



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρήση μη τοπικών  
τελεστών στην αδρονική φυσική

Χαράλαμπος Κωνσταντίνου

ΜΑΪΟΣ 2022

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρήση μη τοπικών  
τελεστών στην αδρονική φυσική

Χαράλαμπος Κωνσταντίνου

Επιβλέπων Καθηγητής: Χαράλαμπος Παναγόπουλος

Η Ατομική Διπλωματική Εργασία υποβλήθηκε προς μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων απόκτησης του πτυχίου Φυσικής του Τμήματος Φυσικής στο Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΜΑΪΟΣ 2022

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα πρωτόνια και τα νετρόνια είναι τα πιο σημαντικά σωματίδια που αποτελούν δέσμιες καταστάσεις τριών κουάρκς, φτιαγμένα χάρη στα γκλουόνια, τους φορείς της ισχυρής αλληλεπίδρασης. Οποιοδήποτε σωματίδιο αποτελούμενο από δύο ή περισσότερα "partons" (κουάρκς ή/και αντικουάρκς) ονομάζεται αδρόνιο. Η θεωρία που έχει αναπτυχθεί για την μελέτη τέτοιων σωματιδίων ονομάζεται κβαντική χρωμοδυναμική (QCD).

Οι συναρτήσεις κατανομής (parton distribution functions, PDFs) αποτελούν σημαντικό αντικείμενο μελέτης για την κατανόηση της εσωτερικής δομής των βαρυονίων, εφόσον ποσοτικοποιούν την πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί ένα κουάρκ ή ένα γκλουόνιο, με ένα συγκεκριμένο ποσοστό της συνολικής ορμής του βαρυονίου.

Η μελέτη των PDFs απαιτεί την επανακανονικοποίηση μη τοπικών τελεστών, που είναι και το θέμα της διπλωματικής αυτής, συγκεκριμένα ο μερικός υπολογισμός διαγραμμάτων tree level και 1-loop μη τοπικών γκλουονικών τελεστών χρησιμοποιώντας την συνηθισμένη διακριτοποίηση του Wilson, καθώς και η μελέτη της μίξης αυτών των τελεστών χρησιμοποιώντας επιχειρήματα συμμετριών. Η εργασία αυτή αποτελείται από επτά κεφάλαια, με τα πρώτα έξι να αφιερώνονται σε θεωρητικό υπόβαθρο της Θεωρίας Κβαντικών Πεδίων [1–6], και στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του υπολογισμού μαζί με μερικούς ορισμούς σχετικών ποσοτήτων.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται η εισαγωγή στην Θεωρία Κβαντικών Πεδίων με μερικά σημαντικά στοιχεία όπως η διαδικασία Euler-Lagrange και η κβάντωση ενός πεδίου μέσω του ολοκληρώματος διαδρομής του Feynman, ενώ στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα σημαντικότερα πεδία στο συνεχές, ως μια εισαγωγή για το κεφάλαιο τρία, όπου γίνεται η διακριτοποίηση στο πλέγμα εισάγοντας τον απαραίτητο συμβολισμό με αρκετή λεπτομέρεια. Στο κεφάλαιο τέσσερα αρχικά αντιμετωπίζεται ένας βασικός απειρισμός που εμφανίζεται στα συναρτησιακά ολοκληρώματα λόγω της αναλλοιώτητας της δράσης κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, πώς αυτό έχει ως αποτέλεσμα την εισαγωγή ενός νέου πεδίου στην QCD, και γράφονται ενδεικτικά κάποιες κορυφές στο πλέγμα. Το κεφάλαιο πέντε αφιερώνεται στην διαστατική ομαλοποίηση, γράφοντας κάποια ολοκληρώματα στις  $D$  διαστάσεις όπου χρησιμοποιείται ένα από αυτά σε ένα παράδειγμα υπολογισμού στο τέλος του κεφαλαίου. Στο κεφάλαιο έξι αναφέρονται με συντομία τα βασικά σημεία της επανακανονικοποίησης, ολοκληρώνοντας με ένα παράδειγμα υπολογισμού που αναδεικνύει την ανάγκη για επανακανονικοποίηση της θεωρίας. Τέλος, στο κεφάλαιο επτά ορίζονται οι βασικές ποσότητες της διπλωματικής αυτής όπως οι μη τοπικοί τελεστές και οι συναρτήσεις κατανομής (PDFs), και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των υπολογισμών που έχουν γίνει. Έπειτα στον επίλογο αναφέρονται πιθανές προεκτάσεις της εργασίας

αυτής, καθώς και μελλοντικοί υπολογισμοί που μπορούν να φανούν κερδοφόροι στην επιπλέον κατανόηση της θεωρίας.

# *ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ*

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου αρχικά στον επιβλέπον καθηγητή μου Δρ. Χαράλαμπο Παναγόπουλο, για την συνεχή βοήθεια και καθοδήγηση που μου έχει προσφέρει κατά την διάρκεια της διπλωματικής εργασίας αυτής.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά και τους φίλους μου που με βοήθησαν σε όλη την διαδικασία.

# Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Ευχαριστίες	iii
Κατάλογος Σχημάτων	vi
Κατάλογος Πινάκων	vii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Το πεδίο και η αναγκαιότητά του . . . . .	1
1.2 Κλασική Θεωρία Πεδίων . . . . .	2
1.3 Το θεώρημα της Noether . . . . .	3
1.4 Συναρτησιακά ολοκληρώματα . . . . .	4
<b>2 Πεδία στο συνεχές</b>	<b>8</b>
2.1 Ελεύθερο βαθμωτό πεδίο Klein - Gordon . . . . .	8
2.2 Το πεδίο Dirac . . . . .	9
2.3 Αλληλεπιδρώντα φερμιόνια και θεωρίες βαθμίδος . . . . .	11
2.4 Το φωτονικό πεδίο, Κβαντική Ηλεκτροδυναμική QED . . . . .	13
2.5 Το γκλουονικό πεδίο, Κβαντική Χρωμοδυναμική QCD . . . . .	15
<b>3 Πεδία στο Πλέγμα</b>	<b>17</b>
3.1 Μετασχηματισμοί Fourier σε τετραδιάστατο πλέγμα . . . . .	17
3.2 Ελεύθερο βαθμωτό πεδίο Klein - Gordon στο πλέγμα . . . . .	18
3.3 Φερμιόνια στο πλέγμα . . . . .	20
3.4 Αβελιανές θεωρίες βαθμίδος στο πλέγμα, QED . . . . .	24
3.5 Μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδος στο πλέγμα, QCD . . . . .	27
3.6 Φερμιόνια Wilson/Clover . . . . .	30
3.7 Φερμιόνια Overlap . . . . .	31
<b>4 Ασθενής σταθερά σύζευξης και Gauge fixing</b>	<b>33</b>
4.1 Βαθμωτό πεδίο Klein-Gordon στο πλέγμα . . . . .	33
4.2 Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας, η κβάντωση του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο συνεχές . . . . .	36
4.3 Μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας στο συνεχές, η Λαγκρανζιανή Faddeev-Popov . . . . .	39
4.4 Gauge fixing στο πλέγμα . . . . .	41

<b>5</b>	<b>Διαστατική Ομαλοποίηση</b>	<b>48</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	48
5.2	Πίνακες $\gamma_\mu$ και διαστατικότητα . . . . .	49
5.3	Συνάρτηση $\Gamma(z)$ και χρήσιμα ολοκληρώματα . . . . .	51
5.4	Παράμετροι Feynman . . . . .	52
5.5	Αυτοενέργεια ηλεκτρονίου . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Επανακανονικοποίηση</b>	<b>59</b>
6.1	Εισαγωγή . . . . .	59
6.2	Παράδειγμα υπολογισμού και lattice numbers . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Μη τοπικοί τελεστές και συναρτήσεις κατανομής (PDFs)</b>	<b>66</b>
7.1	Ορισμός μη τοπικών τελεστών . . . . .	66
7.2	Συναρτήσεις κατανομής PDFs . . . . .	67
7.3	Υπολογισμός συνάρτησης Green μη-τοπικού γκλουονικού τελεστή στο συνεχές . . . . .	68
7.4	Υπολογισμός συνάρτησης Green μη-τοπικού γκλουονικού τελεστή στο πλέγμα . . . . .	71
7.5	Μελέτη μίξης μη τοπικών γκλουονικών τελεστών . . . . .	73
	<b>Επίλογος</b>	<b>78</b>
	<b>Παραρτήματα</b>	<b>79</b>
<b>A</b>	<b>Ομάδα SU(N)</b>	<b>79</b>
<b>B</b>	<b>Μεταβλητές Grassmann</b>	<b>81</b>
B.1	Ορισμός . . . . .	81
B.2	Τελεστής ομοτιμίας . . . . .	81
B.3	Παραγωγή . . . . .	82
B.4	Ολοκλήρωση . . . . .	83
<b>Γ</b>	<b>Γκαουσιανά Ολοκληρώματα</b>	<b>84</b>
Γ.1	Γκαουσιανό ολοκλήρωμα πραγματικών και μιγαδικών μεταβλητών . . . . .	84
Γ.2	Γκαουσιανό ολοκλήρωμα μεταβλητών Grassmann . . . . .	86
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>89</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

3.1	Απεικόνιση των συνδέσμων (links) στο πλέγμα . . . . .	25
3.2	Απεικόνιση της στοιχειώδους πλακέτας (plaquette) στο $\mu\nu$ - επίπεδο . . . . .	26
3.3	Άθροισμα τεσσάρων πλακετών σχηματίζοντας το $Q_{\mu\nu}$ . . . . .	31
4.1	Διαδότης και κυβικός όρος αλληλεπίδρασης βαθμωτού πεδίου . . . . .	34
4.2	Συνεισφορά στην συνάρτηση Green μέχρι τάξη $\mathcal{O}(g_0^2)$ . . . . .	34
4.3	Κορυφή ηλεκτρονίου, ποζιτρονίου και φωτονίου . . . . .	43
4.4	Κορυφή ηλεκτρονίου, ποζιτρονίου και δύο φωτονίων . . . . .	43
4.5	Κορυφή κουάρκ, αντι-κουάρκ και γκλουονίου . . . . .	46
4.6	Κορυφή τριών γκλουονίων . . . . .	47
4.7	Κορυφή ghost, αντι-ghost και γκλουονίου . . . . .	47
5.1	Electron two-point function . . . . .	53
5.2	Electron self-energy . . . . .	54
5.3	Άθροισμα διαγραμμάτων 1PI . . . . .	57
5.4	Fourier transform of the two-point function . . . . .	57
7.1	Διαγράμματα tree-level της συνάρτησης Green μη τοπικού γκλουονικού τελεστή . . . . .	69
7.2	Διαγράμματα 1-loop της συνάρτησης Green μη τοπικού γκλουονικού τελεστή . . . . .	71



# Κατάλογος Πινάκων

7.1	Μετασχηματισμοί ομοτιμίας μη τοπικών γκλουονικών τελεστών . . . . .	76
-----	---	----

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Το πεδίο και η αναγκαιότητά του

Ένα πεδίο είναι μια συνάρτηση του χωροχρόνου με άπειρους βαθμούς ελευθερίας. Μπορούμε να σκεφτόμαστε το πεδίο, σαν ένα σύνολο από άπειρες συναρτήσεις του χρόνου, μία βαθμωτή συνάρτηση για κάθε σημείο του χώρου εάν το πεδίο περιγράφει μια βαθμωτή ποσότητα, ή διανυσματική συνάρτηση εάν το πεδίο περιγράφει μια διανυσματική ποσότητα. Αρχικά έγινε η εμφάνιση της έννοιας του πεδίου με σκοπό να εξηγηθούν οι εξ αποστάσεως δυνάμεις, με το πεδίο να ορίζεται ως το μέσο που "μεταφέρει" τη δύναμη μεταξύ αλληλεπιδρώντων σωματιδίων.

Η εξίσωση Schroedinger εμφανίζεται σε μια κβαντική, μη-σχετικιστική θεωρία, που περιγράφει σωστά ένα σύστημα με σταθερό αριθμό σωματιδίων με χαμηλές ενέργειες, εφόσον γίνεται χρήση της εξίσωσης  $E = p^2/2m$ . Οπότε για την περιγραφή ενός συστήματος με μεταβαλλόμενο αριθμό σχετικιστικών σωματιδίων που συμπεριφέρονται κβαντικά, παρουσιάζεται η ανάγκη ανάπτυξης μιας άλλης θεωρίας, της **Θεωρίας Κβαντικών Πεδίων**. Είναι γενικά αποδεκτό ότι η θεωρία αυτή είναι πλέον η καταλληλότερη για την περιγραφή τριών από τις τέσσερις δυνάμεις, την ηλεκτρομαγνητική, την ισχυρή και την ασθενή.

Η περιγραφή των διαφόρων σωματιδίων μέσω πεδίων επιτυγχάνει να εξηγήσει το γεγονός ότι σωματίδια του ίδιου τύπου δεν είναι ταυτοποιήσιμα. Εναλλάσσοντας δύο πανομοιότυπα σωματίδια η κατάσταση του συστήματος δεν αλλάζει, πέρα από ένα πρόσημο. Τα σωματίδια ίδιου τύπου είναι πανομοιότυπα γιατί αποτελούν όλα μια διαταραχή στο πεδίο που τα περιγράφει. Στην κλασική περιγραφή, σωματίδια και πεδία ήταν δύο διαφορετικές έννοιες, όμως με την εμφάνιση των εξισώσεων του Maxwell που αναδείκνυαν την κυματική φύση του φωτός, άρχισε να αμφισβητείται η κλασική θεωρία. Το φωτόνιο ως σωματίδιο, περιγράφηκε επιτυχώς ως ένα κύμα, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Η αναγκαιότητα της έννοιας του πεδίου μπορεί επίσης να φανεί απαιτώντας η αρχή της αιτιότητας να μην παραβιάζεται. Μέσω της έννοιας του πεδίου το πρόβλημα αυτό δεν εμφανίζεται, κάτι που μπορούμε να δούμε πιο ποσοτικά, υπολογίζοντας το πλάτος μετάβασης από ένα σημείο  $x_0$  στο  $x$ , για ένα ελεύθερο σωματίδιο:

$$U(t) = \langle x | e^{-iHt} | x_0 \rangle \quad (1.1)$$

Στη μη σχετικιστική περίπτωση έχουμε  $E = p^2/2M$ , οπότε

$$\begin{aligned} U(t) &= \langle x | e^{-i(p^2/2M)t} | x_0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \langle x | e^{-i(p^2/2M)t} | p \rangle \langle p | x_0 \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-i(p^2/2M)t} \cdot e^{ip \cdot (x-x_0)} \\ &= \left( \frac{M}{2\pi i t} \right)^{3/2} e^{iM(x-x_0)^2/2t} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Η σχέση αυτή είναι μη μηδενική για κάθε  $x$  και  $t$ . Δηλαδή ένα σωματίδιο μπορεί να διαδοθεί μεταξύ οποιωνδήποτε δύο σημείων του χώρου, σε οποδήποτε μικρό χρόνο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παραβίαση της αρχής της αιτιότητας στην θεωρία αυτή. Ο αντίστοιχος υπολογισμός μπορεί να γίνει επίσης για  $E = \sqrt{p^2 + M^2}$  χρησιμοποιώντας συναρτήσεις Bessel για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, και οδηγεί σε παρόμοια παραβίαση.

Το πρόβλημα αυτό λύνεται με την θεωρία κβαντικών πεδίων. Στην πολυσωματιδιακή θεωρία αυτή, αποδεικνύεται ότι ένα αντισωματίδιο που κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση από το  $x_0$  στο  $x$ , θα δώσει μια αντίθετη συνεισφορά για  $(x - x_0)^2 > c^2 t^2$ , και έτσι το συνολικό πλάτος θα μηδενίζεται.

## 1.2 Κλασική Θεωρία Πεδίων

Η δράση ενός συστήματος περιγράφει την δυναμική του, καθορίζει την χρονική του εξέλιξη, με το σύστημα να "επιλέγει" την συμπεριφορά που ελαχιστοποιεί την ποσότητα αυτή. Η θεμελιώδη ποσότητα αυτή εκφράζεται ως το χρονικό ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής  $L$ , ή το χωροχρονικό ολοκλήρωμα της  $\mathcal{L}$ :

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x \quad (1.3)$$

όπου  $\mathcal{L}$  η Λαγκρανζιανή πυκνότητα, η οποία είναι συνάρτηση ενός ή περισσοτέρων πεδίων  $\phi(x)$ .

Η αρχή της ελάχιστης δράσης γίνεται παραγωγίζοντας συναρτησιακά ως προς τα πεδία και τις παραγώγους τους:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta S \\
&= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] \\
&= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right]
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss, μπορούμε να εκφράσουμε τον τελευταίο όρο σαν ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα ως προς κλειστή επιφάνεια που επικαλύπτει ολόκληρο των χωρόχρονο, με μηδενική συνεισφορά εάν τα πεδία φθίνουν αρκετά γρήγορα στο άπειρο. Μηδενίζοντας το εναπομένον ολοκλήρωμα, καταλήγουμε στις εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange για τα πεδία:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{1.5}$$

με μια εξίσωση Euler-Lagrange για κάθε πεδίο που εμπλέκεται στη Λαγκρανζιανή.

Αντίστοιχα μπορούμε να μιλήσουμε για την Χαμιλτονιανή  $H$  ενός η περισσότερων πεδίων ορίζοντας:

$$p(x) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(x)} \sim \pi(x) d^3x \tag{1.6}$$

όπου

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \tag{1.7}$$

ονομάζεται η πυκνότητα ορμής του  $\phi(x)$ . Έτσι η Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφεί ως:

$$H = \int d^3x [\pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}] \equiv \int d^3x \mathcal{H} \tag{1.8}$$

όπου  $\mathcal{H}$  η Χαμιλτονιανή πυκνότητα.

### 1.3 Το θεώρημα της Noether

Το θεώρημα της Noether μας λέει ότι για κάθε συνεχή μετασχηματισμό που αφήνει τις εξισώσεις κίνησης αναλλοίωτες, δηλαδή για κάθε συμμετρία της θεωρίας, αντιστοιχεί ένας νόμος διατήρησης.

Ένας γενικός συνεχής μετασχηματισμός πεδίου μπορεί να γραφεί στην απειροελάχιστη του μορφή ως:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) \tag{1.9}$$

Τότε εάν η Λαγκρανζιανή πυκνότητα μετασχηματίζεται με τον συγκεκριμένο τρόπο:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu J^\mu(x) \quad (1.10)$$

όπου  $J^\mu$  αποτελεί ένα τετραδιάνυσμα, οι εξισώσεις Euler-Lagrange παραμένουν αναλλοίωτες εφόσον ο όρος που προστίθεται προσδίδει μηδενική συνεισφορά στη δράση.

Στην συνέχεια, γεγονός ότι η μεταβολή της  $\mathcal{L}$  όταν το πεδίο  $\phi(x)$  είναι λύση των εξισώσεων κίνησης:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta(\partial_\mu\phi) \\ &= \alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi - \alpha \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \alpha \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \\ &= \alpha \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \delta\phi \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

και έτσι προκύπτει ότι για ένα μετασχηματισμό όπως φαίνεται στην εξίσωση (1.9), με το πεδίο να μεταβάλλεται κατά  $\delta\phi(x)$ , τότε το ρεύμα  $j^\mu(x)$

$$j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \Delta\phi - J^\mu \quad (1.12)$$

ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας και αποτελεί ένα διατηρούμενο μέγεθος:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (1.13)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss, προκύπτει άμεσα η διατήρηση του φορτίου  $Q$ :

$$Q \equiv \int_{all \ space} j^0(x) d^3x \quad (1.14)$$

δηλαδή, ικανοποιείται η εξίσωση  $dQ/dt = 0$ .

## 1.4 Συναρτησιακά ολοκληρώματα

Η λεγόμενη κανονική κβάντωση ενός πεδίου, γίνεται κατά αντιστοιχία με την κβάντωση των σωματιδίων. Δηλαδή τα παρατηρήσιμα μεγέθη περιγράφονται πλέον με ερμητιανούς τελεστές, και παρουσιάζονται κανονικές μεταθετικές σχέσεις μεταξύ των πεδίων:

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Η συντεταγμένη  $q(t)$  που θα είχαμε στην περίπτωση ενός κβαντικού σωματιδίου αντικαθιστάται με το πεδίο  $\phi(x, t)$ , ενώ το ρόλο της συζυγούς ορμής έχει το συζυγές πεδίο  $\pi(x)$  όπως έχει ορισθεί πιο πάνω. Να σημειωθεί πως οι πιο πάνω μεταθέτες εμπλέκουν τελεστές που ορίζονται την ίδια χρονική στιγμή.

Η Χαμιλτονιανή του συστήματος και η Χαμιλτονιανή πυκνότητα ορίζονται στην εξίσωση (1.8), έτσι το πρόβλημα ανάγεται σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης του Schroedinger. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή δεν χρησιμοποιείται πλέον, όλοι οι υπολογισμοί διαταραχτικής φύσεως και μη γίνονται με μια εναλλακτική διαδικασία κβάντωσης, μέσω ολοκληρωμάτων διαδρομής ή αλλιώς συναρτησιακών ολοκληρωμάτων, τα οποία εισήχθησαν από τον Feynman το 1948.

Ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα ή αλλιώς ολοκλήρωμα διαδρομής ορίζεται ως:

$$\int Df(x) G[f(x)] = \int \prod_x df(x) G[f(x)] \quad (1.16)$$

Η χρησιμότητα του συναρτησιακού ολοκληρώματος φαίνεται σε υπολογισμούς που γίνονται στα πλαίσια της Θεωρίας Κβαντικών Πεδίων, όπου έχουμε την ευχέρεια να αντιμετωπίζουμε τα πεδία σαν συναρτήσεις, και όχι σαν τελεστές όπως αναδεικνύει η κανονική κβάντωση.

Η χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης  $\psi(q, t)$  που ικανοποιεί την εξίσωση του Schroedinger δίνεται από τη σχέση:

$$\psi(q', t') = \int dq G(q', t'; q, t) \psi(q, t) \quad (1.17)$$

όπου

$$G(q', t'; q, t) = \langle q' | e^{-i\frac{H(t'-t)}{\hbar}} | q \rangle \quad (1.18)$$

η συνάρτηση Green, ή αλλιώς ο διαδότης που περιγράφει τη εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης  $\psi(q, t)$  από το σημείο  $(q, t)$  στο σημείο  $(q', t')$ . Να σημειωθεί ότι ο πυρήνας αυτής της συνέλιξης (ο διαδότης), δεν εξαρτάται από την αρχική μορφή της κυματοσυνάρτησης.

Ο Feynman απέδειξε ότι μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση Green σαν ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα:

$$G(q', t'; q, t) = N \int Dq e^{iS[q]/\hbar} \quad (1.19)$$

με το ολοκλήρωμα  $\int Dq$  να γίνεται ως προς όλες τις πιθανές διαδρομές που ξεκινούν από την αρχική θέση  $q$ , και καταλήγουν στην τελική θέση  $q'$ , χρησιμοποιώντας την ιδιότητα σύνθεσης (composition property) που έχουν οι διαδότες. Το  $N$  είναι η σταθερά

κανονικοποίησης. Το διαφορικό ολοκλήρωσης ορίζεται ως:

$$Dq \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n dq(t_i) \quad (1.20)$$

όπου  $t_i$  οι ενδιάμεσες χρονικές στιγμές μεταξύ  $t$  και  $t'$ . Η συνάρτηση Green που φαίνεται πιο πάνω μπορεί να υπολογισθεί εύκολα για μία διάσταση, και για μια Χαμιλτονιανή  $H = \frac{p^2}{2M} + V(\hat{q})$ , με άμεση γενίκευση και σε άλλες περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} G(q', t'; q, t) &= \langle q', t' | q, t \rangle \\ &= \langle q' | e^{-i\frac{H(t'-t)}{\hbar}} | q \rangle \\ &\approx \langle q' | e^{-ip^2\Delta t/2M\hbar} e^{-iV(\hat{x}\Delta t/\hbar)} | q \rangle + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= e^{-iV(q)\Delta t/\hbar} \int dp' \langle q' | e^{-ip'^2\Delta t/2M\hbar} | p' \rangle \langle p' | q \rangle \\ &= e^{-iV(q)\Delta t/\hbar} \int dp' e^{-ip'^2\Delta t/2M\hbar} e^{ip'(q'-q)/\hbar} \frac{1}{2\pi\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{M}{2\pi i\hbar\Delta t}} e^{i[(\frac{q'-q}{\Delta t})^2 \frac{M}{2} - V(q)]\Delta t/\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{M}{2\pi i\hbar\Delta t}} e^{iS(t', t)/\hbar} \end{aligned} \quad (1.21)$$

όπου  $\Delta t \equiv t' - t$ . Όταν πάρουμε το όριο όπου το  $\Delta t \rightarrow 0$ , και αθροίσουμε ως προς όλα τα δυνατά μονοπάτια, προκύπτει το ολοκλήρωμα που φαίνεται πιο πάνω.

Στη Θεωρία Κβαντικών Πεδίων ορίζουμε τη συνάρτηση Green ως:

$$G(x, y, \dots) = \langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) \dots | \Omega \rangle \quad (1.22)$$

όπου το  $|\Omega\rangle$  είναι η θεμελιώδης κατάσταση του συστήματος, και το σύμβολο  $T$  υποδηλώνει διάταξη των πεδίων με αντίστροφη χρονολογική σειρά. Όπως και στον κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή μπορούμε να γράψουμε οποιαδήποτε φυσική ποσότητα σαν την αναμενόμενη τιμή στο κενό ενός σύνθετου τελεστή που αποτελείται από τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, έτσι και στην Κβαντική Θεωρία Πεδίων εάν είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τέτοιες συναρτήσεις Green, τότε γνωρίζουμε τα πάντα για το υπό μελέτη σύστημα. Να σημειωθεί ότι η συνάρτηση Green ενός γινομένου δύο πεδίων σε δύο σημεία του χωροχρόνου έχει τη φυσική σημασία του διαδότη.

Γράφοντας την σταθερά κανονικοποίησης, και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της εξίσωσης (1.21) προκύπτει:

$$G(x, y, \dots) = \frac{\int D\phi \phi(x) \phi(y) \dots e^{iS[\phi]/\hbar}}{\int D\phi e^{iS[\phi]/\hbar}} \quad (1.23)$$

όπου  $\int D\phi$  είναι το άθροισμα όλων των πιθανών διατάξεων του  $\phi(x)$ .

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων Green απαιτεί την μεταφορά από το χωρόχρονο Minkowski στον Ευκλείδειο χώρο, όταν έχουμε μποζονικά πεδία. Αυτό πετυχαίνεται με την αναλυτική συνέχιση σε φανταστικούς χρόνους, ή αλλιώς στροφή του Wick, δηλαδή  $x^0 \rightarrow -ix^4$ ,  $y^0 \rightarrow -iy^4$ . Τότε, η εξίσωση (1.23) γράφεται:

$$\langle \phi(x)\phi(y)\dots \rangle = \frac{\int D\phi \phi(x)\phi(y)\dots e^{-S_E[\phi]/\hbar}}{\int D\phi e^{-S_E[\phi]/\hbar}} \quad (1.24)$$

όπου  $S_E[\phi]$  είναι η δράση στον Ευκλείδειο χώρο για το πεδίο. Το Ευκλείδειο συναρτησιακό ολοκλήρωμα υπολογίζεται χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις.

Κατά αντιστοιχία με τα μποζόνια, γράφουμε την έκφραση που αναφέρεται σε συναρτήσεις Green φερμιονικών πεδίων:

$$\langle \psi_\alpha(x)\dots\bar{\psi}_\beta(y)\dots \rangle = \frac{\int D\bar{\psi}D\psi (\psi_\alpha(x)\dots\bar{\psi}_\beta(y)\dots) e^{-S_E[\psi,\bar{\psi}]}}{\int D\bar{\psi}D\psi e^{-S_E[\psi,\bar{\psi}]}} \quad (1.25)$$

με  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  το ζεύγος φερμιόνιο-αντιφερμιόνιο και  $S_E[\psi,\bar{\psi}]$  η αντίστοιχη δράση στον Ευκλείδειο χώρο. Οι μεταβλητές ολοκλήρωσης στην πιο πάνω σχέση δεν παίρνουν συνήθεις αριθμητικές τιμές, αλλά είναι αντιμετατιθέμενες μεταβλητές Grassmann (Παράρτημα Β).

Σε ελάχιστες περιπτώσεις οι συναρτήσεις Green μπορούν να υπολογισθούν αναλυτικά, συνήθως όμως χρειάζεται να γίνει ο υπολογισμός είτε διαταραχτικά είτε μέσω προσομοιώσεων. Θα δούμε στο πλέγμα διαταραχτικούς υπολογισμούς υποθέτοντας ασθενή σταθερά σύζευξης.



