και της  $R^2$  θεωρίας.

## 6.1 Ευκλείδια συναρτησιακά ολοκληρώματα

Τα Ευκλείδια συναρτησιακά ολοκληρώματα B.24 (βλ. παράρτημα Β') έχουν καλύτερες ιδιότητες σύγκλισης. Εισάγουμε την σχέση πληρότητας (με βάση τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας):

$$\sum_E |\psi_E\rangle \langle \psi_E| = \mathbb{1} \quad (6.4)$$

στον διαδότη:

$$\begin{aligned} \langle q_f, T | q_i, 0 \rangle &= \sum_E \langle q_f | e^{-\frac{i\hat{H}T}{\hbar}} | \psi_E \rangle \langle \psi_E | q_i \rangle \\ &= \sum_E \langle q_f | \psi_E \rangle \langle \psi_E | q_i \rangle e^{-\frac{iET}{\hbar}} = \sum_E \Psi_E(q_f) \Psi_E^*(q_i) e^{-\frac{iET}{\hbar}} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Κάνοντας μία στροφή στον Ευκλείδιο χώρο,  $t = -i\tau$ , η πιο πάνω σχέση ανάγεται στην ακόλουθη:

$$\sum_E \Psi_E(q_f) \Psi_E^*(q_i) e^{-\frac{ET_{euc.}}{\hbar}} = \int [dq]_{q(\tau_i)=q_i}^{q(\tau_f)=q_f} e^{-\frac{I}{\hbar}} \quad (6.6)$$

όπου  $T_{euc.}$  ο χρόνος  $T$  στον Ευκλείδιο χώρο.

Στο όριο  $T_{euc.} \rightarrow +\infty$ , οι όροι που αντιστοιχούν στις διεγερμένες ενεργειακές καταστάσεις μηδενίζονται αρκετά γρήγορα. Επιλέγουμε την αρχική χρονική στιγμή να είναι  $\tau_i = -T_{euc.}$  και την τελική  $\tau_f = 0$ . Επίσης ολοκληρώνουμε ως προς την αρχική θέση  $q_i$ . Θέτοντας  $q_f = q$ , προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για την κυματοσυνάρτηση, που περιγράφει τη θεμελιώδη κβαντική κατάσταση του συστήματος:

$$\Psi_0(q) = N \int [dq(\tau \leq 0)]_{q(0)=q} e^{-\frac{I}{\hbar}} \quad (6.7)$$

όπου  $N$  παράγοντας κανονικοποίησης. Συμπεραίνουμε ότι η θεμελιώδης κυματοσυνάρτηση ενός κβαντικού συστήματος μπορεί να υπολογιστεί ως ένα Ευκλείδιο συναρτησιακό ολοκλήρωμα, ως προς τον μισό ευκλείδιο χώρο ( $\tau \leq 0$ ). Το συναρτησιακό ολοκλήρωμα απεικονίζεται γραφικά στο σχήμα B.1.

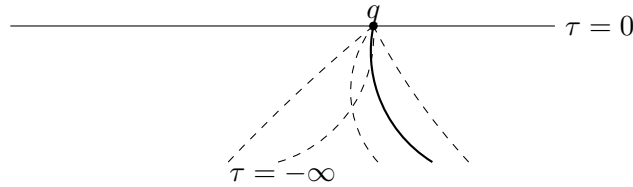


FIGURE 6.1: Συναρτησιακό ολοκλήρωμα στον μισό Ευκλείδιο χώρο.

### 6.1.1 Παράδειγμα αρμονικού ταλαντωτή

Υπενθυμίζουμε την λύση για τον διαδότη απλού αρμονικού ταλαντωτή B.38:

$$K(x_f, T; x_i, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} \exp \left\{ \frac{i m \omega}{2 \hbar \sin \omega T} [(x_i^2 + x_f^2) \cos \omega T - 2x_i x_f] \right\} \quad (6.8)$$

Εφαρμόζουμε τα πιο πάνω βήματα για να υπολογίσουμε την κυματοσυνάρτηση  $\Psi_0$ . Συνεχίζοντας στον Ευκλείδιο χρόνο, ο εκθέτης στην πιο πάνω έκφραση του διαδότη παίρνει την ακόλουθη μορφή (που είναι ίση με την αρνητική Ευκλείδια δράση του κλασσικού δρόμου διά  $\hbar$ ):

$$-\frac{I_C}{\hbar} = -\frac{m\omega}{2\hbar \sinh \omega T} [(x_i^2 + x_f^2) \cosh \omega T - 2x_i x_f] \quad (6.9)$$

Στην πιο πάνω έκφραση έχουμε παραλείψει την υποδιαστολή "euc." από τον Ευκλείδιο χρόνο  $T$  για χάριν απλότητας. Στο όριο  $T \rightarrow +\infty$ , παίρνουμε

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} -\frac{I_C}{\hbar} = -\frac{m\omega(x_i^2 + x_f^2)}{2\hbar} \quad (6.10)$$

Ολοκληρώνοντας τον Ευκλείδιο διαδότη ως προς  $x_i$ , βρίσκουμε στο όριο αυτό:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_i e^{-I_C/\hbar} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}} e^{-\frac{m\omega x_f^2}{2\hbar}} \quad (6.11)$$

Ο σταθερός συντελεστής που πολλαπλασιάζει το εκθετικό μπορεί να απορροφηθεί στην σταθερά κανονικοποίησης. Μετονομάζοντας το  $x_f$  σε  $x$ , βρίσκουμε την βασική κυματοσυνάρτηση:

$$\Psi_0(x) = N e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad (6.12)$$

Τέλος, κανονικοποιούμε την κυματοσυνάρτηση:

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad (6.13)$$

Η πιο πάνω κυματοσυνάρτηση είναι η κανονικοποιημένη βασική κυματοσυνάρτηση του αρμονικού ταλαντωτή.

## 6.2 Ευκλείδια συναρτησιακά ολοκληρώματα για βαθμωτά πεδία

Ο πιο πάνω φορμαλισμός μπορεί να γενικευθεί και στην περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου. Διαμερίζουμε τον χώρο σε πολύ μικρές κυψελίδες, έτσι ώστε η ένταση του πεδίου σε κάθε κυψελίδα να θεωρείται σταθερή. Με τον τρόπο αυτό, παραμετροποιούμε το σύστημα μας συναρτήσει άπειρων, αλλά διακριτών βαθμών ελευθερίας, έναν για κάθε κυψελίδα στον χώρο. Μπορούμε να αθροίσουμε τώρα ως προς όλες τις διατάξεις πεδίων που ικανοποιούν

την αρχική και τελική συνθήκη, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

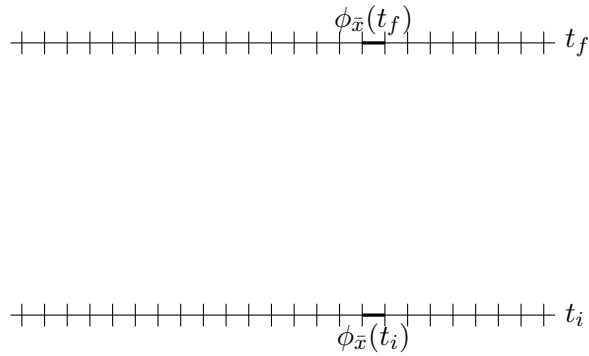


FIGURE 6.2: Διακριτοποίηση χώρου και αρχική και τελική διάταξη ενός βαθμωτού πεδίου

Οι δρόμοι που αθροίζονται στην περίπτωση αυτή περιγράφουν το ιστορικό των τιμών του πεδίου, για κάθε σημείο του χώρου, μεταξύ της αρχικής και της τελικής χρονικής στιγμής.

Η θεμελιώδης κυματοσυνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί ως ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα ως προς τον μισό Ευκλείδειο χώρο [15]:

$$\Psi_0[\phi(x)] = N \int [d\phi_x(\tau \leq 0)]_{\phi_x(0)=\phi(x)} e^{-\frac{I}{\hbar}} \tag{6.14}$$

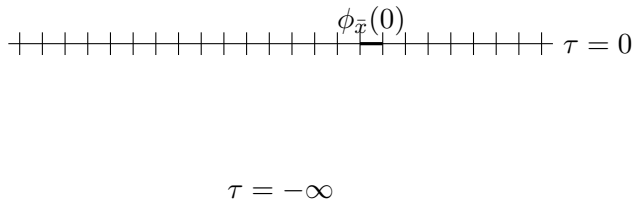


FIGURE 6.3: Συνοριακές συνθήκες στον μισό Ευκλείδειο χώρο

Οι κυματοσυναρτήσεις ενός πεδίου είναι συναρτησιακά, αφού το όρισμά τους είναι μια συνάρτηση στον χώρο. Ισοδύναμα μπορούμε να ερμηνεύουμε την κυματοσυνάρτηση ως μια συνάρτηση άπειρων βαθμών ελευθερίας, με τον κάθε βαθμό ελευθερίας να αντιστοιχεί στην ένταση του πεδίου σε κάθε κυψελίδα του χώρου.

### 6.3 Υπολογισμός της κυματοσυνάρτησης Hartle-Hawking στην κλασική θεωρία βαρύτητας

Προχωρούμε να εφαρμόσουμε τα πιο πάνω για τον υπολογισμό της κυματοσυνάρτησης Hartle-Hawking στην θεωρία βαρύτητας του Einstein. Η κυματοσυνάρτηση ορίζεται στον χώρο των τρισδιάστατων Ευκλείδειων μετρικών  $h_{ij}$ , όπως φαίνεται στην εξίσωση 6.2. Το συναρτησιακό ολοκλήρωμα αποτελεί ένα άθροισμα ως προς τις κλειστές, συμπαγείς τετραδιάστατες μετρικές, οι οποίες δεν έχουν ανωμαλίες ή άλλα σύνορα, πέραν της τρισδιάστατης επιφάνειας  $\tau = 0$ , στην οποία ορίζονται οι αρχικές διατάξεις των πεδίων. Η κυματοσυνάρτηση μπορεί να ερμηνευθεί ως πλάτος πιθανότητας, το Σύμπαν να έχει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά, που του προσδίδει η μετρική  $h_{ij}$  [16][2].