## Κεφάλαιο 2

# Πεδία στο συνεχές

### 2.1 Ελεύθερο βαθμωτό πεδίο Klein - Gordon

Η δράση που χαρακτηρίζει το πεδίο αυτό είναι:

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x)(2 + M^2)\phi(x) \quad (2.1)$$

όπου  $2 = \partial^\mu \partial_\mu$  είναι ο τελεστής d'Alembert και  $M$  στην κλασική περίπτωση μπορεί να θεωρηθεί μια απλή παράμετρος, ενώ αντίστοιχα στην κβαντική περιγραφή του πεδίου, ως την μάζα των σωματιδίων που περιγράφει.

Αυτή η δράση σχετίζεται με την Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 \quad (2.2)$$

Χρησιμοποιώντας την διαδικασία Euler-Lagrange καταλήγουμε στην εξίσωση Klein - Gordon

$$(2 + M^2)\phi(x) = 0 \quad (2.3)$$

όπου  $\hbar = c = 1$ . Η εξίσωση αυτή ήταν μια από τις πρώτες προσπάθειες να γίνει μια σύνδεση μεταξύ κβαντικής μηχανικής και ειδικής σχετικότητας, εμφανίζει όμως κάποια βασικά προβλήματα.

Αρχικά, εμπλέκει δεύτερες χρονικές παραγώγους. Δηλαδή για να περιγράψει κάποιος πλήρως την συμπεριφορά του πεδίου, χρειάζεται τόσο την αρχική του μορφή, όσο και την αρχική μορφή της χρονικής του παραγώγου. Έπειτα, επιτρέπει την ύπαρξη αρνητικών ενεργειών, με την συνέπεια ότι, στην μονοσωματιδιακή θεωρία αυτή, δεν θα είχαμε θεμελιώδη κατάσταση (κατάσταση κενού). Επίσης όταν γίνει ο συνήθης υπολογισμός του ρεύματος πιθανότητας, για την μελέτη της εξίσωσης συνέχειας, προκύπτει μία έκφραση για

την πυκνότητα πιθανότητας, η οποία έχει την ανεπιθύμητη ιδιότητα ότι παίρνει και αρνητικές τιμές. Αυτοί οι λόγοι ήταν αρκετοί για να απορριφθεί η εξίσωση Klein – Gordon, και να γίνουν προσπάθειες με άλλες εξισώσεις (εξίσωση *Dirac*). Να σημειωθεί ότι η εξίσωση Klein – Gordon αποτελεί μία κλασική κυματική εξίσωση.

Η εξίσωση αυτή προκύπτει άμεσα από την σχέση  $E = \sqrt{p^2 + M^2}$ , χρησιμοποιώντας την εξίσωση ιδιοτιμών  $H\phi(x) = E\phi(x)$ , με  $H = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$  και  $E = \sqrt{(-i\nabla)^2 + M^2}$ , όπως ακριβώς προκύπτει η εξίσωση *Schroedinger* με  $E = (-i\nabla)^2/2M$ .

Εάν θέλουμε να μεταφερθούμε από τον χωρόχρονο *Minkowski* στον Ευκλείδειο χώρο, τότε πρέπει να κάνουμε μια στροφή του *Wick*, δηλαδή  $x_0 \rightarrow (-ix_4)$ . Τότε η δράση γράφεται ως:

$$S_E[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x)(-2 + M^2)\phi(x) \quad (2.4)$$

όπου πλέον ο τελεστής d'Alembert έχει μετατραπεί στην τετραδιάστατη Λαπλασιανή,

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \quad (2.5)$$

και όταν γράφουμε  $\phi(x)$  εννοούμε το πεδίο με το καινούργιο όρισμα με την Ευκλείδεια χρονική συνιστώσα. Η στροφή του *Wick* είναι απαραίτητη στον υπολογισμό συναρτησιακών ολοκληρωμάτων στην περίπτωση που περιγράφουμε μποζόνια, κάτι που δεν συμβαίνει όταν έχουμε φερμιόνια, καθώς οι μεταβλητές ολοκλήρωσης είναι μεταβλητές Grassmann όπως αναφέρθηκε πιο πάνω.

Τότε, η συνάρτηση συσχέτισης μεταξύ δύο πεδίων στον χώρο, υπολογίζεται αναλυτικά και ισούται με:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 + M^2} \quad (2.6)$$

Θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο πως προκύπτει αυτή η συνάρτηση συσχέτισης αναλυτικά στο πλέγμα.

## 2.2 Το πεδίο Dirac

Όταν περιγράφουμε ελεύθερα λεπτόνια, δηλαδή φερμιόνια χωρίς χρωματικό δείκτη ή δείκτη γεύσης, η δράση που περιγράφει την συμπεριφορά τους στον χωρόχρονο *Minkowski* είναι η ακόλουθη:

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x) \quad (2.7)$$

ή στον Ευκλείδειο χώρο

$$S^E[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu^E \partial_\mu + M)\psi(x) \quad (2.8)$$

Οι πίνακες  $\gamma^\mu$  αποτελούν τους πίνακες Dirac, που ικανοποιούν την άλγεβρα,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

και

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

με τους πίνακες στους δύο χώρους να σχετίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \gamma_4^E &= \gamma^0 \\ \gamma_i^E &= -i\gamma^i \end{aligned} \quad (2.11)$$

Το  $\bar{\psi}$  που εμφανίζεται στις εξισώσεις ορίζεται ως  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ , με το  $\psi$  να αποτελεί ένα σπινωριακό πεδίο με τις τέσσερις συνιστώσες του  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Η αντίστοιχη Λαγκρανζιανή πυκνότητα του πεδίου Dirac είναι η εξής,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x) \quad (2.12)$$

και η εξίσωση που προκύπτει από τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi(x) = 0 \quad (2.13)$$

αποτελεί την περίφημη εξίσωση του Dirac για ελεύθερα λεπτόνια.

Συγκριτικά με την εξίσωση Klein-Gordon, η εξίσωση του Dirac περιέχει παράγωγους πρώτης τάξης ως προς χρόνο και χώρο, έτσι ξεπερνιέται η ανάγκη για δύο αρχικές συνθήκες, καθώς επίσης φαίνεται να συμπεριφέρεται στον χώρο και χρόνο ισοδύναμα. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση αυτή προκύπτει μια θετική πυκνότητα πιθανότητας, όμως παραμένει το πρόβλημα ύπαρξης αρνητικών ενεργειών. Το πρόβλημα αυτό αίρεται στα πλαίσια μιας πολυσωματιδιακής θεωρίας με την ύπαρξη των αντισωματιδίων, και με θεμελιώδη κατάσταση την περίπτωση όπου οι καταστάσεις αρνητικής ενέργειας είναι όλες κατειλημμένες, ενώ οι καταστάσεις θετικής ενέργειας είναι όλες άδειες. Η εικόνα αυτή ονομάζεται και "θάλασσα του Dirac".

Η εξίσωση Dirac (2.13), η οποία περιγράφει ελεύθερα φερμιόνια, έχει τέσσερις ανεξάρτητες λύσεις που αντιστοιχούν σε μηδενική ορμή:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(2)} &= e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \psi^{(3)} &= e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi^{(4)} &= e^{+imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο λύσεις έχουν θετική ενέργεια  $m$ , και οι άλλες δύο  $-m$  ( $c=1$ ,  $\hbar=1$ ). Οι δύο λύσεις θετικής ενέργειας μπορεί ναδειχθεί πως στο μη-σχετικιστικό όριο, συμφωνούν με τις λύσεις της εξίσωσης Pauli.

Όταν θέλουμε να περιγράψουμε τα υπόλοιπα φερμιόνια, δηλαδή τα quarks, ο σπίνορας Dirac πρέπει να πάρει ακόμη δύο δείκτες, ένα δείκτη που εκφράζει το χρώμα και παίρνει τιμές 1,2 ή 3, και ένα για την γέυση των quarks όπου παίρνει τιμές 1-6 (να σημειωθεί ότι τα παρατηρούμενα σωματίδια στην φύση είναι άχρωμα). Θα δούμε την περίπτωση αυτή στη συνέχεια.

## 2.3 Αλληλεπιδρώντα φερμιόνια και θεωρίες βαθμίδος

### Αβελιανές θεωρίες βαθμίδος

Η εξίσωση του Dirac που γράφτηκε μέχρι στιγμής αφορούσε ελεύθερα φερμιόνια, οπότε το επόμενο βήμα είναι να εισαγάγουμε μια αλληλεπίδραση με ένα 'εξωτερικό' πεδίο, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi(x) \quad (2.15)$$

Όπου

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.16)$$

είναι η συναλλοίωτη παράγωγος, που εμπεριέχει στον ορισμό της το λεγόμενο τετραδυναμικό που περιγράφει το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο:

$$A_\mu \equiv (V, \vec{A}) \quad (2.17)$$

με τα πεδία να δίνονται απο τις συνήθειες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}\end{aligned}\quad (2.18)$$

Τα πεδία αυτά παραμένουν αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, δηλαδή:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x) \quad (2.19)$$

όπου το  $\Lambda(x)$  αποτελεί μία τυχαία βαθμωτή συνάρτηση του χωροχρόνου. Ξέρουμε ήδη από την μελέτη της εξίσωσης του Schrodinger, πως η κυματοσυνάρτηση δεν παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς, έτσι κατα αντιστοιχεία και ο σπίνορας Dirac αλλάζει:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow e^{i\Lambda(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{-i\Lambda(x)}\bar{\psi}(x)\end{aligned}\quad (2.20)$$

Είναι τώρα φανερό πως η εξίσωση Dirac παραμένει αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Εναλλακτικά θα μπορούσε κανείς να απαιτήσει η εξίσωση αυτή να είναι συναλλοίωτη κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς, χωρίς να γνωρίζει πως μετασχηματίζεται το τετραδυναμικό  $A_\mu$ , και να καταλήξει στην εξίσωση (2.19).

### Μη-Αβελιανές θεωρίες βαθμίδος

Στη περίπτωση που έχουμε αλληλεπιδρώντα quarks, η φερμιονική δράση γράφεται όπως η εξίσωση (2.15) με τους δύο επιπλέον δείκτες να παραλείπονται για χάρη συντομίας, όμως εννοούνται. Η συναλλοίωτη παράγωγος έχει την ίδια μορφή:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_0 A_\mu \quad (2.21)$$

όπου το  $g_0$  ονομάζεται σταθερά σύζευξης (είναι το αντίστοιχο του ηλεκτρικού φορτίου), και το  $A_\mu$  πλέον είναι ένας πίνακας  $3 \times 3$  που εκφράζει το γκλουονικό πεδίο του οποίου την δράση θα δούμε στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Οι σπίνορες Dirac μετασχηματίζονται τώρα με ένα πίνακα  $G(x)$  όπου αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό χρώματος:

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow G(x)\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)G^{-1}(x)\end{aligned}\quad (2.22)$$

Ο πίνακας αυτός μπορεί ναδειχθεί πως αποτελεί στοιχείο της ομάδας  $SU(3)$  χρησιμοποιώντας επιχειρήματα διατήρησης πιθανότητας και απαιτώντας ένα βαρυόνιο να είναι άχρωμο. Στην συνέχεια, απαιτώντας η εξίσωση Dirac να είναι συναλλοίωτη κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς βαθμίδας, προκύπτει ο εξής μετασχηματισμός για το γκλουονικό πεδίο:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = G(x)A_\mu(x)G^{-1}(x) - \frac{i}{g_0}G(x)\partial_\mu G^{-1}(x) \quad (2.23)$$

Από αυτή τη σχέση μπορούμε να απαιτήσουμε το γκλουονικό πεδίο να είναι πάντα ερμιτιανό και να έχει μηδενικό ίχνος, κρατώντας αυτά τα δύο χαρακτηριστικά ακόμη και όταν μετασχηματίζεται. Συμπερασματικά, μπορούμε να γράψουμε το πεδίο αυτό ως ένα γραμμικό συνδυασμό χρησιμοποιώντας τους γεννήτορες της ομάδας  $SU(3)$ :

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a(x) T^a \quad (2.24)$$

όπου  $T^a$  οι 8 γεννήτορες και  $A_\mu^a(x)$  8 χωροχρονικά τετραδιανύσματα που περιγράφουν το κάθε ένα, ένα από τα 8 γκλουόνια, τους φορείς της ισχυρής αλληλεπίδρασης μεταξύ των quarks. Έτσι φαίνεται και στην μη-Αβελιανή περίπτωση το συναλλοίωτο της εξίσωσης Dirac.

## 2.4 Το φωτονικό πεδίο, Κβαντική Ηλεκτροδυναμική QED

Μέχρι τώρα οι μόνες δυναμικές ποσότητες ήταν φερμιόνια, όμως για να μπορέσουμε να αναφερθούμε σε μία πλήρη θεωρία, πρέπει να εισαγάγουμε δυναμική και για τα μποζόνια. Στο υποκεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε την δράση του φωτονικού πεδίου, του φορέα της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης. Η δράση δίνεται από την σχέση:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.25)$$

ή στον Ευκλείδειο χώρο,

$$S^E = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.26)$$

όπου εμφανίζεται ο ηλεκτρομαγνητικός ταυιστής που έχει το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ως τα πινακοστοιχεία του.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Χρησιμοποιώντας το τετραδυναμικό τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.28)$$

όπου πλέον φαίνεται ότι είναι ένας πλήρης αντισυμμετρικός ταυιστής. Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα που απορρέει από την δράση (2.25), στην παρουσία εξωτερικών φορτίων και ρευμάτων είναι:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A^\mu \mathcal{J}_\mu \quad (2.29)$$

με το  $\mathcal{J}^\nu$  το τετραδιάνυσμα της πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου και της πυκνότητας ρεύματος.

$$\mathcal{J}^\nu \equiv (\rho, \vec{J}) \quad (2.30)$$

Από τις εξισώσεις Euler-Lagrange προκύπτουν οι τέσσερις από εξισώσεις του Maxwell,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mathcal{J}^\nu \quad (2.31)$$

Στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν 'εξωτερικά ρεύματα', όλο το σύστημα είναι δυναμικό, και το τετραδιάνυσμα αυτό γράφεται συναρτήσει του σπίνορα Dirac. Να σημειωθεί ότι οι υπόλοιπες τέσσερις εξισώσεις του Maxwell δίνονται από την σχέση:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0 \quad (2.32)$$

όπου  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  ο τετραδιάστατος αντισυμμετρικός ταυιστής Levi-Civita.

Η επιλογή της δράσης δεν έγινε τυχαία, φαίνεται αρκετά εύκολα ότι είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας (νοούμενου ότι το τετραδιάνυσμα  $|_\mu$  διατηρείται), και περιέχει τις σωστές δυνάμεις των πεδίων ώστε να αναπαράγονται οι εξισώσεις του Maxwell.

Εάν γράψουμε το  $\mathcal{J}^\nu$  ως ένα τετραδιάνυσμα με τον εξής τρόπο:

$$\mathcal{J}^\nu = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (2.33)$$

τότε είμαστε έτοιμοι να γράψουμε κάτω την δράση της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής χρησιμοποιώντας την δράση των ηλεκτρονίων και των φωτονίων,

$$S_{QED} = S_{photons} + S_{electrons} \quad (2.34)$$

$$S_{QED} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - M) \psi(x)$$

ή αντίστοιχα στον Ευκλείδειο χώρο,

$$S_{QED}^E = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu D_\mu + M) \psi(x) \quad (2.35)$$

## 2.5 Το γκλουονικό πεδίο, Κβαντική Χρωμοδυναμική QCD

Κατά αντιστοιχία με το προηγούμενο υποκεφάλαιο, όταν αναφερόμαστε σε Κβαντική Χρωμοδυναμική, πρέπει να συμπεριλάβουμε και τα αντίστοιχα μποζόνια στην θεωρία, όχι μόνο τα quarks. Οι φορείς των ισχυρών αλληλεπιδράσεων είναι τα 8 γκλουόνια όπως αναφέρθηκε ξανά, και η δράση τους μοιάζει αρκετά με αυτή των φωτονίων, με λίγες διαφορές:

$$S_{gluons} = -\frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) \quad (2.36)$$

όπου  $\mathcal{F}$  είναι ο γκλουονικός τανυστής που ορίζεται ως

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{ig_0} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_0 [A_\mu, A_\nu] \quad (2.37)$$

με το  $D_\nu$  η συναλλοίωτη παράγωγος και το  $A_\nu$  το γκλουονικό πεδίο που αναφέρεται στο υποκεφάλαιο (2.3). Όπως και στα φωτόνια, έτσι και εδώ η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz και μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.24) μπορούμε να ξαναγράψουμε την δράση και τον γκλουονικό τανυστή:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \sum_{a=1}^8 \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(x) T^a \quad (2.38a)$$

όπου

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_0 f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.38b)$$



και

$$S_{gluons} = -\frac{1}{4} \int d^4x \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{\mu\nu a} \quad (2.39)$$

Γίνεται χρήση της άλγεβρας των γεννητόρων της ομάδας SU(3) (Παράρτημα Α).

Τώρα μπορούμε να γράψουμε την Λαγκρανζιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}^{\mu\nu a} \quad (2.40)$$

και με τις εξισώσεις Euler-Lagrange ως προς το γκλουονικό πεδίο προκύπτει το αντίστοιχο των εξισώσεων του Maxwell για γκλουόνια:

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} + ig_0 [A_\mu, \mathcal{F}^{\mu\nu}] = 0 \quad (2.41)$$

Αυτή η εξίσωση είναι μη γραμμική ως προς το γκλουονικό πεδίο, περιέχει μέχρι και όρους τρίτης τάξης. Αντίθετα με την εξίσωση  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$  που είναι γραμμική και έχει ως λύσεις τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, δεν υπάρχουν γκλουονικά κύματα επειδή τα γλουόνια αλληλεπιδρούν.

Έτσι τώρα μπορούμε να γράψουμε την συνολική δράση της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής QCD:

$$S_{QCD} = S_{gluons} + S_{quarks} \quad (2.42)$$

$$S_{QCD} = -\frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}) + \int d^4x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - M) \psi(x)$$

όπου θυμόμαστε πως ο σπίνορας Dirac περιέχει ακόμη δύο δείκτες για τα quarks.

## Κεφάλαιο 3

# Πεδία στο Πλέγμα

### 3.1 Μετασχηματισμοί Fourier σε τετραδιάστατο πλέγμα

Τα κουάρκ δεν έχουν παρατηρηθεί ποτέ απομονωμένα επειδή η σταθερά σύζευξης αυξάνεται σε μεγάλες αποστάσεις, έτσι σε αυτές τις περιπτώσεις η θεωρία διαταραχών ως προς την σταθερά σύζευξης αποτυγχάνει. Για να μελετηθεί η QCD μη διαταρακτικά εισάγεται η έννοια του τετραδιάστατου πλέγματος, διακριτοποιώντας τον Ευκλείδειο χωρόχρονο.

Αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση του χωροχρόνου  $f(x)$  της οποίας η απόλυτη τιμή της είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τότε μπορούμε να γράψουμε την σειρά Fourier σε ένα τετραδιάστατο πλέγμα:

$$f(na) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{f}_a(p) e^{ipna} \quad (3.1)$$

όπου ολοκληρώνουμε στην πρώτη ζώνη Brillouin, σε ένα υπερκύβο στο αντίστροφο πλέγμα. Η συνήθης μεταβλητή θέσης έχει πάρει διακριτές τιμές  $x = na$ , με το  $n$  να είναι ένα σύνολο από τέσσερις ακέραιους αριθμούς, και  $a$  η σταθερά του πλέγματος. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο εξής:

$$\tilde{f}_a(p) = a^4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) e^{-ipna} \quad (3.2)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.2) στην (3.1) προκύπτει το  $\delta$  του Kronecker

$$\delta_{nm} = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} a^4 e^{ip(n-m)a} \quad (3.3)$$

και αντικαθιστώντας την (3.1) στην (3.2) προκύπτει η περιοδική  $\delta$  συνάρτηση του Dirac,

$$\delta_P^{(4)}(p) = a^4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ipna} \quad (3.4)$$

όπου η συνάρτηση αυτή είναι μη μηδενική για τιμές της ορμής  $p = m 2\pi/a$ , με  $m$  ένα ακέραιο αριθμό. Οι συναρτήσεις αυτές θα φανούν εξαιρετικά χρήσιμες στον υπολογισμό διαδοτών στο πλέγμα.

### 3.2 Ελεύθερο βαθμωτό πεδίο Klein - Gordon στο πλέγμα

Η συνάρτηση Green ενός βαθμωτού πεδίου για  $N$  χωροχρονικά σημεία στον Ευκλείδειο χώρο όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1, γράφεται ως εξής:

$$G(x_1, \dots, x_N) = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi [\phi(x_1) \cdots \phi(x_N)] e^{-S_E(\phi)}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E(\phi)}}$$

όπου  $S_E(\phi)$  δίνεται από τη σχέση:

$$S_E(\phi) = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (-\square + M^2) \phi(x) \quad (3.5)$$

όπου  $\square$  είναι η τετραδιάστατη Λαπλασιανή.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την συνάρτηση συσχέτισης μεταξύ δύο πεδίων σε δύο σημεία του χωροχρόνου στο πλέγμα, έτσι γίνεται η εξής διακριτοποίηση:

$$x_\mu \rightarrow n_\mu a \quad (3.6a)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(na) \quad (3.6b)$$

$$\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_n \quad (3.6c)$$

$$\square \phi(x) \rightarrow \frac{1}{a^2} \hat{\square} \phi(na) = \frac{1}{a^2} \sum_{\mu=1}^4 [\phi(na + \hat{\mu}a) + \phi(na - \hat{\mu}a) - 2\phi(na)] \quad (3.6d)$$

όπου  $\hat{\mu}$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα στην  $\mu$ -διεύθυνση. Το διαφορικό ολοκλήρωσης μετατρέπεται σε:

$$\mathcal{D}\phi \rightarrow \prod_n d\phi(na) \quad (3.6e)$$

Για χάρη απλότητας δεν θα γράφονται δείκτες  $E$  που υποδηλώνουν τον Ευκλείδειο χώρο, το  $x_\mu$  θα γράφεται απλώς ως  $x$ , και το  $n_\mu$  απλώς ως  $n$ .

Για να γίνουν κάποιοι υπολογισμοί στον υπολογιστή χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις, θα ήταν επιθυμητό να γράψαμε τα πάντα συναρτήσει αδιάστατων ποσοτήτων. Έτσι ορίζουμε τις αδιάστατες ποσότητες του πεδίου και της μάζας ως:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_n &\equiv a\phi(na) \\ \hat{M} &\equiv aM\end{aligned}\quad (3.7)$$

Τότε η συνάρτηση Green μετατρέπεται σε:

$$\langle \hat{\phi}_{n_1} \cdots \hat{\phi}_{n_N} \rangle = \frac{\int \prod_\ell d\hat{\phi}_\ell [\hat{\phi}_{n_1} \cdots \hat{\phi}_{n_N}] e^{-S(\hat{\phi})}}{\int \prod_\ell d\hat{\phi}_\ell e^{-S(\hat{\phi})}} \quad (3.8)$$

όπου η δράση γράφεται

$$S(\hat{\phi}) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m \quad (3.9)$$

με το  $K_{nm}$  να δίνεται από την σχέση,

$$K_{nm} = - \sum_{\mu} [\delta_{n+\hat{\mu},m} - 2\delta_{nm}] + \hat{M}^2 \delta_{nm} \quad (3.10)$$

και το  $\mu$  να παίρνει τόσο θετικές, όσο και αρνητικές τιμές. Καταφέραμε έτσι να εξαφανίσουμε την σταθερά του πλέγματος από τις εξισώσεις μας. Η δράση που επιλέξαμε για το πλέγμα δεν είναι μοναδική, είναι μια απλή περίπτωση από τις πολλές. Ωστόσο όλες οι δράσεις στο πλέγμα πρέπει να ικανοποιούν μια συνθήκη: στο όριο του συνεχούς ( $a \rightarrow 0$ ), να αναπαράγεται η σωστή κλασική έκφραση. Θα δούμε στο επόμενο υποκεφάλαιο ότι για τα φερμιόνια στο πλέγμα η επιλογή της δράσης δεν είναι τόσο απλή.

Παρατηρούμε τώρα ότι η συνάρτηση Green μοιάζει με το Γκαουσιανό ολοκλήρωμα που παρουσιάζεται στο Παράρτημα Γ, έτσι για να υπολογιστεί χρειαζόμαστε μόνο τον αντίστροφο πίνακα του  $K_{nm}$  σύμφωνα με το θεώρημα του Wick. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του  $\delta$  του Kronecker στο τετραδιάστατο πλέγμα από την εξίσωση (3.3), γράφουμε το  $K_{nm}$  ως εξής:

$$K_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \left( 4 \sum_{\mu=1}^4 \sin^2 \frac{\hat{p}_\mu}{2} + \hat{M}^2 \right) e^{i\hat{p}(n-m)} \quad (3.11)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό

$$\sum_{\ell} K_{n\ell} K_{\ell m}^{-1} = \delta_{nm} \quad (3.12)$$

μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο πίνακα:

$$K_{nm}^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\hat{p}(n-m)}}{4 \sum_{\mu=1}^4 \sin^2 \frac{\hat{p}_{\mu}}{2} + \hat{M}^2} \quad (3.13)$$

Ο διαδότης, που αντιστοιχεί στην αναμενόμενη τιμή στο κενό ενός γινομένου δύο πεδίων σε δύο σημεία του χωροχρόνου, δίνεται από το πίνακοστοιχείο του  $K_{nm}^{-1}$ .

$$G(n, m; \hat{M}) = \langle \hat{\phi}_n \hat{\phi}_m \rangle = K_{nm}^{-1} \quad (3.14)$$

Για να πάρουμε το όριο του συνεχούς, πρέπει να εμφανίσουμε ξανά την πλεγματική σταθερά, ώστε να θέσουμε  $a \rightarrow 0$ :

$$G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; aM\right) = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle = a^2 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{\sum_{\mu=1}^4 \left(\frac{2}{a} \sin \frac{pa}{2}\right) + M^2} \quad (3.15)$$

Επειδή το ημίτονο που εμφανίζεται στον παρονομαστή έχει μη μηδενική τιμή στα όρια της πρώτης ζώνης Brillouin, καθώς παίρνουμε το όριο  $a \rightarrow 0$  και η ζώνη αυτή εκτείνεται στο άπειρο, ο παρονομαστής του ολοκληρώματος θα απειρίζεται, δίνοντας έτσι μηδενική τιμή σε μεγάλες αποστάσεις, όπως και αναμενόταν. Έτσι μπορούμε να προσεγγίσουμε το ημίτονο με την γωνία του, καταλήγοντας στην κλασική έκφραση που πρωτοεμφανίστηκε στο υποκεφάλαιο 2.1, εξίσωση (2.6):

$$\langle \phi(x) \phi(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip \cdot (x-y)}}{p^2 + M^2}$$

Ο υπολογισμός στο πλέγμα στην περίπτωση του βαθμωτού πεδίου Klein-Gordon φάνηκε αρκετά εύκολος, δεν παρουσιάστηκε καμία ανώμαλη παραβίαση συμμετρίας, και καταλήξαμε χωρίς προβλήματα στο κλασικό όριο, χρησιμοποιώντας την απλούστερη δράση στο πλέγμα. Θα δούμε στο επόμενο υποκεφάλαιο πως αντιμετωπίζουμε περιπτώσεις όπου η απλή κλασική διακριτή δράση στο πλέγμα δεν μας δίνει το σωστό κλασικό όριο.

### 3.3 Φερμιόνια στο πλέγμα

Σε αυτό το μέρος του κεφαλαίου θα συζητήσουμε για φερμιόνια, χωρίς να χρειαστεί να ξεχωρίσουμε τα λεπτόνια από τα quarks. Αυτό θα γίνει στην συνέχεια. Η συνάρτηση

Green για φερμιόνια στον Ευκλείδειο χώρο δίνεται από την σχέση:

$$G(\psi_{a_1}(x_1)\psi_{a_2}(x_2)\cdots\bar{\psi}_{b_1}(y_1)\bar{\psi}_{b_2}(y_2)\cdots) \equiv \langle \psi_{a_1}(x_1)\psi_{a_2}(x_2)\cdots\bar{\psi}_{b_1}(y_1)\bar{\psi}_{b_2}(y_2)\cdots \rangle$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi [\psi_{a_1}(x_1)\psi_{a_2}(x_2)\cdots\bar{\psi}_{b_1}(y_1)\bar{\psi}_{b_2}(y_2)\cdots] e^{-S_E(\psi,\bar{\psi})}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-S_E(\psi,\bar{\psi})}}$$

όπου γίνεται χρήση των μεταβλητών Grassmann που παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β. Η δράση δίνεται από την εξίσωση:

$$S^E[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu^E \partial_\mu + M)\psi(x) \quad (3.16)$$

Χρησιμοποιώντας την διακριτοποίηση και αδιάστατες ποσότητες όπως έγινε και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο,

$$x_\mu \rightarrow n_\mu a \quad (3.17a)$$

$$M \rightarrow \frac{\hat{M}}{a} \quad (3.17b)$$

$$\psi_i(x) \rightarrow \frac{\hat{\psi}_i(n)}{a^{3/2}} \quad (3.17c)$$

$$\bar{\psi}_i(x) \rightarrow \frac{\hat{\bar{\psi}}_i(n)}{a^{3/2}} \quad (3.17d)$$

$$\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_n \quad (3.17e)$$

$$\partial_\mu \psi_i(x) \rightarrow \frac{\hat{\partial}_\mu \hat{\psi}_i(n)}{a^{5/2}} \quad (3.17f)$$

όπου έχουμε την συμμετρική διακριτοποίηση της παραγώγου:

$$\hat{\partial}_\mu \hat{\psi}_i(n) = \frac{1}{2} [\hat{\psi}_i(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_i(n - \hat{\mu})] \quad (3.17g)$$

με  $\hat{\mu}$  το μοναδιαίο διάνυσμα στην  $\mu$ -διεύθυνση. Τα διαφορικά ολοκλήρωσης μετατρέπονται σε:

$$\mathcal{D}\hat{\bar{\psi}}\mathcal{D}\hat{\psi} \rightarrow \prod_{n,i} d\hat{\bar{\psi}}_i(n) \prod_{n,i} d\hat{\psi}_i(n). \quad (3.17h)$$

Για απλοποίηση του συμβολισμού, σε όσα θα ακολουθήσουν δεν θα γράφεται ο δείκτης  $E$ , τα ορίσματα των σπινόρων θα γράφονται ως  $n$  και  $m$  όπου  $n$  και  $m$  δύο τετράδες από ακέραιους αριθμούς, οι δείκτες  $i$  και  $j$  και το «  $\wedge$  » δεν θα γράφονται.

Έτσι τώρα γράφουμε την πιο απλή δράση για φερμιόνια στο πλέγμα:

$$S(\psi, \bar{\psi}) = \sum_{\substack{n,m \\ a,b}} \bar{\psi}_a(n) K_{ab}(n, m) \psi_b(m) \quad (3.18)$$

όπου

$$K_{ab}(n, m) = \sum_{\mu} \left[ \frac{1}{2} (\gamma_{\mu})_{ab} (\delta_{m, n+\hat{\mu}} - \delta_{m, n-\hat{\mu}}) \right] + M \delta_{mn} \delta_{ab} \quad (3.19)$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι τον ορισμό του  $\delta$  του Kronecker γράφουμε το  $K_{ab}(n, m)$  σαν:

$$K_{ab}(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left( i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu} + M \right)_{ab} e^{ip(n-m)} \quad (3.20)$$

όπου

$$\tilde{p}_{\mu} \equiv \frac{1}{a} \sin(p_{\mu} a) \quad (3.21)$$

Όπως και πριν, μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο πίνακα του  $K_{ab}(n, m)$  όπου υπολογίζεται από την σχέση

$$\sum_{\lambda, \ell} K_{a\lambda}^{-1}(n, \ell) K_{\lambda b}(\ell, m) = \delta_{ab} \delta_{nm} \quad (3.22)$$

έτσι έχουμε:

$$K_{ab}^{-1}(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\left( -i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu} + M \right)_{ab}}{\sum_{\mu=1}^4 \tilde{p}_{\mu}^2 + M^2} e^{ip(n-m)} \quad (3.23)$$

Επαναφέροντας πίσω την σταθερά του πλέγματος, γράφουμε την συνάρτηση Green για δύο πεδία:

$$\begin{aligned} G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; aM\right) &= \langle \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) \rangle = K_{ab}^{-1}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) \\ &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\left( -i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu} + M \right)_{ab}}{\sum_{\mu=1}^4 \tilde{p}_{\mu}^2 + M^2} e^{ip(x-y)} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Επειδή το ημίτονο που εμφανίζεται στον παρονομαστή έχει μηδενική τιμή στα όρια της πρώτης ζώνης Brillouin, καθώς παίρνουμε το όριο  $a \rightarrow 0$  και η ζώνη αυτή εκτείνεται στο άπειρο, ο παρονομαστής του ολοκληρώματος δεν απειρίζεται, δίνοντας μας έτσι μη μηδενική τιμή στο άπειρο. Αυτό είναι το λεγόμενο 'fermion doubling problem': υπάρχουν  $2^4$  περιοχές με μεγάλη ορμή στα άκρα της ζώνης Brillouin, που δίνουν μη μηδενική

συνεισφορά στο ολοκλήρωμα. Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας επιπρόσθετους όρους στην δράση του πλέγματος (φροντίζοντας όμως να έχουμε το σωστό κλασικό όριο του συνεχούς), οι οποίοι όμως παραβιάζουν την χειραλική συμμετρία.

### Φερμιόνια Wilson

Τώρα θα επιλυθεί το 'fermion doubling problem' χρησιμοποιώντας την δράση του Wilson στο πλέγμα:

$$S^W(\bar{\psi}, \psi) = S(\bar{\psi}, \psi) - \frac{r}{2} \sum_n \hat{\psi}(n) \hat{\square} \hat{\psi}(n) \quad (3.25)$$

Η 'παράμετρος Wilson'  $r$  μπορεί να πάρει μια αυθαίρετη τιμή, αφού εξαλείφεται στο όριο του συνεχούς. Τώρα μπορούμε να γράψουμε:

$$S^W(\bar{\psi}, \psi) = \sum_{n,m} \hat{\psi}_a(n) K_{ab}(n, m) \hat{\psi}_b(m) \quad (3.26)$$

με το  $K_{ab}(n, m)$  να δίνεται από την σχέση:

$$K_{ab}(n, m) = -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \left[ \left( r - \gamma_{\mu} \right)_{ab} \delta_{m, n+\hat{\mu}} + \left( r + \gamma_{\mu} \right)_{ab} \delta_{m, n-\hat{\mu}} \right] + (\hat{M} + 4r) \delta_{nm} \delta_{ab} \quad (3.27)$$

Όπως και πριν, γράφουμε τον πίνακα  $K_{ab}(n, m)$  χρησιμοποιώντας τον ορισμό του  $\delta$  του Kronecker ώστε να υπολογίσουμε τον αντίστροφό του:

$$K_{ab}(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \left( i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu} + \hat{M} + \frac{ra}{2} \sum_{\mu=1}^4 (\tilde{p}_{\mu})^2 \right)_{ab} e^{i\hat{p}(n-m)} \quad (3.28a)$$

$$K_{ab}^{-1}(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{p}}{(2\pi)^4} \frac{\left( -i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu} + \hat{M} + \frac{ra}{2} \sum_{\mu=1}^4 (\tilde{p}_{\mu})^2 \right)_{ab}}{\sum_{\mu=1}^4 \tilde{p}_{\mu}^2 + \left( \hat{M} + \frac{ra}{2} \sum_{\mu=1}^4 (\tilde{p}_{\mu})^2 \right)^2} e^{i\hat{p}(n-m)} \quad (3.28b)$$

όπου

$$\tilde{p}_{\mu} \equiv \frac{1}{a} \sin(p_{\mu} a) \quad (3.28c)$$

και

$$\tilde{\tilde{p}}_{\mu} \equiv \frac{2}{a} \sin(p_{\mu} a/2) \quad (3.28d)$$



Είμαστε σε θέση τώρα να υπολογίσουμε τον διαδότη επαναφέροντας την πλεγματική σταθερά:

$$G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}; aM\right) = \langle \psi_a(x) \bar{\psi}_b(y) \rangle = K_{ab}^{-1}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) \\ = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\left(-i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \tilde{p}_{\mu} + M + \frac{ra}{2} \sum_{\mu=1}^4 (\tilde{p}_{\mu})^2\right)_{ab}}{\sum_{\mu=1}^4 \tilde{p}_{\mu}^2 + \left(M + \frac{ra}{2} \sum_{\mu=1}^4 (\tilde{p}_{\mu})^2\right)^2} e^{ip(x-y)} \quad (3.29)$$

Παρατηρούμε ότι πλέον στα όρια της ζώνης Brillouin, ο πρώτος όρος του παρονομαστή μηδενίζεται, ο δεύτερος όμως όχι. Έτσι στο όριο  $a \rightarrow 0$  δεν θα έχουμε συνεισφορές από το άπειρο, και ο διαδότης θα αφορά όντως ένα φερμιόνιο, ξεπερνώντας το 'fermion doubling problem' και καταλήγοντας στο κλασικό όριο του συνεχούς. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε και πριν, ο επιπλέον όρος που προσθέσαμε στην δράση παραβιάζει την χειραλική συμμετρία που έχει η δράση για άμαζα φερμιόνια. Κατά συνέπεια, η διακριτοποίηση φερμιονίων με μηδενική μάζα επιβάλλει μια τιμή για το  $M$  η οποία είναι διάφορη του μηδενός και μπορεί να υπολογιστεί με κατάλληλη βαθμονόμηση σε αριθμητικές προσομοιώσεις.

### 3.4 Αβελιανές θεωρίες βαθμίδος στο πλέγμα, QED

Όπως φαίνεται στο Κεφάλαιο 2, η δράση Dirac για λεπτόνια είναι συναλλοίωτη κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς, ωστόσο για τοπικούς μετασχηματισμούς, πετύχαμε το συναλλοίωτο της εξίσωσης εισάγοντας ένα πεδίο  $A_{\mu}(x)$  που μετασχηματίζεται με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Προς το παρόν η δράση του Wilson που γράφτηκε πιο πάνω, δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από τέτοιους μετασχηματισμούς, οπότε πρέπει να την διορθώσουμε προσθέτοντας ένα πεδίο.

Γράφοντας κάτω τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας στο πλέγμα:

$$\psi(n) \rightarrow G(n)\psi(n) \\ \bar{\psi}(n) \rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n) \quad (3.30)$$

όπου

$$G(n) \equiv e^{i\Lambda(n)} \quad (3.31)$$

και εστιάζοντας σε όρους της μορφής  $\bar{\psi}(n)\psi(n + \hat{\mu})$  στην δράση του Wilson:

$$S^W = (\hat{M} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_{\mu})\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_{\mu})\psi(n)] \quad (3.32)$$

παρατηρούμε ότι εμφανίζονται γινόμενα  $G^{-1}(n)G(n+\hat{\mu})$  που μετασχηματίζουν την δράση. Έτσι εάν προσθέσουμε ένα πεδίο  $U$  που μετασχηματίζεται ως εξής:

$$U_{n,n+\hat{\mu}} \rightarrow G(n) U_{n,n+\hat{\mu}} G^{-1}(n+\hat{\mu}) \quad (3.33)$$

μπορούμε να γράψουμε την καινούργια δράση που είναι πλέον αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

$$S^W = (\hat{M} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n,n+\hat{\mu}}\psi(n+\hat{\mu}) + \bar{\psi}(n+\hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu},n}\psi(n)] \quad (3.34)$$

Το πεδίο αυτό ονομάζεται σύνδεσμος (link), από το γεγονός ότι ενώνει δύο γειτονικά σημεία του πλέγματος, και απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 3.1: Απεικόνιση των συνδέσμων (links) στο πλέγμα

Μπορεί ναδειχθεί αρκετά εύκολα πως εάν ορίσουμε τα links χρησιμοποιώντας το τετραδυναμικό  $A_\mu$ ,

$$U_\mu(n) \equiv U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{ieaA_\mu(n)} \quad (3.35)$$

προκύπτει η κλασική δράση στο όριο του συνεχούς  $a \rightarrow 0$ . Κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας

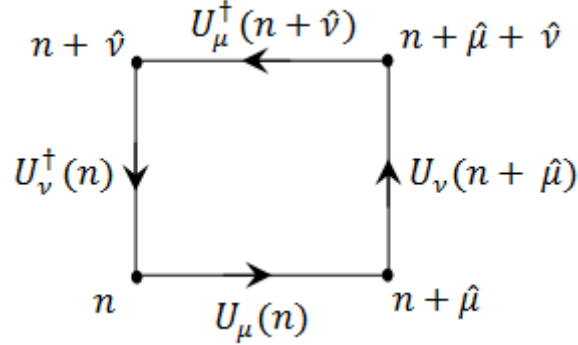
$$A_\mu(n) \rightarrow A'_\mu(n) = A_\mu(n) - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(n) \quad (3.36)$$

χρησιμοποιώντας την διακριτοποιημένη παράγωγο στο πλέγμα, το  $U_\mu(n)$  όντως μετασχηματίζεται όπως θα θέλαμε.

$$U_{n,n+\hat{\mu}} \rightarrow G(n) U_{n,n+\hat{\mu}} G^{-1}(n+\hat{\mu}) \quad (3.37)$$

Τώρα, για να βρεθεί ολόκληρη η δράση της QED στο πλέγμα, πρέπει να βρεθεί ο όρος της φωτονικής δράσης. Η δράση αυτή πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας και επίσης να είναι συνάρτηση μόνο των συνδέσμων. Για να ικανοποιούνται οι απαιτήσεις αυτές, πρέπει να κατασκευαστούν συναρτήσεις οι οποίες αποτελούνται από γινόμενα των συνδέσμων γύρω από ένα κλειστό βρόχο στο πλέγμα.

Ένας τέτοιος βρόχος είναι η πλακέτα  $1 \times 1$ . Κάποιος θα μπορούσε να δουλέψει γενικότερα, όμως το αποτέλεσμα που θέλουμε προκύπτει αρκετά εύκολα χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη πλακέτα που φαίνεται στο σχήμα 3.2.



ΣΧΗΜΑ 3.2: Απεικόνιση της στοιχειώδους πλακέτας (plaquette) στο  $\mu$  - επίπεδο

Η πλακέτα ορίζεται ως:

$$U_p \equiv U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad (3.38)$$

Χρησιμοποιώντας την διακριτοποίηση των παραγώγων μπορούμε να δείξουμε πως ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής  $F_{\mu\nu}$  γράφεται στο πλέγμα:

$$F_{\mu\nu}(n) = \frac{1}{a} \left[ \left( A_\nu(n + \hat{\mu}) - A_\nu(n) \right) - \left( A_\mu(n + \hat{\nu}) - A_\mu(n) \right) \right] \quad (3.39)$$

και έτσι συνδέεται με την πλακέτα με το εκθετικό:

$$U_p = e^{iea^2 F_{\mu\nu}(n)} \quad (3.40)$$

όπου φαίνεται τώρα εύκολα η αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Είμαστε τώρα σε θέση να γράψουμε την φωτονική δράση στο πλέγμα χρησιμοποιώντας μόνο την πλακέτα,

$$S_{photons}(U_p) = \frac{1}{e^2} \sum_p \left[ 1 - \frac{1}{2} (U_p(n) + U_p^\dagger(n)) \right] \quad (3.41)$$

επαληθεύοντας ότι στο κλασικό όριο  $a \rightarrow 0$  όντως προκύπτει η σωστή έκφραση:

$$\begin{aligned}
S_{photons}(U_p) &= \frac{1}{e^2} \sum_p \left[ 1 - \frac{1}{2} (U_p(n) + U_p^\dagger(n)) \right] \\
&\approx \frac{1}{e^2} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[ 1 - \frac{1}{2} (2 + iea^2 F_{\mu\nu} - iea^2 F_{\mu\nu} - e^2 a^4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \right] \\
&= \frac{1}{e^2} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[ \frac{1}{2} e^2 a^4 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n,\mu,\nu} \left[ a^4 F_{\mu\nu}(n) F_{\mu\nu}(n) \right]
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Ολοκληρώνοντας την συζήτηση για την QED στο πλέγμα, γράφουμε την συνολική δράση για φωτόνια και φερμιόνια Wilson:

$$\begin{aligned}
S_{QED}[U, \psi, \bar{\psi}] &= \frac{1}{e^2} \sum_p \left[ 1 - \frac{1}{2} (U_p(n) + U_p^\dagger(n)) \right] + (\hat{M} + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu) U_{n,n+\hat{\mu}} \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu) U_{n+\hat{\mu},n} \psi(n)]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

με την συνάρτηση Green ενός τελεστή να δίνεται από την σχέση:

$$\langle \mathcal{O}(U, \psi, \bar{\psi}) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{O}(U, \psi, \bar{\psi}) e^{-S_{QED}(U, \psi, \bar{\psi})}}{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_{QED}(U, \psi, \bar{\psi})}} \tag{3.44}$$

όπου

$$\mathcal{D}U \equiv \prod_{n,\mu} dA_\mu(n) \tag{3.45}$$

### 3.5 Μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδος στο πλέγμα, QCD

Κατά αντιστοιχία με την QED, μπορούμε να παράξουμε την δράση της QCD κάνοντας κάποιες μικρές αλλαγές, χρησιμοποιώντας πλέον μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδος. Όπως αναφέρθηκε και στο συνεχές, οι σπίνορες Dirac αποκτούν επιπλέον δείκτες, και η δράση αθροίζει τους δείκτες αυτούς. Για απλότητα ο συμβολισμός θα παραμείνει ο ίδιος με την αβελιανή περίπτωση, υπονοώντας δείκτες και αθροίσματα ως προς τις 6 γεύσεις και τα 3 χρώματα των quarks.

Η διακριτοποιημένη δράση των φερμιονίων Wilson, στον Ευκλείδειο χώρο είναι:

$$S^W = (\hat{M}_0 + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)\psi(n)]$$

Η μάζα  $M_0$  δεν αντιστοιχεί στη φυσική μάζα των σωματιδίων αλλά είναι μια απογυμνωμένη παράμετρος μάζας, και έχει διαφορετική τιμή για σωματίδια με διαφορετικό δείκτη γέυσης. Γράφουμε κάτω τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας στο πλέγμα, κατά αντιστοιχία με όσα γράφτηκαν στο υποκεφάλαιο 2.3, εξίσωση (2.22) :

$$\begin{aligned} \psi(n) &\rightarrow G(n)\psi(n) \\ \bar{\psi}(n) &\rightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n) \end{aligned}$$

όπου

$$G(n) \in SU(3) \iff G(n) = e^{i \sum_{a=1}^8 g^a T^a} \quad (3.46)$$

ο πίνακας μετασχηματισμού χρώματος. Εστιάζοντας σε όρους της μορφής  $\bar{\psi}(n)\psi(n + \hat{\mu})$  στην δράση του Wilson, παρατηρούμε ότι η δράση μετασχηματίζεται. Πρέπει λοιπόν να προσθέσουμε ένα πεδίο αντίστοιχο των links στην αβελιανή περίπτωση, μόνο που τώρα θα είναι και αυτό ένα στοιχείο της ομάδας  $SU(3)$ :

$$U_\mu(n) \equiv U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{ig_0 a A_\mu(n)} \quad (3.47)$$

όπου  $A_\mu(n)$  είναι το γκλουονικό πεδίο που ορίζεται στις εξισώσεις (2.23) και (2.24). Μπορεί να φανεί πως εάν το γκλουονικό πεδίο μετασχηματίζεται σαν,

$$A_\mu(n) \rightarrow A'_\mu(n) = G(n)A_\mu(n)G^{-1}(n) - \frac{i}{g_0} G(n)\partial_\mu G^{-1}(n) \quad (3.48)$$

χρησιμοποιώντας την διακριτοποιημένη παράγωγο, τότε το  $U_\mu(n)$  μετασχηματίζεται με τον αναμενόμενο τρόπο:

$$U_{n,n+\hat{\mu}} \rightarrow G(n) U_{n,n+\hat{\mu}} G^{-1}(n + \hat{\mu})$$

και έχουμε τότε την δράση των quarks στο πλέγμα να είναι αναλλοίωτη κάτω από μη αβελιανούς μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$S^W = (\hat{M}_0 + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n,n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu},n}\psi(n)] \quad (3.49)$$

Όπως και στην αβελιανή περίπτωση, θα γράψουμε την δράση του γκλουονικού πεδίου συναρτήσει των συνδέσμων. Αρχικά ορίζουμε την πλακέτα:

$$U_p \equiv U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad (3.50)$$

Επειδή τώρα οι σύνδεσμοι είναι πίνακες, όταν θέλουμε να δούμε με τι ισούται η έκφραση για την πλακέτα, θα μας φανεί χρήσιμη η σχέση των Baker–Campbell–Hausdorff :

$$e^X e^Y = e^{X+Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X,[X,Y]] - \frac{1}{12}[Y,[X,Y]] + \dots} \quad (3.51)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση αυτή, τον ορισμό της πλακέτας, και τον ορισμό του συνδέσμου στην εξίσωση (3.47), μπορούμε να γράψουμε την πλακέτα συναρτήσει του γκλουονικού τανυστή στο πλέγμα:

$$U_p(n) = e^{ig_0 a^2 \mathcal{F}_{\mu\nu}(n)} \quad (3.52)$$

όπου

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(n) = \left[ \left( A_\nu(n + \hat{\mu}) - A_\nu(n) \right) - \left( A_\mu(n + \hat{\nu}) - A_\mu(n) \right) \right] + ig_0 [A_\mu(n), A_\nu(n)] \quad (3.53)$$

Είμαστε τώρα σε θέση να γράψουμε την δράση στο πλέγμα:

$$S_{gluons}(U_p) = \frac{6}{g_0^2} \sum_p \left[ 1 - \frac{1}{6} Tr(U_p + U_p^\dagger) \right] \quad (3.54)$$

Αυτή μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση όπου ο αριθμός των χρωμάτων είναι  $N$ :

$$S_{gluons}(U_p) = \frac{2N}{g_0^2} \sum_p \left[ 1 - \frac{1}{2N} Tr(U_p + U_p^\dagger) \right] \quad (3.55)$$

Μπορεί να φανεί τώρα αρκετά εύκολα ότι στο κλασικό όριο  $a \rightarrow 0$  προκύπτει η σωστή δράση του συνεχούς:

$$\begin{aligned} S_{gluons}(U_p) &= \frac{6}{g_0^2} \sum_p \left[ 1 - \frac{1}{6} Tr(U_p + U_p^\dagger) \right] \\ &\approx \frac{6}{g_0^2} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[ 1 - \frac{1}{6} Tr(2 + ig_0 a^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} - ig_0 a^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} - g_0^2 a^4 \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{6}{g_0^2} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[ 1 - \frac{1}{6} Tr(2 - g_0^2 a^4 \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n,\mu,\nu} \left[ a^4 Tr(\mathcal{F}_{\mu\nu}(n) \mathcal{F}_{\mu\nu}(n)) \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Τελειώνοντας, γράφουμε την συνολική δράση της QCD στο πλέγμα:

$$\begin{aligned}
S_{QCD}[U, \psi, \bar{\psi}] &= \frac{6}{g_0^2} \sum_p \left[ 1 - \frac{1}{6} \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger) \right] + (M_0 + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n) \psi(n) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n, \mu} [\bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu) U_{n, n+\hat{\mu}} \psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu) U_{n+\hat{\mu}, n} \psi(n)]
\end{aligned} \tag{3.57}$$

### 3.6 Φερμιόνια Wilson/Clover

Τα φερμιόνια Wilson/Clover είναι πλέον αυτά που χρησιμοποιούνται σε πολλές προσομοιώσεις για υπολογισμούς στο πλέγμα, με την μόνη διαφορά ότι περιέχουν τον επιπλέον όρο:

$$S_{Clover} = -\frac{a^5}{4} \sum_{n, \mu, \nu} c_{SW} \bar{\psi}(n) \sigma_{\mu\nu} \mathcal{C}_{\mu\nu}(n) \psi(n) \tag{3.58}$$

$$S_{Total} = S_{Wilson} + S_{Clover}$$

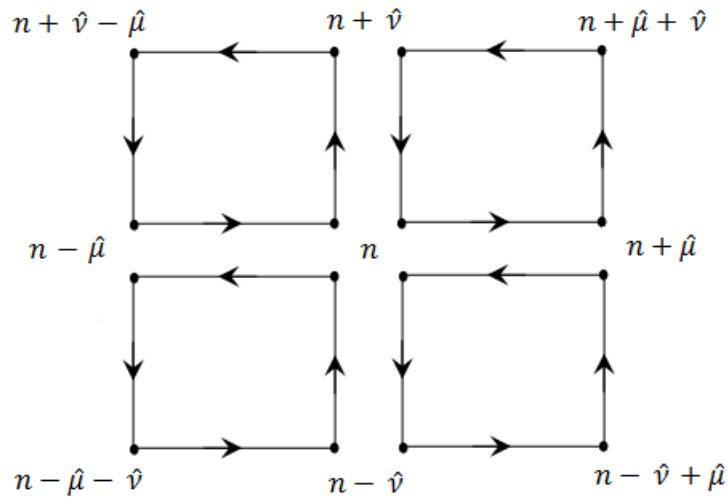
όπου το  $c_{SW}$  μια αυθαίρετη σταθερά,  $\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$  και  $\mathcal{C}_{\mu\nu}(n)$  ορίζεται ως:

$$\mathcal{C}_{\mu\nu}(n) \equiv \frac{1}{8} (\mathcal{Q}_{\mu\nu} - \mathcal{Q}_{\nu\mu}) \tag{3.59}$$

με το  $\mathcal{Q}_{\mu\nu}$  να δίνεται από το άθροισμα τεσσάρων πλακετών, σχηματίζοντας έτσι κάτι που μοιάζει με ένα τετράφυλλο τριφύλλι, εξού και το όνομα.

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{\mu\nu} &\equiv U_{n, n+\mu} U_{n+\mu, n+\mu+\nu} U_{n+\mu+\nu, n+\nu} U_{n+\nu, n} + U_{n, n+\nu} U_{n+\nu, n+\nu-\mu} U_{n+\nu-\mu, n-\mu} U_{n-\mu, n} \\
&\quad + U_{n, n-\mu} U_{n-\mu, n-\mu-\nu} U_{n-\mu-\nu, n-\nu} U_{n-\nu, n} + U_{n, n-\nu} U_{n-\nu, n-\nu+\mu} U_{n-\nu+\mu, n+\mu} U_{n+\mu, n}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Σχηματικά:

ΣΧΗΜΑ 3.3: Άθροισμα τεσσάρων πλακετών σχηματίζοντας το  $Q_{\mu\nu}$ 

Κατάλληλη επιλογή της σταθεράς  $c_{SW}$  (χοντά στην μονάδα) μπορεί να βοηθήσει να πλησιάσουμε το όριο του συνεχούς στις διάφορες προσομοιώσεις, χωρίς να πρέπει να παίρνουμε ολοένα και μικρότερες τιμές της πλεγματικής σταθεράς  $a$ , και αντιστοίχως μεγαλύτερο πλέγμα. Τέλος, παρατηρούμε ότι ο όρος *Clower* εξαφανίζεται στο κλασικό όριο του συνεχούς όπως αναμέναμε.

### 3.7 Φερμιόνια Overlap

Η διακριτοποίηση που θα παρουσιαστεί στο παρόν υποκεφάλαιο αφορά άμαζα φερμιόνια, και είναι γνωστή με το όνομα Overlap. Το βασικό πλεονέκτημα της διακριτοποίησης αυτής είναι ότι διατηρεί την χειραλική συμμετρία, ενώ ταυτόχρονα δεν εμφανίζει το 'fermion doubling problem'. Να σημειωθεί ότι μία τέτοια θεωρία στο πλέγμα έχει αποδειχθεί πως είναι επανακανονικοποιήσιμη σε κάθε τάξη όταν μελετηθεί διαταρακτικά, και οι πρώτες διορθώσεις είναι της τάξης  $O(a^2)$  όταν δεν εμπλέκονται μη τοπικοί τελεστές. Η γενικότερη μορφή του τελεστή overlap-Dirac γράφεται ως [7–9]:

$$D_O = \frac{1}{a}[1 + \gamma_5 O] \quad (3.61)$$

όπου ο τελεστής  $O$  εξαρτάται μόνο από τους συνδέσμους και είναι ερμιτιανός με ιδιοτιμές  $\pm 1$ . Η πιο απλή του μορφή δίνεται από την σχέση Neuberger-Dirac:

$$D_N = \frac{1}{a}c[1 + X(X^\dagger X)^{-1/2}] \quad X = D_W - \frac{1}{a}\rho \quad (3.62)$$



όπου  $0 < \rho < 2$ ,  $c = \rho$  μια σταθερά κανονικοποίησης που μπορεί να απορροφηθεί στον ορισμό των φερμιονικών πεδίων,  $a$  η σταθερά του πλέγματος, και  $D_W$  ο τελεστής Wilson-Dirac:

$$D_W = \frac{1}{2} [\gamma_\mu (\partial_\mu^* + \partial_\mu) - a r \partial_\mu^* \partial_\mu] \quad (3.63)$$

με  $r$  την σταθερά του Wilson, και  $\partial_\mu$  να δίνεται απο την σχέση:

$$\partial_\mu \psi(x) = \frac{1}{a} [U(x, \mu) \psi(x + a\mu) - \psi(x)] \quad (3.64)$$

Ο τελεστής Neuberger-Dirac ικανοποιεί την σχέση Ginsparg-Wilson:

$$\{\gamma_5, D_N\} = \gamma_5 D_N + D_N \gamma_5 = a D_N \gamma_5 D_N \quad (3.65)$$

ενώ ο τελεστής Wilson-Dirac στο συνεχές:

$$\{\gamma_5, D_W\} = \gamma_5 D_W + D_W \gamma_5 = 0 \quad (3.66)$$

Χρησιμοποιώντας την διακριτοποίηση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι οι μάζες των φερμιονίων δεν έχουν επιπρόσθετη επανακανονικοποίηση, και η δράση παραμένει αναλλοίωτη κάτω από χειραλικούς μετασχηματισμούς [10]:

$$\delta \psi(x) = \gamma_5 (1 - a D_N / 2) \psi(x) \quad \delta \bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(x) (1 - a D_N / 2) \gamma_5 \quad (3.67)$$

όπου οι μετασχηματισμοί αυτοί είναι γενίκευση της απειροελάχιστης μορφής των μετασχηματισμών:

$$\psi(x) \rightarrow e^{id\gamma_5} \psi(x) \approx (1 + id\gamma_5) \psi(x) \quad (3.68)$$

↓

$$\delta \psi(x) \sim \gamma_5 \quad (3.69)$$

με το  $d$  μια μικρή σταθερά.