Υπολογίζουμε την κυματοσυνάρτηση  $\Psi_0$ , στην παρουσία ενός επιπρόσθετου βαθμωτού πεδίου  $\phi$  [14]:

$$\Psi_0(h_{ij}, \phi) = N \int [dg][d\phi] e^{-I_C} \quad (6.15)$$

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση ενός σύμμορφου βαθμωτού πεδίου, κατάλληλα συζευγμένου με την βαθμωτή καμπυλότητα. Ακόμη, θα υπολογίσουμε την κυματοσυνάρτηση Hartle Hawking) στην προσέγγιση minisuperspace, που αποτελεί τον υποχώρο των ομοιογενών και ισοτροπικών (κλειστών) μετρικών. Συγκεκριμένα, περιορίζουμε το άθροισμα ως προς κλειστές γεωμετρίες Friedmann-Robertson-Walker, τις οποίες μελετήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Παίρνουμε την κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$  θετική, ώστε να έχουμε λύση de Sitter.

Αρχικά η μετρική δίδεται από την σχέση:

$$ds^2 = \sigma^2[-N^2(t)dt^2 + \alpha^2(t)d\Omega_3^2] \quad (6.16)$$

όπου  $\sigma = \frac{l_P}{2\sqrt{6\pi}}$ . Παρομοίως, θεωρούμε ότι το βαθμωτό πεδίο είναι ομοιογενές  $\phi = \phi(t)$ . Σε αυτή την προσέγγιση, οι κυματοσυναρτήσεις έχουν μόνο δύο βαθμούς ελευθερίας, τον παράγοντα κλίμακας  $\alpha$  και το ομοιογενές πεδίο  $\phi$ :

$$\Psi = \Psi(\alpha, \phi) \quad (6.17)$$

Ορίζουμε επίσης το πεδίο  $\chi$  μέσω της σχέσης [14]:



$$\phi = \frac{\chi}{\sqrt{2\pi^2\sigma^2\alpha}} \quad (6.18)$$

και τον παράγοντα Hubble που αντιστοιχεί στην κοσμολογική σταθερά:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{3\lambda}{\sigma} \\ H &= \sqrt{|\lambda|} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Θα εκφράσουμε την κυματοσυνάρτηση συναρτήσει του  $\chi$ . Με τις επιλογές αυτές η δράση αποκτά μια πιο απλή μορφή.

Η Lorentzian δράση είναι:

$$S = \frac{1}{2} \int dt \left( \frac{N}{\alpha} \right) \left[ \left( \frac{\alpha}{N} \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + \alpha^2 - \lambda\alpha^4 + \left( \frac{\alpha}{N} \frac{d\chi}{dt} \right)^2 - \chi^2 \right] \quad (6.20)$$

Η κυματοσυνάρτηση εκφράζεται ως το ακόλουθο συναρτησιακό ολοκλήρωμα:

$$\Psi_0(\alpha_0, \chi_0) = \int [d\alpha][d\chi] e^{-I(\alpha, \chi)} \quad (6.21)$$

όπου  $I$  η Ευκλείδεια δράση:

$$I = \frac{1}{2} \int d\eta \left[ - \left( \frac{d\alpha}{d\eta} \right)^2 - \alpha^2 + \lambda\alpha^4 + \left( \frac{d\chi}{d\eta} \right)^2 + \chi^2 \right] \quad (6.22)$$

Στην πιο πάνω έκφραση,  $d\eta = \frac{d\tau}{\alpha}$ , είναι ο σύμμορφος Ευκλείδειος χρόνος.

Στην εργασία μας θα αρκεστούμε στον υπολογισμό της κυματοσυνάρτησης στην ημι-κλασική προσέγγιση:

$$\Psi_0(\alpha_0, \chi_0) \approx N e^{-I(\alpha_0, \chi_0)} \quad (6.23)$$

όπου υπολογίζουμε την Ευκλείδεια δράση για την κλασική λύση που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Στην πιο πάνω σχέση, η σταθερά  $N$  είναι η σταθερά κανονικοποίησης και όχι η συνάρτηση μεσολάβησης.

Η τελική κυματοσυνάρτηση χωρίζεται σε δύο συνεισφορές, μία συνάρτηση του παράγοντα κλίμακας και μία συνάρτηση του πεδίου ύλης. Το ομοιογενές πεδίο ύλης συμπεριφέρεται

ως ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής, του οποίου γνωρίζουμε την θεμελιώδη κυματοσυνάρτηση. Καταλήγουμε στη σχέση:

$$\Psi_0(\alpha_0, \chi_0) = N e^{-\frac{\chi_0}{2}} \psi_0(\alpha_0) \quad (6.24)$$

όπου  $\psi_0(\alpha_0) = e^{-I_C(\alpha)}$ .

Για να υπολογίσουμε την κυματοσυνάρτηση  $\psi_0$  πρέπει να προσδιορίσουμε τον παράγοντα κλίμακας  $\alpha(\tau)$  της τετραδιάστατης Ευκλείδειας μετρικής, που ικανοποιεί τις εξισώσεις κίνησης, και ισούται με  $\alpha_0$  στην τρισδιάστατη συνοριακή επιφάνεια (η οποία είναι μια σφαίρα). Η κλασική λύση είναι τμήμα τετραδιάστατης σφαίρας με ακτίνα  $H^{-1}$ . Το γεγονός αυτό αναδεικνύει δύο περιπτώσεις: Εάν  $H\alpha_0 < 1$ , η συνοριακή τρισδιάστατη σφαίρα μπορεί να αποτελέσει σύνορο της πραγματικής κλασικής λύσης. Εάν όμως  $H\alpha_0 > 1$ , η ακτίνα της τετραδιάστατης σφαίρας είναι μικρότερη από την ακτίνα της αρχικής τρισδιάστατης σφαίρας, και έτσι δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις που να ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη. Στην περίπτωση  $H\alpha_0 < 1$ , υπάρχουν δύο λύσεις: Στην πρώτη λύση το σύνορο φράσσει ένα τμήμα της σφαίρας που είναι μεγαλύτερο από ημισφαίριο, ενώ στη δεύτερη λύση φράσσεται ένα τμήμα που είναι μικρότερο από ημισφαίριο. Οι δύο λύσεις απεικονίζονται στο πιο κάτω σχήμα [14]:

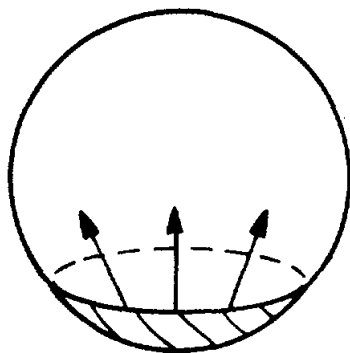


FIGURE 6.4: Λύση για  $H\alpha_0 < 1$ . Το σύνορο που φράσσει τμήμα μικρότερο από ημισφαίριο.

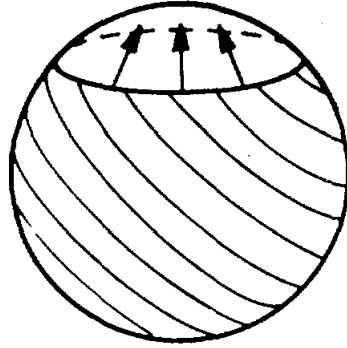


FIGURE 6.5: Λύση για  $H\alpha_0 < 1$ . Το σύνορο φράσσει τμήμα μεγαλύτερο από ημισφαίριο.

Η Ευκλείδεια δράση που αντιστοιχεί στις δύο περιπτώσεις είναι:

$$I_{\pm} = -\frac{1}{3H^2} \left[ 1 \pm (1 - H^2\alpha_0^2)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (6.25)$$

με το πάνω όριο (+) να αναλογεί στο τμήμα που είναι μεγαλύτερο από ένα ημισφαίριο και το κάτω όριο (-) στο μικρότερο.

Επιλέγοντας κατάλληλα τον βρόχο ολοκλήρωσης, οι Hartle και Hawking επιχειρηματολογούν ότι κυριαρχεί η λύση (-), της οποίας η δράση είναι μεγαλύτερη. Η κυματοσυνάρτηση είναι:

$$\psi_0(\alpha_0) = N e^{-I_-(\alpha_0)} \quad (6.26)$$

Κρατώντας το γινόμενο  $H\alpha_0$  σταθερό,  $H\alpha_0 \approx 1$ , η πιο πάνω έκφραση γίνεται:

$$\psi_0(\alpha_0) \approx N \exp\left(\frac{1}{3H^2}\right) \quad (6.27)$$

Εάν  $H\alpha_0 > 1$ , οι λύσεις που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες είναι μιγαδικές (επειδή η ακτίνα της τρισδιάστατης σφαίρας είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα της τετραδιάστατης σφαίρας. Υπάρχουν ωστόσο ακρότατα για ελαχιστοποίηση της δράσης. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην αρχική εργασία των Hartle - Hawking για τη λύση στην περίπτωση αυτή [14].

Ένα ανοιχτό ερώτημα σχετικά με τον πιο πάνω υπολογισμό είναι η επιλογή του βρόχου ολοκλήρωσης. Υπάρχουν και άλλες επιλογές εκτός από τον βρόχο Hartle-Hawking, οι οποίες οδηγούν σε αποτελέσματα με διαφορετική συμπεριφορά. Οι Zeldovich-Starobinsky,

Rubakov και Linde-Vilenkin εκτελούν μια διαφορετική στροφή στον Ευκλείδιο χώρο και επιλέγουν τον βρόχο ολοκλήρωσης, ώστε το πρόσημο του εκθετικού της κυματοσυνάρτησης να είναι αντίθετο από αυτό της κυματοσυνάρτησης Hartle-Hawking. Η φυσική σημασία είναι τεράστια, αφού προβλέπεται μία εντελώς διαφορετική ιστορία του Σύμπαντος [2]. Συγκεκριμένα, ενώ η κυματοσυνάρτηση Hartle-Hawking προβλέπει ένα Σύμπαν με μικρή κοσμολογική σταθερά και άρα απουσία πληθωρισμού, η κυματοσυνάρτηση Linde-Vilenkin προβλέπει ακριβώς το αντίθετο - ένα μικρό πρώιμο Σύμπαν, με αρκετά μεγάλη κοσμολογική σταθερά, που οδηγεί σε πληθωρισμό.