Ο τελεστής  $D_N$  είναι αρκετά πολυπλοκότερος από τον τελεστή  $D_W$ , και το χαρακτηριστικό της τοπικότητας δεν φαίνεται άμεσα, εφόσον εμπεριέχει στον ορισμό του ανοιχτές παραγώγους σε κάποια μη ακέραια δύναμη, ωστόσο ο τελεστής αυτός έχει όλα τα κατάλληλα χαρακτηριστικά για την περιγραφή άμαζων φερμιονίων.

Τέλος, γράφουμε την δράση της QCD χρησιμοποιώντας συνήθη συμβολισμό:

$$S_{Overlap}[U, \psi, \bar{\psi}] = \frac{6}{g_0^2} \sum_p \left[ 1 - \frac{1}{6} \text{Tr}(U_p + U_p^\dagger) \right] + \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) D_N(x, y) \psi(y) \quad (3.70)$$

## Κεφάλαιο 4

# Ασθενής σταθερά σύζευξης και Gauge fixing

### 4.1 Βαθμωτό πεδίο Klein-Gordon στο πλέγμα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα δούμε πώς υπολογίζονται κάποιες κορυφές όταν έχουμε όρους αλληλεπίδρασης που δεν είναι τετραγωνικοί, για το βαθμωτό πεδίο Klein-Gordon στο πλέγμα, χρησιμοποιώντας θεωρία διαταραχών με ασθενή σταθερά σύζευξης.

Προσθέτουμε στην δράση που φαίνεται στην εξίσωση (3.5) ένα όρο αλληλεπίδρασης:

$$S(\phi) = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x)(-\square + M^2)\phi(x) + \frac{g_0}{3!} \int d^4x \phi^3(x) \quad (4.1)$$

όπου  $g_0$  είναι η απογυμνωμένη σταθερά σύζευξης με μονάδες μάζας. Το  $3!$  θα μπορούσε να συμπεριληφθεί στον ορισμό του  $g_0$ , αλλά το αφήνουμε εκεί για χάρη απλότητας που θα φανεί όταν γράψουμε τα διαγράμματα Feynman. Εισάγουμε τώρα την συνηθισμένη διακριτοποίηση στο πλέγμα, γράφοντας την δράση με τα καινούργια αδιάστατα μεγέθη:

$$S(\hat{\phi}) = \sum_{n,m} \hat{\phi}_n K_{nm} \hat{\phi}_m + \frac{\hat{g}_0}{3!} \sum_n \hat{\phi}_n^3 \quad (4.2)$$

όπου ο πίνακας  $K_{nm}$  υπολογίστηκε στο κεφάλαιο 3. Στην συνέχεια αυτού του κεφαλαίου ο συμβολισμός " $\hat{\phi}$ " για αδιάστατα μεγέθη θα παραλείπεται. Ο όρος αλληλεπίδρασης

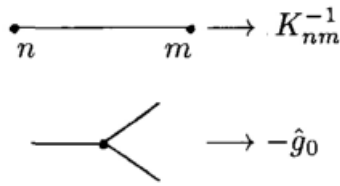
$$S_{int}(\phi) = \frac{g_0}{3!} \sum_n \phi_n^3 \quad (4.3)$$

θα εμπλακεί στον διαταραχτικό υπολογισμό των συναρτήσεων Green, και συγκεκριμένα στην συνάρτηση "δύο σημείων"  $\langle \phi(x)\phi(y) \rangle$  που θα χρησιμοποιήσουμε ως πρότυπο

υπολογισμού. Αναπτύσσουμε το εκθετικό της δράσης και κρατάμε τους τρεις πρώτους όρους υποθέτοντας ασθενή σταθερά σύζευξης:

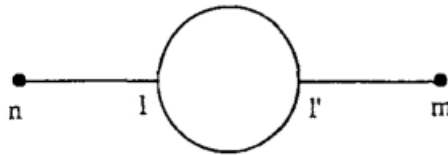
$$e^{iS_{int}(\phi)} \approx 1 + iS_{int}(\phi) + \frac{1}{2!}(iS_{int}(\phi))^2 \quad (4.4)$$

Ο πρώτος όρος δεν είναι όρος αλληλεπίδρασης, ο δεύτερος εμπλέκει περιττό αριθμό από πεδία, και σύμφωνα με το θεώρημα του Wick δεν θα συνεισφέρει στον υπολογισμό, έτσι θα στρέψουμε την προσοχή μας στον τρίτο όρο. Τα συστατικά των διαγραμμάτων είναι ο διαδότης και η κορυφή τριών πεδίων:



ΣΧΗΜΑ 4.1: Διαδότης και κυβικός όρος αλληλεπίδρασης βαθμωτού πεδίου

Σύμφωνα με το θεώρημα του Wick, μπορώ να φτιάξω πολλά διαγράμματα ενώνοντας τις γραμμές (πεδία) με όλους τους δυνατούς τρόπους, όμως κάποια από αυτά μηδενίζονται, και κάποια άλλα δεν έχουν αντίστοιχα διαγράμματα σε θεωρίες βαθμίδας. Έτσι θα μελετήσουμε το διάγραμμα:



Η συνάρτηση Green υπολογίζεται από το γινόμενο τεσσάρων διαδοτών, μεταξύ των σημείων  $n \leftrightarrow l$ ,  $l \leftrightarrow l'$  (δύο φορές) και  $l' \leftrightarrow m$  :

$$\langle \phi_n \phi_m \rangle |_{\text{διάγραμμα (4.2)}} = \frac{1}{2!} \frac{1}{(3!)^2} g_0^2 \sum_{l,l'} \left[ K_{nl}^{-1} (K_{ll'}^{-1})^2 K_{l'm}^{-1} \right] \times 36 \quad (4.5)$$

Στην πιο πάνω σχέση ο παράγοντας 36 είναι ο αριθμός των ισοδύναμων διαγραμμάτων που μπορούμε να φτιάξουμε. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.13):

$$K_{nm}^{-1} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(n-m)}}{4 \sum_{\mu=1}^4 \sin^2 \frac{k_{\mu}}{2} + M^2}$$

και τους ορισμούς:

$$\widehat{k}_{\mu} \equiv 2 \sin \frac{k_{\mu}}{2} \quad \widehat{k}^2 \equiv \sum_{\mu=1}^4 \widehat{k}_{\mu}^2$$

γράφουμε την συνάρτηση Green στην ακόλουθη μορφή:

$$\langle \phi_n \phi_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} G(k, k'; M) e^{i(kn - k'm)} \quad (4.6)$$

με το  $G$  να δίνεται από την σχέση:

$$G(k, k'; M) = \frac{1}{\widehat{k}^2 + M^2} \Pi(k, k'; M) \frac{1}{\widehat{k}'^2 + M^2} \quad (4.7)$$

όπου,

$$\Pi(k, k'; M) = \frac{g_0^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 l_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 l_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^8 \delta_P^4(k - l_1 - l_2) \delta_P^4(k' - l_1 - l_2) \frac{1}{(\widehat{l}_1^2 + M^2)} \frac{1}{(\widehat{l}_2^2 + M^2)} \quad (4.8)$$

Οι δύο περιοδικές δέλτα συναρτήσεις υποδεικνύουν την διατήρηση της ορμής στο διάγραμμα. Εκτελώντας την ολοκλήρωση ως προς την ορμή  $l_2$ , αντικαθιστούμε την  $l_2 = k - l_1$  και μετονομάζουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης  $l_1$  σε  $q$ :

$$\Pi(k, k'; M) = (2\pi)^4 \delta_P^4(k - k') \Pi(k, M)$$

με

$$\Pi(k, M) = \frac{g_0^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\widehat{q}^2 + M^2) ((\widehat{k - q})^2 + M^2)} \quad (4.9)$$

όπου

$$(\widehat{k - q})_{\mu} = 2 \sin \left( \frac{(k - q)_{\mu}}{2} \right)$$

Η εξίσωση (4.9) περιγράφει το ακρωτηριασμένο (amputated) διάγραμμα, χωρίς τους διαδότες των εξωτερικών πεδίων.

Επαναφέροντας την πλεγματική σταθερά γράφουμε:

$$\Pi(k, M, a) = \frac{g_0^2}{2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\tilde{q}^2 + M^2)((k - q)^2 + M^2)} \quad (4.10)$$

όπου ορίζουμε:

$$\tilde{q}_\mu \equiv \frac{2}{a} \sin\left(\frac{q_\mu a}{2}\right) \quad \tilde{q}^2 \equiv \sum_{\mu=1}^4 \tilde{q}_\mu^2 \quad (4.11)$$

Το πιο πάνω ολοκλήρωμα αποκλίνει στην προσπάθεια μας να πλησιάσουμε το όριο του συνεχούς, εμφανίζοντας ένα λογαριθμικό απειρισμό για μεγάλες τιμές της ορμής  $q$  (Ultraviolet singularity). Όντως καθώς παίρνουμε το όριο  $a \rightarrow 0$  τα όρια ολοκλήρωσης επεκτείνονται στο άπειρο, έτσι για μεγάλες τιμές της ορμής μπορούμε να αγνοήσουμε την μάζα  $M$  και την εξωτερική ορμή  $k$ , και να γράψουμε το ολοκλήρωμα ως:

$$\Pi(k, M, a \rightarrow 0) \rightarrow \frac{g_0^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{\tilde{q}^4} \quad (4.12)$$

Επίσης προσεγγίζοντας το  $\tilde{q}$  με  $q$  (όπως απορρέει από την εξίσωση (4.11) στο όριο  $a \rightarrow 0$ ), και χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$\Pi(k, M, a \rightarrow 0) \sim \ln q, \quad q \rightarrow \infty \quad (4.13)$$

Στη περίπτωση του βαθμωτού πεδίου Klein-Gordon δεν θα προσπαθήσουμε να αντιμετωπίσουμε τον απειρισμό αυτό, ωστόσο παρόμοιοι απειρισμοί εμφανίζονται και στις θεωρίες QED και QCD που πρέπει να ξεπερασθούν επανακανονικοποιώντας την ίδια την θεωρία.

## 4.2 Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας, η κβάντωση του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο συνεχές

Σκοπός μας σε αυτό το υποκεφάλαιο είναι να κβαντώσουμε το Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα διαδρομής, υπολογίζοντας αρχικά την συνάρτηση συσχέτισης μεταξύ δύο φωτονίων. Θα δούμε ότι προκύπτει ένας απειρισμός λόγω της αναλλοιώτητάς κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, έτσι θα πρέπει να διορθώσουμε την δράση, περιορίζοντας τα συναρτησιακά ολοκληρώματα σε συγκεκριμένες βαθμίδες (π.χ.,

Lorentz). Γράφοντας την δράση των φωτονίων,

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) (-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) \tilde{A}_\nu(-k)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, και γράφοντας το τετραδυναμικό με μετασχηματισμό Fourier, παρατηρούμε ότι ο πίνακας που εμφανίζεται δεν είναι αντιστρέψιμος εφόσον έχει μια μηδενική ιδιοτιμή

$$(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu) k^\mu = (-k^2 k^\nu + k^2 k^\nu) = 0$$

Όταν υπολογίζουμε το συναρτησιακό:

$$\int \mathcal{D}A e^{iS(A)} \tag{4.15}$$

για μία οικογένεια από πεδία  $A^\mu$  (άπειρα τέτοια πεδία), όπου το ένα σχετίζεται με το άλλο μέσω ενός μετασχηματισμού βαθμίδας (το σύνολο αυτό ονομάζεται Gauge Orbit), η δράση παραμένει σταθερή, και προκύπτουν άπειροι ίδιοι όροι που πρέπει να αθροιστούν. Έτσι το ολοκλήρωμα αποκλίνει. Θα θέλαμε λοιπόν να μην ολοκληρώνουμε ως προς τέτοιες ισοδύναμες διατάξεις, περιορίζοντας το τετραδυναμικό  $A^\mu$  σε συγκεκριμένους αντιπρόσωπους από κάθε Orbit. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εισάγοντας μια δ-συνάρτηση στο ολοκλήρωμά μας:

$$1 = \int \mathcal{D}\Lambda(x) \delta(G(A')) \det\left(\frac{\delta G(A')}{\delta \Lambda}\right) \tag{4.16}$$

όπου το  $A'_\mu$  το συνηθισμένο μετασχηματισμένο τετραδυναμικό,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda(x)$$

και το  $G(A')$  ονομάζεται 'gauge fixing condition'. Γενικά μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει οποιοδήποτε  $G(A')$ , με την επιθυμητή ιδιότητα ότι σε κάθε gauge orbit μόνο μια διάταξη  $A_\mu$  ικανοποιεί την σχέση  $G(A) = 0$ . Συνήθως επιλέγεται η βαθμίδα Lorentz

$$G(A') \equiv \partial^\mu A'_\mu = \partial^\mu A_\mu - \frac{1}{e} \partial^2 \Lambda \tag{4.17}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την βαθμίδα βλέπουμε πως η ορίζουσα που προκύπτει από την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού ισούται με  $-\det(\partial^2/e)$ , έτσι μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα σαν μια σταθερά. Στη συνέχεια, εφόσον η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από

μετασχηματισμούς βαθμίδας, μπορώ να κάνω μια αλλαγή μεταβλητών από  $A$  σε  $A'$  με Ιακωβιανή μονάδα, καταλήγοντας στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα:

$$\int \mathcal{D}A e^{iS(A)} = \det \left( \frac{\delta G(A')}{\delta \Lambda} \right) \int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} \delta G(A) \quad (4.18)$$

Να σημειωθεί πώς αυτή η αλλαγή μεταβλητών είναι τετριμμένη μόνο εάν υπολογίζουμε συναρτήσεις Green ποσοτήτων που είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Εισάγουμε τώρα την γενικευμένη βαθμίδα Lorentz  $G(A) = \partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)$  και ολοκληρώνουμε ως προς όλα τα  $\omega(x)$  με ένα Γκαουσιανό βάρος:

$$\begin{aligned} N(\xi) \int \mathcal{D}\omega e^{-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}} \det \left( \frac{\delta G(A')}{\delta \Lambda} \right) \int \mathcal{D}\Lambda \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} \delta(\partial^\mu A_\mu(x) - \omega(x)) \\ = N(\xi) \det \left( \frac{\partial^2}{e} \right) \left( \int \mathcal{D}\Lambda \right) \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} e^{-i \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu)^2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

όπου το  $\xi$  ονομάζεται 'gauge fixing parameter' και είναι οποιοσδήποτε αριθμός, με πιο συνηθισμένες επιλογές το 0 και 1, Landau gauge και Feynman gauge αντίστοιχα.

Έτσι γράφουμε την συνάρτηση Green οποιοδήποτε τελεστή  $\mathcal{O}(A)$  με την προϋπόθεση ότι είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας σαν:

$$\langle \Omega | \mathcal{O}(A) | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) \exp \left[ iS(A) - i \int \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi} d^4x \right]}{\int \mathcal{D}A \exp \left[ iS(A) - i \int \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2\xi} d^4x \right]} \quad (4.20)$$

όπου όλοι οι σταθεροί όροι έχουν απαλειφθεί μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή. Πλέον με την διορθωμένη δράση, μπορούμε να αντιστρέψουμε τον πίνακα που εμφανίζεται, χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Fourier των πεδίων, και να πάρουμε τον φωτονικό διαδότη στον Ευκλείδειο χώρο:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left( \delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (4.21)$$

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε καθιστά φανερό το γεγονός ότι στα αποτελέσματα για τις συναρτήσεις Green (εξ. (4.20)) η εξάρτηση από την παράμετρο  $\xi$  εξαφανίζεται.

### 4.3 Μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας στο συνεχές, η Λαγκρανζιανή Faddeev-Popov

Κατά αντιστοιχία με την αβελιανή περίπτωση, θα υπολογίσουμε τώρα των διαδότη μεταξύ δύο γκλουονίων ακολουθώντας την διαδικασία που χρησιμοποίησαν οι Faddeev και Popov. Γράφουμε την δράση για τα γκλουόνια χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.38a):

$$S = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} (\mathcal{F}_{\mu\nu}^a)^2 \right) \quad (4.22)$$

έτσι το συναρτησιακό ολοκλήρωμα γράφεται ως:

$$\int \mathcal{D}A \exp \left[ i \int d^4x \left( -\frac{1}{4} (\mathcal{F}_{\mu\nu}^a)^2 \right) \right] \quad (4.23)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αποκλίνει για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν στην αβελιανή περίπτωση, έτσι εισάγουμε το gauge fixing condition  $W(A)$ :

$$1 = \int \mathcal{D}\mathcal{G}(x) \delta(W(A')) \det \left( \frac{\delta W(A')}{\delta \mathcal{G}} \right) \quad (4.24)$$

με το  $W(A') = \partial^\mu A'_\mu(x) - \omega^a(x)$ .

Η σχέση αυτή προκύπτει εάν θυμηθούμε ότι το γκλουονικό πεδίο μετασχηματίζεται σύμφωνα με την εξίσωση (2.23):

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = G(x)A_\mu(x)G^{-1}(x) - \frac{i}{g_0}G(x)\partial_\mu G^{-1}(x)$$

αντικαθιστώντας το γκλουονικό πεδίο από την σχέση (2.24):

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^8 A_\mu^a(x) T^a$$

και γράφοντας τον μετασχηματισμό χρώματος  $G(x)$  σύμφωνα με την εξίσωση (3.46):

$$G(x) = e^{i\sum_{a=1}^8 \mathcal{G}^a T^a}$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε τον μετασχηματισμό του πεδίου ισodύναμα:

$$A_\mu^a T^a \rightarrow A'_\mu^a T^a = e^{i\mathcal{G}^a T^a} \left[ A_\mu^b T^b - \frac{i}{g_0} \partial_\mu \right] e^{-i\mathcal{G}^c T^c} \quad (4.25)$$

με την απειροελάχιστη μορφή του:

$$A_\mu^a \rightarrow A'^a_\mu = A_\mu^a + \frac{1}{g_0} D_\mu \mathcal{G}^a \quad (4.26)$$



όπου η συναλλοίωτη παράγωγος:

$$D_\mu \mathcal{G}^a = \partial_\mu \mathcal{G}^a + g_0 f^{abc} A_\mu^b \mathcal{G}^c \quad (4.27)$$

Παρατηρούμε ότι εάν το gauge fixing condition  $W(A')$  είναι γραμμικό ως προς το  $A_\mu$ , τότε ο όρος  $\delta W(A')/\delta \mathcal{G}$  είναι ανεξάρτητος του  $\mathcal{G}$ . Οπότε, εάν υπολογίζουμε την συνάρτηση Green ενός τελεστή που είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, μπορούμε να αλλάξουμε μεταβλητές με τετριμμένο τρόπο (εφόσον η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού θα αποτελείται από γινόμενο οριζουσών πινάκων της ομάδας  $SU(3)$ ), και έπειτα να αλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης του  $\mathcal{D}\mathcal{G}$  με το  $\mathcal{D}A$ :

$$\int \mathcal{D}A e^{iS(A)} = \left( \mathcal{D}\mathcal{G} \right) \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} \delta(W(A)) \det\left(\frac{\delta W(A')}{\delta \mathcal{G}}\right) \quad (4.28)$$

Η σταθερά μπροστά από το ολοκλήρωμα θα διαγραφεί μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή. Αντίθετα με την αβελιανή περίπτωση, η ορίζουσα που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα εξαρτάται από το  $A$ , έτσι δεν μπορεί να απλοποιηθεί, προσδίδοντας έτσι ένα επιπλέον όρο στην δράση. Ο διαδότης δύο γκλουονίων είναι ο ίδιος όπως και στην περίπτωση των φωτονίων.

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left( \delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (4.29)$$

Η ορίζουσα που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\det\left(\frac{\delta W(A')}{\delta \mathcal{G}}\right) = \det\left(\frac{1}{g_0} \partial^\mu D_\mu\right)$$

και όπως έκαναν και οι Faddeev και Popov, θα γράψουμε την ορίζουσα αυτή σαν ένα συναρτησιακό ολοκλήρωμα αντιμετατιθέμενων πεδίων:

$$\det\left(\frac{1}{g_0} \partial^\mu D_\mu\right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp\left[i \int d^4x \bar{c} (-\partial^\mu D_\mu) c\right] \quad (4.30)$$

Αυτά τα νέα πεδία δεν περιγράφουν κάποια φυσικά σωματίδια, ωστόσο μπορούμε να τα διαχειριζόμαστε ως επιπλέον σωματίδια στα διαγράμματα Feynman, και ονομάζονται ghosts. Γράφουμε την Λαγκρανζιανή,

$$\mathcal{L}_{ghosts} = \bar{c}^a (-\partial^2 \delta^{ac} - g_0 \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b) c^c \quad (4.31)$$

με τα  $a$  και  $c$  δυο χρωματικούς δείκτες. Γράφοντας τα πεδία με μετασχηματισμούς Fourier, προκύπτει εύκολα ο διαδότης μεταξύ δύο ghosts:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{k^2} \quad (4.32)$$

Συνολικά έχουμε την Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^a)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M)\psi + \bar{c}^a(-\partial^\mu D_\mu^{ac})c^c \quad (4.33)$$

## 4.4 Gauge fixing στο πλέγμα

### Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας

Οι ίδιοι απειρισμοί λόγω ολοκλήρωσης ως προς ισοδύναμες διατάξεις με τετραδυναμικά που προκύπτουν μέσω αβελιανών μετασχηματισμών βαθμίδας εμφανίζονται και σε πλέγμα που εκτείνεται σε όλο το χωροχρόνο, έτσι πρέπει να γίνει το αντίστοιχο gauge fixing και σε αυτή την περίπτωση. Μπορούμε να γράψουμε τα links σαν συνάρτηση μίας γωνιακής μεταβλητής για συντομία:

$$U_\mu(n) = U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{i\phi_\mu(n)} \quad (4.34)$$

όπου

$$\phi_\mu(n) = e_0 a A_\mu(n) \quad \phi_\mu(n) \in [0, 2\pi)$$

Γράφουμε την δράση από την εξίσωση (3.43):

$$\begin{aligned} S_{QED}[U, \psi, \bar{\psi}] &= \frac{1}{2e_0^2} \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} \left[ 1 - \cos(ea^2 F_{\mu\nu}(n)) \right] + (M + 4r) \sum_n \bar{\psi}(n)\psi(n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \left[ \bar{\psi}(n)(r - \gamma_\mu)U_{n,n+\hat{\mu}}\psi(n + \hat{\mu}) + \bar{\psi}(n + \hat{\mu})(r + \gamma_\mu)U_{n+\hat{\mu},n}\psi(n) \right] \end{aligned}$$

όπου το  $e_0$  υποδηλώνει την απογυμνωμένη σταθερά σύζευξης (bare coupling). Περισσότερες λεπτομέρειες για τις παραμέτρους της Λαγκρανζιανής αναφέρονται σε επόμενο κεφάλαιο. Έπειτα, όπως και στην περίπτωση στο συνεχές, προσθέτουμε τον όρο GF=Gauge Fixing:

$$S_{GF}[A] = -\frac{e_0^2}{2\xi} \sum_n (\partial_\mu A_\mu(n))^2 \quad (4.35)$$

Για την εξεύρεση του διαδότη, προσθέτουμε τον όρο αυτό στο πρώτο μέρος της δράσης που αφορά τα φωτόνια, και αναπτύσσουμε το συνημίτονο κρατώντας τους δύο πρώτους όρους:

$$S_{photons}^{(0)} = \frac{1}{4}a^4 \sum_{\substack{n,\mu,\nu \\ \mu < \nu}} (F_{\mu\nu})^2 - \frac{e_0^2}{2\xi} \sum_n (\partial_\mu A_\mu(n))^2 \quad (4.36)$$

Γράφοντας την παράγωγο στο πλέγμα, εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς Fourier, και επαναφέροντας την πλεγματική σταθερά, προκύπτει ο ίδιος φωτονικός διαδότης όπως και

στην περίπτωση του συνεχούς:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\hat{k}^2} \left( \delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2} \right) \quad (4.37)$$

όπου

$$\hat{k}_\mu = \frac{2}{a} \sin(k_\mu a/2) \quad \hat{k}^2 = \frac{4}{a^2} \sum_{\mu=1}^4 \sin^2(k_\mu a/2) \quad (4.38)$$

Να σημειωθεί πως σε επόμενο κεφάλαιο χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $\beta \equiv (1 - \xi)$ . Ο διαδότης των ηλεκτρονίων έχει ήδη υπολογισθεί στο κεφάλαιο 3:

$$K_{ab}^{-1} = \frac{\left( -i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{1}{a} \sin(p_\mu a) + M(p) \right)_{ab}}{\sum_{\mu=1}^4 \frac{1}{a^2} \sin^2(p_\mu a) + M^2(p)} \quad (4.39)$$

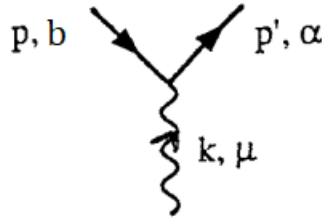
όπου

$$M(p) = M + \frac{2r}{a} \sum_{\mu=1}^4 \sin^2(p_\mu a/2) \quad (4.40)$$

Αναπτύσσοντας τα εκθετικά των συνδέσμων της δράση, και κρατώντας όρους πέρα της πρώτης τάξης, θα εμφανιστούν γινόμενα με περισσότερα από δύο πεδία, όπου ονομάζονται κορυφές. Στην QED στο συνεχές υπάρχουν μόνο κορυφές με τρία πεδία, δύο φερμιόνια και ένα μποζόνιο, ενώ στο πλέγμα μπορούν να υπάρξουν κορυφές με τέσσερα μποζόνια, δύο φερμιόνια και δύο μποζόνια και πάει λέγοντας. Για τον υπολογισμό των κορυφών αυτών χρειάζεται απλά να αναπτύξουμε τα εκθετικά των συνδέσμων σε όσους όρους θέλουμε, και να μετασχηματίσουμε τα πεδία κατά Fourier:

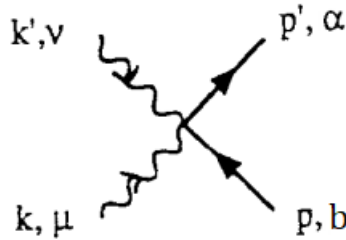
$$\begin{aligned} A_\mu(a) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(k) e^{ikna} \\ \psi_\alpha(a) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\psi}_\alpha(p) e^{ipna} \\ \bar{\psi}_\alpha(a) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\bar{\psi}}_\alpha(p) e^{-ipna} \end{aligned} \quad (4.41)$$

με το πρόσημο μείον να χρησιμοποιείται στο αντιφερμιόνιο ως σύμβαση. Μερικά παραδείγματα:



ΣΧΗΜΑ 4.3: Κορυφή ηλεκτρονίου, ποζιτρονίου και φωτονίου

$$-ie_0(2\pi)^4\delta_P^{(4)}(p-p'+k)\left[(\gamma_\mu)_{ab}\cos\left(\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right)-ir\delta_{ab}\sin\left(\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right)\right] \quad (4.42)$$



ΣΧΗΜΑ 4.4: Κορυφή ηλεκτρονίου, ποζιτρονίου και δύο φωτονίων

$$-ie_0(2\pi)^4\delta_P^{(4)}(p-p'+k+k')a\delta_{\mu\nu}\left[r\delta_{ab}\cos\left(\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right)-i(\gamma_\mu)_{ab}\sin\left(\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right)\right] \quad (4.43)$$

Οι περισσότερες κορυφές δεν έχουν κλασικό ανάλογο, ωστόσο έχουν μη μηδενική συνεισφορά στις συναρτήσεις Green και πρέπει να είμαστε σε θέση να τις υπολογίζουμε.

### Μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας

Στην αβελιανή περίπτωση, το μέτρο ολοκλήρωσης ως προς τους συνδέσμους είναι ανάλογο με αυτό των πεδίων:

$$\int DU \sim \int DA \sim \int D\phi$$

όπου  $\phi_\mu(n) = e_0 a A_\mu(n)$ . Στη μη αβελιανή περίπτωση πρέπει να είμαστε πιο προσεκτικοί. Θα δούμε πρώτα πώς προκύπτουν τα επιπλέον πεδία ghosts, και στην συνέχεια θα μελετήσουμε το μέτρο ολοκλήρωσης. Εάν γράψουμε και πάλι τον σύνδεσμο σαν:

$$U_\mu(n) = U_{n,n+\hat{\mu}} = e^{i\phi_\mu(n)} \quad (4.44)$$

όπου

$$\phi_\mu(n) = g_0 a A_\mu(n) \quad \phi_\mu(n) \in SU(3)$$

ξέρουμε ότι ο σύνδεσμος μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον πίνακα  $G$  ως:

$$U_\mu(n) \rightarrow G(n)U_\mu(n)G^{-1}(n + \hat{\mu})$$

Ταυτόχρονα

$$\begin{aligned} U(\phi + \delta\phi) &= U(\phi)(1 + i\delta\phi^a E_{ab}(\phi)T^b) \\ &= (1 + i\delta\phi^a E_{ab}(\phi)T^b)U(\phi) \end{aligned} \quad (4.45)$$

με τον πίνακα  $E$  να ορίζεται ως ακολούθως [11]:

$$E_{ab}(\phi) = \left( \frac{e^{it^a\phi_a} - 1}{it^a\phi_a} \right)_{ab} \quad (4.46)$$

Οι πίνακες  $T^a$  και  $t^a$  αποτελούν γεννήτορες της ομάδας  $SU(3)$  στο fundamental και adjoint representation αντίστοιχα. Μπορεί κανείς να πεισθεί ότι η εξίσωση (4.45) ισχύει αναπτύσσοντας κατά Taylor το αριστερό και δεξί μέλος. Επίσης αναπτύσσοντας την (4.45), βλέπουμε ότι ο πίνακας  $E$  αρχίζει από την μονάδα, έτσι είναι εύκολα αντιστρέψιμος.

Ο μετασχηματισμός χρώματος  $G$  μπορεί να γραφεί σύμφωνα με την εξίσωση (3.46):

$$G(n) = e^{i\sum_{a=1}^8 \mathcal{G}^a T^a}$$

ή στην απειροελάχιστη μορφή του:

$$G(n) \simeq 1 + i\delta\mathcal{G}^a T^a \quad (4.47)$$

τώρα, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό του συνδέσμου στην απειροελάχιστη μορφή του, και την εξίσωση (4.44), μπορούμε να συνδέσουμε το  $\delta\phi$  με το  $\delta\mathcal{G}$ :

$$\delta\phi_a = \frac{1}{g_0 a} [E_{ab}^{-1}(\phi_a)\delta\mathcal{G}^b(n) - E_{ba}^{-1}(\phi_a)\delta\mathcal{G}^b(n + \hat{\mu})] \quad (4.48)$$

Γράφουμε τον όρο Gauge Fixing με την διακριτοποιημένη παράγωγο:

$$\partial_\mu A_a^\mu \rightarrow \sum_\mu (A_a(n) - A_a(n + \hat{\mu})) \quad (4.49)$$

Εάν θέλουμε να δούμε πώς μετασχηματίζεται η σχέση αυτή κάτω από την εξίσωση (4.48):

$$\begin{aligned} & \delta \left[ \sum_{\mu} (A_a^{\mu}(n) - A_a^{\mu}(n + \hat{\mu})) \right] \\ &= \frac{1}{g_0 a} \sum_{\mu} [(E_{ab}^{-1}(\phi_a) \delta_{nm} - E_{ba}^{-1}(\phi_a) \delta_{n+\hat{\mu},m}) \\ & \quad - (E_{ab}^{-1}(\phi_a) \delta_{n-\hat{\mu},m} - E_{ba}^{-1}(\phi_a) \delta_{n,m})] \delta \mathcal{G}^b(m) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ακολουθώντας την διαδικασία Faddeev-Popov καταλήγουμε στην δράση:

$$\begin{aligned} S_{ghosts} &= a^2 \sum_{\nu\mu} \bar{c}^{\nu}(n) \left[ (E_{ab}^{-1}(\phi_a) c^b(n) - E_{ba}^{-1}(\phi_a) c^b(n + \hat{\mu})) \right. \\ & \quad \left. - (E_{ab}^{-1}(\phi_a) c^b(n - \hat{\mu}) - E_{ba}^{-1}(\phi_a) c^b(n)) \right] \\ &= -a^2 \sum_{\mu} (\bar{c}^{\nu}(n + \hat{\mu}) - \bar{c}^{\nu}(n)) (E_{ab}^{-1}(\phi_a) c^b(n) - E_{ba}^{-1}(\phi_a) c^b(n + \hat{\mu})) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Από την δράση αυτή καταλήγουμε στον διαδότη για τα ghosts:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\hat{k}^2}$$

Όσο αφορά τώρα τις μεταβλητές ολοκλήρωσης, ορίζουμε την αναλλοίωτη μετρική (Haar invariant measure) στον χώρο της ομάδας SU(3) ως:

$$g_{ab} d\phi^a d\phi^b = Tr(dU dU^{\dagger}) \quad (4.52)$$

όπου

$$dU = U(\phi + \delta\phi) - U(\phi)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε ένα μέτρο αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς:

$$dU = \sqrt{\det g_{ab}} d\phi \quad (4.53)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.45) η μετρική παίρνει την μορφή:

$$\begin{aligned} g_{ab} d\phi^a d\phi^b &= Tr(U(\phi) id\phi^a E_{ac}(\phi) T^c (-id\phi^b) E_{bd}(\phi) T^d U^{\dagger}(\phi)) \\ &= \frac{1}{2} E_{ac}(\phi) E_{cb}(\phi) d\phi^a d\phi^b \\ &= \left( \frac{1 - \cos(\phi^c t_c)}{(\phi^d t_d)^2} \right)_{ab} d\phi^a d\phi^b \end{aligned} \quad (4.54)$$

Τώρα θα ήταν πιο χρήσιμο να γράψουμε την ορίζουσα της μετρικής σαν το εκθετικό του ίχνους του λογαρίθμου της μετρικής:

$$\det g = e^{\text{Tr}(\ln g)}$$

έτσι μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (4.53):

$$DU = e^{-S_{meas}(\phi)} D\phi \quad (4.55)$$

όπου

$$S_{meas}(\phi) = -\frac{1}{2} \sum_{n\mu} \text{Tr} \ln \left[ \frac{2(1 - \cos(\phi^a t_a))}{(\phi^b t_b)^2} \right] \quad (4.56)$$

Συνολικά τώρα στο πλέγμα, για μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας, έχουμε την δράση:

$$S_{QCD} = S_{gluons} + S_{quarks} + S_{GF} + S_{ghosts} + S_{meas} \quad (4.57)$$

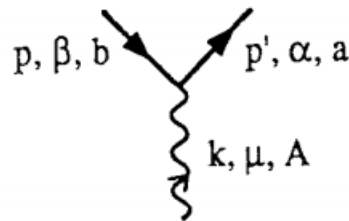
Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε τους εξής διαδότες:

$$\text{gluons: } \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\hat{k}^2} \left( \delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2} \right) \quad (4.58a)$$

$$\text{quarks: } K_{ab}^{-1} = \frac{\left( -i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{1}{a} \sin(p_\mu a) + M(p) \right)_{ab}}{\sum_{\mu=1}^4 \frac{1}{a^2} \sin(p_\mu a)^2 + M^2(p)} \quad (4.58b)$$

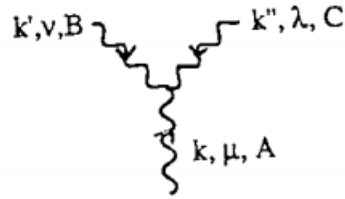
$$\text{ghosts: } \mathcal{C} = \frac{1}{\hat{k}^2} \quad (4.58c)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως και στην αβελιανή περίπτωση, μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε κορυφή, κάποια παραδείγματα:



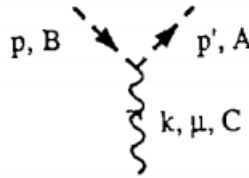
ΣΧΗΜΑ 4.5: Κορυφή κουάρκ, αντι-κουάρκ και γκλουονίου

$$-ig_0(2\pi)^4 \delta_P^{(4)}(p - p' + k) \left[ (\gamma_\mu) \cos\left(\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right) - ir \sin\left(\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right) \right]_{\alpha\beta} T_{ab}^A \quad (4.59)$$



ΣΧΗΜΑ 4.6: Κορυφή τριών γκλουονίων

$$\begin{aligned}
 & -ig_0(2\pi)^4\delta_P^{(4)}(k+k'+k'')f_{ABC}\left[\delta_{\nu\lambda}\frac{2}{a}\sin\left(\frac{(k''-k')_\mu a}{2}\right)\cos\left(\frac{k_\nu a}{2}\right)\right. \\
 & \left. +\delta_{\mu\lambda}\frac{2}{a}\sin\left(\frac{(k-k'')_\nu a}{2}\right)\cos\left(\frac{k'_\lambda a}{2}\right)+\delta_{\mu\nu}\frac{2}{a}\sin\left(\frac{(k'-k)_\lambda a}{2}\right)\cos\left(\frac{k''_\mu a}{2}\right)\right] \quad (4.60)
 \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 4.7: Κορυφή ghost, αντι-ghost και γκλουονίου

$$-ig_0(2\pi)^4\delta_P^{(4)}(p-p'+k)f_{ABC}\frac{2}{a}\sin\left(\frac{p'_\mu a}{2}\right)\cos\left(\frac{p_\mu a}{2}\right) \quad (4.61)$$

Οι κορυφές αυτές έχουν μη μηδενικό όριο του συνεχούς. Τώρα που έχουμε την πλήρη θεωρία, και έχουν αντιμετωπισθεί τα προβλήματα της αναλλοιώτητας κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, και οι απειρισμοί λόγω της αναλλοιώτητας αυτής, είμαστε πλέον σε θέση να προχωρήσουμε σε υπολογισμούς που θα μας αναδείξουν νέους απειρισμούς που πρέπει να διαχειριστούμε.



## Κεφάλαιο 5

# Διαστατική Ομαλοποίηση

### 5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα δύο κεφάλαια χρησιμοποιήσαμε το πλέγμα σαν ομαλοποιητή, διακριτοποιώντας τον χωροχρόνο, ώστε να αντιμετωπίσουμε προσωρινά απειρισμούς που προέκυπταν στην προσπάθειά μας να υπολογίσουμε συναρτήσεις Green. Γενικά μια θεωρία και τα αποτελέσματά της θα πρέπει να είναι ανεξάρτητα από τον ομαλοποιητή που χρησιμοποιούμε, έτσι σε αυτό το κεφάλαιο γίνεται η εισαγωγή στην διαστατική ομαλοποίηση, η οποία είναι συχνά η πιο βολική μέθοδος για να γίνουν κάποιοι υπολογισμοί διαταρακτικά.

Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην παρατήρηση ότι κάποιοι UV απειρισμοί αντιμετωπίζονται εάν οι υπολογισμοί γίνουν σε λίγο λιγότερες διαστάσεις από τέσσερις. Συγκεκριμένα θα θεωρούμε πλέον τον αριθμό των διαστάσεων  $D$  σαν μια συνεχή μεταβλητή που παίρνει θετικές τιμές, ρυθμιζόμενη από μία παράμετρο  $\epsilon$ :

$$D = 4 - 2\epsilon \tag{5.1}$$

όπου τυπικά το  $\epsilon$  παίρνει θετικές τιμές. Να σημειωθεί ότι γενικά ο αριθμός των διαστάσεων  $D$  μπορεί να πάρει και μιγαδικές τιμές. Με την διαδικασία αυτή μπορεί να δημιουργηθούν ασάφειες και προβλήματα, τα οποία όμως πρέπει να ξεπερνιούνται στο φυσικό όριο  $D \rightarrow 4$ . Πρώτα γίνονται οι υπολογισμοί σε  $4 - 2\epsilon$  διαστάσεις, αναπτύσσουμε το αποτέλεσμα σε δυνάμεις του  $\epsilon$  κρατώντας όρους μηδενικής ή αρνητικής δύναμης (πόλους), και τότε παίρνουμε το όριο  $\epsilon \rightarrow 0$  αφού προηγηθεί μια διαδικασία 'επανακανονικοποίησης' η οποία αφαιρεί τους πόλους.

Υπάρχει ωστόσο το ερώτημα "Πώς ολοκληρώνω σε μη ακέραιο αριθμό διαστάσεων?"; έτσι πρέπει να αναφέρουμε τις ιδιότητες μιας τέτοιας ολοκλήρωσης. Οι ιδιότητες που ακολουθούν αναφέρονται αξιωματικά:

- Γραμμικότητα:

$$\int d^D p [a f(p) + b g(p)] = a \int d^D p f(p) + b \int d^D p g(p) \quad \text{όπου } a \text{ και } b \text{ τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί.}$$

- Αλλαγή μεταβλητής:

$$1) \int d^D p f(sp) = s^{-D} \int d^D p f(p)$$

$$2) \int d^D p f(p+q) = \int d^D p f(p)$$

## 5.2 Πίνακες $\gamma_\mu$ και διαστατικότητα

Καθώς αλλάζουμε τον αριθμό διαστάσεων σε  $4 - 2\epsilon$  πρέπει να είμαστε προσεκτικοί όταν χρησιμοποιούμε τους πίνακες  $\gamma_\mu$ , όπου πλέον ο δείκτης Lorentz  $\mu$  παίρνει τιμές από 1 μέχρι  $D$  (στον Ευκλείδειο χωρόχρονο). Οι πίνακες  $\gamma_\mu$  εξακολουθούν να ικανοποιούν την σχέση:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1}$$

και η πράξη του ίχνους έχει τις συνηθισμένες ιδιότητες. Για  $D = 4$  ξέρουμε ότι:

$$Tr(\mathbb{1}) = 4$$

ωστόσο στην διαστατική ομαλοποίηση δεν μπορούμε να βάλουμε το ίχνος του μοναδιαίου πίνακα να ισούται με  $2^{D/2}$  ( $2^{D/2}$  είναι ο αριθμός των πινάκων  $\gamma_\mu$  σε  $D$ -διάστατο χώρο όταν το  $D$  είναι άρτιος αριθμός), καθώς η διαστατικότητα δεν θα ήταν ακέραιος αριθμός. Είναι συχνά βολικό, και θα το υιοθετήσουμε από τώρα και στο εξής, το ίχνος:

$$Tr(\mathbb{1}) = 4 \tag{5.2}$$

για κάθε αριθμό διαστάσεων.

Στις τέσσερις διαστάσεις ο πίνακας  $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$  αντιμετατίθεται με όλους τους πίνακες  $\gamma_\mu$ . Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε:

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \gamma_\kappa \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \tag{5.3}$$

με τον τανυστή Levi-Civita να ορίζεται:

$$\epsilon_{k\lambda\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{αν } (k\lambda\mu\nu) \text{ άρτια μετάθεση των } (1234) \\ -1 & \text{αν } (k\lambda\mu\nu) \text{ περιττή μετάθεση των } (1234) \\ 0 & \text{αν } (k\lambda\mu\nu) \text{ δεν αποτελεί μετάθεση των } (1234) \end{cases} \quad (5.4)$$

Ο ορισμός αυτός ισχύει και στις  $4 - 2\epsilon$  διαστάσεις, μόνο που τώρα ο πίνακας  $\gamma_5$  δεν αντιμετωπίζεται με όλους τις πίνακες  $\gamma_\mu$ , αλλά:

$$\begin{aligned} \{\gamma_5, \gamma_\mu\} &= 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \\ [\gamma_5, \gamma_\mu] &= 0, \quad \mu > 4 \\ (\gamma_5)^2 &= \mathbb{1} \\ (\gamma_5)^\dagger &= \gamma_5 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ένας εναλλακτικός ορισμός του  $\gamma_5$  με τρόπο όπου να αντιμετωπίζεται με όλους τους πίνακες  $\gamma_\mu$  θα ήταν πιο συμμετρικός, όμως οδηγεί σε λάθος αποτελέσματα π.χ. στον υπολογισμό της 'χειραλικής ανωμαλίας' [6].

### Διαστατικότητα

Προφανώς όταν αυξήσουμε ή μειώσουμε τις διαστάσεις, η διαστατικότητα των διαφόρων μεγεθών (πεδία, παράμετροι της Λαγκρανζιανής) αλλάζει. Γράφουμε την Λαγκρανζιανή πυκνότητα από το κεφάλαιο 2:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - e_0 \gamma^\mu A_\mu - M_0)\psi(x)$$

για ηλεκτρόνια, και απαιτούμε κάθε όρος να έχει τις κατάλληλες διαστάσεις έτσι ώστε η δράση να είναι σε μονάδες  $\hbar$ . Προκύπτει έτσι ότι η σταθερά σύζευξης  $e_0$  έχει διαστάσεις (μάζα) $^\epsilon$ . Για να παραμείνει αδιάστατη η σταθερά σύζευξης αντικαθιστούμε στην Λαγκρανζιανή:

$$e_0 \rightarrow e_0 \mu^\epsilon \quad (5.6)$$

όπου  $\mu$  είναι μια αυθαίρετη σταθερά με μονάδες μάζας. Το ίδιο ισχύει και στην μη αβελιανή περίπτωση:

$$g_0 \rightarrow g_0 \mu^\epsilon \quad (5.7)$$

### 5.3 Συνάρτηση $\Gamma(z)$ και χρήσιμα ολοκληρώματα

Η συνάρτηση  $\Gamma(n)$  ορίζεται ως:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = (n-1)! \quad (5.8)$$

όπου το  $n$  είναι κάποιος θετικός, μη μηδενικός ακέραιος αριθμός. Ο ορισμός μπορεί να επεκταθεί στο μιγαδικό επίπεδο ως:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \Re(z) > 0 \quad (5.9)$$

με την προϋπόθεση ότι το πραγματικό μέρος του  $z$  είναι θετικό έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να συγκλίνει. Τότε, η συνάρτηση  $\Gamma$  συνεχίζεται αναλυτικά σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο, με απλούς πόλους στις ακέραιες μη θετικές τιμές του ορίσματος  $z$ .

Ένα ολοκλήρωμα στις  $D$  διαστάσεις ( $D$  ακέραιος):

$$\int d^D x f(x)$$

μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες ως:

$$\int d^D x f(x) = \int f(x) r^{D-1} dr \sin(\theta_{D-1})^{D-2} d\theta_{D-1} \sin(\theta_{D-2})^{D-3} d\theta_{D-2} \dots d\theta_1 \quad (5.10)$$

με τις γωνίες να παίρνουν τιμές  $0 \leq \theta_i \leq \pi$ ,  $i = 2, 3 \dots D-1$  και  $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ . Εάν η ολοκληρωτέα συνάρτηση εξαρτάται μόνο από το  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_D^2}$ , τότε τα ολοκληρώματα ως προς τις γωνίες μπορούν να γίνουν εύκολα:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin(\theta_{D-1})^{D-2} d\theta_{D-1} \sin(\theta_{D-2})^{D-3} d\theta_{D-2} \dots \sin(\theta_2) d\theta_2 \\ = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ορίζοντας την στερεά γωνία στις  $D$  διαστάσεις. Η πιο πάνω έκφραση μπορεί τώρα να επεκταθεί και σε τιμές  $D$  μη ακέραιες.

Ακολουθώντας τον φορμαλισμό που χρησιμοποίησαν οι 't Hooft και Veltman [12], γράφουμε κάποια χρήσιμα ολοκληρώματα στις  $D$  διαστάσεις στον Ευκλείδειο χωρόχρονο:

$$\int d^D p \frac{1}{(p^2 + 2kp + M^2)^a} = \frac{\pi^{D/2}}{(M^2 - k^2)^{a-D/2}} \frac{\Gamma(a - D/2)}{\Gamma(a)} \quad (5.12)$$

$$\int d^D p \frac{p_\mu}{(p^2 + 2kp + M^2)^a} = \frac{\pi^{D/2}}{(M^2 - k^2)^{a-D/2}} \frac{\Gamma(a - D/2)}{\Gamma(a)} (-k_\mu) \quad (5.13a)$$

$$\begin{aligned} \int d^D p \frac{p^2}{(p^2 + 2kp + M^2)^a} &= \\ &= \frac{\pi^{D/2}}{(M^2 - k^2)^{a-D/2}} \frac{1}{\Gamma(a)} \left[ \Gamma\left(a - \frac{D}{2}\right) k^2 + \Gamma\left(a - 1 - \frac{D}{2}\right) \frac{D}{2} (M^2 - k^2) \right] \end{aligned} \quad (5.13b)$$

$$\begin{aligned} \int d^D p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2kp + M^2)^a} &= \\ &= \frac{\pi^{D/2}}{(M^2 - k^2)^{a-D/2}} \frac{1}{\Gamma(a)} \left[ \Gamma\left(a - \frac{D}{2}\right) k_\mu k_\nu + \Gamma\left(a - 1 - \frac{D}{2}\right) \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} (M^2 - k^2) \right] \end{aligned} \quad (5.13c)$$

$$\begin{aligned} \int d^D p \frac{p_\mu p_\nu p_\lambda}{(p^2 + 2kp + M^2)^a} &= \frac{\pi^{D/2}}{(M^2 - k^2)^{a-D/2}} \times \\ &\times \frac{1}{\Gamma(a)} \left[ -\Gamma\left(a - \frac{D}{2}\right) k_\mu k_\nu k_\lambda - \Gamma\left(a - 1 - \frac{D}{2}\right) \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} k_\lambda + \delta_{\mu\lambda} k_\nu + \delta_{\nu\lambda} k_\mu) (M^2 - k^2) \right] \end{aligned} \quad (5.13d)$$

$$\begin{aligned} \int d^D p \frac{p^2 p_\mu}{(p^2 + 2kp + M^2)^a} &= \frac{\pi^{D/2}}{(M^2 - k^2)^{a-D/2}} \times \\ &\times \frac{(-k_\mu)}{\Gamma(a)} \left[ \Gamma\left(a - \frac{D}{2}\right) k^2 + \Gamma\left(a - 1 - \frac{D}{2}\right) \frac{D+2}{2} (M^2 - k^2) \right] \end{aligned} \quad (5.13e)$$

όπου τα ολοκληρώματα των εξισώσεων (5.13) προκύπτουν με μερική παραγωγή του ολοκληρώματος της εξίσωσης (5.12) ως προς το  $k$ .

## 5.4 Παράμετροι Feynman

Στους διάφορους υπολογισμούς εμφανίζονται πολύπλοκα ολοκληρώματα που έχουν την μορφή ρητών εκφράσεων με πολλούς όρους που πολλαπλασιάζονται στον παρονομαστή. Έτσι για να τα φέρουμε στην μορφή των ολοκληρωμάτων που φαίνονται στις εξισώσεις (5.12) και (5.13) θα χρησιμοποιήσουμε τις 'παραμέτρους Feynman'.

Αρχικά ξεκινούμε από την απλή ταυτότητα:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (5.14)$$

Στην συνέχεια παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς το  $B$ , καταλήγουμε στην σχέση:

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx \frac{n(1-x)^{n-1}}{[xA + (1-x)B]^{n+1}} \quad (5.15)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(y-1+x) \frac{ny^{n-1}}{[xA + yB]^{n+1}} \quad (5.16)$$

Χρησιμοποιώντας τις δύο αυτές ταυτότητες και την μέθοδο της επαγωγής, μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n} \quad (5.17)$$

και αντίστοιχα παραγωγίζοντας την σχέση αυτή, καταλήγουμε στην γενικότερη ταυτότητα:

$$\frac{1}{A_1^{m_1} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{\prod x_i^{m_i-1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)} \quad (5.18)$$

Να σημειωθεί ότι η σχέση αυτή ισχύει και για μη ακέραια  $m_i$ . Συχνά χρειάζεται να γίνει κάποια αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης ώστε ο παρονομαστής στα ολοκληρώματα να μην εξαρτάται γραμμικά από αυτήν. Θα φανεί στο επόμενο υποκεφάλαιο πώς χρησιμοποιείται αυτή η μέθοδος.

## 5.5 Αυτοενέργεια ηλεκτρονίου

Στο παρόν υποκεφάλαιο θα παρουσιαστεί ένα παράδειγμα υπολογισμού στο συνεχές χρησιμοποιώντας διαστατική ομαλοποίηση, και στο τέλος θα γίνει η σύνδεση με το επόμενο κεφάλαιο, την επανακανονικοποίηση της θεωρίας.

Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση δύο σημείων ενός ηλεκτρονίου, η οποία προκύπτει αθροίζοντας τα διαγράμματα Feynman:

$$\langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ x \qquad y \end{array} + \begin{array}{c} \text{cloud} \\ \xrightarrow{\quad} \\ x \qquad y \end{array} + \dots$$

ΣΧΗΜΑ 5.1: Electron two-point function

Όλοι οι υπολογισμοί που θα ακολουθήσουν γίνονται στον Ευκλείδειο χωρόχρονο. Το πρώτο διάγραμμα είναι απλά ο διαδότης:

$$\frac{-i\not{p} + M_0}{p^2 + M_0^2} \quad (5.19)$$

Ο διαδότης αυτός προκύπτει από τον διαδότη που υπολογίστηκε στο πλέγμα:

$$K_{ab}^{-1} = \frac{\left( -i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \frac{1}{a} \sin(p_{\mu}a) + M_0(p) \right)_{ab}}{\sum_{\mu=1}^4 \frac{1}{a^2} \sin(p_{\mu}a)^2 + M_0^2(p)}, \quad \text{όπου } M_0(p) = M_0 + \frac{2r}{a} \sum_{\mu=1}^4 \sin(p_{\mu}a/2)^2$$

παίρνοντας το όριο του συνεχούς  $a \rightarrow 0$ . Το δεύτερο διάγραμμα του Σχήματος 5.1 είναι η πρώτη συνεισφορά στην 'αυτοενέργεια' του ηλεκτρονίου, και είναι το βασικό διάγραμμα που θα υπολογίσουμε:

$$= \frac{-i\not{p} + M_0}{p^2 + M_0^2} I \frac{-i\not{p} + M_0}{p^2 + M_0^2}$$

ΣΧΗΜΑ 5.2: Electron self-energy

όπου

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie_0\gamma_{\mu}) \frac{\delta_{\mu\nu}}{(k-p)^2} \frac{-i\not{k} + M_0}{(k^2 + M_0^2)} (-ie_0\gamma_{\nu}) \quad (5.20)$$

με την κορυφή ηλεκτρονίου ποζιτρονίου και φωτονίου να δίνεται σαν το όριο  $a \rightarrow 0$  της αντίστοιχης κορυφής στο πλέγμα:

$$\begin{aligned} & -ie_0(2\pi)^4 \delta_P^{(4)}(p-p'+k) \left[ (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \cos\left(\frac{(p+p')_{\mu}a}{2}\right) - ir\delta_{\alpha\beta} \sin\left(\frac{(p+p')_{\mu}a}{2}\right) \right] \\ & \xrightarrow{a \rightarrow 0} (-ie_0\gamma_{\mu})(2\pi)^4 \delta_P^{(4)}(p-p'+k) \end{aligned}$$

και ο φωτονικός διαδότης χρησιμοποιείται στην βαθμίδα Feynman για απλότητα:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\hat{k}^2} \left( \delta_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{\hat{k}_{\mu}\hat{k}_{\nu}}{\hat{k}^2} \right), \quad \text{όπου } \hat{k}_{\mu} = \frac{2}{a} \sin(k_{\mu}a/2), \quad \hat{k}^2 = \frac{4}{a^2} \sum_{\mu=1}^4 \sin(k_{\mu}a/2)^2$$

$$\xrightarrow[\xi=1]{a \rightarrow 0} \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2}$$

Το ολοκλήρωμα ωστόσο είναι άπειρο στις τέσσερις διαστάσεις, έτσι θα το υπολογίσουμε στις  $D = 4 - 2\epsilon$  διαστάσεις, και έπειτα θα πάρουμε το όριο  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$I = -e_0^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-i\not{k} + M_0}{(k-p)^2(k^2 + M_0^2)} \quad (5.21)$$

Οι δύο όροι με τους πίνακες  $\gamma_\mu$  που βρίσκονται στα αριστερά και δεξιά της έκφρασης μπορούν να βγουν εκτός ολοκληρώματος, και δεν θα γράφονται πλέον για χάρη απλότητας. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (5.14) έτσι ώστε να έχουμε ένα κοινό παρονομαστή:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-p)^2(k^2 + M_0^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[x(k-p)^2 + (1-x)(k^2 + M_0^2)]^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[xk^2 + xp^2 - 2kpx + k^2 + M_0^2 - xk^2 - xM_0^2]^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[(k-px)^2 - p^2x^2 + xp^2 + M_0^2 - xM_0^2]^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{[l^2 + \Delta^2]^2} \end{aligned}$$

όπου

$$l = k - px \quad \text{και} \quad \Delta^2 = -p^2x^2 + xp^2 + M_0^2 - xM_0^2$$

Συνολικά έχουμε το ολοκλήρωμα:

$$I = -e_0^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{-i\not{l} - ix\not{p} + M_0}{[l^2 + \Delta^2]^2}$$

Ο όρος στον αριθμητή που είναι γραμμικός ως προς το  $l$  μηδενίζεται όταν ολοκληρωθεί, εφόσον είναι περιττός ως προς την μεταβλητή ολοκλήρωσης:

$$I = -e_0^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{-ix\not{p} + M_0}{[l^2 + \Delta^2]^2} \quad (5.22)$$