## 6.4 Υπολογισμός της κυματοσυνάρτησης στην $R^2$ θεωρία

Για την εύρεση της κυματοσυνάρτησης στην  $R^2$  θεωρία υπάρχουν δύο τρόποι: Ο πρώτος τρόπος είναι να υπολογίσουμε την Ευκλείδια δράση και να κάνουμε την ίδια ημικλασική προσέγγιση όπως και πιο πάνω, ενώ ο δεύτερος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την αντιστοίχιση της θεωρίας με τη συνήθη θεωρία βαρύτητας του Einstein. Εξακολουθούμε να εργαζόμαστε στην προσέγγιση του minisuperspace. Με βάση τις εξισώσεις 3.26 και 5.57, η συνολική Lorentzian δράση γράφεται:

$$S = \lambda \int_{\mathcal{V}} d^4x \sqrt{g} R^2 + 4\lambda \oint_{\partial\mathcal{V}} d^3x \sqrt{h} KR \quad (6.28)$$

Υπολογίζοντας τη δράση στο minisuperspace, βρίσκουμε:

$$S = 72\pi^2 \lambda \left[ \int dt \left( \frac{\dot{\alpha}^4}{\alpha} + 2\dot{\alpha}^2 \ddot{\alpha} + \alpha \ddot{\alpha}^2 + 2\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha} + 2\ddot{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) - 2(\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}\alpha + \dot{\alpha})|_{\partial\mathcal{V}} \right] \quad (6.29)$$

Σε αντίθεση με τους Hartle-Hawking, εκτελούμε την ακόλουθη στροφή στον Ευκλείδιο χώρο:

$$t = i\tau \quad (6.30)$$

Με αυτή την επιλογή, η Ευκλείδια δράση (στο bulk) είναι μη αρνητική. Αυτή η στροφή ταυτίζεται με την επιλογή των Linde-Vilenkin [2].

Επιβάλλουμε συνθήκες Dirichlet, ώστε και η βαθμωτή καμπυλότητα να είναι σταθερή στο σύνορο και υπολογίζουμε την Ευκλείδια δράση που αντιστοιχεί στις κλασσικές λύσεις de Sitter. Για τις λύσεις αυτές ισχύει  $R = 4\beta$ , όπου  $\beta = \Lambda = 3H^2$ .

Με βάση τη μορφή της δράσης και την πιο πάνω στροφή στον Ευκλείδιο χώρο, καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$I = -8\Lambda \lambda I_{GR} = -2\lambda (4\Lambda) I_{GR} = -2\lambda R_{dS} I_{GR} \quad (6.31)$$

μεταξύ της Ευκλείδιας δράσης και της Ευκλείδιας δράσης της γενικής θεωρίας της σχετικότητας (στην παρουσία κοσμολογικής σταθεράς), για την ίδια λύση de Sitter. Όπως βλέπουμε, εφόσον η δράση Hartle-Hawking είναι αρνητική, η δράση της  $R^2$  θεωρίας είναι αναγκαστικά θετική.

Στην ημι-κλασσική προσέγγιση, η Ευκλείδια δράση αυτή αρκεί για να προσδιορίσουμε την κυματοσυνάρτηση. Επιλέγουμε τον ίδιο βρόχο ολοκλήρωσης, προϋποθέτοντας τις ίδιες συνεισφορές  $I_{\pm}$ , ώστε στην περίπτωση  $H\alpha_0 < 1$  να κυριαρχεί η μικρότερη δράση, που στην περίπτωση της  $R^2$  θεωρίας είναι η  $I_-$ . Συγκεκριμένα εάν  $H\alpha_0 < 1$ , βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \psi_0(\alpha_0, H) &\approx N e^{2\lambda(4\Lambda) I_{GR}^-} \\ &= N \exp \left\{ -8\lambda \left[ 1 - (1 - H^2\alpha_0^2)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.32)$$

Η κυματοσυνάρτηση της  $R^2$  θεωρίας έχει έναν νέο βαθμό ελευθερίας, τον παράγοντα  $H$  ή αντίστοιχα την κοσμολογική σταθερά  $\Lambda$ . Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, οι εξισώσεις αυτής της θεωρίας είναι ανώτερης τάξης, οδηγώντας σε επιπλέον βαθμούς ελευθερίας. Από φυσικής άποψης, η τιμή αυτού του βαθμού ελευθερίας ορίζει την καμπυλότητα μίας λύσης de Sitter. Επειδή υπάρχουν άπειρες τέτοιες λύσεις, μια για κάθε θετική τιμή  $\Lambda$ , η κυματοσυνάρτηση Hartle-Hawking μεταβάλλεται αναλόγως. Εξαιτίας όμως της συμμετρίας κλίμακας, η κυματοσυνάρτηση εξαρτάται μόνο από το συνδυασμό  $H\alpha_0$  (και φυσικά από τη σταθερά σύζευξης  $\lambda$ ).

Κλείνοντας, ας επαληθεύσουμε την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας χρησιμοποιώντας την αντιστοίχιση της  $R^2$  θεωρίας και της θεωρίας του Einstein, στην παρουσία θετικής κοσμολογικής σταθεράς και ενός άμαζου βαθμωτού πεδίου. Καταρχάς, ανακαλούμε την δράση 4.7:

$$S = \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \frac{1}{2} \left( \tilde{R} - \frac{1}{8\lambda} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \quad (6.33)$$

Επειδή στη λύση το βαθμωτό πεδίο είναι σταθερό, αυτό δεν συνεισφέρει στη δράση. Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, το γεγονός αυτό αποτελεί απόρροια της αρχικής συμμετρίας κλίμακας. Μόνο οι βαρυτικοί όροι στη δράση συνεισφέρουν. Με βάση τη στροφή στον Ευκλείδιο χώρο,  $t = i\tau$ , παίρνουμε:

$$I_G = -\frac{M_P^2}{2} I_{GR} \quad (6.34)$$

Έχουμε εισαγάγει τον όρο  $\frac{M_P^2}{2} = \frac{1}{2l_P^2}$  αποκαθιστώντας τις μονάδες των διαφόρων φυσικών ποσοτήτων – (στις μονάδες Planck θέτουμε  $l_P = M_P^{-1} = 1$ ). Έτσι η κυματοσυνάρτηση υπολογίζεται να είναι:

$$\psi_0(\tilde{\alpha}_0, \tilde{H}) = \tilde{N} \exp \left\{ -\frac{M_P^2}{6\tilde{H}^2} \left[ 1 - (1 - \tilde{H}^2 \tilde{\alpha}_0^2)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}, \quad \tilde{H} \tilde{\alpha}_0 < 1 \quad (6.35)$$

όπου  $\tilde{N}$  η σταθερά κανονικοποίησης και  $\tilde{H}, \tilde{\alpha}_0$  ο παράγοντας Hubble και ο παράγοντας κλίμακας στο πλαίσιο Einstein. Οι λύσεις έχουν νέο βαθμό ελευθερίας, τον παράγοντα  $\tilde{H}$  ή την κοσμολογική σταθερά  $\tilde{\Lambda}$ .

Κρατώντας το γινόμενο  $\tilde{H} \tilde{\alpha}_0$  σταθερό,  $\tilde{H} \tilde{\alpha}_0 \approx 1$ , η κυματοσυνάρτηση παίρνει την μορφή:

$$\psi_0 \sim \exp \left( -\frac{M_P^2}{6\tilde{H}^2} \right) = \exp \left( -\frac{M_P^2}{2\tilde{\Lambda}} \right) \quad (6.36)$$

Εάν  $\tilde{\Lambda} \gg 0$  (φάση πληθωρισμού):

$$\psi_0 \approx 1 \quad (6.37)$$

Ενώ εάν  $\tilde{\Lambda} \ll 0$ , η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται. Ερμηνεύοντας την κυματοσυνάρτηση ως πλάτος πιθανότητας, τότε η λύση που αναδεικνύεται προβλέπει ένα μικρό Σύμπαν σε φάση πληθωρισμού. Εκ πρώτης όψεως, φαίνεται να υπάρχει διαφορά σε σχέση με τα αποτελέσματα που βρήκαμε προηγουμένως σε αυτό το υποκεφάλαιο. Στην πραγματικότητα δεν υφίσταται τέτοιο πρόβλημα. Από την ανάλυση που οδήγησε στην δράση 6.33, η κοσμολογική σταθερά έχει μία καλά ορισμένη τιμή συναρτήσει της σταθεράς σύζευξης  $\lambda$ . Συγκεκριμένα:

$$\tilde{\Lambda} = \frac{1}{16\lambda} \quad (6.38)$$

Εφόσον  $\tilde{\Lambda} = 3\tilde{H}^2$ , έχουμε:

$$\frac{1}{3\tilde{H}^2} = 16\lambda \quad (6.39)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 6.35, και θέτοντας τη μάζα Planck ίση με τη μονάδα, παίρνουμε:

$$\psi_0(\tilde{\alpha}_0, \tilde{H}) = N \exp \left\{ -8\lambda \left[ 1 - (1 - \tilde{H}^2 \tilde{\alpha}_0^2)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}, \quad \tilde{H} \tilde{\alpha}_0 < 1 \quad (6.40)$$

σε συμφωνία με την εξίσωση 6.32.





## Παράρτημα Α΄

# Στοιχεία λύσης μελανών οπών Schwarzschild

Οι εξισώσεις Einstein είναι δύσκολο να επιλυθούν αναλυτικά [17]. Η λύση Schwarzschild αποτελεί μια αναλυτική λύση στην απουσία ύλης: ( $T^{\mu\nu} = 0$ ). Πιο κάτω θα αναφέρουμε κάποια βασικά στοιχεία για αυτή την λύση και τα φυσικά χαρακτηριστικά της.

Η μετρική της λύσης Schwarzschild γράφεται ως εξής [18]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = -d\tau^2 \quad (\text{A.1})$$

όπου  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ .

Η λύση αυτή έχει φυσική ανωμαλία στο σημείο  $r = 0$ , καθώς και ανωμαλία για  $r = 2GM$ , η οποία μπορεί να αρθεί με μία κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων. Η λύση είναι σφαιρικά συμμετρική, ισότροπη και στατική.

Η επιφάνεια  $r = 2GM$  αποτελεί τον ορίζοντα γεγονότων. Ο ορίζοντας γεγονότων οριοθετεί την περιοχή από την οποία ο παρατηρητής Schwarzschild μπορεί να λάβει πληροφορίες για διάφορα γεγονότα που συμβαίνουν σε αυτήν.

### A.1 Συντεταγμένες Schwarzschild

Θα μελετήσουμε την περιοχή κοντά στον ορίζοντα  $r = 2GM$  στις συντεταγμένες Schwarzschild A.1. Θεωρούμε ένα σώμα που πέφτει ακτινικά προς στην μελανή οπή, με αφετηρία το σημείο  $r = R$ . Προσδιορίζουμε τις γεωδαιτικές εξισώσεις ή ισοδύναμα τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Η λαγκρανζιανή είναι η εξής

$$L^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \quad (\text{A.2})$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι:

$$\frac{\partial L^2}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^\mu}\right) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Εφαρμόζουμε την πιο πάνω σχέση για την χρονική και την ακτινική συντεταγμένη Schwarzschild και παίρνουμε:

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \right] = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} - \frac{2GM}{r(r-2GM)} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{2GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

Από την εξίσωση A.4, προκύπτει η ακόλουθη σταθερά κίνησης:

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = k \quad (\text{A.6})$$

Με βάση αυτό και το γεγονός ότι κατά μήκος της γεωδαιτικής τροχιάς του σωματιδίου  $L^2 = 1$ , προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση που συνδέει την ακτινική συντεταγμένη  $r$  και τον ιδιόχρονο  $\tau$ :

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left[ k^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \right] = 1 \quad (\text{A.7})$$

Εάν το σώμα αρχίζει την κίνηση του από την ηρεμία, προκύπτει η σταθερά  $k$ :

$$k = \left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.8})$$

Με βάση την εξίσωση A.7, καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα:

$$\tau = \int_R^0 dr \left(\frac{R}{2MG}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{R-r}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.9})$$

Θέτουμε:

$$r = R \cos^2 \theta = \frac{R}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad (\text{A.10})$$

και έτσι το ολοκλήρωμα γράφεται στην επιλύσιμη μορφή:

$$\tau = \left(\frac{R}{2GM}\right)^{-\frac{1}{2}} R \int_{\frac{\pi}{2}}^0 d\theta(1 + \cos 2\theta) \quad (\text{A.11})$$

Καταλήγουμε στην εξής σχέση για τον ιδιόχρονο  $\tau$ :

$$\tau = -\left(\frac{R}{2GM}\right)^{-\frac{1}{2}} R\left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \quad (\text{A.12})$$

Θέτοντας:

$$\eta = -2\theta \quad (\text{A.13})$$

οι εξισώσεις [A.10](#) και [A.12](#) μετατρέπονται στις ακόλουθες:

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{2}(1 + \cos \eta) \\ \tau &= \frac{R}{2} \left(\frac{R}{2GM}\right)^{-\frac{1}{2}} (\eta + \sin \eta) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Τέλος, επιστρέφουμε στην εξίσωση [A.6](#) ώστε να εκφράσουμε τον συντεταγμένο χρόνο  $t$  ως ένα ολοκλήρωμα ως προς  $\eta$ :

$$t = \frac{R}{2} \left(\frac{R}{2GM}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\pi d\eta \frac{R \cos^2 \frac{\eta}{2}}{R \cos^2 \frac{\eta}{2} - 2MG} (1 + \cos \eta) \quad (\text{A.15})$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε τον χρόνο Schwarzschild:

$$\begin{aligned} t &= \left(\frac{R}{2} + 2MG\right) \left(\frac{R}{2MG} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \eta + \frac{R}{2} \left(\frac{R}{2MG} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \sin \eta + \\ & 2MG \log \left| \frac{\left(\frac{R}{2MG} - 1\right)^{\frac{1}{2}} + \tan \frac{\eta}{2}}{\left(\frac{R}{2MG} - 1\right)^{\frac{1}{2}} - \tan \frac{\eta}{2}} \right| \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Ο παρατηρητής Schwarzschild που είναι στάσιμος εκτός της μελανής οπής, συμπεραίνει ότι πρέπει να περάσει άπειρος χρόνος ώστε το σώμα που πέφτει ελεύθερα να φτάσει στον ορίζοντα. Αντίθετα, ένας παρατηρητής που πέφτει μαζί με το σώμα, φτάνει στον ορίζοντα σε πεπερασμένο ιδιόχρονο, περνά στο εσωτερικό της μαύρης τρύπας και καταλήγει στην ανωμαλία σε πεπερασμένο ιδιόχρονο.

## A.2 Μετασχηματισμός της μετρικής Schwarzschild σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, μπορούμε να αφαιρέσουμε την ανωμαλία στον ορίζοντα και να μελετήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες του χωρόχρονου, εκτελώντας μία κατάλληλη αλλαγή συντεταγμένων [18].

### A.2.1 Συντεταγμένες Rindler

Η ακτινική απόσταση ενός σημείου  $r, \theta, \phi$  από τον ορίζοντα δίδεται από το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$\rho = \int_{2MG}^r dr' \left(1 - \frac{2MG}{r'}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.17})$$

Μπορούμε να λύσουμε το ολοκλήρωμα αυτό, κάνοντας τον εξής μετασχηματισμό:

$$r' = 2MG \cosh^2 \theta' \Rightarrow dr' = 4MG \cosh \theta' \sinh \theta' d\theta' \quad (\text{A.18})$$

Βρίσκουμε:

$$\rho = 4MG \int_0^\theta d\theta' \cosh^2 \theta' = 4MG \left( \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2\theta \right) \quad (\text{A.19})$$

Συναρτήσει της ακτινικής συντεταγμένης  $r$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \rho &= 2MG \sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} \right) + \sqrt{r(r - 2MG)} \\ \Rightarrow d\rho &= dr \frac{r}{\sqrt{r(r - 2MG)}} = dr \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Άρα λοιπόν, η μετρική εκφράζεται ως ακολούθως:

$$ds^2 = -dt^2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) - d\rho^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (\text{A.21})$$

Μελετούμε στη συνέχεια, τη γεωμετρία πολύ κοντά στον ορίζοντα της μελανής οπής: ( $r \rightarrow 2GM \Rightarrow \rho \rightarrow 0$ ). Προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\sinh^{-1} \left( \sqrt{\frac{r}{2GM} - 1} \right) \approx \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} \quad (\text{A.22})$$

$$\sqrt{r(r - 2MG)} \approx \sqrt{2MG(r - 2MG)} \quad (\text{A.23})$$

Επομένως η απόσταση  $\rho$  γράφεται:

$$\rho \approx 2\sqrt{2MG(r - 2MG)} \quad (\text{A.24})$$

Επίσης προκύπτει:

$$\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) = \frac{1}{r}(r - 2MG) \approx \frac{1}{2GM}(r - 2GM) = \frac{1}{2GM}\rho^2 \frac{1}{8GM} = \rho^2 \left(\frac{1}{4GM}\right)^2 \quad (\text{A.25})$$

Ορίζοντας μία νέα χρονοειδή συντεταγμένη,  $\omega = \frac{t}{4MG}$ , καταλήγουμε στην μετρική:

$$ds^2 = -\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{A.26})$$

Αγνοώντας το γωνιακό μέρος, η μετρική κοντά στον ορίζοντα προσεγγίζεται από τον επίπεδο χωρόχρονο Rindler. Η χρονική συντεταγμένη  $\omega$  όπως και η χρονική συντεταγμένη Schwarzschild παίρνει τιμές από  $-\infty$  έως  $+\infty$ ), ενώ η απόσταση  $\rho$  παίρνει τιμές από 0 έως  $+\infty$ . Η συντεταγμένη  $\rho$  δεν ορίζεται για  $r$  μικρότερα της βαρυτικής ακτίνας  $2GM$ .

Η μετρική Rindler είναι επίπεδη, αφού μπορεί να μετασχηματιστεί στη μετρική Minkowski. Πράγματι, εάν θέσουμε:

$$\begin{aligned} T &= \rho \sinh \omega \Rightarrow dT = d\rho \sinh \omega + \rho d\omega \cosh \omega \\ Z &= \rho \cosh \omega \Rightarrow dZ = d\rho \cosh \omega + \rho d\omega \sinh \omega \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

παίρνουμε τη μετρική Minkowski. Στο πιο κάτω διάγραμμα απεικονίζεται ο χωρόχρονος Minkowski και η σφήνα Rindler.

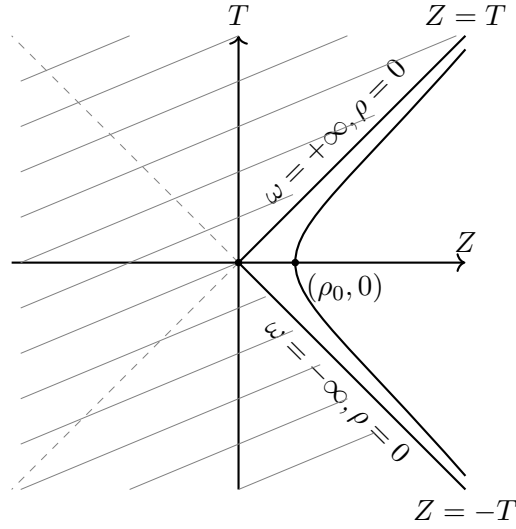


FIGURE A.1: Διάγραμμα χωρόχρονου Minkowski και η σφήνα Rindler

Μπορούμε επίσης να προσεγγίσουμε μια αρκετά μικρή περιοχή της σφαίρας του ορίζοντα ως τμήμα του επιπέδου. Η μετρική αρκετά κοντά στον ορίζοντα παίρνει τη μορφή:

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2 \quad (\text{A.28})$$

που είναι η μετρική Minkowski.