Το ολοκλήρωμα ως προς το  $l$  είναι τώρα στην επιθυμητή μορφή, και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (5.12) με  $k = 0$ ,  $a = 2$  και  $M \rightarrow \Delta$  για να το υπολογίσουμε:

$$I = -e_0^2 \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \frac{-ix\not{p} + M_0}{(\Delta^2)^\epsilon} \frac{\pi^{2-\epsilon}}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(2)}$$



ή ανακατανέμοντας τους όρους ( $\Gamma(2) = 1$ ):

$$I = -\frac{e_0^2}{16\pi^2} \frac{\mu^{2\epsilon} \pi^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon)}{(2\pi)^{-2\epsilon}} \int_0^1 dx \frac{-ix\not{p} + M_0}{(\Delta^2)^\epsilon} \quad (5.23)$$

Πριν γίνει το ολοκλήρωμα ως προς  $x$ , θα αναπτύξουμε τους διάφορους όρους ως προς  $\epsilon$ , και θα κρατήσουμε αρνητικές ή μηδενικές δυνάμεις:

$$\mu^{2\epsilon} \approx 1 + 2\epsilon \ln \mu \quad (\Delta^2)^{-\epsilon} \approx 1 - \epsilon \ln (\Delta^2)$$

$$(2\pi)^{2\epsilon} \approx 1 + 2\epsilon \ln (2\pi) \quad \pi^{-\epsilon} \approx 1 - \epsilon \ln \pi$$

$$\Gamma(\epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E \quad \text{όπου } \gamma_E = 0.5772156649 \text{ η σταθερά του Euler}$$

Αντικαθιστώντας:

$$I = -\frac{e_0^2}{16\pi^2} (1+2\epsilon \ln \mu) (1+2\epsilon \ln (2\pi)) (1-\epsilon \ln \pi) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E\right) \int_0^1 dx (-ix\not{p} + M_0) (1-\epsilon \ln (\Delta^2))$$

Ορίζοντας

$$I_1 = \int_0^1 dx (-ix\not{p} + M_0) = M_0 - i\not{p}/2$$

$$I_2 = \int_0^1 dx (ix\not{p} - M_0) \ln (\Delta^2) = \frac{1}{2p^4} \left[ 4M_0p^4 + iM_0^2p^2\not{p} + M_0^3 \ln (M_0^2)(2p^2 + iM_0\not{p}) - (M_0^2 + p^2) \ln (M_0^2 + p^2)(2M_0p^2 + iM_0^2\not{p} - ip^2\not{p}) \right]$$

γράφουμε το ολοκλήρωμα κρατώντας μόνο τις δυνάμεις του  $\epsilon$  που αναφέραμε:

$$I = -\frac{e_0^2}{16\pi^2} \left[ \frac{I_1}{\epsilon} + I_1 (\ln (4\pi) - \gamma_E + 2 \ln \mu) + I_2 \right]$$

Τώρα μπορούμε να επιλέξουμε το  $\mu$  με τρόπο ώστε να απλοποιηθεί η έκφραση:

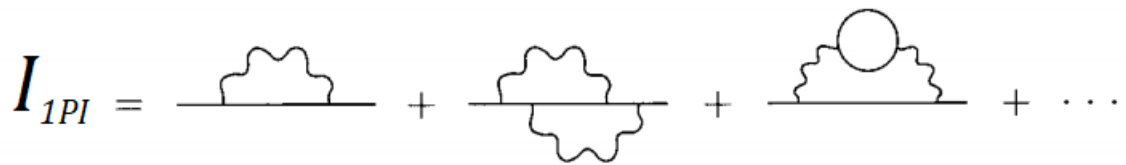
$$\mu = \bar{\mu} \left( \frac{4\pi}{e^{\gamma_E}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5.24)$$

με το  $I$  να δίνεται πλέον από την σχέση:

$$I = -\frac{e_0^2}{16\pi^2} \left[ \frac{I_1}{\epsilon} + 2 \ln \bar{\mu} I_1 + I_2 \right] \quad (5.25)$$

Παρατηρούμε ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει καθώς  $\epsilon \rightarrow 0$ , όπως αναμέναμε, εφόσον το μόνο που κάναμε ήταν οι υπολογισμοί στις  $D = 4 - 2\epsilon$  διαστάσεις, και έπειτα επιστρέψαμε στις τέσσερις διαστάσεις. Για να αντιμετωπισθεί ο απειρισμός, πρέπει να επανακανονικοποιηθεί η θεωρία, ορίζοντας νέες παραμέτρους της Λαγκρανζιανής (μάζα και σταθερά σύζευξης), και νέα πεδία, που κρύβουν στους ορισμούς τους αυτούς τους απειρισμούς.

Θα ονομάζουμε "one-particle irreducible (1PI)" τα διαγράμματα Feynman που δεν μπορούν να σπάσουν σε δύο αφαιρώντας μια μόνο γραμμή, και ορίζουμε το  $I_{1PI}$  ως το άθροισμα όλων των διαγραμμάτων αυτών:



ΣΧΗΜΑ 5.3: Άθροισμα διαγραμμάτων 1PI

Είμαστε τώρα σε θέση να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης δύο σημείων του ηλεκτρονίου για να βρούμε τον συνολικό διαδότη:

$$\begin{aligned} \int d^4x \langle \Omega | T \psi(x) \bar{\psi}(0) | \Omega \rangle e^{ip \cdot x} &= \text{Diagram of a fermion line with a shaded blob} \\ &= \text{Diagram of a fermion line} + \text{Diagram of a fermion line with a 1PI blob} + \text{Diagram of a fermion line with two 1PI blobs} + \dots \\ &= \frac{-i \not{p} + M_0}{p^2 + M_0^2} + \frac{-i \not{p} + M_0}{p^2 + M_0^2} I \frac{-i \not{p} + M_0}{p^2 + M_0^2} + \dots \end{aligned}$$

ΣΧΗΜΑ 5.4: Fourier transform of the two-point function

Γράφοντας το άθροισμα αυτό αντικαθιστώντας  $p^2 = \not{p}^2$  θα αντιληφθούμε ότι σχηματίζεται μια γεωμετρική πρόοδος:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{i\not{p} + M_0} + \frac{1}{i\not{p} + M_0} \left( \frac{I}{i\not{p} + M_0} \right) + \frac{1}{i\not{p} + M_0} \left( \frac{I}{i\not{p} + M_0} \right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{i\not{p} + M_0 - I} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Η φυσική μάζα  $M$  του ηλεκτρονίου είναι ο πόλος του διαδότη αυτού:

$$[i\not{p} + M_0 - I]_{\not{p}=M} = 0 \quad (5.27)$$

και ο όρος

$$Z_2^{-1} = 1 - \left. \frac{dI}{d\not{p}} \right|_{\not{p}=M} \quad (5.28)$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επανακανονικοποίηση των φερμιονικών πεδίων. Η ομαλοποίηση της θεωρίας είναι απαραίτητη πριν γίνει η επανακανονικοποίηση της, και τα φυσικά αποτελέσματα θα πρέπει να είναι ανεξάρτητα του ομαλοποιητή.

## Κεφάλαιο 6

# Επανακανονικοποίηση

### 6.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε δει στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογισμού, πολλές συναρτήσεις Green ενέχουν απειρισμούς. Οι απειρισμοί αυτοί εμφανίζονται στην προσπάθεια που γίνεται να αφαιρεθεί ο ομαλοποιητής της θεωρίας, όπως για παράδειγμα το φυσικό όριο  $D \rightarrow 4$  όταν χρησιμοποιείται η διαστατική ομαλοποίηση, ή το όριο του συνεχούς  $a \rightarrow 0$  όταν χρησιμοποιείται το πλέγμα σαν ομαλοποιητής. Οι απειρισμοί αυτοί αντιμετωπίζονται με την επανακανονικοποίηση της θεωρίας.

Η βασική ιδέα της επανακανονικοποίησης προήρθε από την παρατήρηση ότι σε 1-loop διαγράμματα, οι απειρισμοί ισοδυναμούν με μετατόπιση των παραμέτρων της δράσης. Η διαδικασία ακύρωσης των απειρισμών ρυθμίζοντας κατάλληλα τις παραμέτρους και τα πεδία της δράσης ονομάζεται επανακανονικοποίηση. Θα ονομάζουμε τις παραμέτρους με ένα δείκτη 0 σαν απογυμνωμένες (bare parameters), και χωρίς δείκτη θα είναι οι επανακανονικοποιημένες παράμετροι (renormalized parameters). Τυπικά, η τιμή των απογυμνωμένων παραμέτρων πρέπει να είναι τέτοια ώστε η επανακανονικοποιημένη τιμή να είναι πεπερασμένη.

Για παράδειγμα ας δούμε την θεωρία ενός βαθμωτού πεδίου με ένα επιπλέον όρο  $\phi^4$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi_0)^2 - \frac{1}{2}M_0^2\phi_0^2 - \frac{1}{4!}g_0\phi_0^4 \quad (6.1)$$

όπου  $M_0$  η παράμετρος μάζας, και  $g_0$  η παράμετρος σύζευξης. Ορίζοντας τώρα το επανακανονικοποιημένο πεδίο  $\phi$ :

$$\phi_0 = Z^{1/2}\phi \quad (6.2)$$

όπου το  $Z$  καλείται συντελεστής επανακανονικοποίησης του πεδίου. Η Λαγκρανζιανή τώρα παίρνει την μορφή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}M_0^2Z\phi^2 - \frac{1}{4!}g_0Z^2\phi^4 = \frac{1}{2}Z(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}M_B^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g_B\phi^4 \quad (6.3)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την Λαγκρανζιανή, και την διαδικασία κβάντωσης μέσω του ολοκληρώματος διαδρομής του Feynman που αναπτύχθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, υπολογίζουμε τις συναρτήσεις Green αυτού του κβαντικού πεδίου.

Αφήνουμε τότε τα  $Z$ ,  $M_0$  και  $g_0$  να είναι συναρτήσεις της πλεγματικής σταθεράς  $a$ , κατάλληλα επιλεγμένες ώστε οι συναρτήσεις Green του πεδίου  $\phi$  να είναι πεπερασμένες καθώς  $a \rightarrow 0$ . Εάν αυτό είναι εφικτό, τότε λέμε ότι η θεωρία είναι επανακανονικοποιήσιμη.

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση (6.3) ως:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}M^2\phi^2 - \frac{1}{4!}g\phi^4 + \frac{1}{2}\delta Z(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}\delta M^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\delta g\phi^4 \quad (6.4)$$

με τα  $M$  και  $g$  να κρατιούνται σταθερά καθώς  $a \rightarrow 0$ , και οι αντισταθμιστικοί όροι (counterterms):

$$\delta Z = Z - 1 \quad \delta M^2 = M_B^2 - M^2 \quad \delta g = g_B - g \quad (6.5)$$

να ρυθμίζονται κατάλληλα για να ακυρώνουν τους απειρισμούς καθώς  $a \rightarrow 0$ . Η πιο πάνω Λαγκρανζιανή χρησιμοποιείται για υπολογισμούς που γίνονται διαταρακτικά, αντιμετωπίζοντας τους δύο πρώτους όρους σαν την ελεύθερη Λαγκρανζιανή, και τους υπόλοιπους σαν την αλληλεπίδραση. Αναπτύσσοντας τότε σε τάξεις της σταθεράς σύζευξης, κάθε όρος του αναπτύγματος επιλέγεται με τρόπο ώστε να τους απειρισμούς που προκύπτουν υπολογίζοντας, στην αντίστοιχη τάξη, μια συγκεκριμένη συνάρτηση Green. Αποτελεί θεμελιώδες αποτέλεσμα των θεωρημάτων επανακανονικοποίησης το γεγονός ότι η διαδικασία αυτή καθιστά πεπερασμένες όλες τις (άπειρες) συναρτήσεις Green.

Στο πλέγμα όταν γίνονται οι υπολογισμοί διαταρακτικά, εμφανίζονται ολοκληρώματα για διαγράμματα 1-loop που μπορούν να γραφτούν στην μορφή (θα δούμε παράδειγμα υπολογισμού στο επόμενο υποκεφάλαιο):

$$1 + g_0^2 [c_0 + c_1 \ln(a^2 q^2)] \quad (6.6)$$

με το  $g_0$  η σταθερά σύζευξης,  $q$  η εξωτερική ορμή και  $a$  η πλεγματική σταθερά. Οι  $c_0$  και  $c_1$  είναι σταθερές που μπορούν να υπολογισθούν αριθμητικά. Θα θέλαμε τώρα να ξεχωρίσουμε

την πλεγματική σταθερά και την εξωτερική ορμή γράφοντας:

$$1 + g_0^2 [c_0 + c_1 \ln(a^2 q^2)] = \left[ 1 + g_0^2 [c_0 + c_1 \ln(a^2 \nu^2)] \right] \times \left[ 1 + g_0^2 c_1 \ln(q^2/\nu^2) \right] \quad (6.7)$$

με το  $\nu$  μια αυθαίρετη σταθερά. Να σημειωθεί ότι η σχέση αυτή ισχύει για  $\mathcal{O}(g_0^2)$ , και θα μπορούσαμε να γράψουμε μια αντίστοιχη σχέση χρησιμοποιώντας την σταθερά  $c_0$ . Έχει πλέον ξεχωρίσει η πλεγματική σταθερά από την εξωτερική ορμή, και ο απειρισμός για  $a \rightarrow 0$  εμφανίζεται μόνο στο πρώτο όρο που δεν εξαρτάται από την εξωτερική ορμή. Ο δεύτερος όρος είναι πεπερασμένος, και εξαρτάται από το  $q$ .

Έτσι, ο πρώτος σταθερός όρος χρησιμοποιείται για την επανακανονικοποίηση των πεδίων, και ο δεύτερος όρος αποτελεί την πεπερασμένη συνάρτηση Green. Υπάρχουν σημαντικά αποτελέσματα που μπορούν να αποδειχτούν, αλλά αναφέρονται επιγραμματικά πιο κάτω:

- 1) Αυτή η παραγοντοποίηση μπορεί να γίνει και σε διαγράμματα πέρα του 1-loop
- 2) Μολονότι στη διαδικασία επανακανονικοποίησης επιλέγεται μόνο ένας μικρός αριθμός συναρτήσεων Green, με σκοπό να καταστούν πεπερασμένες, στο τέλος της διαδικασίας όλες οι συναρτήσεις Green αποκτούν πεπερασμένη τιμή
- 3) Αλλάζοντας το  $\nu$  ισοδυναμεί με μία επιπλέον πεπερασμένη επανακανονικοποίηση
- 4) Τα counterterms, ακόμα και αν υπολογιστούν για άμαζα φερμιόνια, κάτι που απλουστεύει αισθητά τη διαδικασία, εξακολουθούν να θεραπεύουν όλους τους απειρισμούς της θεωρίας

Τέλος να σημειωθεί πως σύνθετοι τελεστές που περιέχουν γινόμενα πεδίων στο ίδιο σημείο του χωρόχρονου χρειάζονται δική τους επανακανονικοποίηση.

## 6.2 Παράδειγμα υπολογισμού και lattice numbers

Στο υποκεφάλαιο αυτό αρχικά θα παρουσιαστούν κάποιοι lattice numbers, δηλαδή κάποια ολοκληρώματα στο πλέγμα που εμφανίζονται συχνά σε υπολογισμούς και η αριθμητική τους τιμή είναι πλέον ευρέως γνωστή, και τέλος θα δοθεί ένα παράδειγμα υπολογισμού ενός ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας το πλέγμα σαν ομαλοποιητή.

### Lattice numbers

Παρέμένα από το άρθρο των M. Lüscher και P. Weisz [13]:

$$P_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}^2} = 0.15493339023106021 \quad (6.8)$$

$$P_2 = \lim_{m \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{(4\pi)^2} \ln(M^2) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\hat{k}^2 + M^2)^2} \right] = 0.02401318111946489 \quad (6.9)$$

### Παράδειγμα υπολογισμού στο πλέγμα

Θα υπολογίσουμε τώρα το πρότυπο "scalar self-energy diagram", παρουσιάζοντας κάποια σημαντικά τεχνάσματα για τον υπολογισμό τέτοιων ολοκληρωμάτων:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}^2 (\widehat{k+ap})^2} \quad (6.10)$$

Χρησιμοποιούμε το πλέγμα σαν ομαλοποιητή, αλλά θα κάνουμε τον υπολογισμό στις  $D = 4 - 2\epsilon$  διαστάσεις με το  $D > 4$ :

$$I = (\mu a)^{2\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{\hat{k}^2 (\widehat{k+ap})^2} \quad (6.11)$$

Ο έξτρα όρος που εμφανίστηκε δεν επηρεάζει το ολοκλήρωμα, καθώς μας ενδιαφέρει το όριο  $\epsilon \rightarrow 0$ . Το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνουμε, είναι να προσθαφαιρέσουμε στο ολοκλήρωμα τον όρο μηδενικής τάξης  $\mathcal{O}(a^0)$  του αναπτύγματος Taylor:

$$J = (\mu a)^{2\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\hat{k}^2)^2} \quad (6.12)$$

Στις  $D$  διαστάσεις, ο όρος αυτός δεν έχει IR απειρισμό. Για τον υπολογισμό του  $J$  θα χρειαστεί να το γράψουμε λίγο διαφορετικά χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$\frac{1}{x^2} = \int_0^{\infty} z e^{-xz} dz \quad (6.13)$$

τότε

$$\begin{aligned} J &= (\mu a)^{2\epsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^{\infty} z e^{-z\hat{k}^2} dz \\ &= (\mu a)^{2\epsilon} \int_0^{\infty} z dz \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-z 4 \sum_{\mu=1}^D \sin^2\left(\frac{k_{\mu}}{2}\right)} \\ &= (\mu a)^{2\epsilon} \int_0^{\infty} z dz \left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{(2\pi)} e^{-z 4 \sin^2\left(\frac{k}{2}\right)} \right)^D \end{aligned} \quad (6.14)$$

Το ολοκλήρωμα στην παρένθεση μπορεί να γίνει αναλυτικά:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{(2\pi)} e^{-z} 4 \sin\left(\frac{k\mu}{2}\right)^2 = e^{-2z} I_0(2z) \quad (6.15)$$

με την  $I_0(2z)$  την υπερβολική συνάρτηση Bessel. Αντικαθιστώντας και αλλάζοντας μεταβλητή  $z \rightarrow z/2$  έχουμε:

$$J = \frac{(\mu a)^{2\epsilon}}{4} \int_0^{\infty} z \left( e^{-z} I_0(z) \right)^D dz \quad (6.16)$$

Στην συνέχεια σπάζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο (ο αριθμός 1 θα μπορούσε να ήταν οποιοσδήποτε άλλος θετικός αριθμός):

$$J = \frac{(\mu a)^{2\epsilon}}{4} \left[ \int_0^1 z \left( e^{-z} I_0(z) \right)^D dz + \int_1^{\infty} z \left( e^{-z} I_0(z) \right)^D dz \right] \quad (6.17)$$

και προσηθαιρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του όρου στην παρένθεση:

$$\left( e^{-z} I_0(z) \right)^D \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} z^{-D/2} \quad (6.18)$$

↓

$$J = \frac{(\mu a)^{2\epsilon}}{4} \left[ \int_0^1 z \left( e^{-z} I_0(z) \right)^D dz + \int_1^{\infty} z \left( e^{-z} I_0(z) \right)^D dz - \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int_1^{\infty} z z^{-D/2} dz + \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int_1^{\infty} z z^{-D/2} dz \right] \quad (6.19)$$

Μόνο ο τελευταίος όρος απειρίζεται στις τέσσερις διαστάσεις, και μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά:

$$\frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \int_1^{\infty} z z^{-D/2} dz = -\frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \frac{1}{\epsilon} \quad (6.20)$$

Οι υπόλοιποι όροι είναι επίσης υπολογίσιμοι στις τέσσερις διαστάσεις:

$$\int_0^1 z \left( e^{-z} I_0(z) \right)^4 dz = 0.0733022 = c_1 \quad (6.21a)$$

$$\int_1^{\infty} z \left[ \left( e^{-z} I_0(z) \right)^4 - \frac{1}{(2\pi)^2} z z^{-2} \right] dz = 0.0198139 = c_2 \quad (6.21b)$$



Το τελευταίο βήμα είναι να αναπτύξουμε ως προς  $\epsilon$ :

$$(\mu a)^{2\epsilon} \approx 1 + \epsilon \ln(\mu a)^2 \quad \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \approx \frac{1}{(2\pi)^2} (1 + \epsilon \ln(2\pi))$$

και να κρατήσουμε μόνο μη μηδενικούς όρους καθώς  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4} (1 + \epsilon \ln(\mu a)^2) \left[ c_1 + c_2 - \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} (1 + \epsilon \ln(2\pi)) \right] \\ &= \frac{c_1 + c_2}{4} - \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{\ln(\mu a)^2}{16\pi^2} - \frac{\ln(2\pi)}{16\pi^2} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Ο μόνος υπολογισμός που εναπομένει είναι το  $I - J$ . Ο όρος αυτός, εκ κατασκευής, είναι απαλλαγμένος από UV απειρισμούς στο όριο  $a \rightarrow 0$ , και μας οδηγεί σ'ένα ολοκλήρωμα του συνεχούς:

$$I - J \xrightarrow[a \rightarrow 0]{k \rightarrow ka} \mu^{2\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[ \frac{1}{k^2(k+p)^2} - \frac{1}{(k^2)^2} \right] \quad (6.23)$$

Στις  $D$  διαστάσεις το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν [6], έτσι:

$$I - J = \mu^{2\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2(k+p)^2}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά τις παραμέτρους Feynman η έκφραση γράφεται ως εξής:

$$I - J = \mu^{2\epsilon} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D l}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l^2 + \Delta^2)^2} \quad (6.24)$$

όπου

$$l = k + px \quad \Delta^2 = xp^2 - p^2x$$

Το ολοκλήρωμα ως προς το  $l$  είναι τώρα στην επιθυμητή μορφή, και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (5.12) με  $k=0$ ,  $a=2$  και  $M \rightarrow \Delta$  για να το υπολογίσουμε:

$$I - J = \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx (\Delta^2)^{-\epsilon} \quad (6.25)$$

Αναπτύσσοντας ως προς  $\epsilon$ :

$$I - J = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E \right) (1 + \epsilon \ln(\mu^2)) (1 + \epsilon \ln(4\pi)) \int_0^1 dx (1 + \epsilon \ln(\Delta^2))$$

εκτελώντας το ολοκλήρωμα ως προς  $x$ , και κρατώντας μόνο μη μηδενικούς όρους καθώς  $\epsilon \rightarrow 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned} I - J &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{16\pi^2} \ln(\mu^2) + \frac{1}{16\pi^2} (-\gamma_E + \ln(4\pi)) \\ &\quad - \frac{1}{16\pi^2} (-2 + \ln(p^2)) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Προσθέτοντας όλα τα ολοκληρώματα, καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} I &= I - J + J = \left( \frac{c_1 + c_2}{4} - \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} - \frac{\ln(\mu a)^2}{16\pi^2} - \frac{\ln(2\pi)}{16\pi^2} \right) \\ &\quad + \left( \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{16\pi^2} \ln(\mu^2) + \frac{1}{16\pi^2} (-\gamma_E + \ln(4\pi)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16\pi^2} (-2 + \ln(p^2)) \right) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( -\ln(a)^2 - \ln(p)^2 + 2 \right) + P_2 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Με το  $P_2$  να δίνεται στην εξίσωση (6.9). Παρατηρούμε πως ο πρώτος όρος στην παρένθεση απειρίζεται λογαριθμικά καθώς το  $a \rightarrow 0$ , ενώ οι υπόλοιποι είναι σταθεροί και πεπερασμένοι. Ο πρώτος όρος λοιπόν θα χρησιμοποιούταν για επανακανονικοποίηση, και οι υπόλοιποι θα ήταν η τιμή της συνάρτησης Green.

## Κεφάλαιο 7

# Μη τοπικοί τελεστές και συναρτήσεις κατανομής (PDFs)

### 7.1 Ορισμός μη τοπικών τελεστών

Όπως καταλαβαίνει κανείς από το όνομά τους, οι μη τοπικοί τελεστές εμπεριέχουν στον ορισμό τους πεδία υπολογισμένα σε διαφορετικά σημεία του χωροχρόνου. Η κατηγορία μη τοπικών τελεστών που έχει μελετηθεί περισσότερο μέχρι σήμερα αποτελείται από φερμιονικούς τελεστές της μορφής [14]:

$$O_{\Gamma} \equiv \bar{\psi}(x) \Gamma W(x, x + z\hat{\tau})\psi(x + z\hat{\tau}) \quad (7.1)$$

όπου  $W(x, x + z\hat{\tau})$  είναι το Wilson line:

$$W(x, x + z\hat{\tau}) = \mathcal{P} e^{ig_0 \int_0^z A_{\mu}(x+\zeta\hat{\tau})d\zeta} \quad (7.2)$$

καθιστά τους τελεστές αυτούς αναλλοίωτους κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, και ο πίνακας  $\Gamma$  παίρνει τις τιμές:

$$\Gamma = \mathbb{1}, \gamma_5, \gamma_{\mu}, \gamma_{\tau}, \gamma_5 \gamma_{\mu}, \gamma_5 \gamma_{\tau}, \gamma_{\mu} \gamma_{\tau}, \gamma_{\tau} \gamma_{\sigma} \quad \tau \neq \mu \neq \sigma \neq \rho \quad (7.3)$$

χρησιμοποιώντας συνήθη συμβολισμό. Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιήθηκε μία ευθεία γραμμή, αλλά ο ορισμός του τελεστή θα μπορούσε να εμπλέκει γενικότερα οποιαδήποτε καμπύλη.

Για τις διάφορες επιλογές του πίνακα  $\Gamma$  σχηματίζονται διαφορετικοί μη τοπικοί τελεστές, οι οποίοι αναμιγνύονται μεταξύ τους στην διαδικασία επανακανονικοποίησης τους [14]. Συναρτήσεις Green τέτοιων μη-τοπικών τελεστών ενέχουν σφάλματα διακριτοποίησης

τάξης  $\mathcal{O}(a)$ , ακόμα και αν η διακριτοποίηση στο πλέγμα δεν παραβιάζει την χειραλική συμμετρία [15, 16]. Αντιθέτως, τα αντίστοιχα σφάλματα για τοπικούς τελεστές είναι τάξης  $\mathcal{O}(a^2)$ .

Επίσης ορίζουμε τους μη τοπικούς γλουονικούς τελεστές [17]:

$$O_{\mu\nu\rho\sigma}(z\hat{t}, 0) \equiv 2 \text{Tr} \left( \mathcal{F}_{\mu\nu}(z\hat{t}) W(z\hat{t}, 0) \mathcal{F}_{\rho\sigma}(0) W^\dagger(z\hat{t}, 0) \right) \quad (7.4)$$

όπου ο  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  είναι ο γλουονικός τανυστής που ορίζεται στην εξίσωση (2.37). Θα αναφέρουμε στο επόμενο υποκεφάλαιο πώς τέτοιοι τελεστές βοηθούν στην μελέτη συναρτήσεων κατανομής.

## 7.2 Συναρτήσεις κατανομής PDFs

Οι συναρτήσεις κατανομής (PDFs) περιγράφουν την κατανομή της ορμής των κουάρκ και γλουονίων μέσα σε ένα βαρυόνιο, ποσοτικοποιώντας την πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί ένα κουάρκ ή ένα γλουόνιο με διαμήκη κλασματική ορμή  $\lambda P_\mu$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) της συνολικής ορμής  $P_\mu$  του βαρυονίου. Ωστόσο οι συναρτήσεις κατανομής γενικεύτηκαν περιγράφοντας το σπιν και την εγκάρσια ορμή των κουάρκ, εισάγοντας έτσι τις γενικευμένες συναρτήσεις κατανομής (Generalized Parton Distributions, GPDs) και συναρτήσεις κατανομής εγκάρσιας ορμής (Transverse Momentum Distributions, TMDs) αντίστοιχα [18].

Οι συναρτήσεις κατανομής είναι συναρτήσεις συσχέτισης που ορίζονται στον κώνο φωτός στον χωρόχρονο Minkowski, έτσι ο άμεσος υπολογισμός τους φαίνεται αδύνατος στο Ευκλείδειο πλέγμα. Μια δυνατή λύση στο πρόβλημα αυτό εισήχθη από τον X. Ji το 2013 [19], παρουσιάζοντας την μέθοδο των quasi-PDFs. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει τον υπολογισμό βαρυονικών πινακοστοιχείων μη τοπικών τελεστών (7.1), που είναι χωροειδείς συναρτήσεις συσχέτισης προσβάσιμες στο Ευκλείδειο πλέγμα της QCD. Αφού γίνει ο υπολογισμός των quasi-PDFs, η σύνδεση με τις φυσικές PDFs γίνεται μέσω μιας διαδικασίας αντιστοίχησης. Για να γίνει επαλήθευση της θεωρίας με το πείραμα, εξάγονται οι φυσικές PDFs από δεδομένα πειραμάτων σταθερού στόχου και συγκρούσεων υψηλών ενεργειών.