Οι συντεταγμένες Rindler δεν επικαλύπτουν ολόκληρο τον χωρόχρονο Minkowski μπορούν όμως, μέσω αναλυτικής συνέχειας, να επεκταθούν σε όλο το επίπεδο. Για παράδειγμα, εάν θέσουμε:

$$\begin{aligned} \omega &= \tilde{\omega} + i\frac{\pi}{2} \\ \rho &= -i\tilde{\rho} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned} T &= \tilde{\rho} \cosh \tilde{\omega} \\ Z &= \tilde{\rho} \sinh \tilde{\omega} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Οι συντεταγμένες  $\tilde{\omega}, \tilde{\rho}$  ονομάζονται συντεταγμένες Milne. Ενώ οι συντεταγμένες Rindler επικαλύπτουν την περιοχή,  $Z \geq |T|$ , οι συντεταγμένες Milne, επικαλύπτουν την περιοχή  $T \geq |Z|$ , δηλαδή η σφήνα Rindler στρέφεται κατά 90 μοίρες αριστερόστροφα. Συνεχίζοντας τη διαδικασία αυτή, μπορούμε να επικαλύψουμε ολόκληρο τον χωρόχρονο.

### A.2.2 Συντεταγμένες Kruskal-Szekeres

Εκφράζουμε την μετρική ως εξής:

$$ds^2 = F(R)[-R^2 d\omega^2 + dR^2] - r^2 d\Omega^2 \quad (\text{A.31})$$

όπου η χρονική συντεταγμένη  $\omega$  έχει οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο και  $R$  μια νέα χωρική συντεταγμένη. Η συνάρτηση  $F(R)$  θα πρέπει να προσδιοριστεί, ώστε να υπάρχει αντιστοιχία με την αρχική μετρική. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύουν τα εξής:

$$F(R)R^2 = 16M^2G^2 \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) \quad (\text{A.32})$$

$$F(R)dR^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (\text{A.33})$$

Με βάσει τις σχέσεις αυτές, εξάγουμε την διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{R} &= \frac{dR}{R} \frac{MG}{MG} = \frac{1}{4MG} \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr \\ \Rightarrow 4MG \log\left(\frac{R}{MG}\right) &= r + 2MG \log\left(\frac{r}{2MG} - 1\right) = r^* \\ \Rightarrow R &= MGe^{\frac{r^*}{4MG}} = MGe^{\frac{r}{4MG}} \sqrt{\frac{r}{2MG} - 1} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

όπου  $r^* = r + 2MG \log\left(\frac{r-2MG}{2MG}\right)$  η ακτινική συντεταγμένη tortoise.

Μετά από πράξεις, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για τη συνάρτηση  $F(R)$ :

$$\begin{aligned} F(R) &= 16 e^{-\frac{r^*}{2MG}} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) = 16 e^{-\frac{r}{2MG}} \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{-1} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \\ &= 16 e^{-\frac{r}{2GM}} \left[1 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\right] = \frac{32GM}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Έπειτα ορίζουμε δύο φωτοειδείς συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} U &= -Re^{-\omega} \Rightarrow dU = -dRe^{-\omega} + Re^{-\omega}d\omega \\ V &= Re^{\omega} \Rightarrow dV = dRe^{\omega} + Re^{\omega}d\omega \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Το γινόμενο των μεταβολών ικανοποιεί τη σχέση:

$$\begin{aligned} dUdV &= -dR^2 + dRe^{\omega}Re^{-\omega}d\omega - dRe^{-\omega}Re^{\omega}d\omega + R^2d\omega^2 \\ &= -dR^2 + R^2d\omega^2 \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Επομένως η μετρική γράφεται:

$$ds^2 = -F(R)dUdV \quad (\text{A.38})$$

Οι συντεταγμένες Kruskal-Szekeres ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} T &= \frac{U + V}{2} \\ Z &= \frac{V - U}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

και η μετρική γίνεται

$$ds^2 = F(R) \left( -dT^2 + dZ^2 \right) \quad (\text{A.40})$$

Επεκτείνουμε τα πεδία ορισμού των συντεταγμένων  $T, Z$  σε όλο το επίπεδο, οπότε το χωροχρονικό διάγραμμα της μεγίστης γεωμετρίας Schwarzschild παίρνει την μορφή:



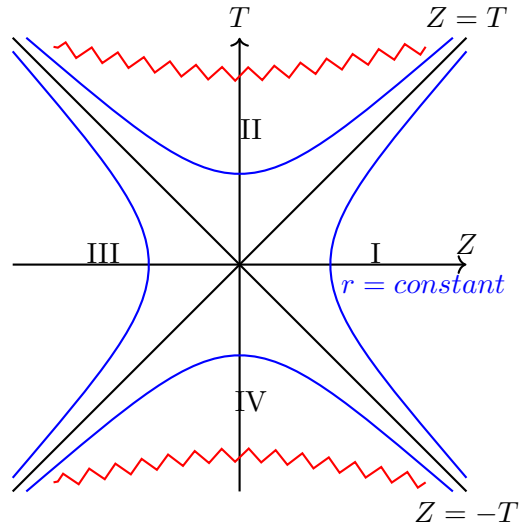


FIGURE A.2: Χωροχρονικό διάγραμμα μελανής οπής στις συντεταγμένες Kruskal-Szekeres

Εμφανίζονται δύο οριζόντες γεγονότων (ο μελλοντικός και ο παρελθοντικός). Η ανωμαλία  $r = 0$  αποτελείται από δύο κλάδους στις περιοχές II και IV. Η περιοχή IV είναι μια «λευκή οπή», στην οποία σε αντίθεση με την μελανή περιοχή II ο παρατηρητής Schwarzschild δεν μπορεί να αποστείλει σήματα. Μπορεί όμως να λάβει σήμα από την περιοχή αυτή. Πιστεύεται ότι λευκές οπές δεν μπορούν να δημιουργηθούν στην φύση.

### A.3 Μετρική Vaidya

Μία άλλη ενδιαφέρουσα λύση είναι η μετρική Vaidya [18][17]:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m(v)}{r} \right) dv^2 + 2drdv + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{A.41})$$

όπου  $v = r^* + t$ , φωτοειδής συντεταγμένη.

Είναι σαφές ότι η μετρική αυτή δεν είναι στατική σε αντίθεση με την λύση Schwarzschild, καθώς η συνάρτηση  $m(v)$  εξαρτάται από την φωτοειδή συντεταγμένη. Η μετρική περιγράφει την κατάρρευση φωτοειδούς ύλης σε μία μελανή οπή. Ας προσδιορίσουμε τον ταχυοσθένε ενέργειας και ορμής που συνδέεται με την μετρική αυτή.

Με βάση τη μετρική, υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel [9] και τις συνιστώσες του ταχυοσθένε καμπυλότητας Riemann. Καταλήγουμε στα ακόλουθα μη μηδενικά στοιχεία:

$$\begin{aligned}
R_{uvuv} &= -\frac{2m(v)}{r} \quad , \quad R_{rrrv} = \frac{2m(v)}{r} \quad , \quad R_{vrvr} = -\frac{2m(v)}{r^3} + \frac{4m^2(v)}{r^4} \quad , \\
R_{\theta\phi\theta\phi} &= \frac{2m(v)}{r} \quad , \quad R_{\phi r\phi r} = \frac{m(v)}{r} \sin^2 \theta \quad , \quad R_{\theta r\theta r} = \frac{m(v)}{r^3} - \frac{2m^2(v)}{r^4} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial m(v)}{\partial v} \quad , \\
R_{\theta v\theta v} &= \frac{m(v)}{r^3} - \frac{2m^2(v)}{r^4} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial m(v)}{\partial v} \quad , \quad R_{\phi v\phi v} = \frac{m(v)}{r} \sin^2 \theta \quad , \quad R_{v\theta\theta r} = -\frac{\partial m(v)}{\partial v} \quad , \\
R_{v\phi\phi r} &= -\frac{\partial m(v)}{\partial v} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{A.42}$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις A.42 και παίρνοντας το κατάλληλο ίχνος, υπολογίζουμε τον ταυυστή Ricci. [9] Το μόνο μη μηδενικό του στοιχείο είναι:

$$R_{vv} = \frac{2\mathcal{E}(v)}{r^2} \tag{A.43}$$

όπου  $\mathcal{E} = \frac{\partial m}{\partial v}$ . Συμπεραίνουμε ότι και η βαθμωτή καμπυλότητα ( $R = g^{vv} R_{vv}$ ) μηδενίζεται.

Με βάση την εξίσωση Einstein, προσδιορίζουμε τον ταυυστή ενέργειας και ορμής:

$$T_{vv} = \frac{\mathcal{E}(v)}{4\pi r^2} \tag{A.44}$$

Για παράδειγμα, θεωρούμε φωτοειδές «κέλυφος» φωτός, το οποίο καταρρέει σε μελανή οπή Schwarzschild. Ο ταυυστής ενέργειας και ορμής είναι:

$$T_{vv} = \frac{M\delta(v - v_0)}{4\pi r^2} \tag{A.45}$$

όπου  $v = v_0$  η φωτοειδής κοσμική γραμμή. Ο ταυυστής μηδενίζεται σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του χωρόχρονου.

Από την εξίσωση A.45, υπολογίζουμε την ενέργεια του συστήματος, ή τη μάζα της μελανής οπής που θα σχηματιστεί:

$$\begin{aligned}
m(v) &= \int_{-\infty}^v dv' \mathcal{E}(v') = M \int_{-\infty}^v dv' \delta(v' - v_0) = 0 \quad , \quad v < v_0 \\
&= M \quad , \quad v > v_0
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Η περιοχή  $v < v_0$  βρίσκεται στο εσωτερικό του κελύφους, και είναι επίπεδη (αποτελεί τμήμα του χωρόχρονου Minkowski. Στην περιοχή  $v > v_0$ , παίρνουμε την μετρική Schwarzschild

όπως φαίνεται στο [A.1](#). Όταν η ακτίνα του κελύφους γίνει μικρότερη από την βαρυτική ακτίνα που αντιστοιχεί στην ενέργεια του, αυτό καταρρέει σε μία μελανή οπή.



## Παράρτημα Β΄

# Συναρτησιακά ολοκληρώματα Feynman

Έστω  $q$  μία γενικευμένη συντεταγμένη θέσης και  $p$  η συζυγής ορμή της. Στην εικόνα Schrödinger οι αντίστοιχοι τελεστές είναι χρονοανεξάρτητοι και ικανοποιούν τη συνήθη σχέση μετάθεσης:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \quad (\text{B.1})$$

Τα ιδιοδυναύσματα του τελεστή θέσης συμβολίζονται ως εξής:

$$\hat{q}|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle \quad (\text{B.2})$$

Έστω  $|q_i\rangle$  η αρχική κατάσταση τη χρονική στιγμή  $t_i$ .

Την χρονική στιγμή  $t_f$ , η κατάσταση του συστήματος προκύπτει από τη δράση του τελεστή εξέλιξης στην αρχική:

$$\exp\left[-\frac{i\hat{H}(t_f - t_i)}{\hbar}\right]|q_i\rangle \quad (\text{B.3})$$

Με βάση τον τελεστή αυτό μπορούμε να μεταβούμε στην εικόνα Heisenberg [19], όπου οι κβαντομηχανικές καταστάσεις είναι χρονοανεξάρτητες και η χρονική εξάρτηση εμφανίζεται στους τελεστές. Εάν  $\hat{A}$  ένας (χρονοανεξάρτητος) τελεστής στην εικόνα Schrödinger, τότε ο αντίστοιχος τελεστής στην εικόνα Heisenberg είναι:

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) \quad (\text{B.4})$$

όπου  $\hat{U}(t) = \exp[-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}]$  ο τελεστής χρονικής εξέλιξης, ο οποίος είναι ένας μοναδιακός τελεστής. Οι δύο εικόνες συνδέονται μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας. Οι καταστάσεις στις δύο εικόνες συνδέονται ως εξής:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi\rangle_H \quad (\text{B.5})$$

$$|\Psi\rangle_H = \hat{U}^\dagger(t)|\Psi(t)\rangle \quad (\text{B.6})$$

Η εξίσωση B.5 δείχνει πώς μία χρονοανεξάρτητη κυματοσυνάρτηση στην εικόνα Heisenberg χρονοεξελίσσεται και ανάγεται στην εικόνα Schrödinger, ενώ η εξίσωση B.6 το αντίθετο, υπό την δράση του ερμιτιανού συζυγή του τελεστή χρονικής εξέλιξης. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι η γενική λύση της εξίσωσης Schrödinger

$$\hat{H}|\Psi(r, t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(r, t)\rangle \quad (\text{B.7})$$

μπορεί να αναλυθεί ως επαλληλία στάσιμων καταστάσεων:

$$|\Psi(r, t)\rangle = \sum_E c_E |\Psi_E(r)\rangle \exp\left[-\frac{iEt}{\hbar}\right] \quad (\text{B.8})$$

Η μορφή αυτή μπορεί να προκύψει από τη δράση του τελεστή χρονικής εξέλιξης στην αρχική κατάσταση.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το πλάτος πιθανότητας ένα σωματίδιο που βρίσκεται αρχικά στην ιδιοκατάσταση του τελεστή θέσης  $|q_i\rangle$ , να βρεθεί στην ιδιοκατάσταση  $|q_f\rangle$  τη χρονική στιγμή  $t_f$ :

$$\langle q_f | \exp\left[-\frac{i\hat{H}T}{\hbar}\right] |q_i\rangle \quad (\text{B.9})$$

όπου  $T = t_f - t_i$ .

Ας συμβολίσουμε με  $|q, t\rangle$  τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή θέσης  $\hat{q}$  τη χρονική στιγμή  $t$ . (Προσοχή: το διάνυσμα αυτό δεν είναι ίσο με το  $|q(t)\rangle$ ). Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\langle q_f | \exp\left[-\frac{i\hat{H}T}{\hbar}\right] |q_i\rangle = \langle q_f, T | q_i, 0 \rangle \quad (\text{B.10})$$

Τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή θέσης τη χρονική στιγμή  $t$  αποτελούν μια ορθοκανονική βάση, οπότε ισχύει η σχέση πληρότητας:

$$\int dq |q, t\rangle \langle q, t| = \mathbb{1} \quad (\text{B.11})$$

Το πλάτος B.10 ονομάζεται και διαδότης, και συμβολίζεται ως  $K(q_f, T; q_i, 0)$ . Το ολοκλήρωμα:

$$\int dq_i K(q_f, T; q_i, 0) \Psi(q_i, 0)$$

ισούται με την χρονοεξελιγμένη κυματοσυνάρτηση  $\Psi(q_f, T)$  της τελικής κατάστασης.

## B.1 Φορμαλισμός διαδότη

Μπορούμε να παρεμβάλουμε την σχέση πληρότητας B.11 στην σχέση B.10, παίρνοντας:

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int dq \langle q_f, T | q, t \rangle \langle q, t | q_i, 0 \rangle \quad (\text{B.12})$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί  $N$  φορές: Διαμερίζουμε το χρονικό διάστημα  $T$  σε  $N$  τμήματα. Σε κάθε ενδιάμεση χρονική στιγμή, παρεμβάλουμε την αντίστοιχη σχέση πληρότητας. Έτσι παίρνουμε:

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int dq_{N-1} \int dq_{N-2} \dots \int dq_1 \prod_{m=0}^{N-1} \langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle \quad (\text{B.13})$$

Το κάθε ενδιάμεσο χρονικό διάστημα ισούται με  $\epsilon = \frac{T}{N}$ , το οποίο φθίνει στο μηδέν καθώς  $N \rightarrow \infty$ . Συνεπώς:

$$\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle = \langle q_{m+1} | \exp \left[ -\frac{i\hat{H}\epsilon}{\hbar} \right] | q_m \rangle \quad (\text{B.14})$$

Παρεμβάλουμε τώρα την σχέση πληρότητας που συνδέεται με τις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της ορμής στην πιο πάνω έκφραση:

$$\langle q_{m+1} | \exp \left[ -\frac{i\hat{H}\epsilon}{\hbar} \right] | q_m \rangle = \int dp_m \langle q_{m+1} | p_m \rangle \langle p_m | \exp \left[ -\frac{i\hat{H}\epsilon}{\hbar} \right] | q_m \rangle \quad (\text{B.15})$$

Πάντοτε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση μετάθεσης ώστε σε όλους τους όρους που εμφανίζονται στον τελεστή της χαμιλτονιανής, οι τελεστές της ορμής να εμφανίζονται στα αριστερά και οι τελεστές θέσης στα δεξιά. Αναπτύσσοντας τον τελεστή χρονικής εξέλιξης κατά Taylor, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \langle p_m | \exp \left[ -\frac{i\hat{H}\epsilon}{\hbar} \right] | q_m \rangle &= \langle p_m | \mathbb{1} - \frac{i\hat{H}\epsilon}{\hbar} + \mathcal{O}(\epsilon^2) | q_m \rangle = \\ \left[ 1 - \frac{iH(q_m, p_m)\epsilon}{\hbar} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \langle p_m | q_m \rangle &= \left\{ \exp \left[ -\frac{iH(q_m, p_m)\epsilon}{\hbar} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\} \langle p_m | q_m \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Έπειτα, ανακαλούμε τη σχέση:

$$\langle p_m | q_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-iq_m p_m} \quad (\text{B.17})$$

και έτσι προκύπτει:

$$\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle = \int \frac{dp_m}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} [\epsilon H(q_m, p_m) - p_m(q_{m+1} - q_m)] \right\} \quad (\text{B.18})$$

Άρα τελικά, το κβαντομηχανικό πλάτος ισούται με:

$$\begin{aligned} \langle q_f, T | q_i, 0 \rangle &= \int dp_{N-1} \int dq_{N-1} \dots \int dp_1 \int dq_1 \int dp_0 \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^N \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \sum_{m=0}^{N-1} [\epsilon H(q_m, p_m) - p_m(q_{m+1} - q_m)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Εξετάζοντας τον εκθέτη, στο όριο  $N \rightarrow \infty$ , το άθροισμα τείνει σε ένα ολοκλήρωμα ως προς τον χρόνο. Ομοίως, ο δεύτερος όρος μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει ταχύτητας στο συνεχές όριο. Πιο λεπτομερώς:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{N-1} \epsilon \left[ H(q_m, p_m) - p_m \frac{(q_{m+1} - q_m)}{\epsilon} \right] = \int_0^T dt (H(q, p) - \dot{q}p) \quad (\text{B.20})$$

Η ολοκλήρωση ως προς τις ορμές εφαρμόζοντας την μέθοδο της πιο απότομης κατάβασης (method of steepest descent) επιβάλλει

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (\text{B.21})$$



Λύνοντας για την ορμή συναρτήσε των  $q$  και  $\dot{q}$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση:

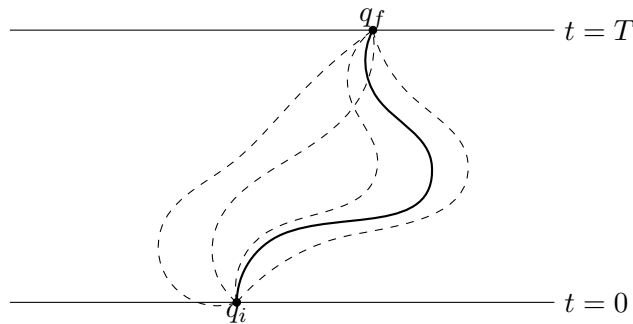
$$H - \dot{q}p = L \quad (\text{B.22})$$

όπου  $L$  η λαγκρανζιανή του συστήματος, παίρνουμε:

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int [dq]_{x_i, 0}^{x_f, T} e^{\frac{iS}{\hbar}} \quad (\text{B.23})$$

όπου  $S$  η κλασική δράση του συστήματος. Ο συμβολισμός  $[dq]$  συμπεριλαμβάνει τις  $N - 1$  ολοκληρώσεις ως προς τις θέσεις  $q_m$ , καθώς και τυχόν σταθερούς παράγοντες κανονικοποίησης.

Το κβαντικό σωματίδιο μπορεί να ακολουθήσει ένα άπειρο αριθμό δρόμων που συνδέουν την αρχική και την τελική θέση. Στην κλασική μηχανική αυτό δεν ισχύει εφόσον με βάση την αρχή του Χαμιλτον, το σωματίδιο ακολουθεί τον δρόμο που ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα δράσης και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. Εφόσον στην κβαντομηχανική δεν υπάρχει τέτοιος περιορισμός, είναι αναγκαίο να αθροίσουμε ως προς όλους τους δρόμους για να προσδιορίσουμε το πλάτος πιθανότητας [15]. Το άθροισμα αυτό είναι ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα Φεψμμαν ή ένα «άθροισμα επί ιστοριών» (sum over histories). Στο πιο κάτω σχήμα απεικονίζεται ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα Φεψμμαν.