Ο υπολογισμός συναρτήσεων Green τοπικών τελεστών εμπλέκει λογαριθμικούς απειρισμούς που πρέπει να αντιμετωπιστούν με την διαδικασία επανακανονικοποίησης όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ωστόσο όταν εμπλέκονται μη τοπικοί τελεστές με το Wilson line στον ορισμό τους, οι συναρτήσεις Green περιέχουν και συνεισφορές που αποκλίνουν γραμμικά με την πλεγματική σταθερά, καθιστώντας έτσι την

επανακανονικοποίηση τους εξαιρετικά δύσκολη, και την θεωρία διαταραχών στο πλέγμα ανεπαρκή. Αναπτύχθηκαν έτσι τα τελευταία χρόνια μη διαταραχτικές μέθοδοι στο πλέγμα για τέτοιους υπολογισμούς.

### 7.3 Υπολογισμός συνάρτησης Green μη-τοπικού γκλουονικού τελεστή στο συνεχές

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα υπολογίσουμε την τιμή tree-level ( $\mathcal{O}(g^0)$ ) της συνάρτησης Green στο συνεχές:

$$\langle A_{\mu_1}^{\alpha_1}(q_1) A_{\mu_2}^{\alpha_2}(q_2) O_{\mu\nu\rho\sigma} \rangle \quad (7.5)$$

όπου ο τελεστής  $O$  ορίζεται στην εξίσωση (7.4), και τα  $A_{\mu_1}^{\alpha_1}(q_1)$ ,  $A_{\mu_2}^{\alpha_2}(q_2)$  είναι δύο εξωτερικά γκλουόνια. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \xrightarrow{\mathcal{O}(g^0)} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad \text{και} \quad W(z\hat{\tau}, 0) \xrightarrow{\mathcal{O}(g^0)} \mathbb{1} \quad (7.6)$$

και τους μετασχηματισμούς Fourier των γκλουονικών πεδίων, γράφουμε τον τελεστή στον χώρο των ορμών:

$$O_{\mu\nu\rho\sigma} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{izp_1 \hat{\tau}} \left( ip_{1\mu} A_\nu^c(p_1) - ip_{1\nu} A_\mu^c(p_1) \right) \left( ip_{2\rho} A_\sigma^c(p_2) - ip_{2\sigma} A_\rho^c(p_2) \right) \quad (7.7)$$

Για να καταλήξουμε στην πιο πάνω σχέση χρησιμοποιήσαμε το ίχνος των γεννητόρων:

$$Tr(T^{c_1} T^{c_2}) = \frac{1}{2} \delta^{c_1 c_2} \quad (7.8)$$

και μετονομάσαμε τον μοναδικό χρωματικό δείκτη σε  $c$ . Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (7.5) και εκτελώντας το γινόμενο, προκύπτει η συνάρτηση Green:

$$\begin{aligned} \langle A_{\mu_1}^{\alpha_1}(q_1) A_{\mu_2}^{\alpha_2}(q_2) O_{\mu\nu\rho\sigma} \rangle = & \left\langle \int \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8} e^{izp_1 \hat{\tau}} \left( -p_{1\mu} p_{2\rho} A_\nu^c(p_1) A_\sigma^c(p_2) A_{\mu_1}^{\alpha_1}(q_1) A_{\mu_2}^{\alpha_2}(q_2) \right. \right. \\ & + p_{1\mu} p_{2\sigma} A_\nu^c(p_1) A_\rho^c(p_2) A_{\mu_1}^{\alpha_1}(q_1) A_{\mu_2}^{\alpha_2}(q_2) \\ & + p_{1\nu} p_{2\rho} A_\mu^c(p_1) A_\sigma^c(p_2) A_{\mu_1}^{\alpha_1}(q_1) A_{\mu_2}^{\alpha_2}(q_2) \\ & \left. \left. - p_{1\nu} p_{2\sigma} A_\mu^c(p_1) A_\rho^c(p_2) A_{\mu_1}^{\alpha_1}(q_1) A_{\mu_2}^{\alpha_2}(q_2) \right) \right\rangle \quad (7.9) \end{aligned}$$

Ο κάθε ένας από τους τέσσερις όρους αποτελείται από τρία διαγράμματα, όπως φαίνονται στο σχήμα (7.1), εκ των οποίων το ένα είναι disconnected (τρίτο διάγραμμα):



ΣΧΗΜΑ 7.1: Διαγράμματα tree-level της συνάρτησης Green μη τοπικού γκλουονικού τελεστή

Όπου με ευθείες γραμμές συμβολίζονται τα γκλουόνια, και με μπλε παραλληλόγραμμα ο τελεστής.

Σαν παράδειγμα υπολογίζουμε το disconnected διάγραμμα του πρώτου όρου:

$$\begin{aligned}
&= - \int \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8} e^{i z p_1 \hat{\tau}} p_{1\mu} p_{2\rho} (2\pi)^4 \delta(q_1 + q_2) \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \left( \delta_{\mu_1 \mu_2} - (1 - \xi) \frac{q_{1\mu_1} q_{1\mu_2}}{q_1^2} \right) \frac{1}{q_1^2} \\
&\quad (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2) \delta^{cc} \left( \delta_{\nu\sigma} - (1 - \xi) \frac{p_{1\nu} p_{1\sigma}}{p_1^2} \right) \frac{1}{p_1^2} \\
&= \left[ \int d^4 p_1 e^{i z p_1 \hat{\tau}} p_{1\mu} p_{1\rho} \left( \delta_{\nu\sigma} - (1 - \xi) \frac{p_{1\nu} p_{1\sigma}}{p_1^2} \right) \frac{1}{p_1^2} \right] \left[ \delta(q_1 + q_2) \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \left( \delta_{\mu_1 \mu_2} - (1 - \xi) \frac{q_{1\mu_1} q_{1\mu_2}}{q_1^2} \right) \frac{1}{q_1^2} \right] \\
&\quad (7.10)
\end{aligned}$$

Προκύπτει έτσι η αναμενόμενη τιμή του τελεστή  $O_{\mu\nu\rho\sigma}$  στο κενό. Εάν οι τέσσερις δείκτες του τελεστή δεν είναι ζευγαρωμένοι, και δεν έχουμε κάποιο δείκτη στην κατεύθυνση  $z$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επιχειρήματα συμμετρίας για να πούμε ότι η αναμενόμενη τιμή στο κενό μηδενίζεται. Ωστόσο, στην γενικότερη περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή 'Normal-Ordered':

$$O'_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv O_{\mu\nu\rho\sigma} - \langle O_{\mu\nu\rho\sigma} \rangle \mathbb{1} \quad (7.11)$$

αφαιρώντας από τον αρχικό τελεστή την αναμενόμενη τιμή στο κενό. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να αγνοήσουμε αυτού του είδους διαγράμματα σε οποιαδήποτε τάξη στην θεωρία διαταραχών.

Τώρα θα υπολογίσουμε σαν παράδειγμα ένα από τα άλλα διαγράμματα που δεν είναι disconnected:

$$\begin{aligned}
&= - \int \int \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8} e^{izp_1 \hat{\tau}} p_{1\mu} p_{2\rho} (2\pi)^4 \delta(q_1 + p_1) \delta^{\alpha_1 c} \left( \delta_{\mu_1 \nu} - (1 - \xi) \frac{q_{1\mu_1} q_{1\nu}}{q_1^2} \right) \frac{1}{q_1^2} \\
&\quad (2\pi)^4 \delta(q_2 + p_2) \delta^{\alpha_2 c} \left( \delta_{\mu_2 \sigma} - (1 - \xi) \frac{q_{2\mu_2} q_{2\sigma}}{q_2^2} \right) \frac{1}{q_2^2} \\
&= -e^{-izq_1 \hat{\tau}} q_{1\mu} q_{2\rho} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \left( \delta_{\mu_1 \nu} - (1 - \xi) \frac{q_{1\mu_1} q_{1\nu}}{q_1^2} \right) \frac{1}{q_1^2} \left( \delta_{\mu_2 \sigma} - (1 - \xi) \frac{q_{2\mu_2} q_{2\sigma}}{q_2^2} \right) \frac{1}{q_2^2}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{amputated}}{=} -e^{-izq_1 \hat{\tau}} q_{1\mu} q_{2\rho} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\mu_1 \nu} \delta_{\mu_2 \sigma} \quad (7.12)$$

Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζουμε και τις υπόλοιπες 7 συνεισφορές, προσθέτοντάς τις για να καταλήξουμε στην τιμή της συνάρτησης Green που φαίνεται στην εξίσωση (7.5):

$$\begin{aligned}
&= e^{-izq_1 \hat{\tau}} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \left( -q_{1\mu} q_{2\rho} \delta_{\mu_1 \nu} \delta_{\mu_2 \sigma} - q_{1\mu} q_{2\rho} \delta_{\mu_1 \sigma} \delta_{\mu_2 \nu} + q_{1\mu} q_{2\sigma} \delta_{\mu_1 \nu} \delta_{\mu_2 \rho} + q_{1\mu} q_{2\sigma} \delta_{\mu_1 \rho} \delta_{\mu_2 \nu} \right. \\
&\quad \left. + q_{1\nu} q_{2\rho} \delta_{\mu_1 \mu} \delta_{\mu_2 \sigma} + q_{1\nu} q_{2\rho} \delta_{\mu_1 \sigma} \delta_{\mu_2 \mu} - q_{1\nu} q_{2\sigma} \delta_{\mu_1 \mu} \delta_{\mu_2 \rho} - q_{1\nu} q_{2\sigma} \delta_{\mu_1 \rho} \delta_{\mu_2 \mu} \right) \quad (7.13)
\end{aligned}$$

Για να προχωρήσουμε σε διαταρακτικούς υπολογισμούς της συνάρτησης Green της εξίσωσης (7.5) σε 1-loop διαγράμματα θα χρειαστούμε την έκφραση του μη τοπικού τελεστή (7.4) σε τάξη  $\mathcal{O}(g^1)$  και  $\mathcal{O}(g^2)$ . Για την διόρθωση  $\mathcal{O}(g^1)$  ξεκινάμε προσεγγίζοντας το Wilson-line:

$$W(z\hat{\tau}, 0) \approx \mathbb{1} + ig \int_z^0 A_\tau(\zeta) d\zeta, \quad W^\dagger(z\hat{\tau}, 0) \approx \mathbb{1} - ig \int_z^0 A_\tau(\zeta) d\zeta \quad (7.14)$$

Στην συνέχεια αντικαθιστούμε στην εξίσωση (7.4) και μετασχηματίζουμε τα πεδία κατά Fourier για να καταλήξουμε στην κορυφή:

$$\begin{aligned}
&-gf^{abc} \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 p_3 A_{\mu_1}^a(p_1) A_{\mu_2}^b(p_2) A_{\mu_3}^c(p_3) \times \\
&\times \left\{ - \int_0^z d\zeta e^{izp_1 \hat{\tau}} e^{i\zeta p_2 \hat{\tau}} \delta_{\mu_2 \tau} [(ip_{1\mu} \delta_{\mu_1 \nu} - ip_{1\nu} \delta_{\mu_1 \mu})(ip_{3\rho} \delta_{\mu_3 \sigma} - ip_{3\sigma} \delta_{\mu_3 \rho})] + \right. \\
&\left. + [\delta_{\mu_2 \rho} \delta_{\mu_3 \sigma} e^{izp_1 \hat{\tau}} (ip_{1\mu} \delta_{\mu_1 \nu} - ip_{1\nu} \delta_{\mu_1 \mu}) + \delta_{\mu_2 \mu} \delta_{\mu_3 \nu} e^{izp_2 \hat{\tau}} e^{izp_3 \hat{\tau}} (ip_{1\rho} \delta_{\mu_1 \sigma} - ip_{1\sigma} \delta_{\mu_1 \rho})] \right\} \quad (7.15)
\end{aligned}$$

Οι όροι στην τελευταία σειρά της (7.15) προκύπτουν από τους μεταθέτες στον ορισμό των  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  και  $\mathcal{F}_{\rho\sigma}$ .

## 7.4 Υπολογισμός συνάρτησης Green μη-τοπικού γκλουονικού τελεστή στο πλέγμα

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα συζητήσουμε 2 διαγράμματα 1-loop (μέχρι τάξη  $\mathcal{O}(g^2)$ ) που συνεισφέρουν στην τιμή της συνάρτησης Green στο πλέγμα:

$$\langle A_{\mu_1}^{\alpha_1}(q_1) A_{\mu_2}^{\alpha_2}(q_2) O_{\mu\nu\rho\sigma} \rangle$$

Σε υπολογισμούς στο πλέγμα, για τον γκλουονικό τανυστή χρησιμοποιείται συνήθως η διακριτοποίηση:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -\frac{i}{g} C_{\mu\nu} \quad (7.16)$$

με το  $C_{\mu\nu}$  να ορίζεται στην εξίσωση (3.59).

Κατά αντιστοιχία με τον υπολογισμό που έχει γίνει στο συνεχές, αναπτύσσουμε σε δυνάμεις της σταθεράς σύζευξης, κρατάμε όρους μέχρι δεύτερη τάξη, και γράφουμε τα πεδία με μετασχηματισμούς Fourier. Προκύπτουν έτσι πολλά διαγράμματα 1-loop, ωστόσο στην διπλωματική αυτή μας ενδιαφέρουν κυρίως τα διαγράμματα:



ΣΧΗΜΑ 7.2: Διαγράμματα 1-loop της συνάρτησης Green μη τοπικού γκλουονικού τελεστή

### Διάγραμμα 1

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η τιμή του πρώτου διαγράμματος στο πλέγμα είναι η ίδια όπως και στο συνεχές, και είναι πεπερασμένη. Στον υπολογισμό του διαγράμματος αυτού προκύπτουν όροι που εμπεριέχουν το εκθετικό  $e^{izp\hat{\tau}/a}$ , έτσι λόγω της ταλαντωτικής του συμπεριφοράς, ακόμα και όροι που θα οδηγούσαν σε υπεριώδεις λογαριθμικούς απειρισμούς καταλήγουν πεπερασμένοι καθώς το  $a \rightarrow 0$ .

Για να καταφανεί η απουσία συνεισφορών του πλέγματος σπάζουμε τα ολοκληρώματα που προκύπτουν σε δύο περιοχές: 1) εσωτερική περιοχή σφαιρικού φλοιού ακτίνας  $p_0$  η οποία περιλαμβάνει όλους τους πιθανούς πόλους, και 2) εξωτερική περιοχή του φλοιού. Για τον λόγο που αναφέρθηκε πριν, στο όριο  $a \rightarrow 0$  τα ολοκληρώματα στην περιοχή 2 θα μηδενιστούν. Στην περιοχή 1 μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις του πλέγματος με τις αντίστοιχες εκφράσεις στο συνεχές δεδομένου ότι οι διορθώσεις έχουν λιγότερους πόλους και κατά συνέπεια θα μηδενιστούν στο όριο  $a \rightarrow 0$ . Αλλάζοντας τώρα μεταβλητή ολοκλήρωσης  $p \rightarrow \frac{p}{a}$ , βλέπουμε ότι η τιμή του διαγράμματος αυτού στο πλέγμα και στο συνεχές συμπίπτουν.



Μια τυπική, δυνητικά αποκλίνουσα, έκφραση που περιέχεται στην τιμή αυτή, είναι της μορφής:

$$\frac{1}{p^2(p+q)^2} e^{izp} \quad (7.17)$$

Όντως για  $z = 0$  η έκφραση αυτή έχει UV λογαριθμικό απειρισμό (και για  $q = 0$  έχει IR λογαριθμικό απειρισμό). Όμως για  $z \neq 0$  (και  $q \neq 0$ ) η έκφραση είναι πεπερασμένη.

Έπειτα, για να πεισθούμε ότι όροι με λιγότερους πόλους μηδενίζονται στο όριο  $a \rightarrow 0$ , μπορούμε να υπολογίσουμε ενδεικτικά ένα όρο με διπλό πόλο:

$$\begin{aligned} \int d^4p \frac{1}{p^2} e^{iz\hat{r}\cdot p} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta_2 \sin^2 \theta_2 \int_0^\pi d\theta_1 \sin \theta_1 \int_0^{p_0} dp p^3 \frac{1}{p^2} e^{ipz \cos \theta_1/a} \\ &= 2\pi \int_0^\pi d\theta_2 \sin^2 \theta_2 \int_0^{p_0} dp \frac{2a}{z} \sin\left(\frac{pz}{a}\right) \\ &= \frac{2\pi^2 a}{z} \int_0^{p_0} dp \sin\left(\frac{pz}{a}\right) \end{aligned} \quad (7.18)$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής  $p \rightarrow p' = \frac{p}{a}$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi^2 a^2}{z} \int_0^{\frac{p_0}{a}} dp \sin(pz) \\ &= C a^2 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Με το C να παίρνει πεπερασμένες τιμές  $0 \leq C \leq \frac{4\pi^2}{z^2}$ .

Από το πρώτο διάγραμμα φαίνεται ότι έχουμε συνολικά 3 γκλουονικούς διαδότες, εκ των οποίων οι 2 έχουν την ίδια ορμή, δηλαδή φαινομενικά έχουμε ένα τετραπλό πόλο για την τιμή της ορμής που μηδενίζει τους αντίστοιχους παρονομαστές, έτσι έχουμε ένα πιθανό IR απειρισμό. Επειδή όμως τα 2 γκλουονικά πεδία προέρχονται από τα  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  που περιέχουν παραγώγους στον ορισμό τους, θα προκύψουν 2 ορμές στον αριθμητή όταν γίνει η παράγωγος των μετασχηματισμένων κατά Fourier πεδίων. Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στην χειρότερη περίπτωση έχουμε ένα διπλό πόλο, που είναι ολοκληρώσιμος όπως δείξαμε πιο πάνω δίνοντας πεπερασμένη τιμή στο διάγραμμα. Επίσης να σημειωθεί πως λόγω του transversality των  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  αναμένουμε ότι όροι  $\sim \beta^2$  και  $\sim \beta^3$  θα μηδενίζονται.

Ένας άλλος δυνητικά αποκλίνων όρος που εμφανίζεται στο διάγραμμα 1 έχει την μορφή:

$$\frac{p_\mu p_\nu}{(p^2)^2 (p+q)^2} e^{izp} \quad (7.20)$$

Όπως και στην περίπτωση του όρου της εξίσωσης (7.17), ο όρος αυτός αποδεικνύεται ότι είναι πεπερασμένος όταν  $z \neq 0$  (και  $q \neq 0$ ).

## Διάγραμμα 2

Στο δεύτερο διάγραμμα γίνεται χρήση της κορυφής τεσσάρων γκλουονίων από την δράση, και της κορυφής δύο γκλουονίων από τον μη-τοπικό τελεστή. Για τον ίδιο λόγο όπως και πριν, περιμένουμε όροι  $\sim \beta^1$  και  $\sim \beta^2$  να μηδενίζονται, συνεπώς η έκφραση για το διάγραμμα αυτό είναι ανεξάρτητη του  $\beta$ . Μια σημαντική απλοποίηση συγκριτικά με το πρώτο διάγραμμα είναι ότι η εξωτερική ορμή μπορεί να "διαχωριστεί" από την εσωτερική ορμή, και τα ολοκληρώματα ως προς την εσωτερική ορμή που προκύπτουν να γίνουν ευκολότερα, δίνοντας μια έκφραση που δεν εξαρτάται από την εξωτερική ορμή.

## 7.5 Μελέτη μίξης μη τοπικών γκλουονικών τελεστών

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα μελετήσουμε την μίξη των μη τοπικών γκλουονικών τελεστών, χρησιμοποιώντας επιχειρήματα συμμετρίας. Αυτοί οι τελεστές ορίζονται στην εξίσωση (7.4), και χαρακτηρίζονται από 5 δείκτες Lorentz ( $\mu\nu\rho\sigma$ ). Λόγω της αντισυμμετρίας των  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  και  $\mathcal{F}_{\rho\sigma}$ , παρατηρούμε ότι έχουμε συνολικά 36 διαφορετικούς μη τοπικούς γκλουονικούς τελεστές.

Θα θέλαμε να γνωρίζουμε ποιοι τελεστές 'δικαιούνται' να κάνουν μίξη με ποιους, μελετώντας την συμπεριφορά τους κάτω από μετασχηματισμούς που αφήνουν την δράση αναλλοίωτη. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς αντιστροφής "χρόνου"  $\mathcal{T}_\mu$  (σε καθεμιά από τις 4 κατευθύνσεις στον Ευκλείδειο χωροχρόνο), ομοτιμίας (Parity)  $\mathcal{P}_\mu$ , και ομοτιμίας φορτίου  $\mathcal{C}$  (charge conjugation) [20]:

$$U_\mu(x) \xrightarrow{\mathcal{T}_\mu} U_\mu^\dagger(\mathbb{T}_\mu(x) - \hat{\mu}) \quad (7.21a)$$

$$U_{\nu \neq \mu}(x) \xrightarrow{\mathcal{T}_\mu} U_{\nu \neq \mu}(\mathbb{T}_\mu(x)) \quad (7.21b)$$

$$U_\mu(x) \xrightarrow{\mathcal{P}_\mu} U_\mu(\mathbb{P}_\mu(x)) \quad (7.21c)$$

$$U_{\nu \neq \mu}(x) \xrightarrow{\mathcal{P}_\mu} U_{\nu \neq \mu}^\dagger(\mathbb{P}_\mu(x) - \hat{\nu}) \quad (7.21d)$$

$$U_\mu(x) \xrightarrow{\mathcal{C}} U_\mu(x)^* = (U_\mu^\dagger(x))^T \quad (7.21e)$$

όπου το  $\mathbb{T}_\mu(x)$  είναι το τετραδιάνυσμα  $x$  με αντεστραμμένο πρόσημο στην συνιστώσα  $\mu$ , το  $\mathbb{P}_\mu(x)$  είναι το τετραδιάνυσμα  $x$  με αντεστραμμένο πρόσημο σε όλες τις συνιστώσες εκτός από την  $\mu$ .

Ωστόσο, για να εφαρμόσουμε την ζητούμενη συμμετρία (ή αντισυμμετρία), θα χρησιμοποιήσουμε κατοπτρισμούς ως προς το σημείο  $z/2$ , ώστε να εκμεταλλευτούμε την σχέση:

$$O_{\mu\nu\rho\sigma}(z\hat{t}, 0) = O_{\rho\sigma\mu\nu}(0, z\hat{t}) \quad (7.22)$$

η οποία αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την κυκλική μετατόπιση του ίχνους που εμπεριέχεται στον ορισμό των μη τοπικών γκλουονικών τελεστών. Επίσης, για να φανεί αυτή η συμμετρία (ή αντισυμμετρία) θα χρειαστεί να ορίσουμε ημιαθροίσματα και ημιδιαφορές της μορφής:

$$O_{\mu\nu\rho\sigma\pm}(z\hat{t}) \equiv \frac{1}{2}(O_{\mu\nu\rho\sigma}(0, z\hat{t}) \pm O_{\rho\sigma\mu\nu}(0, z\hat{t})) \quad (7.23)$$

Η πιο πάνω σχέση αποτελεί απλώς μια αλλαγή βάσης, συνεπώς το πλήθος των τελεστών στη βάση αυτή είναι πάλι 36. Δεδομένου ότι το ίχνος ενός πίνακα είναι απλώς ένας (μιγαδικός) αριθμός, το ερμιτιανό και το μιγαδικό συζυγές των τελεστών αυτών συμπίπτουν, έτσι χρησιμοποιώντας την σχέση  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^\dagger = -\mathcal{F}_{\mu\nu}$  καταλήγουμε στο αποτέλεσμα:

$$O_{\mu\nu\rho\sigma}^* = O_{\mu\nu\rho\sigma}^\dagger = O_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (7.24)$$

Δηλαδή ότι οί τελεστές αυτοί είναι πραγματικές ποσότητες. Κατά συνέπεια, ο μετασχηματισμός ομοτιμίας φορτίου  $\mathcal{C}$ , σε αντίθεση με τη χρησιμότητα του για την περίπτωση φερμιονικών τελεστών [20], δεν μας δίνει πληροφορίες για την μίξη των μη τοπικών γκλουονικών τελεστών, εφόσον τους αφήνει αναλλοίωτους:

$$O_{\mu\nu\rho\sigma} \xrightarrow{\mathcal{C}} O_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (7.25)$$

Όσο αφορά τους άλλους μετασχηματισμούς, θα θέλαμε αρχικά να δούμε πώς μετασχηματίζεται μια πλακέτα, που αποτελεί το βασικό συστατικό για την κατασκευή των

$\mathcal{F}_{\mu\nu}$  στο πλέγμα:

**Parity:**

$$\begin{aligned} U_{\mu,\nu}(x) &\xrightarrow{\mathcal{P}_\mu} U_{\mu,-\nu}(\mathbb{P}_\mu(x)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{P}_\nu} U_{-\mu,\nu}(\mathbb{P}_\nu(x)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{P}_{\rho \neq \nu \neq \mu}} U_{-\mu,-\nu}(\mathbb{P}_\rho(x)) \end{aligned} \quad (7.26)$$

**Time reversal:**

$$\begin{aligned} U_{\mu,\nu}(x) &\xrightarrow{\mathcal{T}_\mu} U_{-\mu,\nu}(\mathbb{T}_\mu(x)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{T}_\nu} U_{\mu,-\nu}(\mathbb{T}_\nu(x)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{T}_{\rho \neq \nu \neq \mu}} U_{\mu,\nu}(\mathbb{T}_\rho(x)) \end{aligned} \quad (7.27)$$

Είμαστε τώρα σε θέση να γράψουμε τους μετασχηματισμούς για το  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$  που ορίζεται στην εξίσωση (7.16):

**Parity:**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) &\xrightarrow{\mathcal{P}_\mu} -\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbb{P}_\mu(x)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{P}_\nu} -\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbb{P}_\nu(x)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{P}_{\rho \neq \nu \neq \mu}} \mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbb{P}_\rho(x)) \end{aligned} \quad (7.28)$$

**Time reversal:**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) &\xrightarrow{\mathcal{T}_\mu} -\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbb{T}_\mu(x)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{T}_\nu} -\mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbb{T}_\nu(x)) \\ &\xrightarrow{\mathcal{T}_{\rho \neq \nu \neq \mu}} \mathcal{F}_{\mu\nu}(\mathbb{T}_\rho(x)) \end{aligned} \quad (7.29)$$

Παρατηρούμε ότι το  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  μετασχηματίζεται με παρόμοιο τρόπο κάτω από ομοτιμία και αντιστροφή χρόνου, και είναι αρκετό να δούμε την συμπεριφορά μη τοπικών τελεστών εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς ομοτιμίας. Επιλέγουμε, χωρίς απώλεια γενικότητας, την κατεύθυνση του Wilson line:  $\hat{\tau} = \hat{3}$ , όπως είναι η συνήθης σύμβαση σε προσομοιώσεις. Καθέννας από τους 36 τελεστές στην εξίσωση (7.23) είναι ιδιοκατάσταση των  $\mathcal{P}_\mu$ . Είναι χρήσιμη η ομαδοποίηση τελεστών που έχουν ίδιες ιδιοτιμές, ως εξής:

Group	Number of Operators	$\mathcal{P}_1$	$\mathcal{P}_2$	$\mathcal{P}_3$	$\mathcal{P}_4$
$1_+$	6	+	+	+	+
$2_+/2_-$	$2 / 2$	-/+	-/+	+/+	+/-
$3_+/3_-$	$2 / 2$	-/+	+/-	+/+	-/+
$4_+/4_-$	$2 / 2$	+/-	-/+	+/+	-/+
$5_+/5_-$	$2 / 2$	-/+	+/-	-/-	+/-
$6_+/6_-$	$2 / 2$	+/-	-/+	-/-	+/-
$7_+/7_-$	$2 / 2$	+/-	+/-	-/-	-/+
$8_+/8_-$	$3 / 3$	-/+	-/+	-/-	-/+

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1: Μετασχηματισμοί ομοτιμίας μη τοπικών γκλουονικών τελεστών

**Groups:**

$$1_+ : O_{3131+} = \frac{1}{2}(O_{3131}(0, z\hat{\tau}) + O_{3131}(z\hat{\tau}, 0))$$

$$= O_{3131}(0, z\hat{\tau})$$

$$O_{3232+} = O_{3232}(0, z\hat{\tau})$$

$$O_{3434+} = O_{3434}(0, z\hat{\tau})$$

$$O_{1212+} = O_{1212}(0, z\hat{\tau})$$

$$O_{1414+} = O_{1414}(0, z\hat{\tau})$$

$$O_{2424+} = O_{2424}(0, z\hat{\tau})$$

$$2_{\pm} : O_{3132\pm} = \frac{1}{2}(O_{3132}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{3231}(0, z\hat{\tau}))$$

$$O_{4142\pm} = \frac{1}{2}(O_{4142}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{4241}(0, z\hat{\tau}))$$

$$3_{\pm} : O_{3134\pm} = \frac{1}{2}(O_{3134}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{3431}(0, z\hat{\tau}))$$

$$O_{2124\pm} = \frac{1}{2}(O_{2124}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{2421}(0, z\hat{\tau}))$$

$$4_{\pm} : O_{3234\pm} = \frac{1}{2}(O_{3234}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{3432}(0, z\hat{\tau}))$$

$$O_{1214\pm} = \frac{1}{2}(O_{1214}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{1412}(0, z\hat{\tau}))$$

$$5_{\pm} : O_{3212\pm} = \frac{1}{2}(O_{3212}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{1232}(0, z\hat{\tau}))$$

$$O_{3414\pm} = \frac{1}{2}(O_{3414}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{1434}(0, z\hat{\tau}))$$

$$6_{\pm} : O_{3121\pm} = \frac{1}{2}(O_{3121}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{2131}(0, z\hat{\tau}))$$

$$O_{3424\pm} = \frac{1}{2}(O_{3424}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{2434}(0, z\hat{\tau}))$$

$$7_{\pm} : O_{3141\pm} = \frac{1}{2}(O_{3141}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{4131}(0, z\hat{\tau}))$$

$$O_{3242\pm} = \frac{1}{2}(O_{3242}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{4232}(0, z\hat{\tau}))$$

$$8_{\pm} : O_{3124\pm} = \frac{1}{2}(O_{3124}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{2431}(0, z\hat{\tau}))$$

$$O_{3214\pm} = \frac{1}{2}(O_{3214}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{1432}(0, z\hat{\tau}))$$

$$O_{3412\pm} = \frac{1}{2}(O_{3412}(0, z\hat{\tau}) \pm O_{1234}(0, z\hat{\tau}))$$

Στις 4 τελευταίες στήλες του πίνακα (7.1), το πρόσημο "+" δείχνει ότι οι αντίστοιχοι τελεστές παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από τον συγκεκριμένο μετασχηματισμό ομοτιμίας, ενώ το "-" δείχνει ότι οι τελεστές αυτοί αποκτούν το αντίθετο πρόσημο. Παρατηρούμε ότι κάθε ομάδα μετασχηματίζεται διαφορετικά από τις υπόλοιπες, έτσι περιμένουμε στοιχεία της κάθε ομάδας να μην κάνουν μίξη με τελεστές διαφορετικής ομάδας (ακόμα και, π.χ., οι ομάδες  $2_+$  και  $2_-$ ).