ΦΙΓΥΡΕ Β.1: Ενδεικτικά μονοπάτια για την μετάβαση του σωματιδίου από τη θέση  $q_i$  στη θέση  $q_f$  σε χρονικό διάστημα  $T$

Στο σχήμα συνεισφέρουν πολλοί δρόμοι με τον κλασικό δρόμο να φαίνεται εντονότερα. Κάθε δρόμος συνεισφέρει ακόμα και απειροελάχιστα στο κβαντομηχανικό πλάτος μετάβασης. Η συνεισφορά εξαρτάται από την τιμή της κλασικής δράσης για τον συγκεκριμένο δρόμο.

Τέλος, έχουμε την δυνατότητα να διευκολύνουμε τον αριθμητικό υπολογισμό ενός τέτοιου ολοκληρώματος με στροφή στον ευκλείδιο χρόνο:  $\tau = it$ . Το ολοκλήρωμα B.23 μετατρέπεται σε:

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \int [dq] e^{-\frac{I}{\hbar}} \quad (\text{B.24})$$

όπου  $I$  η ευκλείδια δράση.

## B.2 Υπολογισμός διαδότη αρμονικού ταλαντωτή

Ως παράδειγμα θεωρούμε τον απλό αρμονικό ταλαντωτή [15]. Η λαγκρανζιανή είναι:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (\text{B.25})$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος B.23, θα χρησιμοποιήσουμε την ημι-κλασσική προσέγγιση όπου αναπτύσσουμε την κλασσική δράση γύρω από τον κλασσικό δρόμο. Γράφουμε λοιπόν:

$$x = x_c(t) + y(t) \quad (\text{B.26})$$

όπου  $x_c(t)$  λύση της κλασσικής εξίσωσης και  $y(t)$  η διακύμανση. Η διακύμανση μηδενίζεται στα άκρα. Αναπτύσσοντας κατά Taylor και κρατώντας όρους μέχρι και δεύτερης τάξης ως προς τις διακυμάνσεις, ο διαδότης γράφεται σαν:

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = e^{\frac{iS_c}{\hbar}} \int [dy]_{0,0}^{0,T} e^{\frac{iS'}{\hbar}} \quad (\text{B.27})$$

όπου  $S_c$  η δράση του κλασσικού δρόμου και  $S'$  η δράση της διακύμανσης. Ο πρώτος όρος είναι σχετικά απλός να υπολογιστεί. Η γενική λύση του αρμονικού ταλαντωτή είναι:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (\text{B.28})$$

Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες:

$$x(0) = x_i, \quad x(T) = x_f \quad (\text{B.29})$$

βρίσκουμε τις τιμές των σταθερών:

$$\begin{aligned} B &= x_i \\ A &= \frac{(x_f - x_i) \cos \omega T}{\sin \omega T} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Επομένως:

$$S_c = \frac{m}{2} \int_0^T dt (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) = \frac{m\omega^2}{2} \int_0^T dt \left[ (A^2 - B^2) \frac{\sin 2\omega T}{2\omega} + \frac{AB}{\omega} (\cos 2\omega T - 1) \right] \quad (\text{B.31})$$

Ολοκληρώνοντας βρίσκουμε:

$$S_c = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} [(x_i^2 + x_f^2) \cos \omega T - 2x_i x_f] \quad (\text{B.32})$$

Ονομάζουμε τον άλλο παράγοντα της εξίσωσης B.27  $F(T)$ . Για την εύρεση της συνάρτησης  $F(T)$  χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο  $K(x, t; x_i, 0)$  ικανοποιεί την εξίσωση Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + V(x)K \quad (\text{B.33})$$

με αρχική συνθήκη  $K(x, 0; x_i, 0) = \delta(x - x_i)$ . Η πιο πάνω εξίσωση ανάγεται στην

$$\left( -\frac{\partial S_c}{\partial t} + \frac{i\hbar}{F} \frac{\partial F}{\partial t} \right) K = \left[ -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S_c}{\partial x^2} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_c}{\partial x} \right)^2 + V \right] K \quad (\text{B.34})$$

όπου αντικαθιστούμε  $x_f \rightarrow x$  και  $T \rightarrow t$ . Ισχύει η σχέση

$$-\frac{\partial S_c}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_c}{\partial x} \right)^2 + V \quad (\text{B.35})$$

Επομένως η συνάρτηση  $F$  ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{i\hbar}{F} \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 S_c}{\partial x^2} \quad (\text{B.36})$$

Λύνοντάς την, παίρνουμε

$$F = \sqrt{\frac{\omega \epsilon}{\sin \omega T}} \quad (\text{B.37})$$

Συνεπώς ο διαδότης δίδεται από την έκφραση:

$$K(x_f, T; x_i, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T}} \exp \left\{ \frac{i m \omega}{2 \hbar \sin \omega T} [(x_i^2 + x_f^2) \cos \omega T - 2x_i x_f] \right\} \quad (\text{B.38})$$

η οποία μπορεί ναδειχθεί ότι ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη. Στο όριο  $\omega \rightarrow 0$ , ο διαδότης γίνεται:

$$K(x_f, T; x_i, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \exp \left[ \frac{i m (x_f - x_i)^2}{2 \hbar T} \right] \quad (\text{B.39})$$

ο οποίος φυσικά είναι ο διαδότης του ελεύθερου σωματιδίου [15].

## Παράρτημα Γ'

# Διαγράμματα Penrose

Τα διαγράμματα Penrose αποτελούν ένα από τα πιο χρήσιμα εργαλεία στην κατανόηση γεωμετριών στην γενική θεωρία της σχετικότητας [18]. Η ιδέα είναι να απεικονίσουμε τον χωρόχρονο σε ένα πεπερασμένο διάγραμμα εκτελώντας ένα σύμμορφο μετασχηματισμό συντεταγμένων. Τα διάφορα άπειρα στο αρχικό διάγραμμα μετασχηματίζονται σε πεπερασμένα σημεία στο διάγραμμα Penrose ως εξής:

$$\begin{aligned} r = +\infty &\rightarrow i^0 \\ t = +\infty &\rightarrow i^+ \\ t = -\infty &\rightarrow i^- \end{aligned} \tag{C.1}$$

ενώ τα δύο φωτοειδή άπειρα (του χωρόχρονου στα οποία αρχίζουν και καταλήγουν οι φωτοειδείς γεωδαιτικές γραμμές) συμβολίζονται με  $\mathcal{I}^+$  για το μελλοντικό και  $\mathcal{I}^-$  για το παρελθοντικό φωτοειδές άπειρο αντίστοιχα.

Τα διαγράμματα Penrose αναδεικνύουν τις αιτιατικές σχέσεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε χωροχρονικών σημείων, οι οποίες δεν είναι απαραίτητα προφανείς στην αρχική απεικόνιση. Ας προχωρήσουμε να το δείξουμε αυτό.

### C.1 Χωρόχρονος Minkowski

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η μετρική γράφεται:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{C.2}$$

Μπορούμε να αγνοήσουμε το γωνιακό μέρος, μελετώντας μια δισδιάστατη φέτα  $\theta, \phi = \text{σταθ}$ . Ορίζουμε τις φωτοειδείς συντεταγμένες  $u = t - r$  και  $v = t + r$ , και σκιαγραφούμε το αρχικό διάγραμμα του χωρόχρονου:

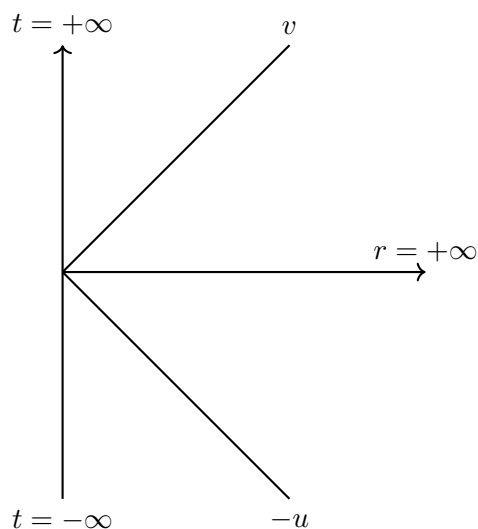


FIGURE C.1: Διάγραμμα χωρόχρονου Minkowski

Οι φωτοειδείς γραμμές άξονες ανήκουν στον κώνο φωτός της αρχής των αξόνων και καταλήγουν στα φωτοειδή άπειρα: ο άξονας  $v$  στο μελλοντικό φωτοειδές άπειρο και ο  $-u$  στο παρελθοντικό. Για την κατασκευή του διαγράμματος Penrose ορίζουμε:

$$\begin{aligned} U &= \tanh(t - r) \\ V &= \tanh(t + r) \end{aligned} \tag{C.3}$$

Αυτός ο μετασχηματισμός μετατρέπει τα άπειρα ως εξής:

$$\begin{aligned} i^+ &\Rightarrow U = V = 1 \\ i^0 &\Rightarrow U = -V = -1 \\ i^- &\Rightarrow U = V = -1 \end{aligned} \tag{C.4}$$

Έτσι το διάγραμμα Penrose γίνεται:

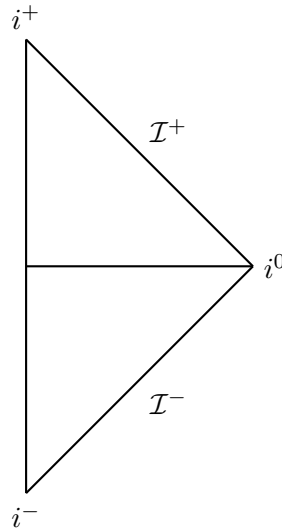


FIGURE C.2: Διάγραμμα Penrose για τον χωρόχρονο Minkowski

## C.2 Μελανή οπή Schwarzschild

Ένα άλλο παράδειγμα είναι η γεωμετρία Schwarzschild [18], που μελετήσαμε λεπτομερώς στο παράρτημα Α΄:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{C.5})$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τις συντεταγμένες Kruskal-Szekeres και το χωροχρονικό διάγραμμα A.2. Ανακαλούμε τις φωτοειδείς συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} U &= -R e^{-\omega} \\ V &= R e^{\omega} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