Ωστόσο, η μίξη των μη τοπικών γλουνονικών τελεστών θα περιοριστεί ακόμη περισσότερο όταν κάποιος επικαλεσθεί επιχειρήματα κυβικής συμμετρίας [21]. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από δύο τριάδες τελεστών:  $(O_{3131}, O_{3232}, O_{3434})$  και  $(O_{1212}, O_{1414}, O_{2424})$ . Σε κάθε μια από τις δύο τριάδες δρα η **ίδια** αναπαράσταση της κυβικής ομάδας, και συνεπώς επιτρέπεται η μίξη ανά ζεύγη, π.χ.  $O_{3131}$  με  $O_{2424}$ , κλπ. Αντίθετα, για τους υπόλοιπους τελεστές η κυβική συμμετρία εγγυάται ότι δεν θα κάνουν μίξη με κανένα άλλο gauge-invariant τελεστή.

# ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η διπλωματική εργασία αυτή εστιάζεται στη μελέτη μη τοπικών γκλουονικών τελεστών, οι οποίοι είναι ιδιαίτερα σημαντικοί για τον υπολογισμό ενός συνόλου από συναρτήσεις δομής στην αδρονική φυσική. Οι συναρτήσεις αυτές οδηγούν σε προβλέψεις για την κατανομή φορτίου, στροφορμής και εγχάφσιας/διαμήκους ορμής στο εσωτερικό μεσονίων και βαρυονίων.

Η εργασία αποτελεί κομμάτι από υπό-μελέτη έργο, το οποίο έχει ως σκοπό των υπολογισμών όλων των διαγραμμάτων 1-100p που απορρέουν από την συνάρτηση Green της εξίσωσης (7.5) στο πλέγμα, επαληθεύοντας την μίξη που προβλέπεται με επιχειρήματα συμμετρίας. Τέλος, όταν έχουν γίνει οι υπολογισμοί, μπορούν τότε να βρεθούν οι κατάλληλοι συντελεστές επανακανονικοποίησης των μη τοπικών γκλουονικών τελεστών.

# Παράρτημα Α

## Ομάδα $SU(N)$

Η ομάδα  $SU(N)$  αποτελείται από τους μοναδιαίους  $N \times N$  πίνακες με ορίζουσα ίση με 1.

$$\begin{aligned}U^\dagger U &= 1 \\ \det U &= 1\end{aligned}\tag{A.1}$$

Οποιοδήποτε στοιχείο της ομάδας μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας στοιχεία της άλγεβρας, με την άλγεβρα της ομάδας  $SU(N)$  να συμβολίζεται ως  $su(N)$ :

$$U = e^{iT}\tag{A.2}$$

Κάθε στοιχείο  $T$  της άλγεβρας μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας μια βάση, ως γραμμικός συνδυασμός ενός πεπερασμένου συνόλου πινάκων  $T^a$ , που ονομάζονται γεννήτορες του μετασχηματισμού, με πραγματικούς συντελεστές.

Υπάρχουν  $N^2 - 1$  ανεξάρτητοι γεννήτορες οι οποίοι στη θεμελιώδη αναπαράσταση είναι  $N \times N$  ερμιτιανοί πίνακες με ίχνος μηδέν. Οι γεννήτορες του μετασχηματισμού ικανοποιούν την σχέση μετάθεσης:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c\tag{A.3}$$

Επιβάλλοντας την κοινωνικοποίηση:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}\tag{A.4}$$

μπορεί ναδειχθεί ότι η σταθερά δομής  $f^{abc}$  είναι πλήρως αντισυμμετρική. Η θεμελιώδη αναπαράσταση χρησιμοποιείται για την περιγραφή των quarks.



Αντίστοιχα για την περιγραφή των γκλουονίων έχουμε την προσαρτημένη αναπαράσταση, που οι  $N - 1$  ανεξάρτητοι  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$  πίνακες αποτελούν τους γεννήτορες:

$$(t^a)^{bc} = if^{bac} \quad (\text{A.5})$$

Επιβεβαιώνουμε πως και σε αυτήν την αναπαράσταση οι γεννήτορες ικανοποιούν την ίδια σχέση μετάθεσης:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \quad (\text{A.6})$$

Με την χρήση των πιο πάνω εξισώσεων μπορούμε να καταλήξουμε στην εξής ταυτότητα:

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} (T^a)_{ij} (T^a)_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{A.7})$$

και με την επανάληψή της, μπορούμε να αποδείξουμε διάφορες άλλες χρήσιμες εξισώσεις με ίχνη και γινόμενα γεννητόρων.

## Παράρτημα Β

# Μεταβλητές Grassmann

### B.1 Ορισμός

Οι μεταβλητές Grassmann  $\theta$  αντιμετωπίζονται, και τα στοιχεία ενός συνόλου  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  αποτελούν τους γεννήτορες της άλγεβρας Grassmann:

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 \quad \forall i, j \quad (\text{B.1})$$

έτσι αν  $j = i$ :

$$\theta_i^2 = 0 \quad (\text{B.2})$$

Από την σχέση αυτή, συμπεραίνουμε ότι κάθε στοιχείο της άλγεβρας Grassmann είναι πολυώνυμο πρώτου ή μηδενικού βαθμού ως προς κάθε μεταβλητή  $\theta_i$ . Το σύνολο των στοιχείων αυτών αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο με  $2^n$  διαστάσεις. Ως συνέπεια της αντιμεταθετικής σχέσης που ικανοποιούν οι μεταβλητές Grassmann, δεν μπορούν να ορισθούν αντίστροφες μεταβλητές  $\theta_i^{-1}$  τέτοιες ώστε  $\theta_i^{-1}\theta_i = \theta_i\theta_i^{-1} = 1$ .

### B.2 Τελεστής ομοτιμίας

Ο τελεστής ομοτιμίας Grassmann ορίζεται ως:

$$P(\theta_i) = -\theta_i \quad (\text{B.3})$$

Η δράση του σε ένα πολυώνυμο είναι απλή:

$$P(\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\ell}) = (-1)^\ell \theta_{i_1} \cdots \theta_{i_\ell} \quad (\text{B.4})$$

Τότε ο διανυσματικός χώρος χωρίζεται σε δύο υποχώρους, ο πρώτος  $A^+$  έχει θετική ομοτιμία και ισχύουν μεταθετικές σχέσεις των στοιχείων του, ενώ ο δεύτερος  $A^-$  έχει αρνητική ομοτιμία και ισχύουν αντιμεταθετικές σχέσεις των στοιχείων του.

### B.3 Παραγωγήιση

Λόγω της αντιμεταθετικής σχέσης μεταξύ των μεταβλητών Grassmann, χρειάζεται να ορίσουμε δύο είδη παραγώγων, την δεξιά και την αριστερή:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j = \delta_{ij} \quad (\text{B.5})$$

$$\theta_j \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} = \delta_{ij} \quad (\text{B.6})$$

Όπως θα ανέμενε κανείς από τα ονόματά τους, η πρώτη παράγωγος δρα σε πολυώνυμα στα δεξιά της, ενώ η δεύτερη σε πολυώνυμα στα αριστερά της. Στην περίπτωση των πραγματικών μεταβλητών οι δύο αυτές παράγωγοι πάντοτε ισούνται, έτσι χρησιμοποιείται μόνο η δεξιά παράγωγος. Για παράδειγμα γράφοντας τις παραγώγους του απλού πολυωνύμου δύο μεταβλητών Grassmann, μπορούμε να δούμε ότι δεν ισούνται μεταξύ τους. Συγκεκριμένα είναι αντίθετες:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_i \theta_j) &= \theta_j \\ (\theta_i \theta_j) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} &= (-\theta_j \theta_i) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} = -\theta_j \end{aligned}$$

Να σημειωθεί πως οι δεύτερες παράγωγοι ως προς την ίδια μεταβλητή Grassmann ενός πολυωνύμου είναι πάντοτε μηδέν, αφού όπως αναφέραμε πιο πάνω, τα πολυώνυμα είναι πρώτου ή μηδενικού βαθμού ως προς τις μεταβλητές.

Οι δύο αυτοί τελεστές δρουν γραμμικά:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\lambda_1 f(\theta) + \lambda_2 g(\theta)) = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\theta) + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\theta) \quad (\text{B.7})$$

$$(\lambda_1 f(\theta) + \lambda_2 g(\theta)) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} = \lambda_1 (f(\theta) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta_i}}) + \lambda_2 (g(\theta) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta_i}}) \quad (\text{B.8})$$

όπου  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  ή  $\mathbb{C}$ . Επίσης ισχύει ο κανόνας παραγώγισης γινομένου:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (f(\theta)g(\theta)) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\theta)\right)g(\theta) + P(f(\theta)) \frac{\partial}{\partial \theta_i} g(\theta) \quad (\text{B.9})$$

$$(f(\theta)g(\theta)) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} = f(\theta) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta_i}} P(g(\theta)) + f(\theta)(g(\theta) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \theta_i}}) \quad (\text{B.10})$$

## B.4 Ολοκλήρωση

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα ως προς μεταβλητές Grassmann, γράφοντας επιγραμματικά κάποιες βασικές ιδιότητες:

1. Όπως και με τις πραγματικές μεταβλητές, το ολοκλήρωμα μιας ολικής παραγώγου μηδενίζεται στην περίπτωση που το πολυώνυμο  $f(\theta)$  μηδενίζεται στα άκρα της περιοχής ολοκλήρωσης.

$$\int d\theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} f(\theta) = 0 \quad (\text{B.11})$$

2. Η παράγωγος ως προς μεταβλητή ολοκλήρωσης μηδενίζεται.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \int d\theta_i f(\theta) = 0 \quad (\text{B.12})$$

3. Οι σταθερές βγαίνουν εκτός ολοκληρώματος.

$$\int d\theta_i (f(\theta) c) = \left( \int d\theta_i f(\theta) \right) c \quad \text{αν} \quad \frac{\partial}{\partial \theta_i} c = 0 \quad (\text{B.13})$$

4. Γραμμικότητα.

$$\int d\theta_i (\lambda_1 f(\theta) + \lambda_2 g(\theta)) = \lambda_1 \int d\theta_i f(\theta) + \lambda_2 \int d\theta_i g(\theta), \quad \text{όπου} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in R \text{ ή } C \quad (\text{B.14})$$

Σε αυτή την άλγεβρα, η πράξη της παραγώγου και της ολοκλήρωσης ταυτίζονται. Όλες οι πιο πάνω ιδιότητες ικανοποιούνται και από τους τελεστές παραγώγισης, επομένως οι δύο πράξεις είναι ισοδύναμες:

$$\int d\theta f(\theta) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) \quad (\text{B.15})$$

Μια συνέπεια αυτής της σχέσης ισοδυναμίας είναι ότι μέσω της αλλαγής μεταβλητών  $\theta = a\theta' + b$ , το ολοκλήρωμα μετατρέπεται ως εξής:

$$\int d\theta f(\theta) = a^{-1} \int d\theta' f(a\theta' + b) \quad (\text{B.16})$$

Με την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού να είναι ίση με  $a^{-1}$ , ενώ στην περίπτωση των πραγματικών και μιγαδικών μεταβλητών ισούται με  $a$ .

## Παράρτημα Γ

# Γκαουσιανά Ολοκληρώματα

Σκοπός του παραρτήματος αυτού είναι ο αναλυτικός υπολογισμός της μέσης τιμής ενός πολυωνύμου με γκαουσιανό βάρος, στην περίπτωση που έχουμε ολοκληρώματα με πραγματικές μεταβλητές, μιγαδικές μεταβλητές, και μεταβλητές Grassmann [5]. Ο υπολογισμός Γκαουσιανών ολοκληρωμάτων είναι εξαιρετικά χρήσιμος στον υπολογισμό συναρτήσεων Green στα πλαίσια της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίων.

### Γ.1 Γκαουσιανό ολοκλήρωμα πραγματικών και μιγαδικών μεταβλητών

Η γενικότερη μορφή ενός γκαουσιανού ολοκληρώματος είναι:

$$I(K, b) = \int \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m + \sum_{n=1}^N b_n x_n \right) \quad (\Gamma.1)$$

με τα  $x$  και  $b$  διανύσματα με  $N$  πραγματικές συνιστώσες, και  $K$  είναι ένας συμμετρικός  $N \times N$  πίνακας με μη μηδενικές ιδιοτιμές που το πραγματικό τους μέρος είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν. Απαιτούμε ο πίνακας  $K$  να έχει τα χαρακτηριστικά αυτά ώστε να είναι αντιστρέψιμος, και το ολοκλήρωμα να συγκλίνει.

Στην περίπτωση όπου το  $b_n = 0$  μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα το ολοκλήρωμα διαγωνιοποιώντας τον πίνακα  $K$ :  $K = VDV^{-1}$ , και με την αλλαγή μεταβλητών  $x' = V^{-1}x$ :

$$\begin{aligned}
I(K, 0) &= \int \prod_{i=1}^N dx_i \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m \right) = \int \prod_{i=1}^N dx'_i \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N x'_n D_{nn} x'_n \right) \\
&= \int \prod_{i=1}^N dx'_i \prod_{n=1}^N \exp \left( -\frac{1}{2} x'_n D_{nn} x'_n \right) = \prod_{i=1}^N \int dx'_i \exp \left( -\frac{1}{2} x'_i D_{ii} x'_i \right) \\
&= \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{(\det K)}}
\end{aligned}$$

Όταν  $b_n \neq 0$ , θα χρησιμοποιήσουμε το σημείο ελαχιστοποίησης του εκθέτη:

$$\frac{d}{dx_k} \left( \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m - \sum_{n=1}^N b_n x_n \right) = 0 \quad (\Gamma.2)$$

Λύνοντας ως προς  $x_n$ :

$$x_{n,min} = \sum_{m=1}^N (K^{-1})_{nm} b_m \quad (\Gamma.3)$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε την τιμή αυτή κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών:

$$x_n = \sum_{m=1}^N (K^{-1})_{nm} b_m + y_n \quad (\Gamma.4)$$

καταλήγοντας στο εξής αποτέλεσμα:

$$I(K, b) = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det K}} \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N b_n (K^{-1})_{nm} b_m \right) \quad (\Gamma.5)$$

Είμαστε τώρα σε θέση να υπολογίσουμε την μέση τιμή πολυωνύμου πραγματικών μεταβλητών με γκαουσιανό βάρος:

$$\langle x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_l} \rangle \equiv N \int \left( \prod_{i=1}^N dx_i \right) [x_{k_1} x_{k_2} \cdots x_{k_l}] \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m \right) \quad (\Gamma.6)$$

όπου  $N = \frac{1}{I(K,0)}$  είναι η σταθερά κανονικοποίησης που υπολογίστηκε πιο πάνω, έτσι ώστε  $\langle 1 \rangle = 1$ . Για να προκύψει η εξίσωση (Γ.6) πρέπει να παραγωγίσουμε την έκφραση (Γ.1) ως προς τις μεταβλητές  $b_{k_i}$  και έπειτα να θέσουμε  $b = 0$ .

Παραγωγίζοντας μια φορά την (Γ.1) ως προς  $b_k$  προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial b_k} I(K, b) = \int \left( \prod_{i=1}^N dx_i \right) x_k \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N x_n K_{nm} x_m + \sum_{n=1}^N b_n x_n \right) \quad (\Gamma.7)$$

Επομένως, η επαναλαμβανόμενη παραγωγήιση οδηγεί στη σχέση:

$$\begin{aligned} \langle x_{k_1} x_{k_1} \cdots x_{k_l} \rangle &= (2\pi)^{-n/2} \sqrt{\det(K)} \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{k_l}} I(K, b) \Big|_{b=0} \\ \langle x_{k_1} x_{k_1} \cdots x_{k_l} \rangle &= \frac{\partial}{\partial b_{k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial b_{k_l}} \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{n,m=1}^N b_n (K^{-1})_{nm} b_m \right) \Big|_{b=0} \end{aligned} \quad (\Gamma.8)$$

καταλήγοντας έτσι στο θεώρημα του Wick. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό υπολογίζουμε την μέση τιμή πολυωνύμου με Γκαουσιανό βάρος:

$$\langle x_{k_1} \cdots x_{k_l} \rangle = \sum_{\substack{\text{όλα τα δυνατά ζευγάρια} \\ \text{των δεικτών } k_1, \dots, k_l}} K_{k_{p_1} k_{p_2}}^{-1} \cdots K_{k_{p_{l-1}} k_{p_l}}^{-1} \quad (\Gamma.9)$$

με συνολικά

$$(l-1)!! \equiv (l-1)(l-3)(l-5) \cdots 1 \quad (\Gamma.10)$$

δυνατά ζευγαρώματα. Το θεώρημα του Wick επισημαίνει ότι ο δείκτης  $l$  πρέπει να είναι ζυγός, αλλιώς η πιο πάνω μέση τιμή μηδενίζεται.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία, μπορούμε να καταλήξουμε στο θεώρημα του Wick με μιγαδικές μεταβλητές ολοκλήρωσης:

$$\langle \bar{z}_{i_1} z_{j_1} \cdots \bar{z}_{i_n} z_{j_n} \rangle = \sum_{\substack{\text{όλες οι μεταθέσεις} \\ P \text{ του } \{j_1, \dots, j_n\}}} K_{j_{P_1} i_1}^{-1} K_{j_{P_2} i_2}^{-1} \cdots K_{j_{P_n} i_n}^{-1} \quad (\Gamma.11)$$

Με συνολικά  $n!$  δυνατά ζευγαρώματα μεταξύ  $z$  και  $\bar{z}$ .

## Γ.2 Γκαουσιανό ολοκλήρωμα μεταβλητών Grassmann

Κατά αντιστοιχία με τα πιο πάνω, θα υπολογίσουμε τώρα το Γκαουσιανό ολοκλήρωμα μεταβλητών Grassmann:

$$I(K) = \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \exp \left( - \sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m \right) \quad (\Gamma.12)$$

Διαγωνοποιώντας τον πίνακα  $K$ :

$$\begin{aligned} I(K) &= \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \prod_{n=1}^N \exp \left( - \bar{\theta}_n K_{nn} \theta_n \right) = \prod_{i=1}^N \left[ \int d\bar{\theta}'_i d\theta'_i \exp \left( - \bar{\theta}'_i D_{ii} \theta'_i \right) \right] \\ &= \prod_{i=1}^N \left[ \frac{\partial}{\partial \theta'_i} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'_i} \exp \left( - \bar{\theta}'_i D_{ii} \theta'_i \right) \right] \end{aligned}$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε το εκθετικό ως:

$$\exp\left(-\bar{\theta}'_i D_{ii} \theta'_i\right) = 1 - \bar{\theta}'_i D_{ii} \theta'_i \quad (\Gamma.13)$$

εφόσον όροι που περιέχουν τετράγωνα των μεταβλητών Grassmann θα μηδενιστούν. Τότε,

$$I(K) = \prod_{i=1}^N D_{ii} = + \det K \quad (\Gamma.14)$$

Η γενικότερη μορφή του πιο πάνω ολοκληρώματος γράφεται ως:

$$I(K, J, \bar{J}) = \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \exp\left(-\sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m + \sum_{n=1}^N \bar{J}_n \theta_n + \bar{\theta}_n J_n\right) \quad (\Gamma.15)$$

Όπως και στην περίπτωση των πραγματικών και μιγαδικών μεταβλητών, έτσι και τώρα ελαχιστοποιώντας τον εκθέτη και κάνοντας τις αλλαγές μεταβλητών:

$$\theta_i \text{ (min)} = \sum_{j=1}^N (K^{-1})_{ij} J_j, \quad \bar{\theta}_i \text{ (min)} = \sum_{j=1}^N \bar{J}_j (K^{-1})_{ji}$$

και

$$\theta_i = \sum_{j=1}^N (K^{-1})_{ij} J_j + \theta'_i, \quad \bar{\theta}_i = \sum_{j=1}^N \bar{J}_j (K^{-1})_{ji} + \bar{\theta}'_i \quad (\Gamma.16)$$

το ολοκλήρωμα γράφεται με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} I(K, J, \bar{J}) &= \exp\left(\sum_{n,m=1}^N \bar{J}_n (K^{-1})_{nm} J_m\right) \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}'_i d\theta'_i \exp\left(-\sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}'_n K_{nm} \theta'_m\right) \\ &= \exp\left(\sum_{n,m=1}^N \bar{J}_n (K^{-1})_{nm} J_m\right) I(K) = (\det K) \exp\left(\sum_{n,m=1}^N \bar{J}_n (K^{-1})_{nm} J_m\right) \quad (\Gamma.17) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το αποτέλεσμα αυτό, θέλουμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή πολυωνύμου με γκαουσιανό βάρος:

$$\langle \theta_{k_1} \bar{\theta}_{q_1} \cdots \theta_{k_\ell} \bar{\theta}_{q_\ell} \rangle \equiv N \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i [\theta_{k_1} \bar{\theta}_{q_1} \cdots \theta_{k_\ell} \bar{\theta}_{q_\ell}] \exp\left(-\sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m\right) \quad (\Gamma.18)$$

όπου  $N = 1/I(K)$  είναι η σταθερά κανονικοποίησης. Μπορούμε να αναπαράξουμε την έκφραση αυτή παραγωγίζοντας την (Γ.15) ως προς τα  $J_i$  και  $\bar{J}_i$ , και έπειτα θέτοντας τα ίσα



με το μηδέν. Παραγωγίζουμε από δεξιά και αριστερά:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{J}_q} I(K, J, \bar{J}) = \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \theta_q \exp\left(-\sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m\right)$$

$$I(K, J, \bar{J}) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_k}} = \int \prod_{i=1}^N d\bar{\theta}_i d\theta_i \bar{\theta}_k \exp\left(-\sum_{n,m=1}^N \bar{\theta}_n K_{nm} \theta_m\right)$$

και επαναλαμβάνοντας ως προς όλες τις τιμές:

$$\begin{aligned} \langle \theta_{k_1} \theta_{k_2} \cdots \bar{\theta}_{q_1} \bar{\theta}_{q_2} \cdots \rangle &= N \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{J}_{q_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{J}_{q_\ell}} I(K, J, \bar{J}) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_{k_1}}} \cdots \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_{k_\ell}}} \right]_{J=\bar{J}=0} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{J}_{q_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{J}_{q_\ell}} \left[ \exp\left(\sum_{n,m=1}^N \bar{J}_n (K^{-1})_{nm} J_m\right) \right] \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_{k_1}}} \cdots \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial J_{k_\ell}}} \right\}_{J=\bar{J}=0} \end{aligned} \quad (\Gamma.19)$$

Καταλήγουμε έτσι στο θεώρημα του Wick για τον υπολογισμό μέσης τιμής πολυωνύμου μεταβλητών Grassmann με Γκαουσιανό βάρος:

$$\langle \theta_{k_1} \bar{\theta}_{q_1} \cdots \theta_{k_\ell} \bar{\theta}_{q_\ell} \rangle = \sum_{\substack{\text{όλες οι μεταθέσεις των δεικτών} \\ k_1, \dots, k_\ell \text{ που γίνονται} \\ \text{ζεύγη με τους } q_1, \dots, q_\ell}} \epsilon_{k_{p_1} \cdots k_{p_\ell}} K_{k_{p_1} q_1}^{-1} \cdots K_{k_{p_\ell} q_\ell}^{-1} \quad (\Gamma.20)$$

όπου:

$$\epsilon_{k_{p_1} \cdots k_{p_\ell}} = \begin{cases} +1, & \text{αν ο αριθμός των εναλλαγών των δεικτών είναι άρτιος} \\ -1, & \text{αν ο αριθμός των εναλλαγών των δεικτών είναι περιττός} \end{cases}$$

Με συνολικά  $n!$  ζευγαρώματα μεταξύ  $\theta$  και  $\bar{\theta}$ .

# Βιβλιογραφία

- [1] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*. International series in pure and applied physics, McGraw - Hill Book Company, 1964.
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press Reading (Mass.), 1995.
- [3] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theories. An Introduction*. World Scientific Lecture Notes in Physics, World Scientific, 3rd ed., 2005.
- [4] M. Kaku, *Quantum Field Theory. A Modern Introduction*. Oxford University Press, 1993.
- [5] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Clarendon Press, 3rd ed., 1996.
- [6] J. C. Collins, *Renormalization*. Cambridge University Press, 1984.
- [7] C. Alexandrou, H. Panagopoulos, and E. Vicari, "Λ-parameter of lattice QCD with the overlap-Dirac operator," *Nucl. Phys. B*571 (2000) 257.
- [8] M. Constantinou and H. Panagopoulos, "QCD with overlap fermions: Running coupling and the 3-loop β-function," *Phys. Rev. D*76 (2007) 114504.
- [9] M. Lüscher, "Chiral gauge theories revisited," *Theory and Experiment Heading for New Physics* (2002) (*arXiv:hep-th/0102028v2*).
- [10] M. Lüscher, "Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg-Wilson relation," *Phys. Let. B*428 (1998) 342.
- [11] H. Kawai, R. Nakayama and K. Seo, "Comparison of the Lattice Λ parameter with the continuum Λ parameter in massless QCD," *Nucl. Phys. B*189 (1981) 40.
- [12] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, "DIAGRAMMAR," *NATO Sci. Ser. B*4 (1974) 177.

- [13] M. Lüscher and P. Weisz, "Computation of the relation between the bare lattice coupling and the coupling in SU(N) gauge theories to two loops," *Nucl. Phys. B* **452** (1995) 234.
- [14] M. Constantinou and H. Panagopoulos, "Perturbative renormalization of quark parton distribution functions," *Phys. Rev. D* **96** (2017) 054506.
- [15] C. Alexandrou, K. Cichy, M. Constantinou, J. R. Green, K. Hadjiyiannakou, K. Jansen, F. Manigrasso, A. Scapellato, and F. Steens, "Lattice continuum-limit study of nucleon parton quasidistribution functions," *Phys. Rev. D* **103** (2021) 094512.
- [16] J. R. Green, K. Jansen, and F. Steens, "Improvement, generalization, and scheme conversion of Wilson-line operators on the lattice in the auxiliary field approach," *Phys. Rev. D* **101** (2020) 074509.
- [17] W. Wang, J.-H. Zhang, S. Zhao, and R. Zhu, "Complete matching for quasidistribution functions in large momentum effective theory," *Phys. Rev. D* **100** (2019) 074509.
- [18] A. Scapellato, *Direct Evaluation of Parton Distribution Functions of the Nucleon from Lattice QCD*. PhD thesis, Wuppertal University, University of Cyprus, 2019.
- [19] X. Ji, "Parton Physics on a Euclidean Lattice," *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 262002.
- [20] J.-W. Chen, T. Ishikawa, L. Jin, H.-W. Lin, J.-H. Zhang, and Y. Zhao, "Symmetry Properties of Nonlocal Quark Bilinear Operators on a Lattice," *Chinese Physics C* (2019) (arXiv:1710.01089v3).
- [21] B. Berg and A. Billoire, "Glueball spectroscopy in 4d SU(3) lattice gauge theory (I)," *Nucl. Phys. B* **221** (1983) 109.