όπου  $\omega = \frac{t}{4MG}$  η χρονοειδής συντεταγμένη και  $R = MG \exp\left(\frac{r^*}{4MG}\right)$  η χωροειδής συντεταγμένη στην περιοχή  $r \geq 2GM$ , και  $r^* = r + 2MG \log\left(\frac{r}{2MG} - 1\right)$ . Οι συντεταγμένες  $Z$  και  $T$ , όπως και οι φωτοειδείς συντεταγμένες, επικαλύπτουν ολόκληρο τον χωρόχρονο:

$$\begin{aligned} T &= \frac{U + V}{2} \\ Z &= \frac{V - U}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Ακολουθούμε τώρα την ίδια διαδικασία με τον χωρόχρονο Minkowski, χρησιμοποιώντας την ίδια ακριβώς τριγωνομετρική συνάρτηση:

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \tanh(T - Z) \\ \tilde{V} &= \tanh(T + Z)\end{aligned}\tag{C.8}$$

Εισάγουμε εκ νέου χρονική και χωρική συντεταγμένη, ώστε να παραμετριοποιήσουμε το σύστημα αξόνων του διαγράμματος Penrose:

$$\begin{aligned}\tilde{T} &= \frac{\tilde{U} + \tilde{V}}{2} \\ \tilde{Z} &= \frac{\tilde{V} - \tilde{U}}{2}\end{aligned}\tag{C.9}$$

Το διάγραμμα απεικονίζεται πιο κάτω:

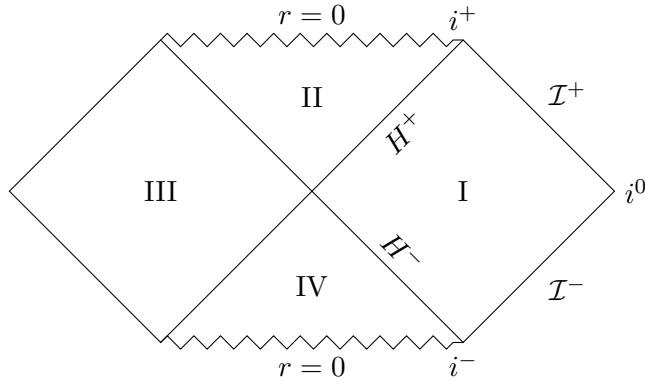


FIGURE C.3: Διάγραμμα Penrose της μεγίστης γεωμετρίας Schwarzschild

όπου  $H^+$  και  $H^-$  ο μελλοντικός και ο παρελθοντικός ορίζοντας γεγονότων αντίστοιχα.

Παρατηρούμε κάποια ενδιαφέροντα στοιχεία. Καταρχάς, έχουμε τα φωτοειδή άπειρα  $\mathcal{I}^+$  και  $\mathcal{I}^-$ , στα σύνορα, τα οποία τέμνουν τον χωρικό άξονα στο σημείο που αντιστοιχεί στο χωροειδές άπειρο. Στην περιοχή I, οι χρονοειδείς καμπύλες  $\tilde{Z} = \text{σταθ.}$  ξεκινούν από το χρονοειδές παρελθοντικό άπειρο και καταλήγουν στο χρονοειδές μελλοντικό άπειρο. Οι χωροειδείς καμπύλες  $\tilde{T} = \text{σταθ.}$  καταλήγουν στο χωροειδές άπειρο. Οι οριζόντες διαμερίζουν τον χωρόχρονο στις τέσσερις περιοχές του, τις δύο ασυμπτωτικές περιοχές I και III τη μελανή οπή και τη λευκή οπή. Επιπλέον, φαίνονται οι δύο κλάδοι της ανωμαλίας  $r = 0$ .



### C.3 Μετρική Vaidya

Εξετάζουμε στη συνέχεια τη λύση Vaidya [18][17]. Η λύση περιγράφει ένα κέλυφος φωτός που καταρρέει σε μια μελανή οπή Schwarzschild.

Μπορούμε να απεικονίσουμε σχηματικά την κατάρρευση εάν συνδυάσουμε τα διαγράμματα Penrose για τις γεωμετρίες Minkowski και Schwarzschild. Συγκεκριμένα, θα διαμερίσουμε τα διαγράμματα Penrose για τις δύο γεωμετρίες ως εξής:

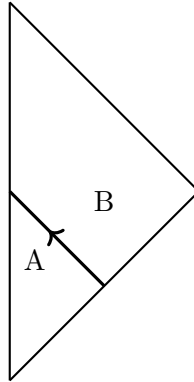


FIGURE C.4: Φωτοειδές κέλυφος ύλης που καταρρέει στον χωρόχρονο Minkowski

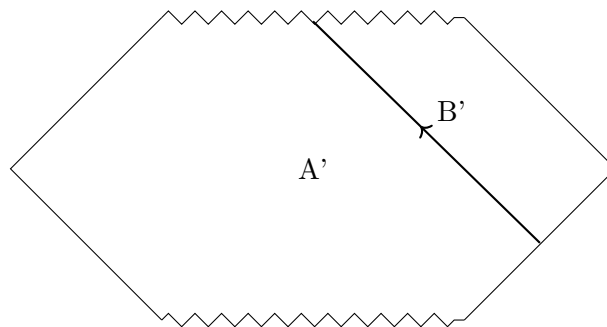


FIGURE C.5: Φωτοειδές κέλυφος ύλης στη μελανή οπή Schwarzschild

Στο διάγραμμα C.4 επιλέγουμε το τμήμα A που βρίσκεται στο εσωτερικό του κελύφους, και το τμήμα B' του διαγράμματος C.5 που βρίσκεται στο εξωτερικό του κελύφους. Ενώνουμε τα τμήματα A και B' επιβάλλοντας συνέχεια στη μετρική, και καταλήγουμε στο διάγραμμα Penrose:

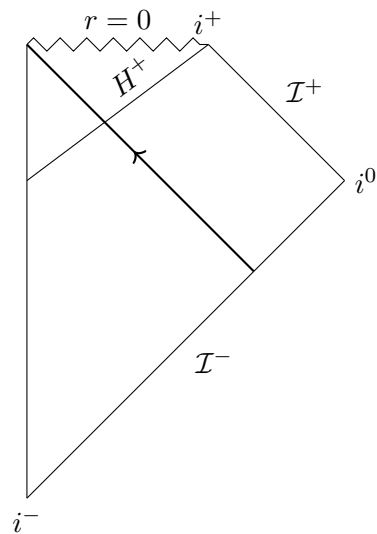


FIGURE C.6: Διάγραμμα Penrose μετρικής Vaidya

Η φωτοειδής γραμμή που τέμνει τον ορίζοντα γεγονότων είναι η κοσμική γραμμή του κελύφους, το οποίο καταρρέει εντός της βαρυτικής του ακτίνας και καταλήγει στην ανωμαλία. Ένα ενδιαφέρον στοιχείο που προκύπτει είναι το γεγονός ότι ο ορίζοντας της μελανής οπής δημιουργείται πριν την στιγμή της κατάρρευσης του κελύφους εντός της βαρυτικής του ακτίνας.

# Βιβλιογραφία

- [1] A. D. Linde. The inflationary universe. *Reports on Progress in Physics*, 47, 1984.
- [2] Andrei Linde. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, chapter 1 & 10, pages 12–40 & 267–283. CRC Press, 1990.
- [3] Sergio Zerbini. One-loop Effective Action for  $f(R)$  Gravity with Applications to Cosmology. 2015. CP3 Lecture, Odense.
- [4] Costas Kounnas, Dieter Lüst, and Nicolaos Toumbas.  $R^2$  inflation from scale invariant supergravity and anomaly free superstrings with fluxes. 2014. arXiv:1409.7076v2 [hep-th].
- [5] Marcus Spradlin, Andrew Strominger, and Anastasia Volovich. *Les Houches Lectures on de Sitter Space*, chapter 1, pages 3–9. 2001. arXiv:hep-th/0110007v2.
- [6] Thomas Hartman. Lecture Notes on Classical de Sitter Space. email: hartman@cornell.edu.
- [7] Nicolaos Toumbas. Lecture Notes for FYS405: Cosmology and General Theory of Relativity. email: nick@ucy.ac.cy.
- [8] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, chapter 10 & 12, pages 252–255 & 357–365. John Wiley & Sons Inc., Massachusetts Institute of Technology, 1972.
- [9] Robert A. McNees IV. Conventions, Definitions, Identities, and Other Useful Formulae. *Physics: Faculty Publications and Other Works, Faculty Publications*, 2010. URL <http://jacobi.luc.edu/notes.html>. Loyola University Chicago.
- [10] Luis Alvarez-Gaume, Alex Kehagias, Costas Kounnas, Dieter Lüst, and Antonio Riotto. Aspects of Quadratic Gravity. 2015. arXiv:1505.07657v2 [hep-th].
- [11] Alex Kehagias, Costas Kounnas, Dieter Lüst, and Antonio Riotto. Black Hole Solutions in  $R^2$  Gravity. 2015. arXiv:1502.04192v2 [hep-th].

- 
- [12] Tamara G. Kolda and Brett W. Bader. Tensor Decompositions and Applications. *SIAM Review*, 51(3), 2009.
- [13] Alejandro Guarnizo, Leonardo Castañeda, and Juan M. Tejeiro. Boundary Term in Metric  $f(R)$  Gravity: Field Equations in the Metric Formalism. 2010. arXiv:1002.0617v4 [gr-qc].
- [14] J. B. Hartle and S. W. Hawking. Wave function of the Universe. *Physical Review D*, 28(12), 1983.
- [15] Richard P. Feynman and Albert R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*, chapter 2 & 3, pages 26–39, 57–65 & 68–69. Dover Publications Inc., New York, 1965.
- [16] James Hartle. The State of the No-Boundary Wave Function. 2012. Hawking70, Cambridge.
- [17] Andrew Strominger. *Les Houches Lectures on Black Holes*, chapter 2, pages 4–13. 1995. arXiv:hep-th/9501071v1.
- [18] Leonard Susskind and James Lindesay. *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe*, chapter 1, pages 3–20. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1972.
- [19] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*, chapter 1, pages 1–6 & 22–24. John Wiley & Sons Inc., 1984.
- [20] Steven Weinberg. *The First Three Minutes: A modern view of the origin of the universe*, chapter 5, pages 102–119. Fontana Paperbacks, 1977.